



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

**TRAJETÓRIAS DE BAIXA ENERGIA GERADAS NO SISTEMA TERRA-LUA
DIRECIONADAS AO SISTEMA JOVIANO**

Victor Ayres Peres

Relatório de Iniciação Científica do
programa PIBIC, orientado pelo Dr.
Antônio Fernando Bertachini de
Almeida Prado e pelo Dr. Antônio
Gil Vicente de Brum.

INPE

São Jose dos Campos

2024

**TRAJETÓRIAS DE BAIXA ENERGIA GERADAS NO SISTEMA TERRA-LUA
DIRECIONADAS AO SISTEMA JOVIANO**

Victor Ayres Peres

Relatório de Iniciação Científica do
programa PIBIC, orientado pelo Dr.
Antônio Fernando Bertachini de
Almeida Prado e pelo Dr. Antônio
Gil Vicente de Brum.

INPE

São Jose dos Campos

2024

RESUMO

Projetos espaciais envolvendo missões para Júpiter e seus satélites são de grande interesse para a comunidade científica em geral. Uma parcela considerável do orçamento dedicado a estas missões é destinada ao deslocamento da espaçonave pelo Sistema Solar. Métodos de transferência convencionais entre os sistemas terrestre e joviano envolvem grandes veículos lançadores e queimas propulsivas altamente energéticas, e são calculadas em soluções consecutivas (*Patched-Conics*) de sistemas de dois corpos – onde dois corpos massivos atraem-se mutualmente pela gravitação. Ao considerar, no entanto, regimes mais complexos como, por exemplo, a presença de três ou mais corpos, uma ampla gama de dinâmicas revela-se para a determinação de trajetórias interplanetárias muito mais econômicas. Uma usualmente tratada é dada pelo Problema Restrito e Circular dos Três Corpos, que leva em conta as interações gravitacionais dos corpos primários sobre a espaçonave, descritas pelos canais dinâmicos conhecidos como variedades invariantes. Esses canais são frutos da instabilidade destes sistemas, e fluem a partir de órbitas periódicas em volta dos pontos lagrangianos – soluções espaciais características das equações diferenciais. Uma fundamentação teórica acerca dos principais tópicos de dinâmica orbital foi realizada, que explora desde as leis de Kepler e a solução newtoniana do Problema de Dois Corpos até a dinâmica de três corpos aplicada por todo o Sistema Solar, possibilitando, assim, a utilização destes conceitos em simulações numéricas, que foram capazes de inferir não apenas a vantagem energética das trajetórias de baixa energia baseadas nas variedades invariantes, assistências e ressonâncias gravitacionais, como também a desvantagem temporal destas em relação aos métodos convencionais. Todavia, este tempo de deslocamento também pode ser substancialmente reduzido com pontuais aumentos nos gastos propulsivos, o que confere uma flexibilidade da aplicação deste conceito de acordo com o tipo de missão cogitado, englobando desde pequenos satélites com propulsão alternativa até espaçonaves robustas.

Palavras-chave: Trajetórias de baixa energia. Problema Restrito Circular dos Três Corpos. Pontos lagrangianos. Variedades invariantes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Sistemas de coordenadas inercial Oxyz.....	13
Figura 1.2 – Elementos keplerianos no sistema geocêntrico equatorial.....	18
Figura 2.1 – Sistemas de coordenadas inercial e rotacional	26
Figura 2.2 – Casos de energia do terceiro corpo.	32
Figura 2.3 – Projeção da função energia potencial efetiva para um sistema de três corpos	33
Figura 2.4 – Pontos equiláteros L4 e L5 no sistema rotacional.....	35
Figura 2.5 - Os cinco pontos lagrangianos do sistema Sol-Terra-Telescópio Espacial James Webb.....	36
Figura 2.6 – Trajetória de referência xt e seu deslocamento yt	38
Figura 2.7 – Projeções de Sela e Centro	42
Figura 2.8 – Tipos de trajetórias próximas ao ponto colinear de Lagrange	45
Figura 2.9 - Trajetória do terceiro corpo próxima ao ponto equilátero	48
Figura 2.10 - Órbita do tipo "girino"	49
Figura 2.11 - Órbitas do tipo ferradura.....	49
Figura 2.12 - Sistema Sol-Júpiter-partícula e suas regiões (ou reinos)	50
Figura 2.13 - Variedades invariantes dos pontos L1 e L2 do sistema Sol-Júpiter-partícula	51
Figura 2.14 - Intersecções das seções de Poincaré do sistema Sol-Júpiter-partícula	52
Figura 3.1 – Órbita halo utilizada na missão ISEE-3	59
Figura 3.2 - Conexão entre uma órbita terrestre e uma órbita halo para a missão Genesis	61
Figura 4.1 - Trajetórias desenvolvidas para a sonda Voyager 2 pelo Sistema Solar exterior	67
Figura 4.2 – Seção de Poincaré do sistema Sol-Terra com intersecções do sistema Terra- Lua	69
Figura 4.3 – Intersecção entre as variedades dos sistemas Sol-Terra e Terra-Lua conforme a fase lunar.....	69

Figura 4.4 - "Torção" de órbitas relacionada com a condição inicial próxima às variedades	70
Figura 4.5 – Trajetória de transferência final entre uma órbita terrestre e lunar integrada pelo método da Aproximação Remendada dos Três Corpos, nos sistemas inercial e rotacional	71
Figura 4.6 – Sistema contemplado pelo modelo Bicircular de Quatro Corpos	72
Figura 4.7 – Sistema contemplado pelo modelo Circular Concêntrico de Quatro Corpos	73
Figura 4.8 – Exemplo de trajetória final para o sistema Júpiter-Ganimedes-Europa-espaçonave.....	76
Figura 4.9 – Variação da energia de uma órbita por meio de ressonâncias orbitais no sistema joviano	77
Figura 4.10 - Transferência entre satélites galileanos assistidas por ressonâncias gravitacionais.....	78
Figura 4.11 – Relação entre ΔV_{total} e tempo de voo para o Petit Grand Tour	79
Figura 5.1 – Trajetória da sonda Juno do lançamento da Terra até a inserção orbital em Júpiter	85
Figura 5.2 - Trajetória interplanetária planejada para a sonda Europa Clipper no referencial heliocêntrico	87
Figura 5.3 - Superfícies de velocidade zero para a energia específica ($E=1,55$) para o Sistema Terra-Lua	90
Figura 5.4 – Projeções da órbita halo em volta do ponto L1 Terra-Lua.....	92
Figura 5.5 – Projeção tridimensional da órbita halo em volta do ponto L1 Terra-Lua..	93
Figura 5.6 – Projeções da órbita halo em volta do ponto L2 Terra-Lua.....	94
Figura 5.7 – Projeção tridimensional da órbita halo em volta do ponto L2 Terra-Lua..	95
Figura 5.8 – Variedades invariantes associadas à órbita halo do ponto L1 Terra-Lua...	96
Figura 5.9 – Variedades invariantes associadas à órbita halo do ponto L2 Terra-Lua...	97
Figura 5.10 – Variedade instável e estável dos respectivos pontos L1 e L2 Terra-Lua.	98
Figura 5.11 – Seção de Poincaré U2 para o sistema Terra-Lua, em função de y e y	99
Figura 5.12 - Trajetória do terceiro corpo no sistema Terra-Lua, com origem em uma órbita terrestre e destinada ao sistema exterior, visualizada no referencial rotacional.	101

Figura 5.13 – Trajetória do terceiro corpo no sistema Terra-Lua, com origem em uma órbita terrestre e destinada ao sistema exterior, visualizada no referencial inercial.....	102
Figura 5.14 - Variedades invariantes dos sistemas Sol-Terra (ponto L2) e Terra-Lua	103
Figura 5.15 – Trajetória da espaçonave no sistema Terra-Lua.....	104

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
Capítulo 1 – LEIS DE KEPLER, FORÇA CENTRAL E PROBLEMA DE DOIS CORPOS	5
1.1 – Introdução	5
1.2 – Leis de Kepler	7
1.3 – Leis de Newton	7
1.4 – Força central	8
1.4.1 – Equação de Binet	10
1.4.2 – Demonstrações matemáticas das leis empíricas de Kepler	10
1.5 – Problema de Dois Corpos	12
1.5.1 – Constantes de movimento para o Problema de Dois Corpos.....	14
1.5.2 – Equação de órbita	15
1.5.3 – A energia de uma órbita.....	16
1.6 – Elementos Orbitais.....	17
1.6.1 – Elementos keplerianos.....	17
1.6.2 – Elementos alternativos.....	20
1.7 – Conclusões do capítulo	21
Capítulo 2 – O PROBLEMA RESTRITO PLANAR E CIRCULAR DE TRÊS CORPOS	23
2.1 – Introdução	23
2.2 – Equações de movimento do PRPC3C.....	24
2.2.1 – Formalismo lagrangiano e a energia potencial efetiva	28
2.2.2 – Formalismo hamiltoniano e as curvas de velocidade zero	30
2.3 – Pontos de equilíbrio	33

2.3.1 – Movimento próximo aos pontos colineares.....	37
2.3.2 – Movimento próximo aos pontos equiláteros	47
2.4 – Conclusões do capítulo	53
Capítulo 3 – PROBLEMA ESPACIAL DE TRÊS CORPOS	55
3.1 – Introdução	55
3.2 – Equações de movimento para o PRC3C	55
3.3 – Expansão dos termos não-lineares e soluções periódicas (órbitas halo).....	57
3.3.1 – Expansão de Richardson em terceira ordem.....	60
3.4 – Conclusões do capítulo	62
Capítulo 4 – APROXIMAÇÕES DE TRÊS CORPOS (PATCHED THREE-BODY), PROBLEMA DE 4 CORPOS E MISSÕES MULTILUNARES NO SISTEMA JOVIANO.....	64
4.1 – Introdução	64
4.2 – Aproximação Remendada de Três Corpos	65
4.3 – O Problema de Quatro Corpos e suas simplificações	71
4.4 – Missões multilunares no sistema joviano	74
4.5 – Conclusões do capítulo	79
Capítulo 5 – RESULTADOS	81
5.1 – Introdução	81
5.2 – Missões convencionais para o sistema joviano.....	83
5.3 – Simulação de trajetórias de baixa energia originadas no sistema Sol-Terra-Lua	88
5.4 – Conclusões do capítulo	106
CONCLUSÃO.....	108
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	111

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES DE EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS PARA A PESQUISA	113
--	------------

INTRODUÇÃO

A física, campo do conhecimento humano voltado ao estudo pormenorizado dos fenômenos naturais e as suas causas, foi amplamente desenvolvida durante o período referenciado historicamente como Iluminismo, durante o século XVIII. Um de seus expoentes, Isaac Newton, foi um dos grandes responsáveis por avançar no entendimento acerca do movimento. Desde a antiguidade, tentava-se compreender o porquê das coisas moverem-se, tanto na Terra quanto nos céus. Newton, em sua coletânea de livros intitulada “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural” – ou *Principia* – instituiu conceitos como o de força e quantidade de movimento, além de apresentar os seus desenvolvimentos no cálculo diferencial e integral. Sua Lei da Gravitação Universal, ainda válida em análises de sistemas físicos, determinou que a descrição matemática que era feita sobre o movimento de objetos na Terra também se aplicava aos corpos celestiais.

Seus avanços destituíram antigos conceitos aristotélicos e medievais acerca da dinâmica, e forneceu a humanidade a capacidade de prever o movimento de planetas, luas e cometas com precisão jamais vista. Do mesmo modo, situou a posição da Terra no espaço ao verificar que a hipótese heliocêntrica era factual. A gravitação newtoniana permitiu, séculos depois, a determinação de órbitas e trajetórias de veículos espaciais, tópicos presentes sob a égide do Problema de Dois Corpos – que envolve a determinação do movimento (posição e velocidade) de dois objetos massivos sob atração gravitacional mútua, dadas as condições iniciais. As equações de movimento deste sistema foram resolvidas pelo próprio Newton, que demonstrou matematicamente que suas soluções compunham as leis empíricas do movimento planetário de Johannes Kepler.

As trajetórias elípticas, parabólicas e hiperbólicas foram estendidas para além do movimento dos corpos celestes: a partir das soluções do Problema de Dois Corpos para diversos sistemas, era possível uni-las em uma única trajetória, manipulação conhecida como método de *Patched-Conics* (ou “cônicas remendadas”). Logo, as missões interplanetárias tornavam-se uma realidade; bastava analisar a trajetória de forma segmentada, considerando, individualmente, a esfera de influência dos corpos.

No entanto, trajetórias baseadas no Problema de Dois Corpos e no método de *Patched-Conics* operam sob um regime altamente energético. Porém, quando são considerados encontros com baixa velocidade relativa, estas metodologias falham em descrever a real dinâmica. Neste caso, outros corpos massivos começam a exercer uma influência gravitacional de magnitude comparável ao corpo principal cogitado. Todavia, a solução desta questão deriva-se de um sistema que o próprio Newton não conseguiu progredir: o Problema de Três Corpos, sucessor natural na análise de sistemas dinâmicos espaciais após o sistema de dois corpos.

Nesta situação, são considerados três corpos massivos em mútua atração gravitacional. Porém, este sistema não possui uma solução analítica como o Problema de Dois Corpos, pois as mesmas manipulações matemáticas que viabilizaram uma solução não se aplicam igualmente aos dois sistemas. Não obstante, cientistas ao longo da história, como Joseph-Louis Lagrange e Leonhard Euler, progrediram em sua tratativa ao considerar algumas simplificações, o que o tornou referenciado como Problema Restrito e Circular dos Três Corpos. Neste caso, são considerados dois corpos massivos e um corpo de massa negligenciável, na qual as primárias movem-se em órbitas circulares em torno de seu baricentro.

Essa nova ótica permitiu a derivação de alguns casos e soluções especiais, além da inferência acerca da existência de cinco pontos críticos nestes sistemas – denominados Pontos de Lagrange. Estes pontos estão localizados em regiões de um sutil equilíbrio gravitacional entre as primárias, o que os permite abrigar órbitas. Estas órbitas, descritas pelo terceiro corpo, podem ser ou não periódicas. Além disso, alguns destes pontos são dinamicamente instáveis, o que acarreta a geração de trajetórias associadas às órbitas, conhecidas como variedades invariantes, que delimitam regiões de trânsito entre elas.

Como o regime de três corpos é naturalmente de menor energia, a possibilidade da descrição de órbitas periódicas e da transferência entre regiões no espaço sem custo energético torna o Problema Restrito e Circular de Três Corpos altamente atrativo para a astronáutica. Além do mais, essas variedades invariantes não se limitam a apenas um sistema de três corpos, elas estendem-se por todo o Sistema Solar, cruzando-se com outros canais dinâmicos dos diversos sistemas existentes. É possível, portanto, realizar uma análise semelhante à proposta pelo método de *Patched-Conics*, conhecida como

Aproximação Remendada dos Três Corpos: uma trajetória interplanetária pode ser segmentada em diversas trajetórias sujeitas a diferentes sistemas, unidas pelas intersecções entre trajetórias de baixa energia. Deste modo, confere-se a possibilidade de realização de missões interplanetárias com baixo custo energético, como uma missão à Júpiter e suas luas.

Júpiter é atualmente conhecido por ser o maior planeta do Sistema Solar, e é alvo constante de estudos voltados à compreensão de sua rica e turbulenta atmosférica e sua intensa magnetosfera. Todavia, o planeta foi foco de especulações humanas desde a antiguidade, quando se postulava que, juntamente ao Sol, Lua e outros planetas, exercia influências no destino das pessoas e tentava-se compreender o movimento de um dos objetos mais luminosos do céu noturno. Foi Galileu Galilei que, no entanto, desmistificou o planeta ao estudá-lo por meio de sua luneta e descobrir que era acompanhado por quatro grandes satélites, diferentes de tudo que se conhecia até então.

E são parte destas luas que alimentam o constante interesse pelo sistema joviano na atualidade. Devido as suas ricas composições química e a presença de compostos orgânicos, tectonismos e grandes fontes de calor, além da provável existência de oceanos de água líquida em algumas delas, estes satélites possuem os ingredientes necessários ao desenvolvimento da vida (como se é conhecida na Terra).

Dentre as missões interplanetárias desenvolvidas até então, muitas delas tiveram como objetivo o reconhecimento e a exploração do sistema joviano, seja por voos próximos (*flybys*) ou pelo estabelecimento de órbitas em volta dos seus planetas e suas luas. Missões como Pioneer 10 e 11, Voyager 1 e 2, Galileo, Juno e Europa Clipper possuíram/possuem como uma de suas metas estudar o gigante gasoso e seus satélites. Porém, adotam trajetórias dispendiosas para o deslocamento interplanetário, baseadas principalmente no método de *Patched-Conics*.

Dada a grande quantidade de missões para o sistema joviano e o constante interesse da comunidade científica acerca do planeta e das suas luas, propôs-se a realização de um projeto que investigasse a viabilidade das trajetórias de baixa energia no deslocamento interplanetário de um veículo espacial com destino a Júpiter, que partisse do sistema Terra-Lua. Para isso, foi preciso estabelecer fundamentações teóricas

acerca das mecânicas newtoniana, lagrangiana e hamiltoniana, a fim de dominar os formalismos matemáticos necessários a compreensão do Problema Restrito e Circular de Três Corpos e suas variações. Além disso, o estudo pormenorizado deste problema, em sua versão planar e espacial, permitiu a determinação das órbitas periódicas e suas trajetórias de baixa energia a elas associadas, e em como aplicá-las em simulações computacionais, para obtenção de dados acerca dos gastos energéticos e do tempo de uma missão que adotasse esta metodologia em sua dinâmica. Os dados das simulações realizadas, que permanecerão sendo o foco da renovação do projeto de pesquisa, permitiram a comparação com as informações coletadas de missões que adotam trajetórias convencionais ao sistema joviano.

Os resultados preliminares obtidos para o sistema Terra-Lua, na qual derivaram-se órbitas periódicas e das variedades invariantes associadas, permitiram a inferência de que as dinâmicas sujeitas ao Problema Restrito e Circular dos Três Corpos são mais econômicas do que as trajetórias próximas à vizinhança terrestre de missões convencionais já realizadas para o sistema joviano. No entanto, mostrou-se evidente que o período empregado no deslocamento de baixa energia é superior às trajetórias de alta energia. O progresso das simulações computacionais nos sistemas Sol-Terra-Lua e joviano, bem como na conexão de ambos, proverá mais dados acerca das vantagens do uso de trajetórias sujeitas ao regime de três corpos em missões interplanetárias.

Capítulo 1 – LEIS DE KEPLER, FORÇA CENTRAL E PROBLEMA DE DOIS CORPOS

1.1 – Introdução

O mistério do que constitui o movimento acompanha a humanidade desde a Antiguidade. A física de Aristóteles ditava que os objetos seguiam os seus lugares naturais, dependendo da composição de seus elementos (fogo, água, ar, terra). Ela diferenciava o universo infinito da Terra, que era seu centro, e propunha que os planetas, o Sol e a Lua moviam-se em movimento circular perfeito em volta da dela. Ademais, Aristóteles estabeleceu preceitos sobre o movimento retilíneo, a relação da densidade e a velocidade e a impossibilidade de existência do vácuo. A física aristotélica era refutável experimentalmente, mas perdurou por diversos séculos até o Renascimento Cultural, datado do século XVI.

“Avanços” na física aristotélica correspondente ao movimento dos astros foram feitos por Cláudio Ptolomeu, que desenvolveu um modelo geocêntrico – preenchido por epíclis, equantes e excêntricos. Apesar de incorreto, o sistema ptolomaico era capaz de realizar previsões astronômicas com certa precisão, e acabou sendo adotado como modelo oficial pela Igreja Católica – já que não contradizia as escrituras sagradas da instituição.

Alguns expoentes da Idade das Trevas, como Guilherme de Ockham, Ibn Al-Haytham e Jean Buridan esboçaram progressos na compreensão da realidade – sendo este último o responsável pelo desenvolvimento do conceito de “ímpeto”, semelhante ao momento ou quantidade de movimento da física contemporânea – contrariando os preceitos físicos aristotélicos e o sistema astronômico vigente. No entanto, suas ideias não foram amplamente divulgadas ao longo da história da ciência, suprimidas em sua maioria pelas religiões vigentes na época.

Foi com o desenvolvimento do heliocentrismo de Nicolau Copérnico que as sustentações da física de Aristóteles começaram a ruir. Baseado nas ideias de Aristarco de Samos, Copérnico concebeu um modelo de cosmo heliocêntrico, com muito menos epíclis e com a mesma precisão do modelo ptolomaico, porém mais simples. Johannes

Kepler, buscando entender a “harmonia dos mundos”, abandonou dogmas para ajustar seu modelo aos dados experimentais de Tycho Brahe, um dos maiores astrônomos observacionais da história. Kepler, então, elaborou suas três leis do movimento celeste, que revelavam as trajetórias de planetas em volta do Sol como elipses, uma das seções cônicas. Além disso, estabeleceu relações entre período orbital e a distância do Sol em sua terceira lei, culminando no encontro de sua desejada harmonia.

As descobertas de Galileu Galilei das fases de Vênus, da existência de montanhas e crateras na Lua, das luas de Júpiter e das manchas solares forneceram mais provas para o estabelecimento do modelo heliocêntrico como correspondente à realidade, e seu embate com a Inquisição Católica estabeleceu divisões entre a religião e a ciência. Os estudos de Galileu sobre a cinemática e o princípio da relatividade foram fundamentais para a nova teoria do movimento, que necessitava de um agente último para sua concepção: Isaac Newton.

Newton uniu o céu e a Terra ao propor que o movimento que ocorre no solo pode ser descrito matematicamente da mesma forma que os movimentos celestes. Ele estabeleceu a Teoria da Gravitação Universal, amplamente adotada até os dias atuais, que propõe que a mesma força atrativa que age sobre os corpos na Terra é a que mantém os planetas em movimento ao redor do Sol e seus respectivos satélites em volta deles. Suas três leis estabeleceram a fundação da dinâmica física como conhecida atualmente, e seu formalismo matemático criou ferramentas de cálculo extremamente poderosas que revolucionaram a compreensão do cosmos.

Esta breve revisão histórica acerca do cerne do movimento evidencia que a construção deste conhecimento não foi simples e nem rápida. No entanto, é clara a importância das leis da dinâmica para a navegação espacial. Este capítulo detalhará as Leis de Kepler, o conceito de Força Central e as demonstrações matemáticas dessas leis por Newton e pelo seu formalismo, que possibilitou a resolução do famigerado Problema de Dois Corpos. Estes tópicos antecedem a abordagem do Problema de Três Corpos, e fornecem instrumentos poderosos na descrição de movimentos de elementos espaciais tratados pela astronáutica, como manobras espaciais de alta energia, tratadas em capítulos posteriores. Este capítulo foi escrito com base em informações extraídas de Curtis (2014) e Conway e Prussing (2013).

1.2 – Leis de Kepler

Johannes Kepler estabeleceu suas três leis do movimento planetário com base nos dados observacionais de Tycho Brahe, que eram os mais precisos de sua época. As leis, expostas inicialmente em seu livro *Astronomia nova*, são tais:

- 1ª Lei de Kepler – As órbitas dos planetas são elipses, com o Sol em um dos focos.
- 2ª Lei de Kepler – O vetor raio de cada planeta, em relação ao Sol como origem, varre áreas iguais em tempos iguais. Ou seja:

$$\dot{A} = cte \quad (1.1)$$

onde $\dot{A}$ é a velocidade areolar.

- 3ª Lei de Kepler – A relação dos quadrados dos períodos de translação dos planetas é proporcional à relação do cubo dos semieixos maiores de suas órbitas:

$$\frac{T^2}{a^3} = cte \quad (1.2)$$

Isaac Newton, partindo de suas leis da dinâmica e da Gravitação Universal, a pedido de Edmond Halley, demonstrou matematicamente as leis de Kepler, culminando em associações de grandezas físicas a entidades matemáticas.

1.3 – Leis de Newton

Em seus volumes *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Newton propôs suas três leis da dinâmica, sendo elas:

- 1ª Lei de Newton (princípio da inércia) – Todo corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, a menos que seja obrigado a modificar seu estado de movimento pela ação de forças externas.
- 2ª Lei de Newton (princípio fundamental da dinâmica) - A modificação do momento de um corpo é proporcional à força atuante, ou seja, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{\ddot{r}}$.
- 3ª Lei de Newton (ação e reação) – A toda ação corresponde uma reação igual e oposta: $\vec{F}_a = -\vec{F}_b$

Também foi exposta a sua lei da Gravitação Universal, na qual:

- Dadas duas partículas A e B, de respectivas massas m_1 e m_2 , existe uma atração mútua com força diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa:

$$\vec{F} = \frac{-Gm_1m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.3)$$

onde G é a constante gravitacional universal e $\vec{r}$ é a distância que separa os corpos.

Essa lei é válida para partículas pontuais ou para corpos rígidos de simetria esférica, com toda sua massa concentrada em seu centro.

1.4 – Força central

O conceito de força central estrutura a resolução do Problema de Dois Corpos, pois como apontado por Newton, o Sol exerce uma força central sobre os corpos do Sistema Solar. Deste modo, algumas constantes – ou integrais – do movimento prevalecem sobre o sistema, que tornam a solução deste problema analítica e fechada.

Uma força $\vec{F}$ é central quando, em qualquer instante, tem sua linha de atuação passando através de um ponto fixo, o centro da força, e é representada por:

$$\vec{F} = F(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.4)$$

Os vetores força e posição são paralelos em uma força central, logo $\vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = 0$. Ao analisar a derivada do momento angular de uma partícula sobre ação de uma força central, tem-se:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} \quad (1.5)$$

O produto vetorial de vetores iguais é nulo, e usando a relação apontada anteriormente, tem-se:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{0} \quad (1.6)$$

ou seja, $\vec{H} = cte$. Se a constante for diferente de zero, o movimento é restrito ao plano definido por $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$. Logo, todo movimento sob ação de força central é plano, e o momento angular da partícula é constante em magnitude e direção.

Outra integral de movimento relacionada à força central diz respeito à energia. Se um sistema é conservativo, então sua energia é conservada. Da definição de trabalho, tem-se:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) \quad (1.7)$$

onde a função U é a energia potencial associada à força conservativa. Considerando um referencial $\vec{r}_1 \rightarrow \infty$, e utilizando a notação da força fornecida pela gravitação universal, tem-se:

$$\int_{\infty}^r \frac{-Gm_1m_2}{r^2} \hat{r} d\vec{r} = -\frac{Gm_1m_2}{r} = U(r) \quad (1.8)$$

Deste modo, o potencial depende da posição e a força deriva deste potencial:

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) \quad (1.9)$$

Logo, dado que o campo é conservativo, a energia mecânica do sistema é conservada:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) = cte \quad (1.10)$$

As coordenadas podem ser expressas pelo formato polar, relacionando o ângulo de rotação do corpo em relação ao periastro (θ) – demonstrado posteriormente – e a distância do centro (r). A transformação em coordenadas polares resulta em uma velocidade dependente de duas componentes, radial e transversal:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\perp \quad (1.11)$$

e em uma aceleração dependente apenas da direção radial:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r = \frac{\vec{F}(r)}{m} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.12)$$

O momento angular específico também pode ser expresso em termos das coordenadas polares. Dadas as direções unitárias $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, temos:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = [x\dot{y} - \dot{x}y]\hat{k} = r^2\dot{\theta} \quad (1.13)$$

Sabe-se que a velocidade areolar é a taxa na qual uma determinada área é varrida durante a trajetória do vetor raio. Dada uma porção da área dA , tem-se um ângulo correspondente $d\theta$. A área inteira de um círculo é dada por πr^2 , logo:

$$2\pi dA = \pi r^2 d\theta \rightarrow dA = \frac{r^2 d\theta}{2} \quad (1.14)$$

A derivada em relação ao tempo resulta em:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} \rightarrow 2\dot{A} = r^2\dot{\theta} = h \quad (1.15)$$

Dessa expressão, conclui-se que a velocidade areolar é constante para um movimento não-retilíneo regido por uma força central.

1.4.1 – Equação de Binet

A equação de Binet fornece a trajetória de um corpo em um campo de força central, e pode ser uma maneira de demonstrar matematicamente a primeira Lei de Kepler:

$$\frac{H^2 u^2}{m^2} \left[u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right] = -\frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} \quad (1.16)$$

onde $u = \frac{1}{r}$ é uma variável utilizada para tornar o cálculo menos complexo.

1.4.2 – Demonstrações matemáticas das leis empíricas de Kepler

Considere um planeta com massa m , a uma distância r do Sol. O planeta movimenta-se em curvas de forma que a força sobre ele se dá por:

$$\vec{F}(\vec{r}) = m(\ddot{\vec{r}} - r\dot{\theta}^2)\frac{\vec{r}}{r} \quad (1.17)$$

A primeira Lei de Kepler propõe que o movimento planetário é em formato de elipse, cuja equação com distância r em relação a um dos focos é:

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (1.18)$$

onde P é o semilactus rectum, a é o semieixo maior e e é a excentricidade. Dada a equação da elipse e utilizando a equação de Binet, tem-se que a derivada segunda da Equação (1.18) em relação ao ângulo θ é:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{e \cos \theta}{a(1 - e^2)} \quad (1.19)$$

Dessa forma, pode-se reescrever (1.18) como:

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{a(1 - e^2)} \quad (1.20)$$

Logo, substituindo na Equação de Binet (1.16):

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{H^2}{mr^2} \left(\frac{1}{a(1 - e^2)} \right) \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.21)$$

A força é dirigida ao Sol, e é inversamente proporcional ao quadrado da distância. Logo, essa expressão resulta na Lei da Gravitação Universal:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\mu m \vec{r}}{r^2} \quad (1.22)$$

onde $\mu = \frac{H^2}{m^2 a(1 - e^2)}$.

Já a segunda lei de Kepler foi provada nos procedimentos que levaram à Equação (1.15). Porém, dada a forma elíptica da curva, a taxa de variação da velocidade areolar é dada por:

$$\dot{A} = \frac{\pi ab}{T} = cte \quad (1.23)$$

onde T é o período orbital, a e b são os semieixos maior e menor, respectivamente.

A terceira lei de Kepler é demonstrada matematicamente partindo da Equação (1.23). Da segunda lei, tem-se:

$$\dot{A}^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \quad (1.24)$$

Das relações da elipse, tem-se que $a^2 = b^2 + c^2$, onde c é a distância focal. Também é válida a relação $c = ae$. Dessas, extrai-se:

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (1.25)$$

Aplicando a Equação (1.25) em (1.24):

$$\dot{A}^2 = \frac{\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{T^2} \quad (1.26)$$

Sabe-se, porém, que:

$$\dot{A}^2 = \frac{H^2}{4m} \quad (1.27)$$

Logo:

$$\frac{H^2}{4m} = \frac{\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{T^2} \quad (1.28)$$

que, finalmente, resulta na terceira lei de Kepler:

$$\frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{T^2}{a^3} \quad (1.29)$$

onde $\mu = \frac{H^2}{m^2 a (1 - e^2)}$.

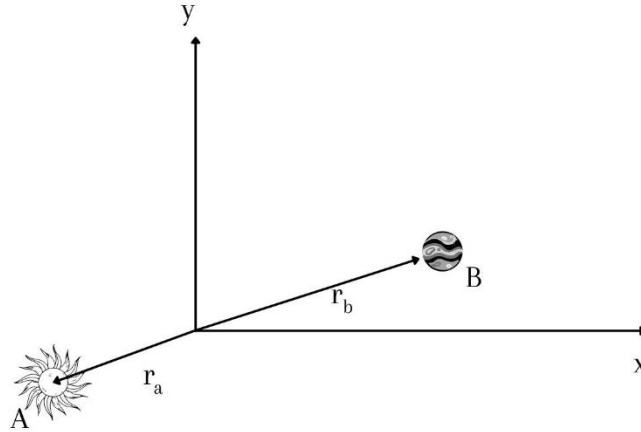
1.5 – Problema de Dois Corpos

O Problema de Dois Corpos é o único dos problemas de N corpos que possui solução analítica, encontrada justamente por Newton e exposta em seu *Principia*. A solução deste problema possibilita a determinação de trajetórias de diversos corpos do Sistema Solar, desde asteroides até planetas, torna possível a existência de diversas manobras espaciais – como a transferência de Hohmann e a manobra *Patched-Conics* – e pavimentou o caminho para o desenvolvimento da astronáutica. Apesar das restrições impostas para que se alcançasse a resolução deste problema – como não levar em conta perturbações gravitacionais de outros corpos – esta ferramenta ainda é pertinente na análise de missões espaciais atuais.

Este problema consiste na determinação do movimento de dois corpos massivos sob atração gravitacional mútua. Ou seja, a partir de suas equações de movimento, procura-se determinar a posição e a velocidade destes corpos em qualquer instante dadas as condições iniciais.

Considere os corpos A e B, de massa m_A e m_B , respectivamente, em um sistema inercial Oxyz. A distância de A até a origem do sistema de coordenadas é dada por $\vec{r}_A$, enquanto B dista $\vec{r}_B$, como ilustrado na Figura 1.1.

Figura 1.1 - Sistemas de coordenadas inercial Oxyz



Neste sistema, as massas A e B distam $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$ da origem, respectivamente.

Fonte: elaboração própria.

A posição de B com relação a A é dada por $\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$. Logo, a Lei da Gravitação Universal prevê que os corpos A e B atraem-se com as forças:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{AB} &= m_A \ddot{\vec{r}}_A = -\frac{Gm_A m_B}{r^2} \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{r} \\ \vec{F}_{BA} &= m_B \ddot{\vec{r}}_B = -\frac{Gm_A m_B}{r^2} \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{r}\end{aligned}\tag{1.30}$$

Para que o problema apresente uma solução analítica, reduz-se o sistema de dois corpos à determinação do movimento de B em relação a A, onde $m_A \gg m_B$. Ou seja, a massa de B é negligenciável em relação a A e, portanto, considera-se que apenas A exerce uma força gravitacional sobre B. Deste modo, as equações são reescritas na forma:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_A &= -\frac{Gm_B}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \\ \ddot{\vec{r}}_B &= -\frac{Gm_A}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}\end{aligned}\tag{1.31}$$

Como o sistema de coordenadas é inercial, $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_B - \ddot{\vec{r}}_A$ é uma relação válida. Desse modo:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_A + m_B)}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.32)$$

Mas, como $m_A \gg m_B$, $G(m_A + m_B) = Gm_A = \mu$. Portanto, a expressão final é dada por:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.33)$$

que é uma expressão característica de força central. Logo, toda a teoria elaborada tem validade para o Problema de Dois Corpos.

1.5.1 – Constantes de movimento para o Problema de Dois Corpos

Existem duas constantes no movimento orbital regido pelo Problema de Dois Corpos. Elas são denominadas integrais da área e da energia.

A trajetória da partícula sob a influência de um campo central ocasiona um movimento plano:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h} = cte \quad (1.34)$$

que equivale à

$$h = r^2 \dot{\theta} = 2\dot{A} = cte \quad (1.35)$$

Eis a integral das áreas. A integral de energia pode ser extraída da Equação (1.33). Começa-se realizando o produto escalar desta equação pelo vetor $\dot{\vec{r}}$:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (1.36)$$

No entanto:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{r}^2) \quad (1.37)$$

Para o lado direito da Equação (1.36) e lembrando que $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)$:

$$-\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} r \dot{r} = -\frac{\mu}{r^2} \dot{r} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (1.38)$$

Substituindo esses resultados em (1.36), tem-se:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{r}^2) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (1.39)$$

Logo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{r}^2) - \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \quad (1.40)$$

A integração em relação ao tempo fornece-nos a expressão para a integral de energia:

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = \varepsilon \quad (1.41)$$

onde v é a velocidade do segundo corpo e ε é a energia mecânica específica, uma constante.

1.5.2 – Equação de órbita

A resolução da equação de órbita encontra-se no Apêndice A. Temos, então, a seguinte resolução para o Problema de Dois Corpos:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos(\theta)} \quad (1.42)$$

que é a equação de órbita, igual à equação da elipse (Equação 1.18), que é uma seção cônica. Logo, além dos princípios estabelecidos por Kepler, como sua primeira lei, Newton descobriu que as trajetórias em um sistema de dois corpos descrito por uma força central são seções cônicas, podendo ser elipses, parábolas ou hipérboles.

Ao comparar as duas equações, percebe-se que o semilatus rectum P pode ser descrito em termos físicos:

$$P = \frac{h^2}{\mu} \quad (1.43)$$

Também é possível derivar uma expressão para a excentricidade:

$$e = \left(1 + 2\varepsilon \frac{h^2}{\mu^2} \right)^{1/2} \quad (1.44)$$

Logo, Newton conseguiu correlacionar grandezas matemáticas, como o semilactus-rectum e a excentricidade de uma cônica à aspectos físicos, como a energia e o momento angular.

1.5.3 – A energia de uma órbita

Pela Equação de órbita (1.42) e a Equação da excentricidade (1.44), nota-se que a variação da energia do segundo corpo culmina na variação do formato da cônica que descreve sua órbita. A energia ε define os três tipos de cônica:

- a) Se $\varepsilon < 0$, a excentricidade está definida em $0 < e < 1$, ou seja, a trajetória é uma *elipse*;
- b) Se $\varepsilon = 0$ – possível em um caso ideal apenas – a excentricidade está definida em $e = 1$, ou seja, a trajetória é uma *parábola*. A trajetória parabólica define uma energia limite que, caso atingida, resulta na expulsão do corpo do sistema;
- c) Se $\varepsilon > 0$, a excentricidade está definida em $e > 1$, ou seja, a trajetória é uma *hipérbole*. Trajetórias hiperbólicas estão livres da influência da massa central;

A energia para uma órbita elíptica pode ser deduzida a partir da Equação da excentricidade (1.44):

$$e^2 = 1 + \frac{2\varepsilon h^2}{\mu^2} = 1 + \frac{2\varepsilon P}{\mu} \quad (1.45)$$

Logo,

$$\varepsilon = \frac{\mu}{P} \frac{e^2 - 1}{2} = \frac{\mu(e^2 - 1)}{2a(1 - e^2)} \quad (1.46)$$

Portanto, a energia de uma órbita elíptica é:

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a} \quad (1.47)$$

Para uma órbita hiperbólica, o semilactus-rectum P é dado por $a(e^2 - 1)$. Desta forma, a energia de uma órbita hiperbólica é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2a} \quad (1.48)$$

obtida da mesma forma que a órbita elíptica. Observe que em uma órbita hiperbólica, o semieixo maior $a < 0$, o que torna a energia positiva.

1.6 – Elementos Orbitais

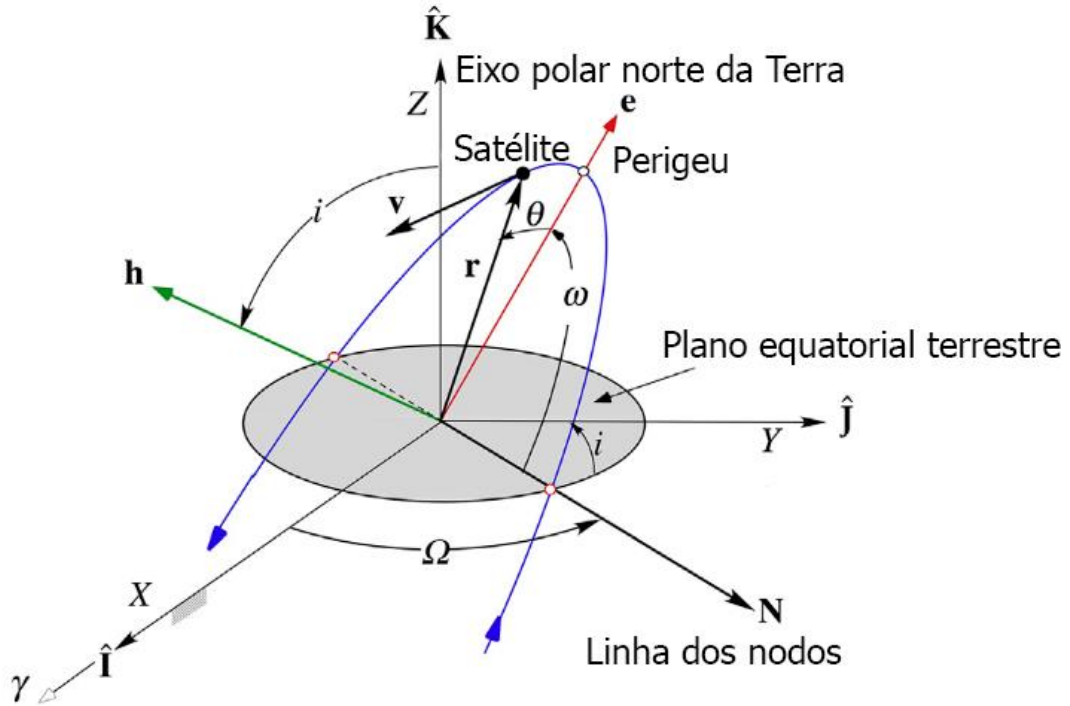
Para descrever completamente uma órbita, outro método aparenta ser mais vantajoso do que o uso de coordenadas cartesianas de posição e velocidade: os elementos keplerianos. Dado que o plano de uma órbita é fixo no espaço, pode-se definir um plano de referência. Para a descrição de órbitas de satélites em volta da Terra, tem-se normalmente a origem do sistema inercial no centro do planeta e estendendo-se a partir do equador terrestre, com o eixo Ox apontando para o ponto vernal de Áries γ e o eixo Oz apontando para o eixo de rotação da Terra, sendo este o sistema geocêntrico equatorial. Para trajetórias interplanetárias, no entanto, o plano da eclíptica é muito mais conveniente, já que o Sol é o astro central considerado neste caso. Como a linha de intersecção do plano equatorial da Terra e a eclíptica localiza o ponto vernal, ele também é utilizado como eixo de referência.

Para a definição dos elementos orbitais, será explorado o sistema orbital em volta da Terra, que também possui origem em seu centro, mas o eixo Ox aponta para a direção do vetor excentricidade – ou direção do perigeu da órbita - $\vec{e}$. Além disso, o eixo Oz aponta para a direção do vetor momento angular específico da órbita, $\vec{h}$.

1.6.1 – Elementos keplerianos

São adotados seis elementos que descrevem completamente o satélite em sua órbita, na qual três destes elementos definem o movimento planar do corpo: o semieixo maior (a), a excentricidade (e) e a anomalia verdadeira (θ). Definem-se também três ângulos de Euler, a fim de descrever o referencial girante em relação ao sistema inercial fixo. São eles: a longitude do Nodo Ascendente (Ω), o argumento do periastro (ω) e a inclinação da órbita (i). A Figura 1.2 ilustra o conjunto de elementos keplerianos:

Figura 1.2 – Elementos keplerianos no sistema geocêntrico equatorial



Fonte: adaptado de Curtis (2014).

Assumindo que são conhecidas as coordenadas de posição ($\vec{r}$) e velocidade ($\vec{v}$) do satélite, é possível determinar os elementos orbitais a partir das equações já expostas neste relatório. É claro que o processo inverso também é possível, porém não será detalhado nesta pesquisa.

- Semieixo maior (a)

O semieixo maior é possível de ser determinado a partir das Equações (1.41) e (1.47), que unidas descrevem a equação *Vis-Viva*:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (1.49)$$

Logo, pode-se determinar o semieixo:

$$a = \frac{r}{2 - \frac{rv^2}{\mu}} \quad (1.50)$$

- Excentricidade (e)

O vetor excentricidade foi determinado durante a solução da equação de órbita para o Problema de Dois Corpos. A Equação (A.10) pode ser rearranjada da seguinte forma

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu \frac{\vec{r}}{r} + \mu \vec{e} \quad (1.51)$$

Sabe-se que $\vec{e}$ é um vetor constante e aponta para o periastro da órbita, com origem no centro de atração. Desta equação é possível chegar à:

$$\mu \vec{e} = \vec{v} \times \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} = \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) - \mu \frac{\vec{r}}{r} = [(\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}] - \mu \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.52)$$

Que culmina na Equação (1.53), na qual é possível determinar o vetor excentricidade $\vec{e}$:

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu} \left[\left(v^2 - \frac{\mu}{r} \right) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v} \right] \quad (1.53)$$

- Anomalia verdadeira (θ)

A anomalia verdadeira é o ângulo entre o periastro da órbita e a posição do corpo. Portanto, leva em consideração os vetores posição ($\vec{r}$) e excentricidade ($\vec{e}$). Como são coplanares, o produto escalar entre estes vetores fornecerá o ângulo θ por meio da expressão:

$$\vec{r} \cdot \vec{e} = re \cos(\theta) \rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{e}}{re} \right) \quad (1.54)$$

Se o produto escalar $\vec{r} \cdot \vec{v} \geq 0$, então o ângulo encontra-se entre 0° e 180° ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$). Porém, se $\vec{r} \cdot \vec{v} < 0$, teremos $180^\circ < \theta < 360^\circ$.

- Longitude do Nodo Ascendente (Ω)

Será definido o vetor nodal $\vec{N}$ com origem no centro O e em direção à linha dos nodos, que é definida pela intersecção do plano orbital com o plano inercial de referência. Como $\vec{h}$ é perpendicular ao plano da órbita, também será perpendicular a $\vec{N}$. Logo:

$$\vec{N} = \hat{K} \times \vec{h} \quad (1.55)$$

onde $\hat{K}$ é o versor unitário normal ao plano equatorial terrestre. Como o vetor nodal está no mesmo plano do versor $\hat{I}$, que aponta para o ponto vernal, pode-se determinar o valor do ângulo Ω :

$$\hat{I} \cdot \vec{N} = IN \cos(\Omega) \rightarrow \Omega = \cos^{-1} \left(\frac{\hat{I} \cdot \vec{N}}{IN} \right) \quad (1.56)$$

Se a componente $\hat{j}$ do vetor $\vec{N}$ for maior ou igual a zero, ou seja, $\vec{N}_{\hat{j}} \geq 0$, temos que $0^\circ \leq \Omega \leq 180^\circ$. No entanto, se $\vec{N}_{\hat{j}} < 0$, $180^\circ < \Omega < 360^\circ$.

- Argumento do periastro (ω)

O argumento do periastro é o ângulo formado entre a linha dos nodos e o perigeu. Portanto, pode ser determinado por meio do produto escalar entre os vetores excentricidade ($\vec{e}$) e nodal ($\vec{N}$):

$$\vec{N} \cdot \vec{e} = Ne \cos(\omega) \rightarrow \omega = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{N} \cdot \vec{e}}{Ne} \right) \quad (1.57)$$

Se a componente $\hat{K}$ do vetor excentricidade for maior ou igual a zero, ou seja, $\vec{e}_{\hat{K}} \geq 0$, temos que $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$. No entanto, se $\vec{e}_{\hat{K}} < 0$, $180^\circ < \omega < 360^\circ$.

- Inclinação (i)

A inclinação determina o ângulo entre o plano orbital e o plano do sistema de referência inercial. Portanto, pode ser expresso por meio do produto escalar do momento angular específico $\vec{h}$ da órbita e o eixo z:

$$\hat{K} \cdot \vec{h} = Kh \cos(i) \rightarrow i = \cos^{-1} \left(\frac{\hat{K} \cdot \vec{h}}{Kh} \right) \quad (1.58)$$

1.6.2 – Elementos alternativos

Para casos especiais, alguns elementos orbitais são indefinidos. Este problema é solucionado ao definir elementos orbitais alternativos. Exemplos são:

- Argumento de latitude (δ)

Em uma órbita circular, a excentricidade é nula. Logo, o argumento do perigeu a anomalia verdadeira são indefinidos. Define-se, então, o argumento de latitude (δ), medido em relação à direção do vetor nodal até a posição do satélite. Portanto:

$$\vec{N} \cdot \vec{r} = Nr \cos(\delta) \rightarrow \delta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{N} \cdot \vec{r}}{Nr} \right) \quad (1.59)$$

Se a componente x da posição for maior ou igual a zero, ou seja, $r_x \geq 0$, temos que $0 \leq \delta \leq 180^\circ$. Do contrário, $180^\circ < \delta < 360^\circ$.

- Longitude do periastro (Π)

Para órbitas equatoriais, a linha dos nodos não existe. Portanto, o argumento do periastro (ω) e a longitude do nodo ascendente (Ω) são indefinidos. Deste modo, introduz-se a longitude do periastro (Π), ângulo medido entre a direção do ponto vernal e o periastro da órbita:

$$\hat{l} \cdot \vec{e} = l \cos(\Pi) \rightarrow \Pi = \cos^{-1} \left(\frac{\hat{l} \cdot \vec{e}}{le} \right) \quad (1.60)$$

Se a componente y da excentricidade for maior ou igual a zero, ou seja, $e_y \geq 0$, temos que $0 \leq \Pi \leq 180^\circ$. Do contrário, $180^\circ < \Pi < 360^\circ$.

- Longitude verdadeira (l)

Em uma órbita circular e equatorial, três elementos relacionados aos ângulos de Euler não estão definidos. Neste caso, define-se a longitude verdadeira (l), medida entre a direção do ponto vernal e a posição do satélite em órbita:

$$\hat{l} \cdot \vec{r} = l r \cos(l) \rightarrow l = \cos^{-1} \left(\frac{\hat{l} \cdot \vec{r}}{lr} \right) \quad (1.60)$$

Se a componente y da posição for maior ou igual a zero, ou seja, $r_y \geq 0$, temos que $0 \leq l \leq 180^\circ$. Do contrário, $180^\circ < l < 360^\circ$.

1.7 – Conclusões do capítulo

Os mecanismos matemáticos desenvolvidos por Isaac Newton permitiram desvendar o movimento dos astros e dos corpos na Terra. Suas contribuições auxiliaram no desenvolvimento da solução para o problema de diversas órbitas existentes no Sistema

Solar e, deste modo, tornou-se simples e mais preciso calcular a trajetória de cometas, asteroides e planetas. Ao perceber que, no modelo heliocêntrico, o Sol exercia uma força central sobre os corpos do Sistema Solar, Newton aplicou suas elaborações desta teoria para demonstrar matematicamente as Leis de Kepler e ruir de uma vez por todas as hipóteses geocêntricas. Além do mais, ao notar que um sistema de dois corpos pode ser aproximado para um regime de força central, conseguiu elaborar sua equação de órbita, que revelou outros formatos para as trajetórias orbitais, expressando-as como seções cônicas.

No próximo capítulo, será tratado o próximo sistema de N corpos, o Problema de Três Corpos e as suas restrições, impostas para algumas soluções sejam possíveis. Diferentemente do Problema de Dois Corpos, Newton não conseguiu elaborar uma solução analítica para este problema que, futuramente, seria apontada como impossível por Henry Poincaré. No entanto, restrições e simplificações ao sistema de três corpos possibilitam a análise do movimento de um corpo de massa negligenciável na vizinhança de outros dois corpos massivos. Além do mais, avanços na compreensão na dinâmica de três corpos permitiram que aplicações astronáuticas fossem estabelecidas, o que culmina no foco deste projeto.

Capítulo 2 – O PROBLEMA RESTRITO PLANAR E CIRCULAR DE TRÊS CORPOS

2.1 – Introdução

A solução do Problema de Dois Corpos impulsionou a compreensão de como o Sistema Solar opera, e tornou possível a navegação espacial e a astronáutica. O próximo dos problemas de N corpos, o Problema de Três Corpos, não apresenta uma solução tão trivial quanto a obtida para o caso anterior. Newton tentou solucionar a movimentação da Lua com a aplicação do Problema dos Três Corpos, mas foi infeliz em sua tentativa.

O Problema de Três Corpos possibilita uma análise mais realista da movimentação dos corpos do Sistema Solar, já que os sistemas descritos por dois corpos também apresentam perturbações gravitacionais de terceiros, que alteram as órbitas elípticas descritas pelos planetas e luas. O primeiro pesquisador a realizar progressos na teoria envolvendo os sistemas de três corpos foi Leonhard Euler, que aplicou o caso restrito à Lua. Joseph-Louis Lagrange também realizou significativos avanços ao descobrir soluções de casos especiais de posicionamento dos corpos. Euler e Lagrange também descobriram, respectivamente, pontos colineares e equiláteros de equilíbrio do sistema, denominados posteriormente de Pontos de Lagrange, que representam pontos críticos do sistema dinâmico, com diversas aplicações atuais à astronáutica.

Porém, o caso geral permaneceu séculos sem solução, até que Henry Poincaré conjecturasse o problema como analiticamente insolúvel. A dificuldade advém do fato de que não existem transformações de coordenadas que simplifiquem o problema de modo que seja possível obter soluções das equações de movimento. No entanto, ao realizar algumas suposições acerca do sistema, é possível manipulá-lo de forma a se obter soluções destas novas equações de movimento, como no caso do Problema Restrito e Circular dos Três Corpos, este estudado por Euler e Lagrange.

As equações de movimento deste problema restrito podem ser resolvidas numericamente, e a análise de algumas características dos sistemas amparados por este problema tornou-o interessante para a navegação espacial, como as instabilidades

associadas aos pontos colineares de Lagrange que, como será exposto neste capítulo, possibilitam a existência de trajetórias pouco energéticas que ligam regiões distintas do Sistema Solar.

Esses caminhos pouco energéticos garantem alternativas às missões espaciais, tanto “cislunares” (que ocorrem na vizinhança Terra-Lua) como interplanetárias. O design de missões espaciais inteiras pode ser feito considerando apenas as condições iniciais que uma espaçonave, por exemplo, possui. A partir de um impulso energético primevo, a dinâmica dos três corpos garante que o veículo espacial seja guiado até seu destino com poucas queimas do propulsor, conduzido apenas pelos caminhos originados nas órbitas em volta dos pontos lagrangianos. Órbitas essas que, além de gerarem trajetórias dinâmicas, são aproveitadas pelo setor espacial para comportar os mais modernos equipamentos, como telescópios, ou até mesmo futuras estações espaciais.

Neste capítulo, será descrito o Problema Restrito e Circular dos Três Corpos, em sua versão planar, na qual serão tratadas as derivações das equações de movimento, o estudo dos pontos de equilíbrio e de suas estabilidades por meio da análise do autoespaço das equações linearizadas. A linearização permite a análise do movimento nas proximidades dos pontos colineares e, conjuntamente com o estudo dos autovalores e autovetores, culminando na obtenção das trajetórias de baixa energia, geradas a partir das órbitas em volta dos pontos colineares de Lagrange. Este capítulo terá como referências principais Lo, et al (2000) e Karttunen e Valtonen (2006).

2.2 – Equações de movimento do PRPC3C

O sistema de três corpos é, naturalmente, o próximo a ser estudado após o Problema de Dois Corpos. Para que seja possível derivar suas equações de movimento, algumas suposições são realizadas:

- a) O problema é restrito, ou seja, o terceiro corpo terá sua massa negligenciável, de modo que apenas os dois corpos massivos influenciem seu movimento e não o contrário;
- b) O movimento das primárias é circular em torno do centro de massa do sistema;

- c) O terceiro corpo está confinado a se movimentar no mesmo plano de órbita das primárias;

As unidades utilizadas no sistema são normalizadas, de forma que as propriedades do sistema dependam apenas de um parâmetro único, μ . Inicialmente, será utilizado um sistema de coordenadas inercial, centrado no centro de massa do sistema.

Considere o movimento de uma partícula m_3 , o terceiro corpo, sob a atração gravitacional de outros dois corpos massivos, m_1 e m_2 . A unidade de massa é definida da seguinte forma: $m_1 + m_2 = 1$. A distância entre as primárias é tomada como unidade, ou seja, a separação entre m_1 e m_2 é 1. A unidade de tempo é escolhida de forma que um período orbital das primárias em volta do centro de massa é igual a 2π . Deste modo, a constante gravitacional G , dada pela Equação (1.29), que também pode ser representada como:

$$\frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} = \frac{T^2}{a^3} \quad (2.1)$$

resulta em $G = 1$. Desta forma, o movimento médio das primárias, definido por:

$$n = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}} = \frac{2\pi}{T} \quad (2.2)$$

também é unitário. Logo, o único parâmetro do sistema é o parâmetro de massa μ , definido por:

$$\mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (2.3)$$

Se $m_1 > m_2$, as massas nesse sistema de unidades são referenciadas como:

$$\mu_1 = 1 - \mu, \quad \mu_2 = \mu$$

onde $0 \leq \mu \leq 0,5$ e, portanto, $\mu_1 \geq \mu_2$.

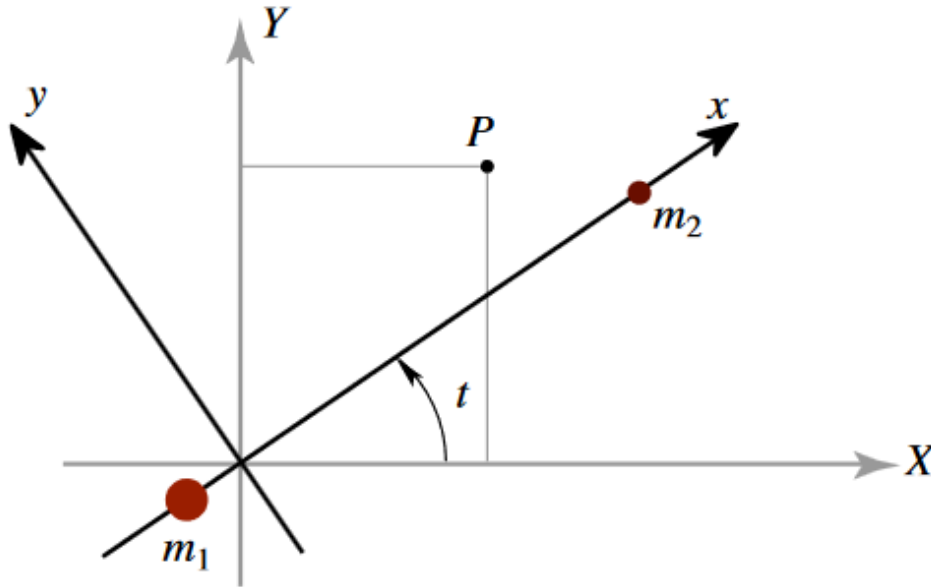
As equações que descrevem o movimento da partícula são:

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -\frac{(1 - \mu)(X - X_1)}{\vec{r}_1^3} - \frac{\mu(X - X_2)}{\vec{r}_2^3} \\ \ddot{Y} &= -\frac{(1 - \mu)(Y - Y_1)}{\vec{r}_1^3} - \frac{\mu(Y - Y_2)}{\vec{r}_2^3} \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $\vec{r}_1^2 = (X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2$ e $\vec{r}_2^2 = (X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2$. (X, Y) é a posição da partícula no sistema de coordenadas inercial em relação ao centro de massa, também dado pelo vetor posição: $\vec{r} = X\hat{i} + Y\hat{j}$. (X_i, Y_i) é a posição dos corpos massivos em relação ao centro de massa, também dado pelo vetor: $\vec{r}_i = X_i\hat{i} + Y_i\hat{j}, i = 1, 2$.

Além das simplificações impostas ao problema, a utilização de um sistema de coordenadas sinódico (ou rotacional) para a análise da movimentação da partícula torna-o mais simples de se resolver. O sistema rotaciona com velocidade angular constante igual ao movimento médio das primárias ($n = t$), como representado na Figura 2.1:

Figura 2.1 – Sistemas de coordenadas inercial e rotacional



O sistema inercial é representado pelos eixos (X, Y) , enquanto o rotacional, por (x, y) . Destaque para o ângulo t , que representa o tempo devido ao movimento médio das primárias.

Fonte: (LO et al., 2000).

A transformação entre os sistemas de coordenadas inercial e sinódico pode ser realizada através de uma matriz de rotação R_t , como evidenciado na Equação (2.5):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R_t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

onde $R_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$.

Já as componentes da velocidade podem ser obtidas pela diferenciação da Equação (2.5):

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \dot{R}_t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + R_t \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = R_t \begin{bmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

No sistema sinódico, o vetor posição da partícula em relação ao centro de massa é $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, enquanto para m_1, m_2 : é $\vec{r} = x_i\hat{i}, i = 1, 2$. Para determinar a localização de x_1 e x_2 , usa-se a definição de centro de massa:

$$m_1x_1 + m_2x_2 = 0 \rightarrow (1 - \mu)x_1 + \mu x_2 = 0 \quad (2.7)$$

Como m_1 e m_2 estão em uma distância unitária, temos:

$$x_2 - x_1 = 1 \quad (2.8)$$

Logo, unindo as duas equações:

$$x_1 = -\mu \quad e \quad x_2 = 1 - \mu \quad (2.9)$$

Considerando o problema planar, as coordenadas das primárias são:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu \sin t \\ -\mu \cos t \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \mu) \cos t \\ (1 - \mu) \sin t \end{bmatrix}$$

A relação entre os dois sistemas de coordenadas, inercial e sinódico, é dada por:

$$\begin{aligned} x &= X \cos t + Y \sin t \\ y &= -X \sin t + Y \cos t \\ X &= x \cos t - y \sin t \\ Y &= x \sin t + y \cos t \end{aligned} \quad (2.11)$$

A demonstração da derivação das equações de movimento para o sistema rotacional estão no Apêndice A. Temos então:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - x &= -\frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{\vec{r}_1^3} - \frac{\mu(x + \mu - 1)}{\vec{r}_2^3} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= -\frac{(1 - \mu)y}{\vec{r}_1^3} - \frac{\mu y}{\vec{r}_2^3} \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde $\vec{r}_1 = (x - (-\mu))\hat{i} + y\hat{j}$ e $\vec{r}_2 = (x - (1 - \mu))\hat{i} + y\hat{j}$

Essas são as equações de movimento no sistema rotacional do Problema Restrito Planar e Circular dos Três Corpos, adimensionais e não dependentes explicitamente do tempo.

2.2.1 – Formalismo lagrangiano e a energia potencial efetiva

Toda a análise do sistema de três corpos foi realizada a partir do formalismo newtoniano, na qual parte-se das forças que agem no sistema para se determinar as equações de movimento. No entanto, outra abordagem mecânica pode ser interessante para a obtenção de novos significados físicos para os termos presentes nas equações de movimento.

O formalismo lagrangiano lida muito mais com as energias presentes no sistema, e a análise do Lagrangiano e das equações de Euler-Lagrange permite determinar as equações de movimento de modo muito mais simples e inferir algumas características.

A energia potencial do sistema devida à gravidade é descrita pela seguinte equação:

$$U(x, y) = \frac{-(1 - \mu)}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) \quad (2.13)$$

onde $-\frac{1}{2}\mu(1 - \mu)$ é um termo arbitrário, adicionado para que alguns pontos críticos do sistema possuam uma certa energia, como evidenciado posteriormente.

Já a energia cinética da partícula é dada por:

$$K(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) = \frac{1}{2}((\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2) \quad (2.14)$$

obtida utilizando as relações da Equação (2.6).

No formalismo lagrangiano, o sistema é descrito em termos de coordenadas generalizadas $(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$. Essas coordenadas são utilizadas no Lagrangiano, $L = K - U$. As equações de movimento do sistema são dadas pelas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

Para o PRPC3C, as coordenadas generalizadas são $x, y, \dot{x}, \dot{y}$. Para x :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt} (\dot{x} - y) = \dot{y} + x - \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.16)$$

que pode ser reescrito como:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.17)$$

Da mesma forma para y , temos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y} \rightarrow \frac{d}{dt} (\dot{y} + x) = -(\dot{x} - y) - \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.18)$$

que também pode ser reescrito como:

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.19)$$

As Equações (2.17) e (2.19) são as mesmas obtidas em (2.12), porém de modo muito mais trivial – sem a necessidade de manipular matrizes de rotação e similares.

Para sistemas lagrangianos onde $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, existe uma constante de movimento denominada “integral de Jacobi”, que é única constante para o PRC3C. Equivale à energia do sistema, e é dada por:

$$h = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L \quad (2.20)$$

Para o nosso problema, temos que:

$$h = E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \bar{U} \quad (2.21)$$

onde $\bar{U}$ é conhecido como o potencial efetivo, e é dado por:

$$\bar{U} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U \quad (2.22)$$

na qual o primeiro termo refere-se a um potencial centrífugo experimentado pela partícula (devido ao sistema rotacional) e o último ao potencial gravitacional.

2.2.2 – Formalismo hamiltoniano e as curvas de velocidade zero

A mecânica hamiltoniana também lida com as energias existentes no sistema, mas, diferentemente do formalismo lagrangiano, utiliza-se de conceitos como momento conjugado para a descrição das equações de movimento. As equações diferenciais que serão obtidas, no entanto, são de primeira ordem, mais fáceis de serem resolvidas. A descrição hamiltoniana, então, promove a substituição de variáveis $(q, \dot{q})$ por (q, p) em todas as grandezas mecânicas, e a introdução de uma função $H(q, p, t)$ no lugar da Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ para dar origem à dinâmica.

O momento conjugado generalizado é dado por:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.23)$$

Por meio de uma transformada de Legendre, extrai-se a função Hamiltoniana de (2.23):

$$H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (2.24)$$

Dela, também se derivam as equações canônicas de Hamilton, dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ p_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (2.25)$$

que fornecerão as equações de movimento do sistema.

Resumidamente, as equações de movimento do PRPC3C descritas pelo formalismo hamiltoniano resultam em:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y \\ \dot{y} &= p_y - x \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\dot{p}_x = p_y - x - \bar{U}_x$$

$$\dot{p}_x = p_y - x - \bar{U}_x$$

onde $\bar{U}_i$ é a derivada parcial de $\bar{U}$ com respeito à variável i . Será adotada essa notação no restante do relatório. Essas equações também são equações equivalentes às anteriores, mas descritas em termos dos momentos conjugados, mais abstratos de serem visualizados. Se a derivada temporal da Hamiltoniana for nula, H é uma constante de movimento, igual à integral de Jacobi, mas descrita em termos do momento.

Por conta da energia (Equação 2.21) ser uma constante de movimento, isso significa, geometricamente, que o movimento da partícula é restrito a um subespaço de 5 dimensões de um espaço de fase de 6 dimensões. Comum à comunidade astronômica, a constante de Jacobi é representada por:

$$C = -2E \quad (2.27)$$

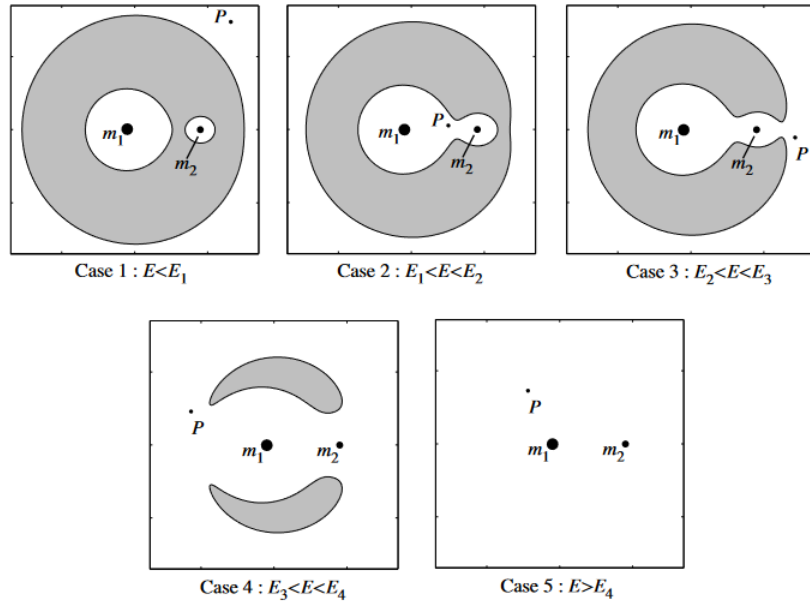
A energia também pode ser representada no sistema inercial, mas sua demonstração é mais tênue e envolve até uma componente do momento angular.

Se a energia é descrita pela Equação (2.21) e, fisicamente, o termo $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}v^2 \geq 0$, temos que as regiões na qual a partícula pode mover-se são determinadas por:

$$\bar{U}(x, y) \leq E \quad (2.28)$$

e essas regiões são denominadas regiões de Hill. As fronteiras dessas regiões, onde $\bar{U}(x, y) = E$ definem as curvas de velocidade zero, limites até onde o terceiro corpo pode navegar no sistema. Para uma dada razão de massas μ , temos os seguintes casos de regiões de movimento, retratadas na Figura 2.2:

Figura 2.2 – Casos de energia do terceiro corpo.

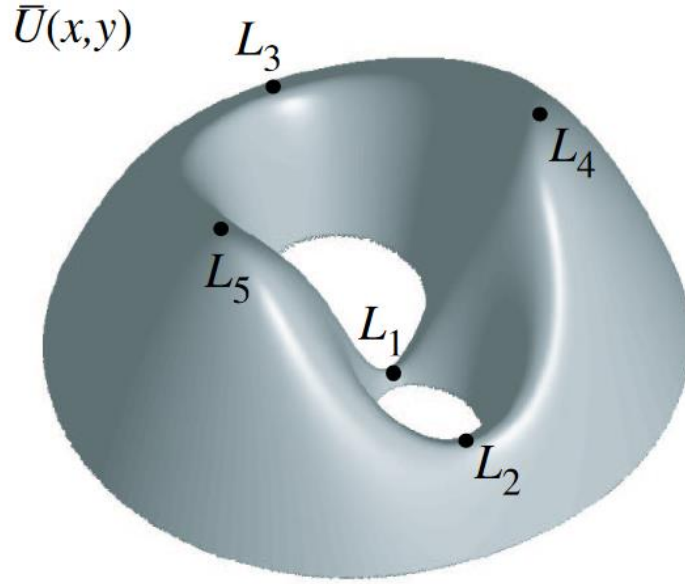


As regiões proibidas, em cinza, diminuem conforme o incremento de energia da partícula, que a partir do caso 3 pode escapar do sistema.

Fonte: (LO et al., 2000).

As energias que determinam os intervalos destes casos são designadas pelos pontos de equilíbrio do sistema, que serão abordados em seguida. Pela análise fornecida pelo cálculo multivariável, é possível estabelecer a existência de cinco pontos de equilíbrio, na qual três são pontos de sela – repousam ao longo do eixo x – e dois são pontos de máximo. A Figura 2.3 representa o potencial efetivo de um determinado sistema com razão $\mu=0,3$:

Figura 2.3 – Projeção da função energia potencial efetiva para um sistema de três corpos



A ilustração revela a quantidade de energia potencial respectiva a cada ponto. Percebe-se que os pontos L_1 , L_2 e L_3 são pontos de sela, enquanto L_4 e L_5 , de máximo. A Figura 2.2 representa cortes bidimensionais deste espaço gerado pelo potencial efetivo.

Fonte (LO et al., 2000).

Percebe-se a existência de “poços” de potencial gravitacional e como o aumento de energia favorece o escape do sistema, como representado na Figura 2.3.

2.3 – Pontos de equilíbrio

No estudo de sistemas dinâmicos, a análise de um sistema não linear de EDOs envolve, geralmente, a busca por pontos de equilíbrio. Procurar-se-á localizações onde não há movimento no sistema rotacional.

Em geral, para sistemas onde $\dot{x} = f(x)$, os pontos de equilíbrio $\bar{x}$ são pontos onde $\dot{x} = 0$. Logo, será procurado $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

Para o PRPC3C, as equações de primeira ordem são:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_x &= 2v_y - \bar{U}_x \\ \dot{v}_y &= -2v_x - \bar{U}_y\end{aligned}\tag{2.29}$$

Os equilíbrios envolvem $\dot{x} = \dot{y} = \dot{v}_x = \dot{v}_y = 0$. Logo, procura-se:

$$\bar{U}_x = \bar{U}_y = 0 \quad (2.30)$$

Curiosamente, mesmo no caso espacial, não existem pontos críticos quando $z \neq 0$. Tomando $z \neq 0$, temos que o potencial efetivo é dado em termos de (x,y) :

$$\bar{U}(x,y) = \frac{-(1-\mu)}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}\mu(1-\mu) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (2.31)$$

Pode-se descrevê-lo apenas em relação à r_1 e r_2 , posições relativas do terceiro corpo às primárias, na qual resulta em:

$$\bar{U}(r_1, r_2) = \frac{-(1-\mu)}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}(1-\mu)r_1^2 - \frac{1}{2}\mu r_2^2 \quad (2.32)$$

Para os potenciais parciais, tem-se, pela regra da cadeia:

$$\bar{U}_x = \bar{U}_{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \bar{U}_{r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} = \bar{U}_{r_1} \frac{(x+\mu)}{r_1} + \bar{U}_{r_2} \frac{(x-(1-\mu))}{r_2} = 0 \quad (2.33)$$

e

$$\bar{U}_y = \bar{U}_{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \bar{U}_{r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} = \bar{U}_{r_1} \frac{y}{r_1} + \bar{U}_{r_2} \frac{y}{r_2} = 0$$

Logo, temos que $\bar{U}_x = \bar{U}_y = 0$ é equivalente à $\bar{U}_{r_1} = \bar{U}_{r_2} = 0$. Ao olhar para o cenário na qual $y \neq 0$, podemos considerar a função potencial em termos de r_1 e r_2 . Logo, se queremos resolver as equações onde:

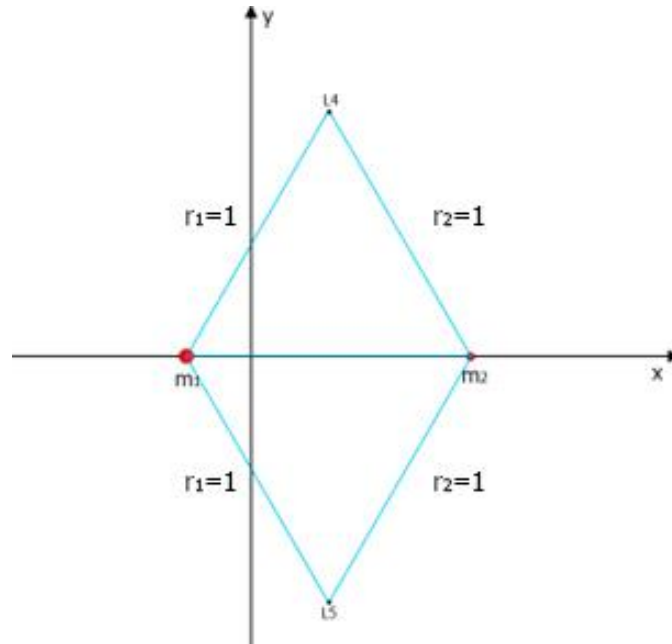
$$\bar{U}_{r_1} = -(1-\mu)r_1 + \frac{1-\mu}{r_1^2} = 0 \quad (2.34)$$

e

$$\bar{U}_{r_2} = -\mu r_2 + \frac{\mu}{r_2^2} = 0$$

tem-se que $r_1 = 1$ e $r_2 = 1$. Ou seja, para essas condições, existem dois pontos equidistantes das primárias. Estes pontos são conhecidos como pontos equiláteros, e são referenciados como pontos L4 e L5, como ilustrado na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Pontos equiláteros L4 e L5 no sistema rotacional



Fonte: elaboração própria.

Esses pontos foram descobertos por Lagrange, por volta de 1772. Ele também descobriu que um corpo massivo em um destes pontos não perturbaria o equilíbrio do sistema.

Para a maioria das razões de massa μ , os pontos L4 e L5 são estáveis. Para determinar com precisão o valor, precisa-se linearizar as equações de movimento nas proximidades dos pontos, o que será realizado posteriormente. Apesar de serem pontos de máximo, são pontos de equilíbrio estáveis, o que contraria a noção de estabilidade devido ao mínimo de energia. Isso se deve ao sistema rotacional, que não permite uma análise usual de pontos críticos de uma função de energia potencial.

Agora, ao considerar o eixo x, ou seja, $y=0$, teremos mais alguns pontos críticos. Da Equação (2.31), temos:

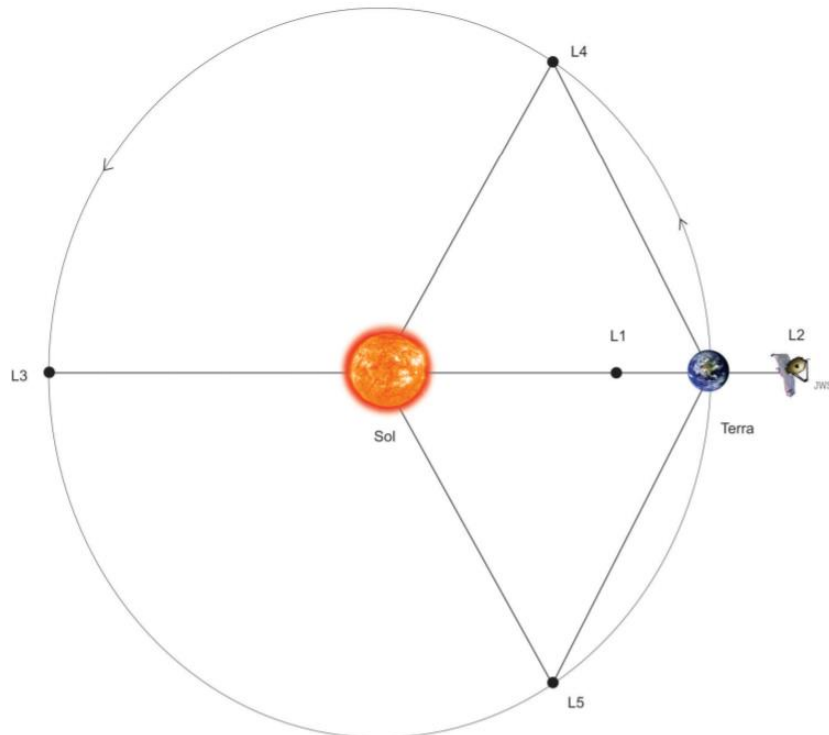
$$\bar{U}(x, 0) = \frac{-(1-\mu)}{|x+\mu|} - \frac{\mu}{|x-(1-\mu)|} - \frac{1}{2}\mu(1-\mu) - \frac{1}{2}x^2 \quad (2.35)$$

Pode ser determinado que $\bar{U}(x, 0)$ tem um ponto crítico ao longo de três intervalos no eixo x : $(-\infty, -\mu)$, $(-\mu, 1 - \mu)$, $(1 - \mu, \infty)$. $\frac{\partial \bar{U}(x, 0)}{\partial x} = 0$ fornece um polinômio de quinta ordem para a localização dos pontos. Esse polinômio pode ser dividido em três equações, dependentes do intervalo escolhido, fornecendo a posição dos pontos L1, L2 e L3, respectivamente:

$$\begin{aligned} x - \frac{1 - \mu}{(x + \mu)^2} + \frac{\mu}{(x - (1 - \mu))^2} &= 0, -\mu < x < 1 - \mu \\ x - \frac{1 - \mu}{(x + \mu)^2} - \frac{\mu}{(x - (1 - \mu))^2} &= 0, 1 - \mu < x \\ x + \frac{1 - \mu}{(x + \mu)^2} + \frac{\mu}{(x - (1 - \mu))^2} &= 0, x < -\mu \end{aligned} \quad (2.36)$$

As raízes reais desses polinômios representam as localizações dos pontos colineares no sistema rotacional. A Figura 2.5 ilustra todos os cinco pontos lagrangianos existentes em um sistema restrito de três corpos:

Figura 2.5 - Os cinco pontos lagrangianos do sistema Sol-Terra-Telescópio Espacial James Webb



O telescópio orbita o ponto L2 em sua missão, e é um exemplo de aplicação contemporânea do conceito.

Fonte: (FORTES et al., 2017).

2.3.1 – Movimento próximo aos pontos colineares

Dados os casos de energia possíveis a respectiva razão de massa do sistema, como ilustrado na Figura 2.2, o que mais interessa à navegação espacial é o terceiro caso ($E_2 < E < E_3$) – na qual a energia é maior do que a do ponto L2 e menor que a do ponto L3. Isso se deve ao fato de um “pescoço” formar-se em volta da massa secundária, o que possibilita a transição da partícula entre regiões, sendo essas a externa, a vizinhança da massa secundária e a vizinhança da massa primária. Mais adiante, será exposto como esse caso de energia possibilita à dinâmica orbital trajetórias de baixa energia que podem conectar diversos sistemas de três corpos.

O movimento nas proximidades dos pontos lagrangianos pode ser analisado por meio da linearização das Equações de movimento (2.17 e 2.19). Será descrito, primeiramente, o movimento próximo aos pontos colineares L1 e L2, que são os pontos mais comumente utilizados em missões espaciais. O ponto L3 não apresenta grande vantagem por conta de sua posição no sistema, bem como a alta instabilidade característica.

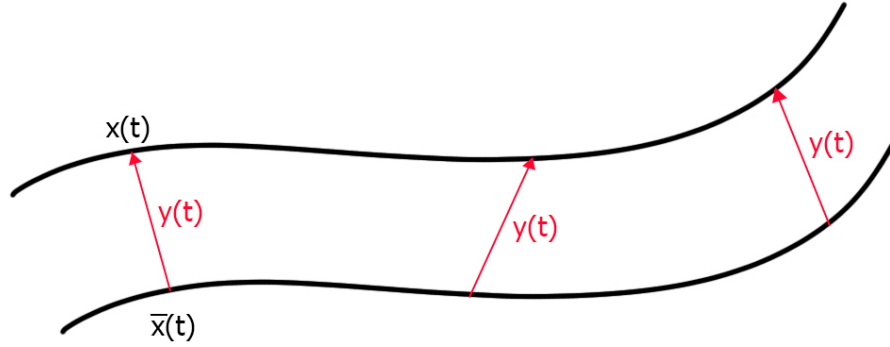
Novamente, um sistema de EDOs generalizado pode ser descrito da seguinte maneira:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.37)$$

Dada uma trajetória de referência $\bar{x}(t)$, uma trajetória próxima $x(t)$ pode ser descrita em termos de um deslocamento $y(t)$, como também ilustrado na Figura 2.6:

$$x(t) = \bar{x}(t) + y(t) \quad (2.38)$$

Figura 2.6 – Trajetória de referência $\bar{x}(t)$ e seu deslocamento $y(t)$



Fonte: elaboração própria.

Logo, uma expansão de Taylor pode ser realizada, de forma que:

$$\dot{x} = f(x(t)) = f(\bar{x}(t) + y(t)) \quad (2.39)$$

$$f(\bar{x}(t) + y(t)) = f(\bar{x}(t)) + Df(\bar{x}(t))y(t) + O(|y|^2)$$

onde $Df(\bar{x}(t))$ é a matriz jacobiana da função $\bar{x}(t)$. Desprezando os termos de segunda ordem ou mais, tem-se:

$$\dot{\bar{x}} + \dot{y} = f(\bar{x}(t)) + Df(\bar{x}(t))y(t) \quad (2.40)$$

No entanto, $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}(t))$ que leva à:

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y(t) \quad (2.41)$$

Essa equação descreve o comportamento de primeira ordem do deslocamento da trajetória de referência. Para o caso analisado, $y=0$ é a trajetória de referência e contém um ponto de equilíbrio do sistema. A matriz jacobiana será referenciada como

$$A(t) = Df(\bar{x}(t)) \quad (2.42)$$

Portanto:

$$\dot{y} = A(t)y \quad (2.43)$$

que compõe um sistema linear que varia temporalmente. No caso analisado, a trajetória de referência $\bar{x}(t)$ é um ponto de equilíbrio do conjunto de EDOs não-linear $\dot{x} = f(x)$, na qual $f(\bar{x}) = 0$. Neste caso específico, a matriz jacobiana $A(t)$ é constante a evolução do deslocamento é mais simples de se analisar:

$$\dot{y} = Ay \quad (2.44)$$

que possui uma solução geral, $y(t) = y_0 e^{At}$. Porém, pode-se analisar se existem características inerentes à dinâmica do sistema com base na autoanálise da matriz A .

No subcapítulo 2.4, observou-se que o sistema pôde ser descrito pelas equações de Hamilton, ou seja, é um sistema hamiltoniano. Por conta disto, os pontos de equilíbrio analisados serão instáveis caso qualquer um dos autovalores possua parte real positiva ($Re(\lambda) > 0$). Sabe-se que as equações de movimento do PRPC3C são expressas como (2.29):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_x &= 2v_y - \bar{U}_x \\ \dot{v}_y &= -2v_x - \bar{U}_y \end{aligned}$$

A matriz jacobiana para a igualdade à direita das EDOs é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\bar{U}_{xx} & -\bar{U}_{xy} & 0 & 2 \\ -\bar{U}_{xy} & -\bar{U}_{yy} & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

onde $\bar{U}_{ij}$ são as derivadas segundas do potencial efetivo com respeito a x , y ou ambos. Por meio de aplicação de teoremas da álgebra linear, a obtenção do polinômio característico resulta em:

$$p(\lambda) = \lambda^4 - (4 + \bar{U}_{xx} + \bar{U}_{yy})\lambda^2 + \bar{U}_{xx}\bar{U}_{yy} - \bar{U}_{xy}^2 \quad (2.46)$$

Para a localização do ponto L1 ou L2, o polinômio característico resulta em:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + (2 - \bar{\mu})\lambda^2 + (1 - \bar{\mu} - 2\bar{\mu}^2) \quad (2.47)$$

na qual $\bar{\mu}$ é relacionado com a localização dos pontos lagrangianos:

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{(x_L - 1 + \mu)^3} + \frac{1 - \mu}{(x_L + \mu)^3} \quad (2.48)$$

onde x_L é a localização do ponto de equilíbrio desejado. A Equação característica (2.47) pode ser resolvida ao introduzir uma variável $\alpha = \lambda^2$, tornando-a uma equação quadrática:

$$p(\alpha) = \alpha^2 + (2 - \bar{\mu})\alpha + (1 - \bar{\mu} - 2\bar{\mu}^2) \quad (2.49)$$

na qual o último termo sempre é negativo, tanto para o ponto L1 quanto para o L2. As duas raízes do polinômio são:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} \left(\bar{\mu} - 2 + \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}^2} \right) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} \left(\bar{\mu} - 2 - \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}^2} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Dado que o último termo do polinômio é negativo, a equação quadrática tem que possuir uma raiz positiva e uma raiz negativa. Temos, portanto, que $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 < 0$. Logo, como $\alpha = \lambda^2$, existirão quatro autovalores, da forma $\pm\lambda$ e $\pm i\nu$, na qual $\lambda = \sqrt{\alpha_1}$ e $\nu = \sqrt{-\alpha_2}$. Como existe, portanto, uma parte real positiva em um dos autovalores, confere-se uma instabilidade aos pontos de equilíbrio colineares.

Tomemos os quatro autovalores deste sistema. Pode-se achar os quatro autovetores correspondentes:

$$\begin{aligned} +\lambda &\rightarrow u_1 \in \mathbb{R}^4 \\ -\lambda &\rightarrow u_2 \in \mathbb{R}^4 \\ +i\nu &\rightarrow w_1 \in \mathbb{C}^4 \\ -i\nu &\rightarrow w_2 = \bar{w}_1 \end{aligned} \quad (2.51)$$

É possível transformar as coordenadas do sistema rotacional (x, y, v_x, v_y) para uma autobase (u_1, u_2, w_1, w_2) . Na base original, utilizando as equações linearizadas e com respeito ao ponto de equilíbrio analisado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -b & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

onde $a = 2\bar{\mu} + 1$ e $b = \bar{\mu} - 1$. A diagonalização dessa matriz permite determinar as equações de movimento nesse autoespaço de coordenadas $(\xi, \eta, \zeta_1, \zeta_2)$:

$$\dot{\xi} = \lambda \xi$$

$$\dot{\eta} = -\lambda \eta$$

$$\dot{\zeta}_1 = \nu \zeta_2$$

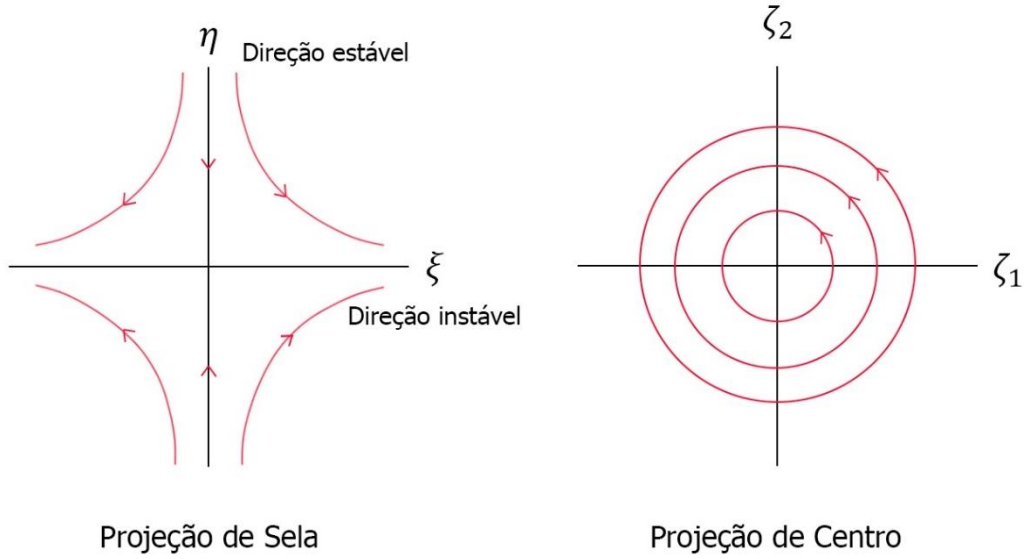
$$\dot{\zeta}_2 = -\nu \zeta_1$$

(2.53)

Logo, para o plano $\xi - \eta$, existe uma direção instável, ou seja, que afasta o terceiro corpo da origem do sistema (ponto de equilíbrio) – representado pela coordenada ξ , e uma direção estável, que direciona até a origem. A projeção neste plano é denominada “projeção de sela”.

Já o plano $\zeta_1 - \zeta_2$ apresenta trajetórias circulares, representando um movimento oscilatório, que aumentam em amplitude conforme à energia empregada no sistema. A projeção é denominada “projeção de centro”. A Figura 2.7 ilustra esses dois comportamentos:

Figura 2.7 – Projeções de Sela e Centro



As projeções indicam os diferentes comportamentos das equações diferenciais próximo ao ponto colinear. Pode ocorrer um movimento de afastamento, aproximação e/ou oscilatório conforme a energia da partícula e a localização dela em cada projeção.

Fonte: elaboração própria.

Logo, os pontos de equilíbrio colineares L1 e L2 são denominados “pontos de equilíbrio sela-centro”, na terminologia dos sistemas hamiltonianos. Apesar da linearização tratar de regiões próximas ao ponto de equilíbrio, com um deslocamento infinitesimal, aplica-se o Teorema de Nash-Moser, que afirma que comportamento qualitativo para o sistema linearizado em primeira ordem é válido para as equações não-lineares. Portanto, suponha que seja possível escolher uma condição inicial que esteja apenas sobre a projeção de centro e corresponda à origem na projeção de sela. Isso corresponderia a trajetórias oscilatórias em volta dos pontos de equilíbrio. Mas, caso haja um pequeno deslocamento na projeção de sela, a partícula seria levada para longe do sistema. Portanto, a projeção de centro, oscilatória, indica que existem soluções periódicas em volta dos pontos colineares L1 e L2.

Os autovetores reais podem ser representados como:

$$\lambda \rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sigma \\ \lambda \\ -\lambda\sigma \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$-\lambda \rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma \\ -\lambda \\ -\lambda\sigma \end{bmatrix}$$

onde $\sigma = \frac{2\lambda}{\lambda^2+b} > 0$. Os dois primeiros elementos da matriz coluna dizem respeito às direções estáveis e instáveis do sistema. Já os dois últimos elementos referem-se à velocidade que o terceiro corpo adquire na direção do autovetor, proporcional a λ e ao deslocamento em relação à L1 ou L2. Para o par imaginário de autovalores:

$$\pm i\nu \rightarrow w = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\tau \\ i\nu \\ \nu\tau \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

onde $\tau = -\left(\frac{\nu^2+a}{2\nu}\right) < 0$. w pode ser representado pela soma de sua parte real e sua parte imaginária, evidenciando o caráter oscilatório desse conjunto de autovetores:

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \nu\tau \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau \\ \nu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

O processo de representação das equações linearizadas na autobase pode ser expresso como: dado $\dot{y} = Ay$, pode-se transformar para novas coordenadas r por meio da transformação linear:

$$r = P^{-1}y \rightarrow y = Pr \quad (2.57)$$

onde $P = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1 & u_2 & u & v \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$. Logo, temos:

$$Ay = APr \quad (2.58)$$

$$\dot{y} = P\dot{r}$$

dado que $\dot{y} = Ay$, tem-se:

$$Ay = P\dot{r} \rightarrow Apr = P\dot{r} \quad (2.59)$$

que pode ser expressa, portanto:

$$\dot{r} = (P^{-1}AP)r = \Lambda r \quad (2.60)$$

em que $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & -\nu & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz similar em bloco diagonal, na forma

canônica de Jordan. Se $r = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$, temos, então, as mesmas Equações (2.53).

No sistema não-linear, a energia do terceiro corpo é a única constante de movimento. O sistema linear, no entanto, apresenta outras constantes adicionais. As equações linearizadas no autoespaço possuem soluções:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0 e^{\lambda t} \\ \eta(t) &= \eta_0 e^{-\lambda t} \\ \zeta_1(t) &= \zeta_1^0 \cos(\nu t) + \zeta_2^0 \sin(\nu t) \\ \zeta_2(t) &= -\zeta_1^0 \sin(\nu t) + \zeta_2^0 \cos(\nu t) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Portanto, a solução nas autocoordenadas podem ser escritas como:

$$r(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \\ \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

A transformação para o espaço original descrito por y é dada por:

$$y(t) = Pr(t) \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1 & u_2 & u & v \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \\ \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix} = \xi_0 e^{\lambda t} u_1 + \eta_0 e^{-\lambda t} u_2 + \zeta_1(t) u + \zeta_2(t) v \quad (2.64)$$

Restringindo a análise apenas à componente x , temos:

$$x(t) = \xi_0 e^{\lambda t} + \eta_0 e^{-\lambda t} + \zeta_1^0 \cos(vt) + \zeta_2^0 \sin(vt) \quad (2.65)$$

na qual se o tempo $t \rightarrow \infty$, apenas a primeira componente domina.

$x(t)$ vai à $-\infty$ se $\xi_0 < 0$

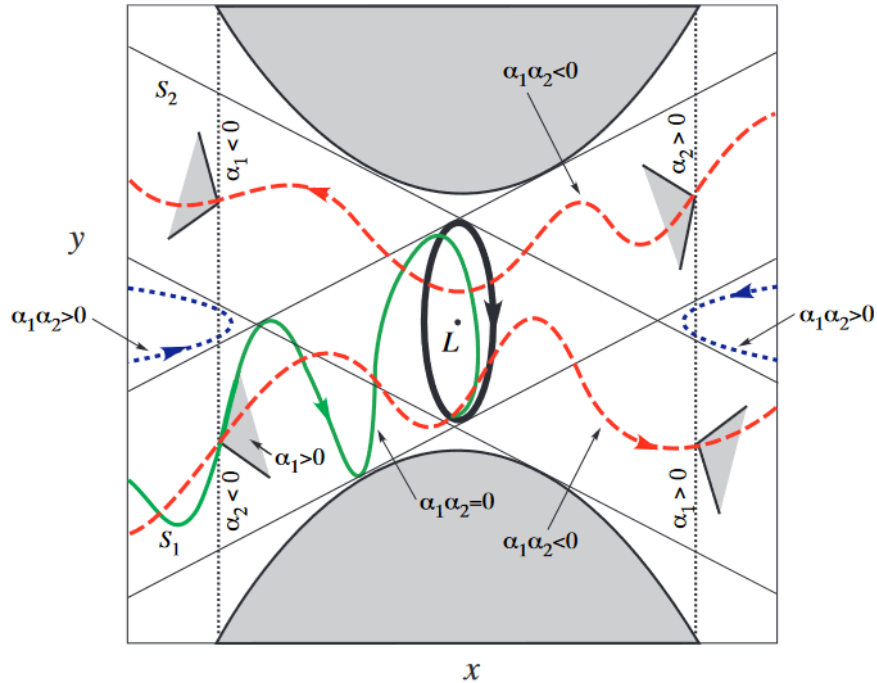
$x(t)$ permanece com movimento restrito se $\xi_0 = 0$

$x(t)$ vai à $+\infty$ se $\xi_0 > 0$

A situação é similar se $t \rightarrow -\infty$, mas ξ_0 é substituído por η_0 .

Da análise deste movimento, surgem quatro categorias de órbita com base nos sinais de ξ_0 e η_0 . Ao referenciar ξ_0 e η_0 como α_1 e α_2 , respectivamente, a Figura 2.8 ilustra todos os tipos de trajetórias possíveis, quatro no total:

Figura 2.8 – Tipos de trajetórias próximas ao ponto colinear de Lagrange



A transformação de coordenadas da autobase para o sistema rotacional gera quatro tipos de órbitas possíveis, que dependem das condições iniciais do terceiro corpo.

Fonte: (LO et al., 2000).

- a) Para $\xi_0 = 0$ e $\eta_0 = 0$, única órbita periódica (caso planar) que aparenta ser uma elipse com semieixo maior orientado no eixo y e comprimento $2|\tau|\sqrt{\frac{E}{\kappa}}$, e eixo menor de $2\sqrt{\frac{E}{\kappa}}$, onde $\kappa = -a + bt^2 + v^2 + v^2\tau^2$. Logo, o tamanho da órbita possui relação com a energia;
- b) $\xi_0\eta_0 = 0$ definem as órbitas assintóticas, que fluem de/para a órbita periódica quando $t \rightarrow \pm\infty$. Formam um tipo de fronteira com aparência semelhante a um tubo, na qual em seu interior se localizam as órbitas de trânsito, e exterior a ele, órbitas de não-trânsito;
- c) $\xi_0\eta_0 < 0$ definem órbitas de trânsito, que fluem de um lado do equilíbrio para outro (vizinhança da m_1 para vizinhança da m_2 , por exemplo);
- d) $\xi_0\eta_0 > 0$ definem órbitas de não-trânsito, que fluem de um lado do equilíbrio e a ele retornam;
- e) S_1 e S_2 definem regiões com $\xi_0 = 0$ e $\eta_0 = 0$, respectivamente. A largura dessas regiões também é determinada pela energia do sistema;

A estrutura tubular formada pelas órbitas assintóticas é geralmente referenciada como “Superestradas Interplanetárias” em trabalhos de dinâmica orbital (LO, et al., 2002). Como destacado, atuam como fronteiras de comportamento das equações diferenciais, já que as trajetórias dentro deste tubo transitam de uma região a outra no sistema, enquanto as exteriores a ele permanecem na mesma localização inicial após a passagem pelas proximidades do ponto. São, portanto, variedades invariantes do sistema – caso representem a direção instável, são variedades instáveis. De outro modo, constituem variedades estáveis.

É evidente que a escolha das condições iniciais do terceiro corpo determinará o tipo de movimento que ele descreverá no sistema. Essas características intrínsecas das interações gravitacionais rendem possibilidades de transferências orbitais sem incrementos de velocidade durante o percurso, o que confere uma grande economia nos custos envolvidos nas missões espaciais. Aliado a isso, está a possibilidade do design de trajetórias que conectam vários sistemas de três corpos, conceito este que será abordado em capítulos posteriores.

2.3.2 – Movimento próximo aos pontos equiláteros

Já os pontos equiláteros L4 e L5 também apresentam peculiaridades quanto ao movimento em suas proximidades. O polinômio característico do jacobiano das equações linearizadas (2.45), avaliado em L4 e L5, é:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) \quad (2.66)$$

A resolução para λ^2 é da forma $\lambda^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}$. Se:

$$27\mu(1 - \mu) < 1 \quad (2.67)$$

a raiz é real e menor que 1. Logo, tanto λ_-^2 quanto λ_+^2 são negativos, culminando em autovalores puramente imagináveis:

$$\pm\sqrt{\lambda_-}, \pm\sqrt{\lambda_+} \rightarrow \pm ik_1, \pm ik_2. \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Portanto, quando todos os autovalores são imaginários, o movimento é puramente oscilatório e estável. Porém, caso as condições não se cumpram, haverá valores reais para os autovalores, tornando o movimento instável. A equação retorna um valor crítico de μ :

$$\mu_c = \frac{9 - \sqrt{69}}{18} \approx 0,0385 \quad (2.68)$$

Ou seja, para $\mu < \mu_c$, todos os autovalores são imaginários. Para pequenos valores de μ (≤ 0.01), os autovalores serão aproximados por:

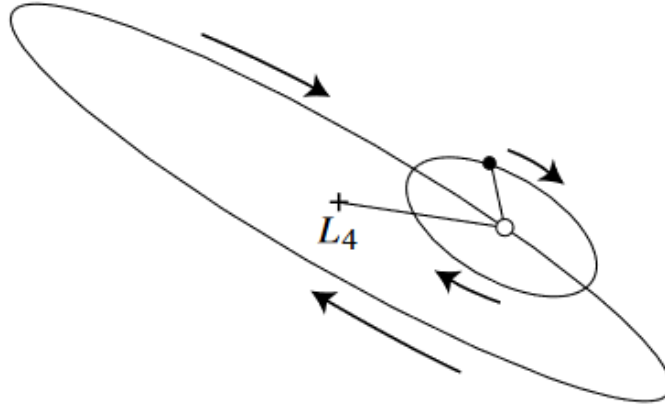
$$\lambda_{1,2} \approx \pm i \sqrt{1 - \frac{27}{4}\mu}, \lambda_{3,4} \approx \pm i \sqrt{\frac{27}{4}\mu} \quad (2.69)$$

O movimento próximo aos pontos equiláteros será oscilatório com duas frequências diferentes, correspondendo aos períodos curto e longo, respectivamente:

$$Curto \rightarrow \frac{2\pi}{|\lambda_{1,2}|}, Longo \rightarrow \frac{2\pi}{|\lambda_{3,4}|}$$

Logo, a trajetória resultante será composta por um movimento de epiciclo, como na Figura 2.9:

Figura 2.9 - Trajetória do terceiro corpo próxima ao ponto equilátero

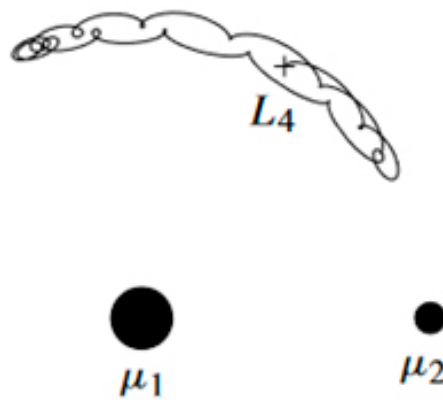


O terceiro corpo orbita o ponto equilátero em uma trajetória de epiciclo, na qual uma órbita menor segue uma trajetória elíptica ao redor do ponto. O movimento se dá como se a partícula orbitasse uma massa virtual que, por sua vez, orbita o ponto equilátero.

Fonte: (MURRAY; DERMOTT, 2009).

A elipse maior apresenta uma razão de semieixos $\frac{b}{a} \cong (3\mu)^{1/2}$, enquanto a menor, uma razão de 2 para 1. A separação radial do terceiro corpo em relação ao ponto equilátero determina o formato da órbita resultante. Caso seja uma separação pequena, tem-se uma trajetória como ilustrada na Figura 2.10:

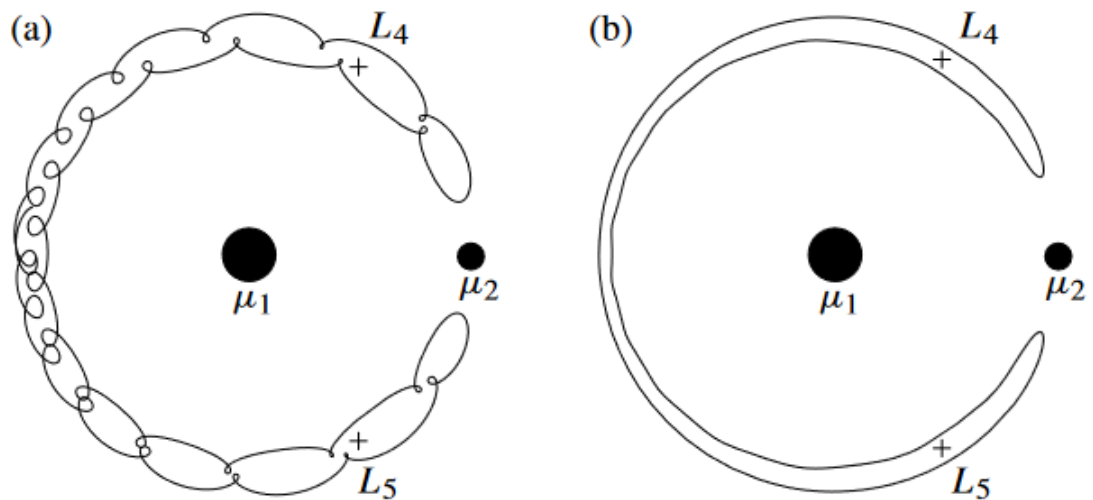
Figura 2.10 - Órbita do tipo "girino"



Fonte: (MURRAY; DERMOTT, 2009).

Essas órbitas são denominadas órbitas “Tadpoles” (girinos). Caso a separação radial seja ainda maior, tem-se as órbitas “Horseshoe” (ferradura), como na Figura 2.11:

Figura 2.11 - Órbitas do tipo ferradura



A diferença entre (a) e (b) são as condições iniciais do terceiro corpo.

Fonte: (MURRAY; DERMOTT, 2009).

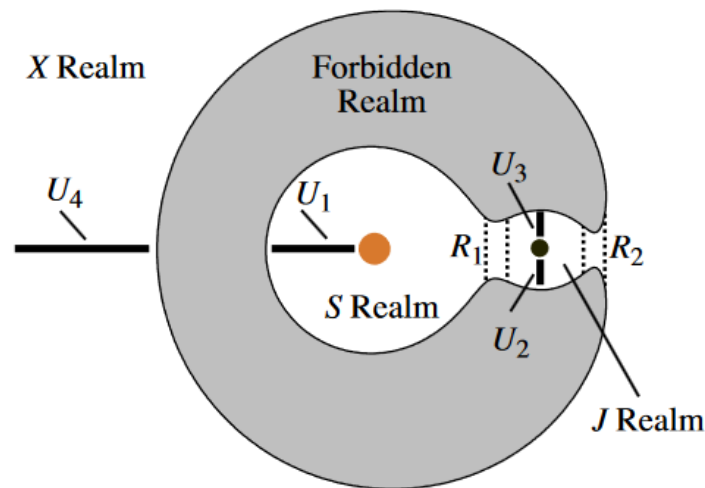
As órbitas em volta do L4 e L5 não apresentam grandes vantagens de navegação para a indústria espacial. Existe a possibilidade da manutenção de uma estação espacial em volta de um dos pontos equiláteros, mas a distância entre eles e as massas primárias

culmina em um fator dificultador. As órbitas, no entanto, podem ser úteis no estudo da dinâmica dos asteroides troianos de Júpiter, por exemplo, ou na hipótese da causas envolvidas na formação da Lua, como a existência de um planeta em um dos pontos equiláteros do sistema Sol-Terra, que entrou em rota de colisão com a Terra devido às perturbações gravitacionais dos outros corpos do Sistema Solar – culminando na criação do satélite natural. No entanto, isto foge ao escopo desta pesquisa.

2.4 – Teorema das estruturas globais de órbita

A importância das condições iniciais do terceiro corpo já foi destacada no subcapítulo 2.3.1, já que elas definem o tipo de trajetória que a partícula seguirá próxima aos pontos colineares. Dado o terceiro caso da energia de um sistema, por exemplo, Sol-Júpiter-partícula – como na Figura 2.12 – pode-se dividi-lo em três “reinos” ou regiões: S (proximidade com o Sol), J (proximidade com Júpiter) e X (exterior a ambos). Existe um teorema que propõe que, dada uma sequência de letras S, J e X – na qual S e X não podem ser consecutivas – há uma trajetória na qual seu “itinerário” corresponde a essa sequência.

Figura 2.12 - Sistema Sol-Júpiter-partícula e suas regiões (ou reinos)

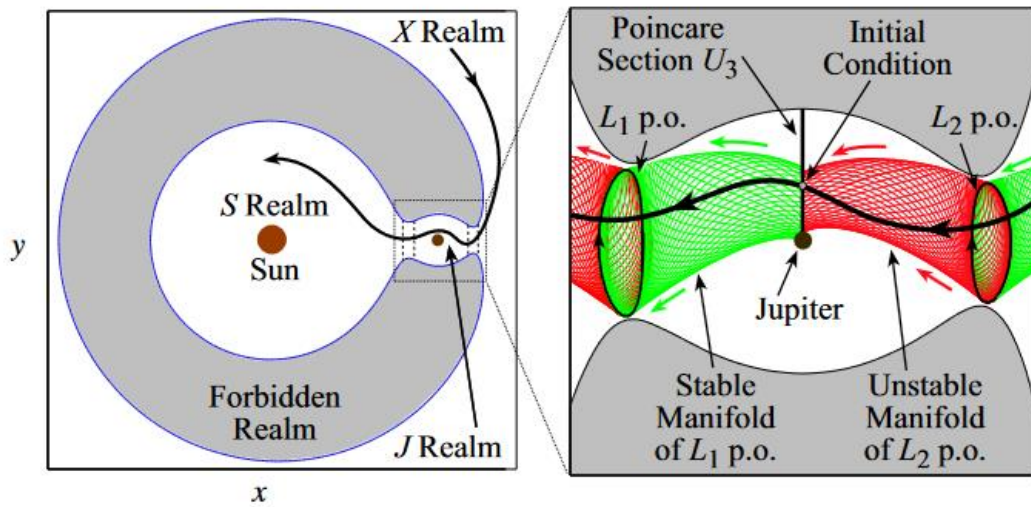


Estão em evidência as regiões dominadas pela influência do Sol, Júpiter e externa a ambos. U_i representam as seções de Poincaré. R_1 e R_2 representam as vizinhanças dos pontos colineares $L1$ e $L2$.

Fonte: (LO et al., 2000).

As retas na Figura 2.12 demarcam as seções de Poincaré, que são “cortes” da região de equilíbrio que podem evidenciar intersecções dos “tubos” – formados pelas órbitas assintóticas – e providenciar uma condição inicial de transição entre eles. Em um sistema com N graus de liberdade, com um espaço de fase $2N$ dimensional, a variedade (superfície) de energia é $2N-1$. O mapa de Poincaré é um corte dessa superfície de energia, sendo $2N-2$ dimensional.

Figura 2.13 - Variedades invariantes dos pontos $L1$ e $L2$ do sistema Sol-Júpiter-partícula

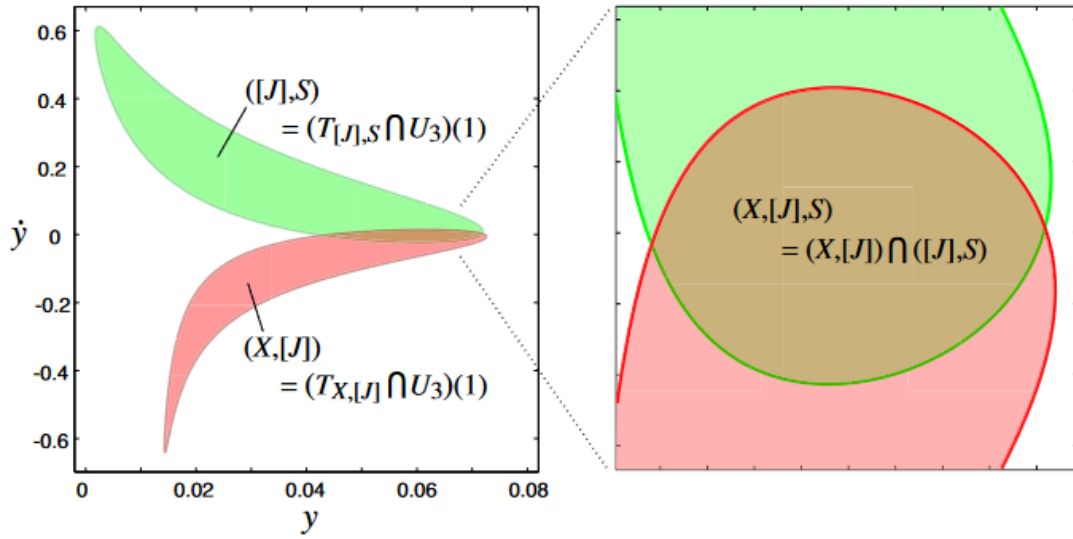


A ampliação da região J revela as variedades estáveis e instáveis dos pontos colineares e suas conexões entre si, além dos cortes de Poincaré. É evidente como uma variedade instável no ponto $L2$ pode conduzir a uma variedade estável do ponto $L1$ que, por sua vez, leva a uma variedade instável com destino as proximidades do Sol.

Fonte: (LO et al., 2000).

Dado o exemplo da Figura 2.13, de um itinerário $(X, [J], S)$ – onde os colchetes indicam a posição inicial do terceiro corpo – a seção de Poincaré U_3 define a intersecção dos tubos $(X, [J])$ e $([J], S)$, denotada por $(X, [J], S)$, na qual as condições iniciais são $\{x = 1 - \mu, y > 0, \dot{x} < 0\}$. $\dot{x}$ é dado pela Equação de energia (2.30).

Figura 2.14 - Intersecções das seções de Poincaré do sistema Sol-Júpiter-partícula



As seções de Poincaré revelam quais condições iniciais que apresentam variedades invariantes com conexões entre si, ou seja, as intersecções de trajetórias que conduzem a partícula de uma órbita em volta de um ponto colinear a outra.

Fonte: (LO et al., 2000).

Logo, a região de intersecção destacada define as órbitas de trânsito que saem do L2 e conduzem às órbitas estáveis do L1, que se conectam às instabilidades que levam a partícula ao reino S. Ou seja, dada a condição inicial correspondente dentro da região, ao integrar regressivamente no tempo obtém-se uma trajetória do exterior que leva às proximidades de Júpiter, e ao integrar progressivamente, uma órbita que conduz ao Sol. Caso um itinerário maior seja desejado, a região de intersecção fica cada vez menor, ou seja, as condições iniciais ficam cada vez mais restritas. O Teorema das Estruturas Globais de Órbita, portanto, propõe:

“Para qualquer sequência $(\dots, (U_{i-1}, r_{-1}), (U_{i0}, r_0), (U_{i+1}, r_1), \dots)$, existe uma trajetória que se inicia na seção de Poincaré U_{i0} e conduz à seção U_{i+1} , passando através da região de equilíbrio e performando r_0 voltas em torno do ponto de equilíbrio”.

As implicações desse teorema são amplas, e envolvem desde órbitas periódicas de todos os períodos existentes quanto órbitas caóticas – infinidade de órbitas não-periódicas.

Pode-se aplicar este teorema para, por exemplo, enviar uma espaçonave da vizinhança terrestre até as proximidades da Lua e, a partir daí, ir em direção ao sistema exterior. Próximos capítulos evidenciarão como conexões a partir do sistema Terra-Lua podem ser realizadas até os outros astros do Sistema Solar por meio das condições iniciais escolhidas, como o envio de uma espaçonave até o sistema joviano, alvo desta pesquisa.

2.4 – Conclusões do capítulo

A manipulação do problema de três corpos, portanto, garante mais uma ferramenta poderosa na análise da dinâmica dos astros do Sistema Solar. As simplificações impostas ao sistema geram novas possibilidades na determinação do movimento de objetos menores sobre influência das outras duas massas.

O estudo deste problema pode ser realizado por meio de diferentes óticas, como os outros formalismos mecânicos além do newtoniano. As abordagens das mecânicas lagrangiana e hamiltoniana, que priorizam, em sua análise, as energias envolvidas no sistema, fornecem equações de movimento de modo muito mais simples e versátil, além de informações preciosas sobre características que permitem inferir, com mais precisão, a dinâmica do terceiro corpo. Um exemplo claro é a derivação da constante de Jacobi, que determina as regiões acessíveis à partícula conforme a sua energia.

A análise do autoespaço das equações de movimento obtidas pelas diferentes abordagens mecânicas possibilita o estudo das estabilidades de suas soluções – neste caso, os pontos de equilíbrio lagrangianos. A instabilidade dos pontos colineares não conjectura algo negativo, já que, caso a energia do terceiro corpo esteja em um intervalo específico para seu sistema, trajetórias que conectam regiões interna e externamente a ele surgem a partir dos pontos lagrangianos. Seja o terceiro corpo um veículo espacial ou um satélite, ele naturalmente será conduzido pela dinâmica do sistema até alguma destas três regiões existentes, a depender das condições iniciais consideradas. A garantia dessa afirmação é fornecida pelo Teorema das Estruturas Globais de Órbita.

Esses caminhos pouco energéticos podem ser aproveitados pela astronáutica para o envio de satélites e espaçonaves para qualquer localização do Sistema Solar, guiados apenas pelas interações gravitacionais dos corpos e pelas condições iniciais fornecidas

pela queima dos propulsores do V/E ao partir de uma órbita terrestre ou lunar, por exemplo. É claro que, para atingir distâncias maiores, o V/E necessitará de correções por impulsos instantâneos (ΔV s) que, no entanto, serão mínimas se consideradas as queimas convencionais adotadas em missões espaciais interplanetárias. Essas informações serão, porém, tratadas em capítulos posteriores.

No próximo capítulo, será considerado o caso tridimensional do Problema Restrito e Circular de Três Corpos, e como novos métodos de análise podem ser aplicados na determinação de órbitas periódicas em volta dos pontos colineares.

Capítulo 3 – PROBLEMA ESPACIAL DE TRÊS CORPOS

3.1 – Introdução

Os capítulos anteriores abordaram sistemas dinâmicos na qual o movimento ocorria apenas em um plano – fato esse que simplificava as resoluções das equações de movimento. No entanto, a realidade do Sistema Solar engloba órbitas de astros com diferentes inclinações entre si. Isso ocasiona em uma imprecisão na determinação de trajetórias ao utilizar soluções dos problemas planares. Além disso, em uma missão, pode-se desejar uma aproximação de uma espaçonave por uma órbita polar, culminando na necessidade de uma abordagem tridimensional.

A inclusão da terceira dimensão em um sistema de três corpos confere dificuldade extra na manipulação das equações de movimento e na obtenção de soluções para a dinâmica – no entanto, permite uma multiplicidade de trajetórias que pode revelar modos mais econômicos de se realizar uma missão espacial. Por exemplo, ao utilizar-se do Problema Restrito e Circular dos Três Corpos, uma sonda espacial pode navegar pelas variedades invariantes do sistema e aproveitar, de forma conjunta, de *swing-bys gravitacionais* para tornar mais eficazes as propulsões empregadas na missão, ou reduzir o seu número.

Neste capítulo, portanto, será exposto o Problema Restrito e Circular dos Três Corpos, em sua versão espacial, e as manipulações necessárias para a resolução das equações de movimento, como a autoanálise dos termos lineares e a expansão dos termos não-lineares para o uso de relações matemáticas que os tornam mais simples.

Este capítulo terá como base as referências Lo, et al (2000), Felipe (2005) e Lo (2002).

3.2 – Equações de movimento para o PRC3C

O problema espacial envolve a determinação das equações de movimento para as três dimensões físicas, uma a mais em relação ao problema planar abordado anteriormente. Ao realizar os mesmos procedimentos descritos no subcapítulo 2.2, mas

considerando o eixo z, pode-se chegar às seguintes equações de movimento para o Problema Restrito e Circular de Três Corpos:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - x &= -\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{\bar{r}_1^3} - \frac{\mu(x+\mu-1)}{\bar{r}_2^3} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= -\frac{(1-\mu)y}{\bar{r}_1^3} - \frac{\mu y}{\bar{r}_2^3} \\ \ddot{z} &= \frac{-(1-\mu)z}{\bar{r}_1^3} - \frac{\mu z}{\bar{r}_2^3}\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde $\bar{r}_1 = (x - (-\mu))\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ e $\bar{r}_2 = (x - (1-\mu))\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

A análise destas equações de movimento também pode ser feita pelos formalismos lagrangiano e hamiltoniano, como no capítulo anterior. Os procedimentos descritos em (2.2.1), se considerado o eixo z, retornam as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} &= -\frac{\partial U}{\partial z}\end{aligned}\tag{3.2}$$

A resolução destas equações de movimento, no entanto, não é tão trivial quanto no caso planar. Deste modo, algumas modificações nas equações torná-las-ão mais maleáveis a processos numéricos, como exposto ao longo desse capítulo. Para isso, a movimentação em torno dos pontos colineares pode ser analisada ao transladar a origem do sistema de coordenadas rotacional até o ponto colinear L1 ou L2 segundo as seguintes transformações:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x - 1 \pm \mu \pm \gamma}{\gamma} \\ \bar{y} &= \frac{y}{\gamma} \\ \bar{z} &= \frac{z}{\gamma}\end{aligned}\tag{3.3}$$

onde γ é a distância do ponto L1 ou L2 até a massa secundária. O sinal superior dos termos $\pm$ ou $\mp$ faz jus ao ponto L1, enquanto o inferior refere-se ao ponto L2. Em termos dessas novas variáveis, as equações de movimento podem ser expressas por:

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{x}} - 2\dot{\bar{y}} - \bar{x} &= -\frac{(1-\mu)(\bar{x}+\mu)}{\bar{r}_1^3} - \frac{\mu(\bar{x}+\mu-1)}{\bar{r}_2^3} \\ \ddot{\bar{y}} + 2\dot{\bar{x}} - \bar{y} &= -\frac{(1-\mu)\bar{y}}{\bar{r}_1^3} - \frac{\mu\bar{y}}{\bar{r}_2^3} \\ \ddot{\bar{z}} &= \frac{-(1-\mu)\bar{z}}{\bar{r}_1^3} - \frac{\mu\bar{z}}{\bar{r}_2^3}\end{aligned}\quad (3.4)$$

3.3 – Expansão dos termos não-lineares e soluções periódicas (órbitas halo)

Os termos não-lineares do lado direito das equações de movimento podem ser expressos como funções de polinômios de Legendre P_n , que apresentam relações úteis em resoluções de equações diferenciais parciais. Logo, tem-se:

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{x}} - 2\dot{\bar{y}} - (1+2c_2)\bar{x} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n p_n\left(\frac{\bar{x}}{\rho}\right) \\ \ddot{\bar{y}} + 2\dot{\bar{x}} - (c_2-1)\bar{y} &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n p_n\left(\frac{\bar{x}}{\rho}\right) \\ \ddot{\bar{z}} + c_2\bar{z} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n p_n\left(\frac{\bar{x}}{\rho}\right)\end{aligned}\quad (3.5)$$

onde $c_n = \frac{1}{\gamma^3} \left[(\pm 1)^n \mu + (-1)^n \frac{(1-\mu)\gamma_i^{n+1}}{(1 \mp \gamma_i)^{n+1}} \right]$ e $\rho = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2$. $n \geq 3$ é o grau do polinômio de Legendre utilizado, relacionado com a precisão desejada para o método. Essas equações consistem na expressão final do movimento em torno do ponto de equilíbrio L1 ou L2 para uma partícula. O lado direito possui apenas termos não lineares, e a expansão de Legendre é convergente apenas para $\rho < 1$, o que ocasiona em uma limitação da amplitude das órbitas periódicas obtidas por esse método.

A obtenção das soluções periódicas é feita por meio da análise das equações lineares, ou seja, dos termos à esquerda das igualdades nas Equações (3.5). Tem-se, portanto:

$$\begin{aligned}
\ddot{\bar{x}} - 2\dot{\bar{y}} - (1 + 2c_2)\bar{x} &= 0 \\
\ddot{\bar{y}} + 2\dot{\bar{x}} - (c_2 - 1)\bar{y} &= 0 \\
\ddot{\bar{z}} + c_2\bar{z} &= 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Existe uma solução para $\bar{z}$ – ao considerar que $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são nulos – que é um harmônico simples, dado que $c_2 > 0$ e não depende de $\bar{x}$ e $\bar{y}$. Porém, o que interessa é a solução do polinômio característico obtido pela análise do autoespaço das equações, como realizado no problema planar. Para o polinômio característico do jacobiano deste sistema, existem seis autovetores e autovalores associados:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= \frac{(c_2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2})}{2} \\
\omega_p^2 &= \frac{(2 - c_2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2})}{2} \\
\omega_v^2 &= c_2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde λ^2 é do tipo “sela” (relacionado ao movimento instável e planar) e real, enquanto ω_p^2 e ω_v^2 são do tipo “centro” (movimento oscilatório) e imaginários – como ilustrado nas projeções da Figura 2.7 – associados à frequência de movimento dentro e fora do plano das órbitas, respectivamente.

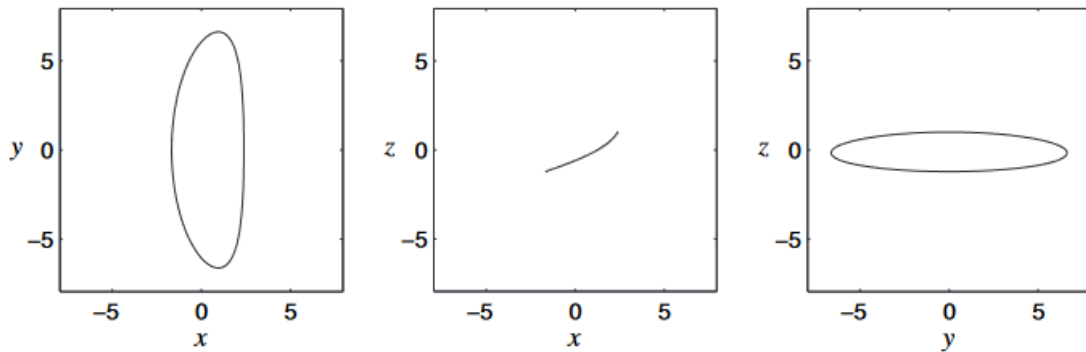
Dado que as duas raízes reais λ são opostas em sinal, condições iniciais escolhidas de forma arbitrária levam a soluções que se propagam sem limite no espaço conforme $t \rightarrow \infty$. Se, no entanto, as condições iniciais forem restritas a soluções “acopladas” – onde x e y possuem relações dependentes – estas soluções terão formato:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= -A_x \cos(\omega_p t + \varphi) \\
\bar{y} &= \kappa A_x \sin(\omega_p t + \varphi) \\
\bar{z} &= A_z \sin(\omega_v t + \psi)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde $\kappa = \frac{\omega_p^2 + 1 + 2c_2}{2\omega_p} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1 - c_2}$. A_x e A_z são amplitudes no eixo x e z , enquanto κ é uma constante que relaciona a amplitude no eixo y com a amplitude em x ($A_y = \kappa A_x$). φ e ψ são constantes relacionadas com a “fase” do movimento oscilatório, onde φ é aplicada no movimento planar e ψ possui relação com a coordenada espacial z .

As soluções periódicas são denominadas órbitas “halo”, devido a aparência que elas possuem quando observadas do corpo primário. A aparência de uma órbita halo é ilustrada na Figura 3.1. Os movimentos periódicos são obtidos se as amplitudes de movimento, dentro e fora do plano de órbita, forem grandes o suficiente de forma que as contribuições não-lineares (os termos que envolvem os polinômios de Legendre) produzam autofrequências iguais ($\omega_p = \omega_v$). Existem, também, restrições de amplitudes e fases de órbita se consideradas perturbações de outros corpos, mas isso não será tratado neste capítulo.

Figura 3.1 – Órbita halo utilizada na missão ISEE-3



Esta órbita tridimensional é visualizada em três planos coordenados: xy , xz e yz . O ponto de origem é o $L1$ do sistema Sol-Terra. As unidades são multiplicadas por um fator de 10^5 km. É notável a curvatura tridimensional característica destas órbitas periódicas, que diferem das usuais órbitas keplerianas.

Fonte: (LO et al., 2000).

Uma relação importante é fornecida pelo Teorema do Espelho, e pode ser aplicada às órbitas halo. No plano xy , é notável que a trajetória acima de $y=0$ é uma imagem espelhada da trajetória abaixo. Logo, *para cada trajetória definida por $x(t)$, $y(t)$, $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$, existe uma trajetória simétrica em relação ao eixo x definida por $x(-t)$, $-y(-t)$, $-\dot{x}(-t)$ e $-\dot{y}(-t)$ no sistema de coordenadas rotacional*. Este teorema favorece o processo computacional das órbitas halo já que, na prática, calcula-se apenas metade da trajetória.

Portanto, equações em que $\omega_p = \omega_v$ formarão a primeira aproximação para soluções periódicas e podem ser utilizadas em métodos numéricos que garantem uma convergência em uma órbita halo, como é o caso da expansão de Richardson em terceira ordem.

3.3.1 – Expansão de Richardson em terceira ordem

A expansão de Richardson em terceira ordem leva em consideração o método de Lindstedt-Poincaré, que tem como base a ideia de que os termos correspondentes à não-linearidade alteram a frequência do sistema linear. Este método envolve sucessivos ajustes da frequência para evitar termos seculares (termos que crescem exponencialmente a cada iteração) e permite a obtenção de soluções periódicas aproximadas.

A utilização da expansão de terceira ordem dos polinômios de Legendre nas Equações (3.5) retornam:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\bar{x}} - 2\dot{\bar{y}} - (1 + 2c_2)\bar{x} &= \\
 \frac{3}{2}c_3(2\bar{x}^2 - \bar{y}^2 + \bar{z}^2) + 2c_4(2\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2 + 3\bar{z}^2) + O(4) \\
 \ddot{\bar{y}} + 2\dot{\bar{x}} - (c_2 - 1)\bar{y} &= \\
 -3c_3\bar{x}\bar{y} - \frac{3}{2}c_4\bar{y}(4\bar{x}^2 - \bar{y}^2 - \bar{z}^2) + O(4) \\
 \ddot{\bar{z}} + c_2\bar{z} &= -3c_3\bar{x}\bar{z} - \frac{3}{2}c_4\bar{z}(4\bar{x}^2 - \bar{y}^2 - \bar{z}^2) + O(4)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como mencionado, a igualdade $\omega_p = \omega_v$ resultará em uma primeira aproximação para as órbitas periódicas. Deste modo, as Equações (3.6) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\bar{x}} - 2\dot{\bar{y}} - (1 + 2c_2)\bar{x} &= 0 \\
 \ddot{\bar{y}} + 2\dot{\bar{x}} - (c_2 - 1)\bar{y} &= 0 \\
 \ddot{\bar{z}} + \omega_p^2\bar{z} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $\omega_p^2 = \omega_v^2 = c_2$. Portanto, estas equações lineares terão como aproximação inicial soluções (Equações 3.8) do tipo:

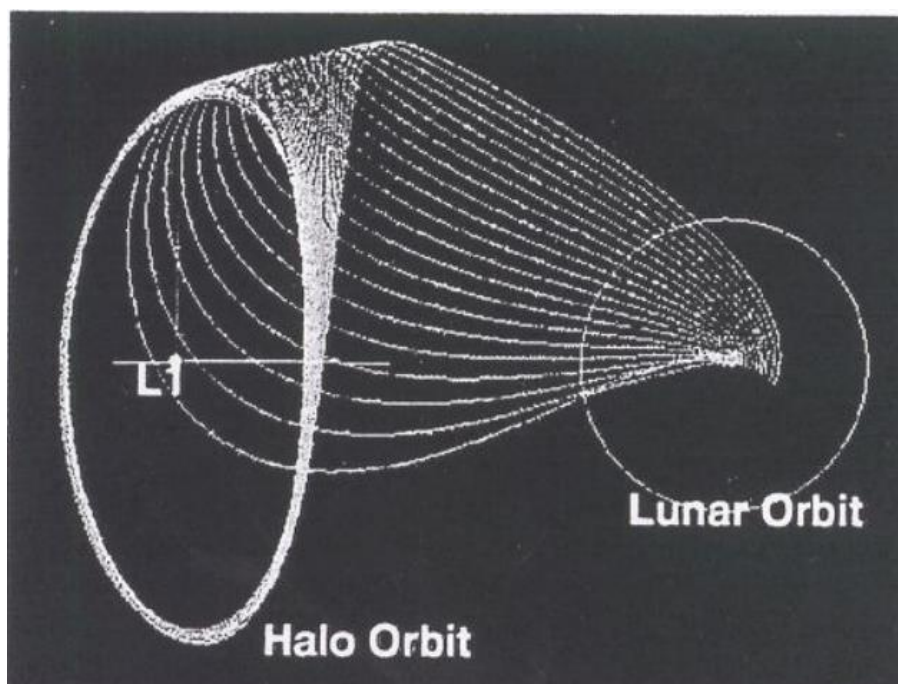
$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= -A_x \cos(\omega_p t + \varphi) \\
 \bar{y} &= \kappa A_x \sin(\omega_p t + \varphi) \\
 \bar{z} &= A_z \sin(\omega_p t + \psi)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

A introdução de novas variáveis independentes relacionadas com a frequência faz parte do método de Lindstedt-Poincaré. Dado o número de extensas equações e constantes

envolvidas no processo de derivação das novas equações de movimento, este método não será exposto neste relatório, mas será utilizado no processo de simulação computacional das órbitas periódicas, exibido nos subcapítulos de resultados.

Transferências orbitais de baixo custo energético envolvendo órbitas halo também podem ser realizadas. Como no problema planar, existem trajetórias que resultam da intersecção de variedades invariantes geradas pelas órbitas periódicas que residem nos pontos colineares. A diferença, neste caso, é que essas variedades se estendem por todo o espaço tridimensional, resultando em uma computação mais delicada. A Figura 3.2 ilustra algumas possibilidades de transferência entre órbitas no sistema Sol-Terra para a missão Genesis, da National Aeronautics and Space Administration (NASA).

Figura 3.2 - Conexão entre uma órbita terrestre e uma órbita halo para a missão Genesis



Nesta imagem, as variedades estáveis conectam uma órbita em volta da Terra com uma órbita halo em volta do ponto L1 do sistema Sol-Terra. É perceptível a intersecção dessas trajetórias com a órbita lunar. Logo, existem possibilidades de conexão entre trajetórias do sistema Terra-Lua e Sol-Terra, por exemplo, o que pode ocasionar em uma maior economia de propulsões. Essas trajetórias foram calculadas para a missão Genesis, que possuía o objetivo de coletar amostras do vento solar.

Fonte: (LO et al., 2000).

Uma aplicabilidade atual de órbitas halo em missões espaciais é na dinâmica do Telescópio Espacial James Webb. O equipamento está em uma órbita periódica em volta

do ponto L2 do sistema Sol-Terra, 1,5 milhão de quilômetros distante do planeta, como ilustrado na Figura 2.5.

O método para a computação das variedades invariantes também leva em conta o autoespaço das equações linearizadas – tema abordado no capítulo 2 – e encontra-se de forma detalhada em Lo, et al (2000), servindo como base para as simulações numéricas abordadas nos subcapítulos de resultados.

3.4 – Conclusões do capítulo

O Problema Restrito e Circular dos Três Corpos não apresenta um desenvolvimento tão trivial quanto a sua versão planar, porém sua aplicabilidade se estende a muitas outras possibilidades além das trajetórias estudadas em duas dimensões.

Apesar da inclusão de um terceiro eixo coordenado, as etapas que envolvem a solução da dinâmica linear das equações de movimento são as mesmas do problema planar, tratando-se de uma análise do autoespaço e dos tipos de autovalores e autovetores correspondentes. Percebe-se a presença de instabilidades no movimento, mas também um movimento oscilatório junto a coordenada espacial, o que confere a possibilidade de órbitas periódicas tridimensionais. As órbitas do tipo halo também possuem a característica da validade do teorema do espelho, o que torna sua integração mais simples.

Os resultados obtidos pela análise da linearidade das equações são utilizados como tentativas iniciais de soluções para as equações de movimento, que são reformuladas pela substituição dos termos não-lineares por polinômios de Legendre, amplamente utilizados em equações diferenciais parciais por suas conhecidas relações matemáticas. A expansão de Richardson em terceira ordem, aliada ao método de Lindstedt-Poincaré, confere a aproximação precisa de órbitas e trajetórias para o sistema de três corpos.

A aplicabilidade das soluções periódicas é extensa no contexto aeroespacial atual. Diversas missões ao longo do século XXI fizeram uso dos pontos lagrangianos e de suas órbitas halo como trajetórias-chave para seus objetivos. Exemplos citados no capítulo envolvem a missão Genesis e o Telescópio Espacial James Webb.

O próximo capítulo descreverá como se dá a conexão de diversos sistemas de três corpos por meio de aproximações sucessivas – formando, assim, uma trajetória integrada

em múltiplos sistemas. Além disso, o Problema de Quatro Corpos também será detalhado, determinando como este sistema pode ser útil na análise de sistemas conjuntos de três corpos.

Capítulo 4 – APROXIMAÇÕES DE TRÊS CORPOS (PATCHED THREE-BODY), PROBLEMA DE 4 CORPOS E MISSÕES MULTILUNARES NO SISTEMA JOVIANO

4.1 – Introdução

Missões espaciais interplanetárias foram introduzidas no setor espacial a partir da década de 1960, desenvolvidas em conjunto com as missões lunares. As primeiras missões interplanetárias contemplavam os planetas internos do Sistema Solar, Mercúrio e Vênus, por meio dos programas Venera e Mariner, projetos da União Soviética e dos Estados Unidos, respectivamente.

Usualmente, ao tratar-se de uma sonda ou espaçonave com uma trajetória interplanetária, considera-se a influência de um corpo do Sistema Solar por vez, o que depende da distância do veículo até o astro ponderado. Missões convencionais que adotam esse tipo de trajetória – que apresenta uma velocidade relativa a esses corpos muito alta – utilizam o denominado método de *Patched-Conics* – ou método das cônicas remendadas – que considera justamente a atração gravitacional de um corpo por vez durante a trajetória, emendando diversos sistemas de dois corpos em um caminho singular. Essa metodologia é inteiramente baseada no conceito de esfera de influência, semelhante ao conceito de regiões de Hill tratado no capítulo 2.

Essa aproximação, no entanto, torna-se inválida quando considerados encontros com baixa velocidade relativa, que são essenciais em trajetórias de baixa energia. Nesse caso, portanto, a sonda é influenciada gravitacionalmente com intensidade semelhante por mais de um corpo. É adequado, portanto, realizar uma análise dos sistemas sob a ótica do Problema Restrito e Circular dos Três Corpos, e conectá-los em uma trajetória interplanetária de um modo semelhante ao realizado no método das cônicas remendadas. A esta aproximação é dado o nome Aproximação Remendada dos Três Corpos.

Além da possibilidade do design de uma trajetória espacial utilizando múltiplos sistemas de três corpos, as soluções geradas pela Aproximação Remendada de Três Corpos são úteis para estudar o comportamento qualitativo de sistemas englobados pelo

Problema de Quatro Corpos – como o sistema joviano, quando considerada uma transferência entre Ganimedes e Europa, por exemplo, na qual deve ser considerado o sistema Júpiter-Ganimedes-Europa-espçonave. Esses sistemas podem ser analisados como dois sistemas de três corpos, unidos por meio de um ΔV (o remendo – ou *patch*).

Essas duas ferramentas expostas, a Aproximação Remendada de Três Corpos e o Problema de Quatro Corpos, podem ser usadas de forma conjunta em missões multilunares, como o exemplo fornecido do sistema joviano. Essas missões são úteis para estudar as diversas luas do astro gasoso na mesma trajetória, aproveitando-se das perturbações gravitacionais dos próprios corpos do sistema para culminar em uma missão eficiente e mais econômica.

Portanto, neste capítulo, serão tratados a Aproximação Remendada dos Três Corpos, as restrições impostas ao Problema de Quatro Corpos e o design de missões multilunares, conceitos que garantem as ferramentas necessárias à realização das simulações numéricas abordadas ao final deste relatório. Este capítulo terá como base as referências Lo, et al (2000), Curtis (2014), Koon, et al (2000) e Ikeda, et al (2023).

4.2 – Aproximação Remendada de Três Corpos

As missões espaciais interplanetárias já realizadas, como as missões Venera, Mariner, Pioneer, Voyager etc, não apresentaram grandes restrições energéticas quanto ao lançamento e as trajetórias adotadas, o que possibilitava o emprego de altas velocidades relativas aos corpos do Sistema Solar, atingidas por meio de grandes veículos lançadores e manobras de assistência gravitacional (*swing-bys*). As trajetórias de alta energia são modeladas utilizando o método de *Patched-Conics*, que conecta diversos sistemas de dois corpos em uma trajetória única, ou seja, considera-se a influência de um corpo massivo por vez.

Essa estratégia é baseada no conceito de esfera de influência, semelhante ao conceito de regiões de Hill tratado no Problema Restrito de Três Corpos. A esfera de influência corresponde à região do espaço na qual a influência gravitacional do corpo considerado é muito superior às dos outros corpos e, portanto, desprezam-se as outras perturbações gravitacionais. O raio da esfera de influência é dado pela relação:

$$r_{SOI} = R \left(\frac{m_p}{m_s} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (4.1)$$

onde R é o vetor posição do corpo secundário em relação ao corpo principal do sistema inercial, m_p é a massa do corpo secundário considerado (ex. planeta) e m_s é a massa do corpo principal (o Sol, por exemplo), de maior influência gravitacional. Note que a definição do tamanho da esfera de influência de um corpo depende da influência gravitacional do corpo principal. Em unidades adimensionais, o raio da esfera de influência é dado por:

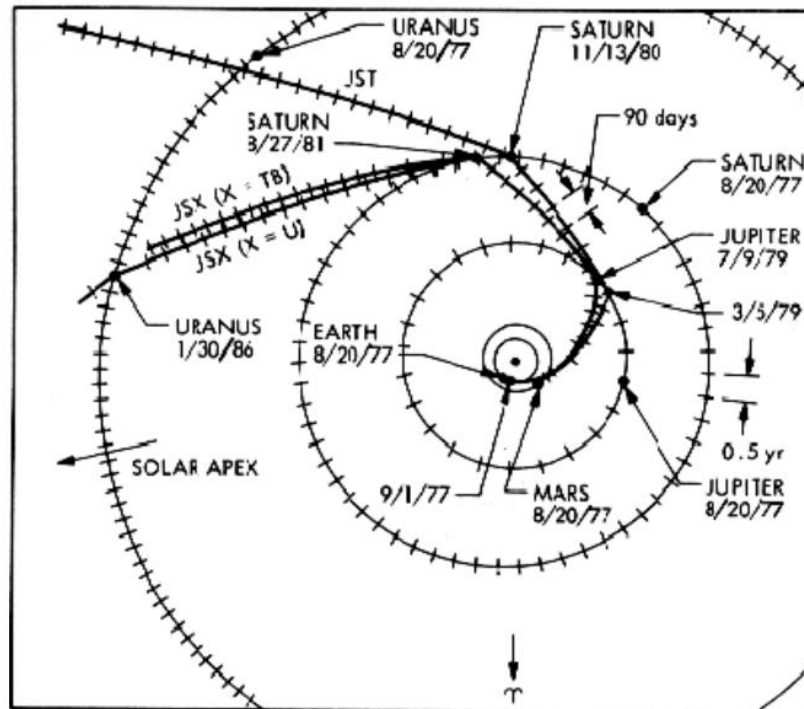
$$r_{SOI} = \mu^{\frac{2}{5}} \quad (4.2)$$

onde μ representa a razão de massas do sistema considerado.

Pode-se definir, então, a extensão dos sistemas de dois corpos, onde começa e termina a influência de um planeta, de uma lua ou do Sol e, assim, escolher os pontos de remendo (*patch points*) para conectar um sistema a outro. Esses pontos são localidades na qual é aplicada uma propulsão instantânea (ΔV), para que a espaçonave deixe a influência de um sistema e passe aos domínios de outro corpo.

O programa Voyager, da NASA, possuía como objetivo a exploração dos planetas externos do Sistema Solar e suas luas. Para atingir esse feito, as duas sondas aproveitaram-se de trajetórias descritas pelo método de *Patched-Conics*, que também continham em seu design assistências gravitacionais pelos planetas e luas, a fim de garantir a energia necessária para migrar da influência de um sistema para outro, como ilustrado na Figura 4.1.

Figura 4.1 - Trajetórias desenvolvidas para a sonda Voyager 2 pelo Sistema Solar exterior



Neste esquema, são consideradas duas trajetórias interplanetárias para a sonda Voyager 2 com destino à Urano, com flybys pelos sistemas de Júpiter e Saturno. A partir do lançamento da Terra, no dia 20/08/1977, a espaçonave poderia realizar duas trajetórias distintas para alcançar Urano, no entanto, as duas opções consideram swing-bys gravitacionais com Júpiter e Saturno para ganhar a energia necessária a migrar de sistemas.

Fonte: (KOHLHAZE; PENZO, 1977).

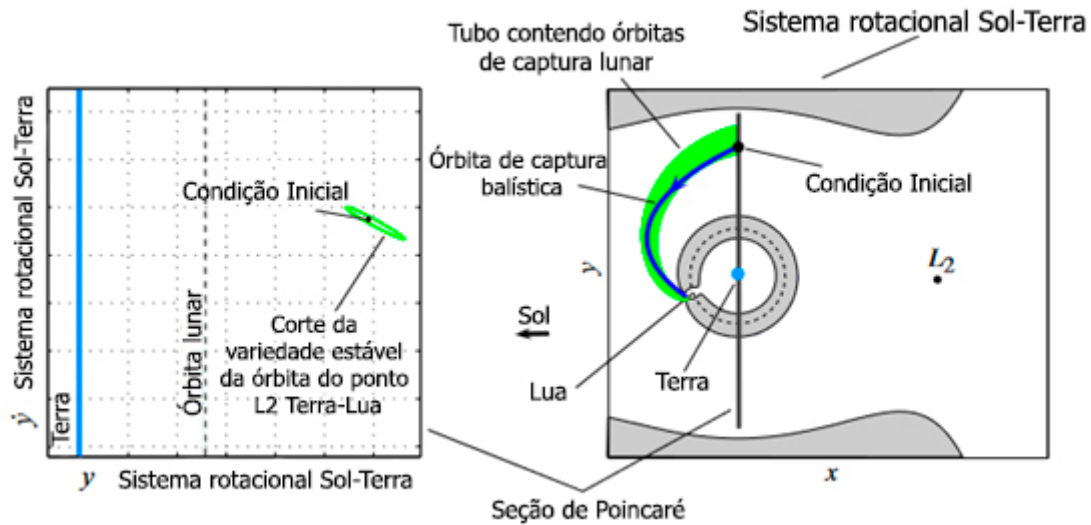
Essa aproximação, no entanto, é falha quando é considerado um encontro de baixa velocidade relativa – característica inerente às trajetórias de baixa energia. Nesta situação, existem influências gravitacionais da mesma ordem de magnitude que a atração do corpo principal exerce na espaçonave. Deste modo, ao aplicar o Problema Restrito e Circular dos Três Corpos, as perturbações gravitacionais de outros corpos massivos são levadas em conta no design da trajetória. A conexão de diversos sistemas de três corpos pode ser realizada da mesma forma que no método de *Patched-Conics*: por meio de um impulso instantâneo (ΔV) que transfere a espaçonave entre os sistemas. A trajetória final, então, pode ser integrada com mais precisão e levando em consideração até mesmo as variedades invariantes destes múltiplos sistemas. Essa aproximação é denominada “Aproximação Remendada dos Três Corpos”. Esse conceito pode ser aproveitado para construir uma transferência de baixa energia para a Lua a partir da Terra, considerando também a influência do Sol, ou uma trajetória de missão que orbite diversas luas de Júpiter.

Para fazer o design de uma trajetória, por exemplo, da Terra à Lua e que também se utilize das perturbações do Sol, pode-se dividi-la em duas partes: a primeira parte como solução do sistema Sol-Terra-espçonave, na qual a influência da Lua é negligenciada; a segunda parte como solução do sistema Terra-Lua-espçonave, onde, nesse caso, a influência do Sol não é levada em consideração. As duas partes, então, são conectadas por duas condições iniciais – que juntas formam o ponto de remendo. Essas condições estão em uma mesma localidade no espaço, mas diferem em valores energéticos: há uma discrepância nas velocidades, compensada por um ΔV , que conecta as duas porções em uma trajetória única. A evolução de uma condição inicial – seja ela, por exemplo, a do sistema Sol-Terra-espçonave – de forma retrógrada fornece a primeira etapa da trajetória, que inicia na vizinhança terrestre (podendo ser até uma órbita baixa em volta da Terra). A outra condição é integrada progressivamente, que pode resultar em uma trajetória com destino a uma órbita halo lunar.

A vantagem de modelar um sistema de quatro corpos em dois sistemas de três corpos é a possibilidade de utilização das variedades invariantes de ambos os sistemas na trajetória final. No caso de uma missão à Lua, isso confere uma considerável economia de combustível em relação à abordagem convencional adotada (transferência de Hohmann). As simulações realizadas em Lo, et al (2000) indicam uma economia de quase 20% na quantidade de combustível empregada em uma missão desse tipo.

Para achar as condições iniciais do ponto de remendo, utiliza-se uma seção de Poincaré para determinar onde ocorre a intersecção das variedades de ambos os sistemas. A Figura 4.2 ilustra uma seção de Poincaré posicionada no sistema Sol-Terra, em uma região na qual as variedades estáveis do ponto L2 Terra-Lua são determinadas. Quando integradas progressivamente, essas trajetórias podem levar a uma captura balística pelo satélite – ou seja, isto compreende a entrada do objeto na região de Hill lunar e a realização de uma órbita completa em volta da Lua.

Figura 4.2 – Seção de Poincaré do sistema Sol-Terra com intersecções do sistema Terra-Lua

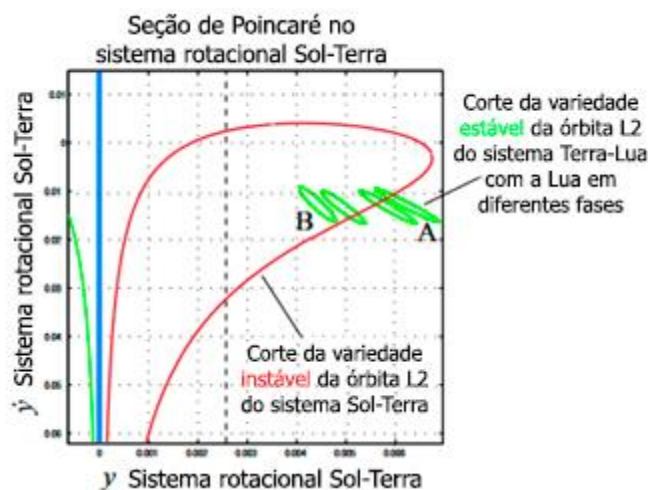


A seção de Poincaré é posicionada em uma coordenada x constante, na mesma localização da Terra. O “tubo” (em verde) formado pelas variedades estáveis do ponto L_2 Terra-Lua intersectam a seção em uma pequena região. A condição inicial interior a essa região, quando integrada progressivamente, gera uma trajetória com destino à órbita lunar.

Fonte: Adaptado de Lo, et al (2000).

A análise da variedade instável do sistema Sol-Terra e a sua intersecção com a variedade estável do sistema Terra-Lua também compreende as fases do satélite natural em sua órbita. Na fase lunar correta, a intersecção entre as variedades ocorre e apresenta-se mais vantajosa para o tipo de missão requerido, como exemplificado na Figura 4.3.

Figura 4.3 – Intersecção entre as variedades dos sistemas Sol-Terra e Terra-Lua conforme a fase lunar



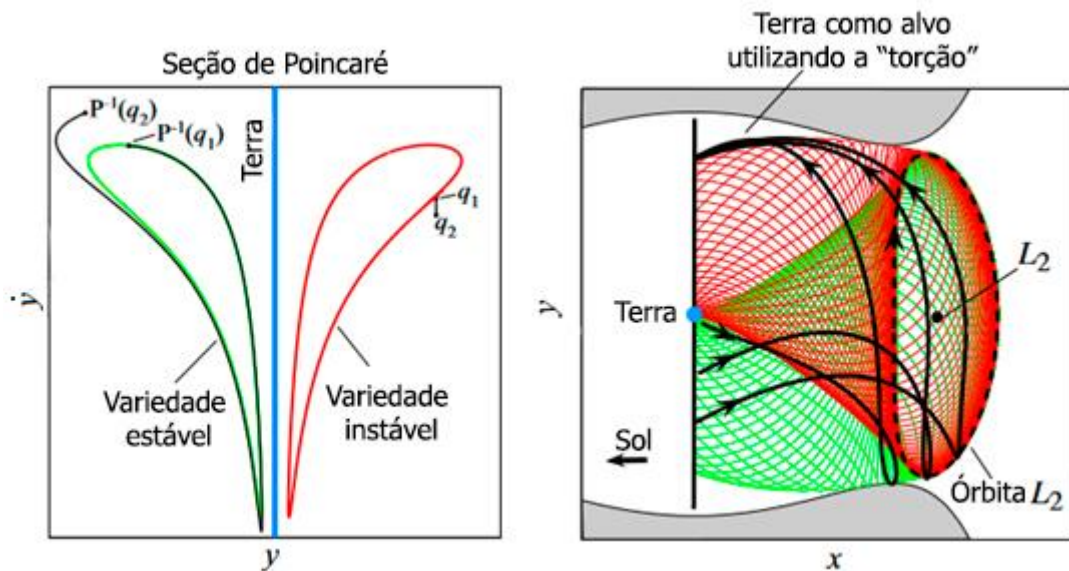
As intersecções entre as variedades invariantes variam conforme a fase da órbita lunar. A variedade estável do Sistema Sol-Terra (em verde, na extremidade esquerda do gráfico) não interessa ao tipo de

missão elaborada. Por outro lado, variedade instável (em vermelho) possui intersecções de características diversas com a variedade estável do sistema Terra-Lua (em verde).

Fonte: Adaptado de Lo, et al (2000).

A integração da variedade instável regressivamente no tempo gera a porção da trajetória que se aproxima da Terra. Para que a trajetória chegue até a região do ponto de remendo, é utilizada uma técnica conhecida como “torção” orbital (*twisting of orbits*). Basicamente, quão mais próxima a condição inicial estiver da superfície do tubo, mais a órbita será torcida quando sair da região de equilíbrio (proximidades do L2 Sol-Terra), como ilustrado na Figura 4.4. Qualquer variação infinitesimal pode alterar radicalmente o destino da órbita. Essa sensibilidade é positiva, pois pode garantir, por exemplo, uma integração de órbita com início em uma órbita terrestre com 200km de altitude.

Figura 4.4 - "Torção" de órbitas relacionada com a condição inicial próxima às variedades

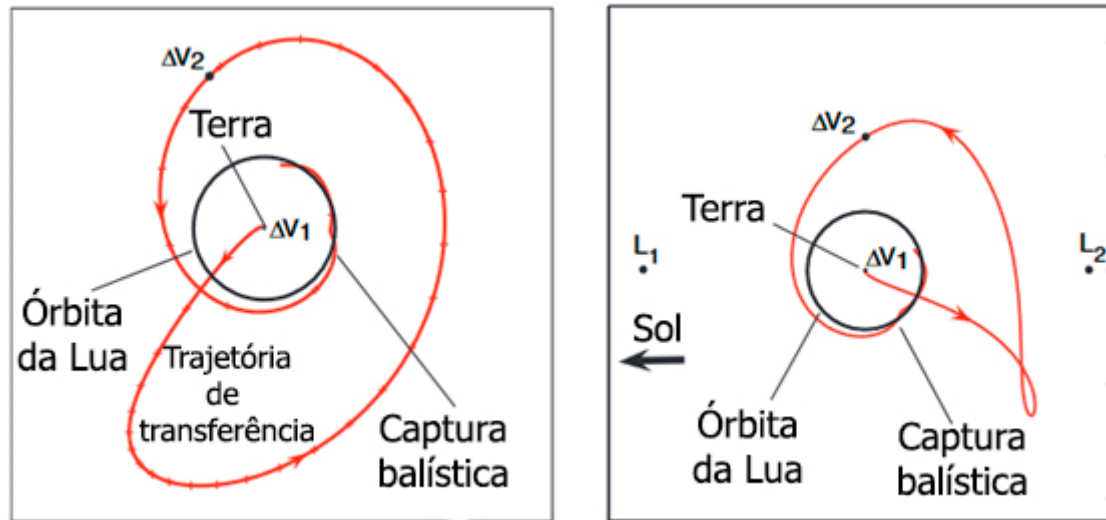


A condição inicial escolhida para o terceiro corpo determina o quanto a sua órbita será torcida, possibilitando atingir a localização desejada do espaço – nesse caso, o patch point. A sensibilidade das condições iniciais é tão grande que possibilita atingir uma órbita terrestre de 200km de altitude.

Fonte: Adaptado de Lo, et al (2000).

A condição inicial escolhida, então, originará uma trajetória que tem início em uma órbita terrestre, segue as variedades geradas na vizinhança do ponto L2 do sistema Sol-Terra, realiza uma torção em sua órbita e destina-se a uma órbita lunar, sendo o terceiro corpo capturado balisticamente pela Lua. A Figura 4.5 ilustra a trajetória obtida para a missão.

Figura 4.5 – Trajetória de transferência final entre uma órbita terrestre e lunar integrada pelo método da Aproximação Remendada dos Três Corpos, nos sistemas inercial e rotacional



A trajetória final é ilustrada no referencial geocêntrico inercial e no sistema rotacional, respectivamente. Um impulso inicial (ΔV_1) é necessário para que o terceiro corpo tenha a energia necessária para navegar pelos sistemas de três corpos. O impulso final (ΔV_2) é o ponto de remendo entre os sistemas Sol-Terra e Terra-Lua. A soma dos impulsos confere um valor inferior de gasto energético inferior ao obtido pela metodologia convencional – a transferência de Hohmann.

Fonte: Adaptado de Lo, et al (2000).

Na literatura (LO et al., 2000), o valor de impulso necessário no ponto de remendo foi de 34 m/s, extremamente pequeno se comparado aos impulsos adotados nas missões espaciais convencionais. A captura lunar balística, feita de forma natural pelo satélite, confere uma economia ainda maior à trajetória da missão, o que justifica o valor econômico obtido se comparado ao método de Hohmann.

4.3 – O Problema de Quatro Corpos e suas simplificações

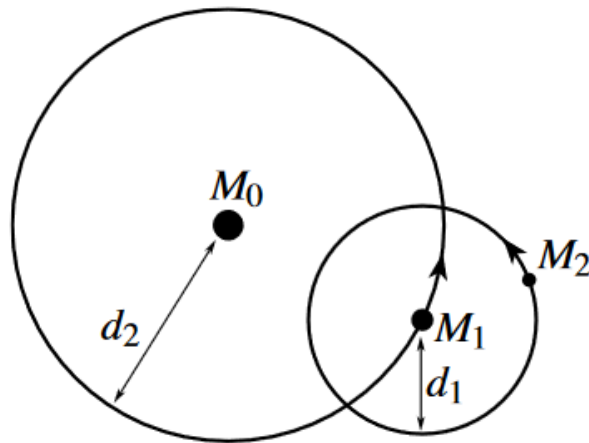
Do mesmo modo que os problemas de dois e três corpos, o Problema de Quatro Corpos tem como objetivo a determinação da dinâmica de um sistema com quatro objetos massivos, que exercem interações gravitacionais mútuas, dadas as condições iniciais de posição e velocidade.

É possível realizar suposições acerca dos sistemas de quatro corpos de forma a simplificar a dinâmica do sistema, como proposto no modelo Bicircular e no modelo Circular Concêntrico. As trajetórias obtidas na Aproximação Remendada dos Três Corpos são utilizadas como soluções qualitativas para alguns sistemas de quatro corpos

descritos nestes modelos, entre eles os sistemas Sol-Terra-Lua-espçonave e Júpiter-Ganimedes-Europa-espçonave. As restrições em ambos os modelos permitem estudar como o quarto corpo comporta-se sob a influência dos outros três, objetivo principal da astronáutica ao tentar determinar a trajetória de uma espçonave nestes sistemas.

O modelo Bicircular considera que dois corpos (M_1 e M_2) estão em movimento circular em torno de seu baricentro, que concentra toda a massa destes corpos, separados por d_1 . O baricentro do sistema M_1M_2 orbita o centro de massa formado por este sistema e o corpo central (M_0) em movimento circular de raio d_2 . Todos os corpos estão em um mesmo plano orbital. A Figura 4.6 ilustra esse modelo.

Figura 4.6 – Sistema contemplado pelo modelo Bicircular de Quatro Corpos

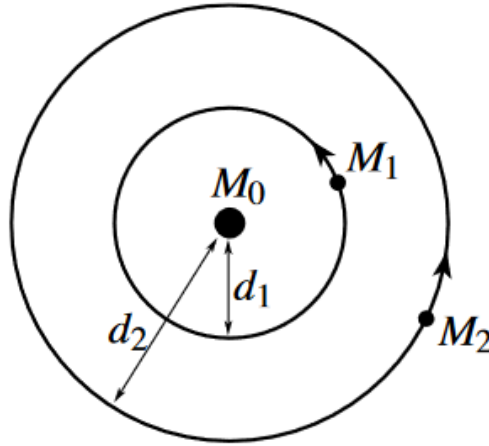


Fonte: (LO et al., 2000).

O sistema Sol-Terra-Lua-espçonave pode ser uma boa aproximação pelo modelo Bicircular de Quatro Corpos, apesar das diferentes inclinações e excentricidades orbitais. O comportamento qualitativo das trajetórias do quarto corpo é preservado nesta aproximação.

Já o modelo Circular Concêntrico contempla um corpo massivo central M_0 , na qual os outros dois corpos (M_1 e M_2) realizam órbitas com raios diferentes (d_1 e d_2 , respectivamente). Também, neste modelo, os corpos estão em um mesmo plano orbital. A Figura 4.7 representa o modelo descrito.

Figura 4.7 – Sistema contemplado pelo modelo Circular Concêntrico de Quatro Corpos



Fonte: (LO et al., 2000).

O sistema joviano é característico para aproximações que utilizem do modelo Circular Concêntrico de Quatro Corpos. Pode ser considerado, neste caso, o sistema Júpiter-Ganimedes-Europa-espçonave.

As equações de movimento dos dois modelos apresentam uma derivação mais delicada. Analisando, porém, o modelo Bicircular, suas equações variam de acordo com o sistema que está sendo estudado. Por exemplo, o sistema Sol-Terra-Lua-espçonave é estudado conforme duas etapas: a primeira engloba as equações de movimento Terra-Lua-espçonave em coordenadas sinódicas; a segunda é o estudo das equações de movimento Sol-Terra-espçonave, também em coordenadas rotacionais. No sistema Terra-Lua-espçonave, assume-se que a Terra e Lua estão movendo-se em órbitas circulares em torno de seu baricentro, com o Sol também descrevendo um círculo em torno do centro de massa. As unidades são normalizadas conforme o sistema Terra-Lua, de forma similar ao realizado no Problema Restrito e Circular dos Três Corpos. A distância Terra-Lua é igual a um, a massa da Lua é representada por μ , a da Terra por $1 - \mu$, a massa do Sol por M_s e seu semieixo maior por a_s . A velocidade angular do Sol é ω_s e a fase do Sol em $t = 0$ é θ_{s0} . Portanto, as equações de movimento são:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= u \\
\dot{y} &= v \\
\dot{u} &= x + 2v - c_E(x + \mu_M) - c_M(x - \mu_E) - c_S(x - x_S) - \alpha_S x_S \\
\dot{v} &= y - 2u - c_E y - c_M y - c_S(y - y_S) - \alpha_S y_S
\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde $c = \frac{\mu_i}{r_i^3}$, $i = M, E \text{ ou } S$, $\alpha_S = \frac{M_S}{a_S}$, $r_E = \sqrt{(x + \mu_M)^2 + y^2}$, $r_M = \sqrt{(x - \mu_E)^2 + y^2}$, $r_S = \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2}$, $\mu_E = 1 - \mu$, $\mu_M = \mu$, $x_S = a_S \cos(\theta_S)$, $y_S = a_S \sin(\theta_S)$, $\theta_S = -\omega_S t + \theta_{S0}$.

De modo similar, pode-se derivar equações de movimento para o sistema Sol-Terra-espçonave, modificando os parâmetros a fim de normalizar essas equações para o sistema desejado. A obtenção de uma trajetória no sistema Terra-Lua-espçonave pode ser transformada em uma trajetória no sistema Sol-Terra-espçonave por meio de análises matriciais. Ao final, portanto, uma integração de uma trajetória no sistema de quatro corpos Sol-Terra-Lua-espçonave é obtida.

Logo, como exemplificado pelo modelo Bicircular, uma trajetória desenvolvida por meio da Aproximação Remendada dos Três Corpos pode servir como base a uma trajetória integrada no Problema de Quatro Corpos, e o comportamento obtido na aproximação não se diferenciará bruscamente de uma órbita desenvolvida somente utilizando o modelo Bicircular, por exemplo.

4.4 – Missões multilunares no sistema joviano

As técnicas expostas nos subcapítulos anteriores culminam na possibilidade do desenvolvimento de missões de orbitadores de múltiplas luas, nomeado neste relatório de missões multilunares. A aplicação do Problema de Quatro Corpos no sistema joviano e, conseqüentemente, das Aproximações Remendadas de Três Corpos, promove o uso de transferências de baixa energia pelas luas do gigante gasoso, que podem ser aproveitadas para exploração das superfícies do satélite natural por meio do sensoriamento remoto ou até mesmo o envio de sondas a partir dos orbitadores.

Além disso, pode-se gerar uma família de trajetórias de transferências entre as luas deste sistema que diferem em tempo de voo (TOF – *time of flight*) e em ΔV , e estabelecer

uma relação entre esses dois parâmetros. Essas trajetórias, além de sujeitas às influências gravitacionais da luas e do planeta, também podem sofrer interferências de ressonâncias naturais de algumas luas galileanas (Io, Calisto, Europa e Ganimedes) do sistema joviano que, como um *swing-by*, podem aumentar ou diminuir a energia da espaçonave, o que caracteriza outra ferramenta que contribui na economia de combustível deste tipo de missão – viabilizada pela análise sob o espectro do Problema Restrito e Circular dos Três Corpos.

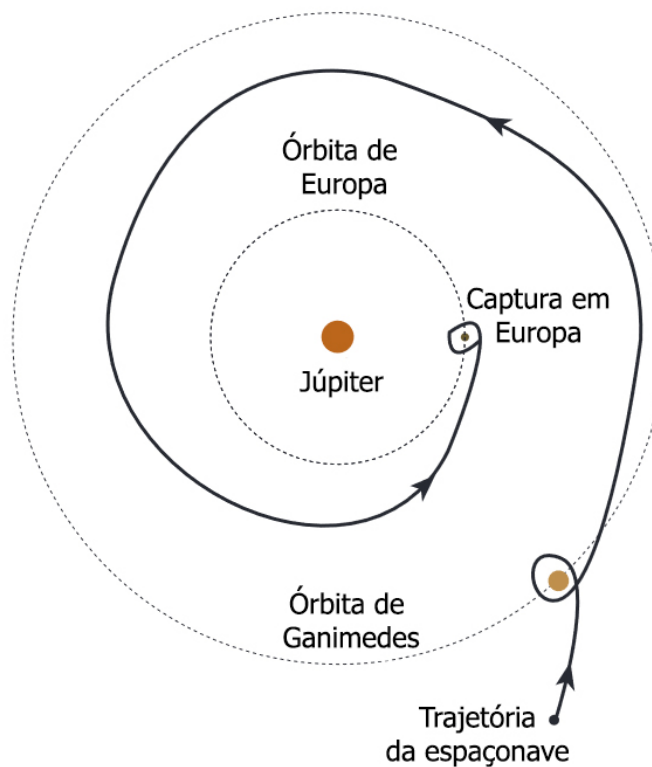
Como exemplo de uma aplicação de missão multilunar que utiliza das perturbações de três corpos – tratada com mais detalhes em Lo, et al (2000) e Koon, et al (2000), referenciada como *Petit Grand Tour* – seja um orbitador que inicia sua trajetória além da órbita da lua Ganimedes, realiza um voo próximo (*flyby*) pela lua e atinge uma órbita polar em volta de Europa. Essa missão, que consome menos combustível que uma missão convencional (baseada em trajetórias de dois corpos), pode ser abordada de acordo com as metodologias já expostas.

Primeiramente, deve-se considerar o sistema de quatro corpos Júpiter-Ganimedes-Europa-espaçonave como dois sistemas de três corpos: Júpiter-Ganimedes-espaçonave e Júpiter-Europa-espaçonave. Essa divisão permite o uso da Aproximação Remendada de Três Corpos, que viabiliza trajetórias com base nas variedades invariantes geradas pelas órbitas em volta dos pontos colineares L1 e L2 dessas luas.

Deste modo, as variedades do sistema Júpiter-Ganimedes-espaçonave serão utilizadas para achar uma órbita além de Ganimedes que seja capturada temporariamente por essa lua e, posteriormente, deixe sua vizinhança para uma órbita interior à lua. Em seguida, faz-se o uso das variedades do ponto L2 do sistema Júpiter-Europa para que uma trajetória que envolva uma captura temporária em volta dessa lua seja realizada. Por fim, uma queima impulsiva colocará o orbitador em uma órbita polar no satélite.

A conexão entre os dois sistemas é realizada por um ΔV no *patch-point*, de forma que a trajetória final seja integrada e aplicável ao sistema de quatro corpos como um todo, como ilustrado na Figura 4.8.

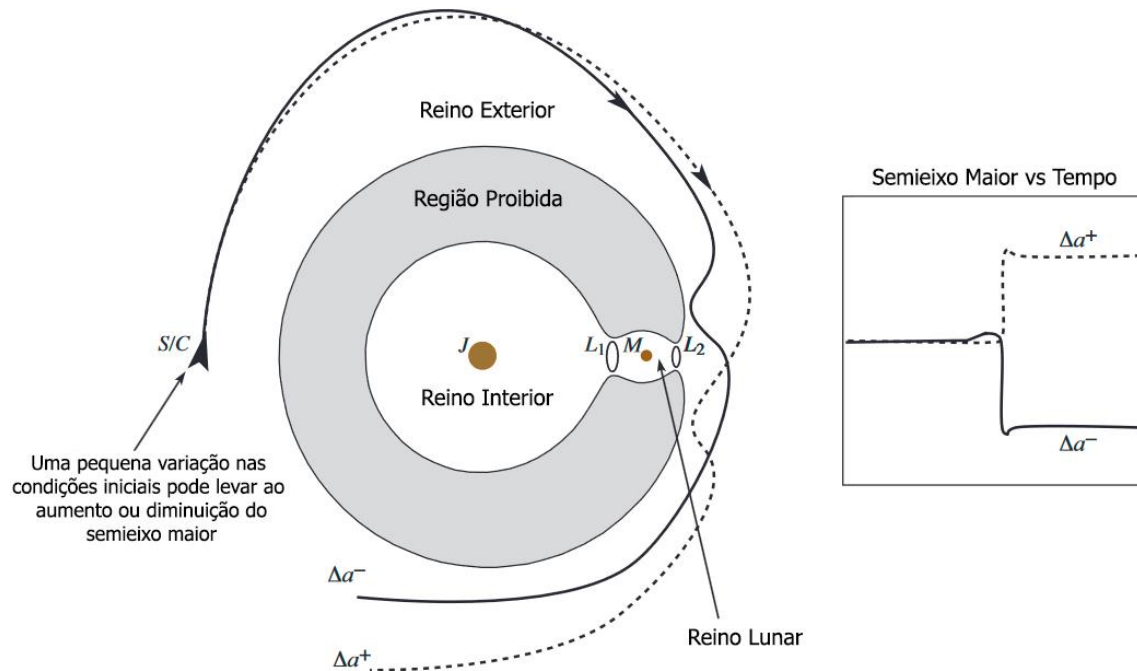
Figura 4.8 – Exemplo de trajetória final para o sistema Júpiter-Ganimedes-Europa-espçonave



Fonte: Adaptado de Koon, et al (2000) .

As ressonâncias orbitais características das luas Io, Europa e Ganimedes constituem uma vantagem na elaboração de missões de baixa energia, visto que o semieixo orbital do terceiro corpo em relação a Júpiter pode aumentar ou diminuir de acordo com as condições iniciais estabelecidas e a influência destas ressonâncias, conforme ilustrado nas Figuras 4.9 e 4.10.

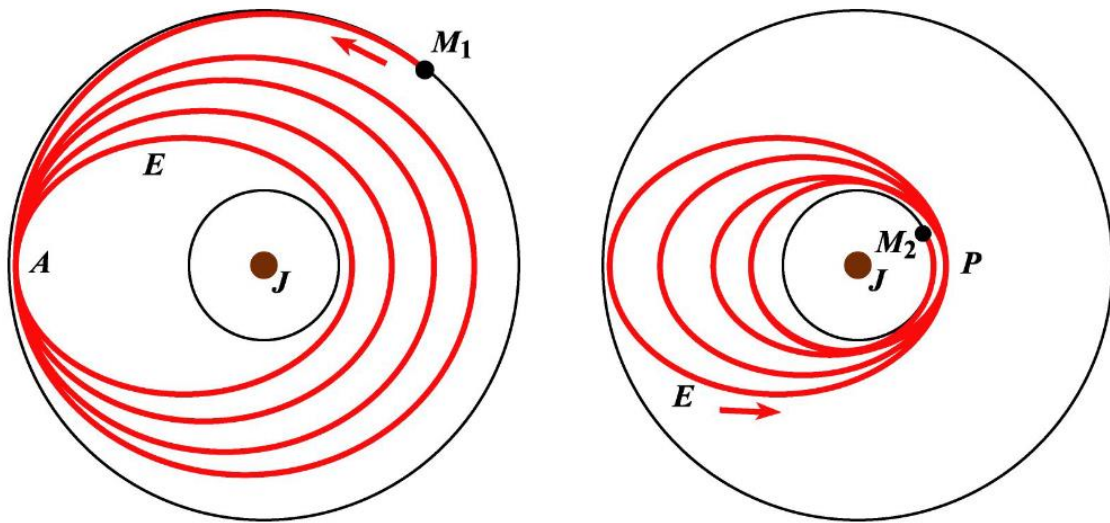
Figura 4.9 – Variação da energia de uma órbita por meio de ressonâncias orbitais no sistema joviano



As condições iniciais da espaçonave determinam como ela será afetada pelas ressonâncias orbitais de outras luas no sistema joviano. Esta característica pode ser aplicada para o exemplo de transferência entre Ganimedes e Europa, pois ao deixar a esfera de influência de Ganimedes, a ressonância desta lua exterior pode diminuir os custos para que a espaçonave atinja uma órbita em volta de Europa, de órbita mais interna.

Fonte: Adaptado de Lo, et al (2000).

Figura 4.10 - Transferência entre satélites galileanos assistidas por ressonâncias gravitacionais

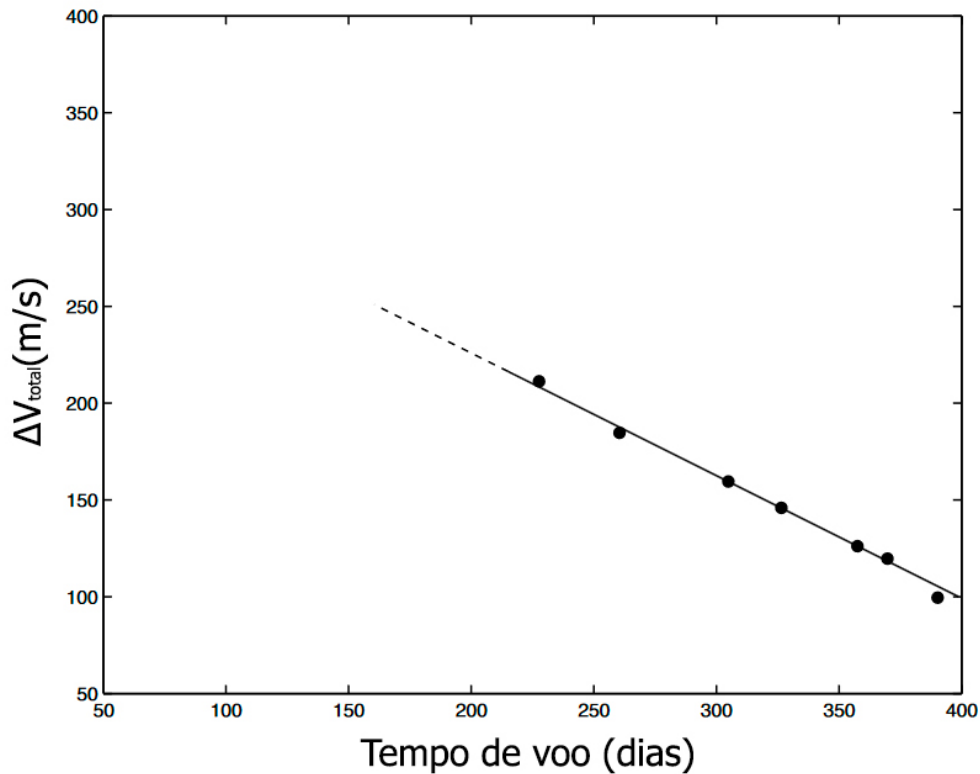


A primeira imagem (à esquerda) ilustra a trajetória da espaçonave após a saída da vizinhança de M_1 (ex. Ganimedes), que passa a ser influenciada pelos efeitos de três corpos em uma órbita elíptica em volta de Júpiter (J). A espaçonave tem sua energia alterada pelas ressonâncias gravitacionais de M_1 ao passar pelo ponto A. A medida em que a espaçonave diminui sua órbita, ela passa a ser perturbada pela lua interna M_2 (ex. Europa) onde, na segunda imagem (à direita), evidencia-se sua trajetória com semieixo maior diminuindo após assistências gravitacionais de M_2 no ponto P. Ao final, a espaçonave é capturada balisticamente por M_2 .

Fonte: (LO et al., 2000).

Os resultados encontrados para o *Petit Grand Tour* – contidos em Lo, et al (2000) e Koon, et al (2000) – comparam o ΔV_{total} necessário para que a trajetória seja integrada e o tempo de voo total no sistema joviano. O impulso total é constituído pela soma do impulso necessário para sair de uma órbita em volta de Ganimedes e do impulso requerido para adentrar uma órbita em volta de Europa. A relação ΔV_{total} e TOF é dada pela Figura 4.11.

Figura 4.11 – Relação entre ΔV_{total} e tempo de voo para o Petit Grand Tour



O gráfico ilustra uma tendência linear entre o impulso total requerido para as transferências entre os satélites do sistema joviano e o tempo requerido, conforme obtido em Lo, et al (2000) e Koon, et al (2000). É notável como o incremento no gasto de combustível corresponde a uma queda significativa no tempo de missão.

Fonte: Adaptado de Lo, et al (2000).

4.5 – Conclusões do capítulo

Missões interplanetárias são historicamente referenciadas como missões de orçamento robusto, grande parte dele ligado ao veículo lançador e a propulsão inicial fornecida a espaçonave. No decorrer das missões, são utilizadas técnicas de transferência descritas por sistemas de dois corpos (*Patched-Conics*) – que funcionam bem para missões de alta energia. No entanto, as trajetórias de baixa energia não são restritas à apenas missões na vizinhança terrestre – são aplicáveis ao Sistema Solar como um todo.

As metodologias expostas neste capítulo, como a Aproximação Remendada de Três Corpos e os sistemas englobados pelo Problema de Quatro Corpos, conferem vias alternativas no design de missões interplanetárias, e se aproveitam de perturbações gravitacionais para minimizar os gastos propulsivos – conceito que se torna passível de

utilização apenas quando considerados regimes menos energéticos. Esta aproximação promove análises da dinâmica de sistemas simplificados de quatro corpos, e garante soluções que podem ser usadas na astronáutica.

Uma dessas soluções envolve a possibilidade de uma missão com um orbitador multilunar, aplicável para sistemas como o de Júpiter e seus satélites galileanos. Os canais dinâmicos gerados pelas variedades invariantes dos sistemas de três corpos podem ser estudados e conectados entre si por meio da aproximação remendada, gerando uma trajetória integral e solução de um sistema de quatro corpos contido no joviano, como o sistema Júpiter-Ganimedes-Europa-espaçonave. Outros conceitos também podem ser proveitosos neste caso, como as ressonâncias gravitacionais e swing-bys, que alteram a energia do terceiro corpo sem impulsos extras.

É evidente que o tempo de voo e o gasto energético estão diretamente associados. Porém, a utilização das ferramentas expostas nesse capítulo minimizam os gastos convencionais em missões interplanetárias, e garantem um uso mais pontual, com menos correções, de modo que o tempo de voo também possa ser otimizado mesmo em trajetórias de baixo custo energético.

Os conceitos estudados neste e nos outros capítulos garantem as ferramentas necessárias para aplicações da teoria em simulações numéricas, expostas no capítulo de resultados. Isto permite a validação das trajetórias de baixa energia geradas no sistema Terra-Lua com destino ao sistema joviano, e a comparação com as missões que também possuem o objetivo de explorar o gigante gasoso e suas luas, mas que fazem uso de trajetórias altamente energéticas e custosas.

Capítulo 5 – RESULTADOS

5.1 – Introdução

Nos capítulos anteriores, fundamentações acerca do movimento de um veículo espacial foram apresentadas sob a ótica de diversos tipos de sistemas: a dinâmica segundo o Problema de Dois Corpos e o método de *Patched-Conics*; o deslocamento conforme o Problema Restrito e Circular de Três Corpos, em sua versão planar e espacial; e a aplicação da Aproximação Remendada de Três Corpos para análise da movimentação do V/E em um regime de quatro corpos. Estes conceitos, unidos, conferem poderosas ferramentas para a elaboração de missões espaciais de diversos tipos, seja um orbitador restrito ao sistema Terra-Lua ou uma espaçonave interplanetária direcionada à exploração de Júpiter e de seus satélites.

O sistema joviano, diversas vezes mencionado neste relatório, sempre foi alvo de especulações e estudos pela humanidade, desde os tempos mais remotos até após a corrida espacial. Antigamente, pensava-se que o gigante gasoso influenciava os humores e pretensões humanas. No entanto, atualmente, sabe-se que Júpiter possui uma ligação muito mais bela e profunda com a formação do Sistema Solar e com a vida: o planeta gasoso deflete asteroides de suas trajetórias, ora impedindo uma colisão com a Terra, ora provocando-a – a água e substâncias orgânicas podem ter múltiplas origens em sua abundância terrestre. Entre elas, a colisão de asteroides e cometas ricos nestes compostos com o planeta.

Galileu Galilei, ao apontar a sua luneta recém-aprimorada aos céus, desmistificou a astronomia e avançou ainda mais na compreensão do sistema joviano. Júpiter era acompanhado por quatro outros grandes satélites – Io, Europa, Ganimedes e Calisto – conhecidos atualmente como “luas galileanas”. Estas luas compõem um dos focos atuais da comunidade científica: Europa, Ganimedes e Calisto possuem grandes quantidades de substâncias orgânicas e evidências de oceanos de água líquida em seus interiores, ingredientes necessários para o surgimento da vida (como é conhecida na Terra).

Diversas missões espaciais tiveram como um de seus objetivos a exploração do sistema joviano. As sondas Pioneer 10 e 11 e o programa Voyager, ambas operadas pela NASA, consistem nas primeiras tentativas bem-sucedidas do sobrevoo do planeta e de suas luas. As missões Galileo e Juno constituem exemplos mais recentes de sondas capazes de orbitá-lo e realizar voos próximos por suas luas. No entanto, todas estas missões possuíam trajetórias interplanetárias de alto custo energético, baseadas no método de *Patched-Conics* e derivados.

Portanto, é de grande interesse a aplicação dos conceitos fundamentados neste relatório em simulações numéricas, que avaliem a viabilidade das trajetórias de baixa energia como método alternativo de deslocamento de veículos espaciais interplanetários com destino ao sistema joviano, baseadas na aplicação do Problema Restrito e Circular de Três Corpos e de suas dinâmicas naturais, como as variedades invariantes, derivadas das sutis estabilidades destes sistemas.

Este capítulo descreve as trajetórias “convencionais” adotadas em missões para o sistema joviano e dispõe seus dados numéricos (gastos energéticos e tempo de voo), à fim de desenvolver uma comparação com as simulações de trajetórias de baixa energia existentes no sistema Terra-Lua e no sistema joviano, realizadas pelo aluno em software MATLAB. Essas simulações envolvem a aplicação do Problema Restrito e Circular de Três Corpos nestes sistemas, com a integração de órbitas periódicas (halo) em volta dos pontos lagrangianos; o cálculo das variedades invariantes associadas a estas órbitas e suas conexões com outros sistemas; a obtenção de mapas de Poincaré para análise das condições iniciais que permitem a integração de trajetórias de transferências entre regiões do espaço; e a integração de trajetórias nos sistemas Terra-Lua e Sol-Terra. A conexão entre o sistema terrestre e o joviano e os dados de deslocamento de baixa energia por Júpiter e suas luas serão posteriormente determinados por simulações numéricas em MATLAB.

As simulações numéricas realizadas foram, em sua grande parte, baseadas no livro Lo, et al (2000) e nos códigos desenvolvidos pelo Prof. Dr. Shane D. Ross, coautor do livro, disponíveis para acesso público em seu sítio na *internet* (ROSS, 2024).

5.2 – Missões convencionais para o sistema joviano

As missões interplanetárias que possuíam como um de seus objetivos a exploração de Júpiter e de suas luas foram e são, historicamente, missões de grandes orçamentos e atenta observação pela comunidade científica. O tempo é um fator crucial para a aprovação e manutenção de operações das missões e, em muitos casos, é preterido em relação ao gasto energético.

O programa Voyager, mencionado no capítulo 4, almejava a exploração do sistema joviano durante sua passagem. Foram as primeiras sondas interplanetárias a fotografarem o planeta e parte de suas luas em alta resolução, e carregavam consigo instrumentos científicos valiosos que não poderiam apresentar uma exposição excessiva à radiação cósmica. Portanto, o deslocamento das Voyagers no espaço interplanetário deveria ser realizado em um tempo hábil e aproveitando-se do raro alinhamento entre os planetas gasosos do Sistema Solar, o que contribuiu para a redução do tempo de chegada da Voyager 2 à Netuno para 12 anos, ao invés de 30, por exemplo.

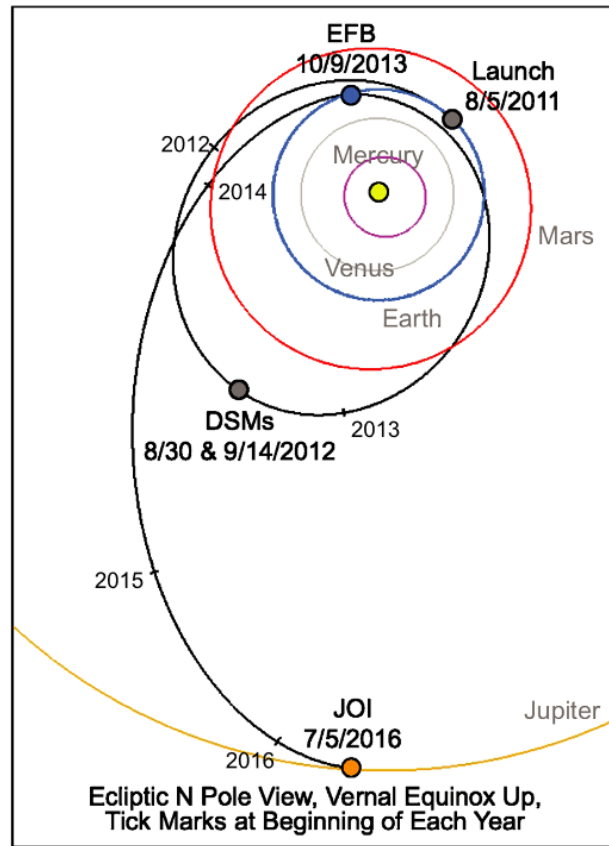
As trajetórias das Voyagers são compostas por dois tipos de manobras: a transferência de Hohmann (calculada pelo método de *Patched-Conics*) e as manobras de assistência gravitacional. Segundo Doody (2009), a Voyager 1 separou do estágio *Centaur* a 200km de altitude. De acordo com os dados de efemérides astronômicas calculados pelo Laboratório de Propulsão a Jato (*Jet Propulsion Laboratory – JPL*), a sonda partiu com uma velocidade de 14,447 km/s (GIORGINI et al., 2024) em relação à Terra, suficiente para libertar-se das amarras gravitacionais do planeta (aproximadamente 11,18 km/s) (SPOHN et al., 2014). Então, adentrou uma trajetória de Hohmann em direção à Júpiter, semelhante ao ilustrado na Figura 4.1. Em relação ao baricentro do Sistema Solar, sua velocidade inicial era de 43,565 km/s. Já seu afélio orbital, de 754 milhões de quilômetros.

A sonda Voyager 1 foi lançada no dia 5 de setembro de 1977, e chegou ao sistema joviano em 5 de março de 1979, após 546 dias, ou 18 meses. Após o encontro com o gigante gasoso, foi impulsionada em direção à Saturno por meio de uma assistência gravitacional e seguiu missão.

A missão Juno é um exemplo mais recente na exploração do sistema joviano. Possui como seus objetivos a determinação da formação do planeta; o mapeamento dos campos magnético e gravitacional; o estudo das variações atmosféricas e do interior, entre outros. Em sua concepção, no entanto, não foi considerado o uso de um veículo lançador com estágios poderosos o suficiente para a inserção da sonda em uma trajetória interplanetária diretamente à Júpiter, como realizado com as Voyagers.

Logo, as trajetórias desenvolvidas para esta missão foram calculadas com diversas assistências gravitacionais, a fim de desempenhar o incremento de energia necessário para a sonda deslocar-se a Júpiter. A trajetória final utilizada para esta missão foi denominada “Assistência gravitacional terrestre delta-vega” (delta-vega Earth Gravity Assist – ΔV -EGA trajectory). É composta por duas manobras de espaço profundo (Deep Space Maneuvers) – manobras que fornecem um grande ΔV para preparar para uma manobra de assistência gravitacional – e um *swing-by* com a Terra. A Figura 5.1 ilustra a trajetória da missão.

Figura 5.1 – Trajetória da sonda Juno do lançamento da Terra até a inserção orbital em Júpiter



A trajetória da missão Juno possui duas manobras de espaço profundo (DSMs) e uma manobra de assistência gravitacional com a Terra (EFB), para alcançar a energia necessária a fim de chegar em Júpiter para realizar a manobra de inserção orbital (Jupiter Orbital Insertion – JOI). A visão é perpendicular ao Sistema Solar (considerando-o contido em um único plano), e cada traço na órbita representa a passagem de um ano.

Fonte: (BOLTON et al., 2017).

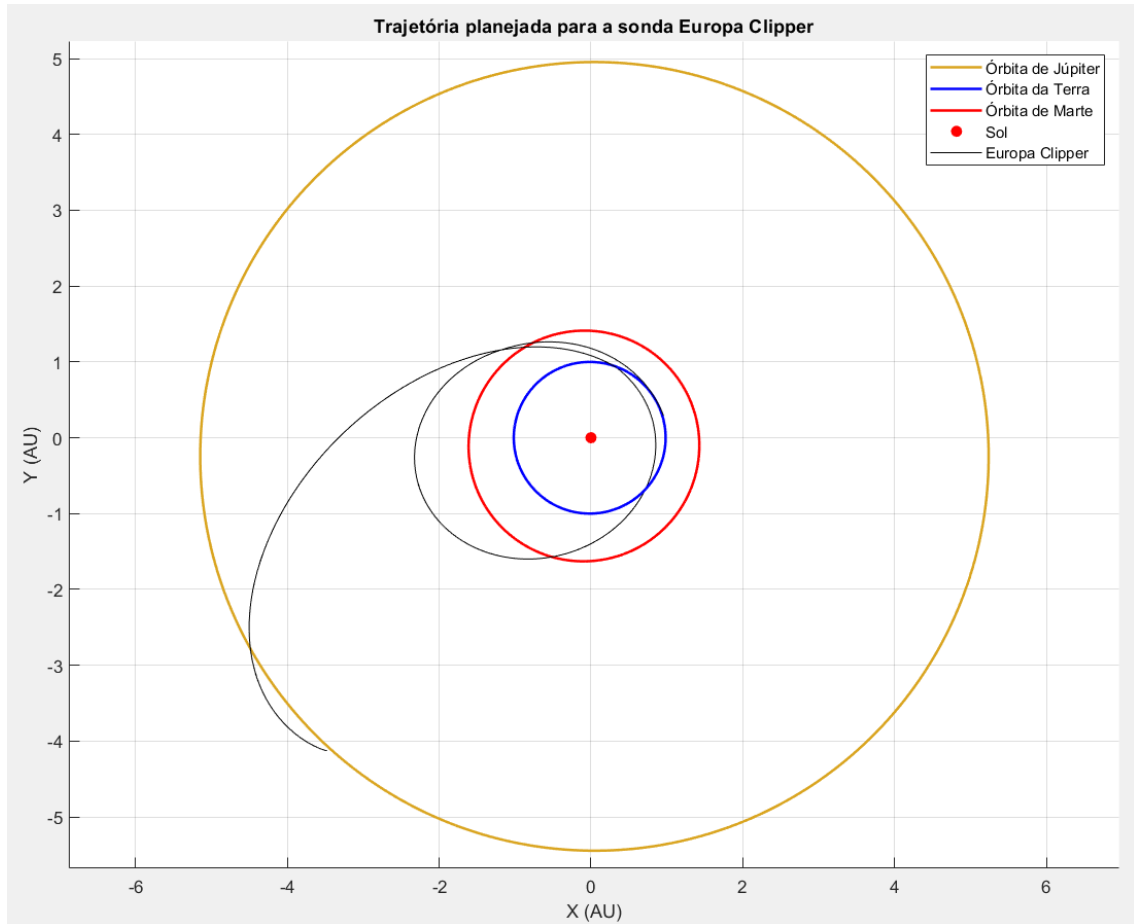
A espaçonave foi lançada no dia 05 de agosto de 2011, pelo foguete Atlas V, que forneceu uma velocidade de aproximadamente 11,584 km/s em relação à Terra, suficiente para adentrar uma órbita heliocêntrica – em relação ao baricentro do Sistema Solar, partiu com uma velocidade de 40,815 km/s (GIORGINI et al., 2024). Nos dias 30 de agosto e 3 de setembro de 2012, a espaçonave performou duas manobras de espaço profundo, com um incremento de velocidade total de 0,7372 km/s. A assistência gravitacional com a Terra, ocorrida em 9 de outubro de 2013, forneceu um incremento de aproximadamente 3,71 km/s, o que permitiu a inserção da espaçonave em uma órbita heliocêntrica com afélio próximo à posição de Júpiter. Por fim, a espaçonave realizou a manobra de inserção orbital em 5 de julho de 2016, performada com $\Delta V = 0,5417$ km/s. Toda esta trajetória

apresentou uma duração de 1.796 dias, aproximadamente 59 meses. (GIORGINI et al., 2024)

Por fim, a missão Europa Clipper é o primeiro projeto espacial focado na exploração da lua joviana Europa, um dos corpos celestes do Sistema Solar com maiores chances de vida extraterrestre, dada a presença de compostos orgânicos e químicos compatíveis com a vida, e um oceano de água embaixo de sua crosta congelada, possibilitado pela energia térmica advinda das marés gravitacionais oriundas de Júpiter.

A trajetória interplanetária desta sonda é semelhante à missão Juno, pois também faz uso de manobras de assistência gravitacional para adquirir a energia necessária para alcançar a órbita de Júpiter. O lançamento é planejado para o dia 10 de outubro de 2024, com uma velocidade inicial em relação a Terra (após o escape) de 6,668 km/s (GIORGINI et al., 2024) e em sua trajetória ocorrerão dois encontros com assistência gravitacional: um *swing-by* com Marte (dados energéticos indisponíveis), em Fevereiro de 2025, e um *swing-by* com a Terra, de $\Delta V = 3,704$ km/s (GIORGINI et al., 2024) em Dezembro de 2026. A inserção orbital no sistema joviano está programada para o dia 11 de abril de 2030, após 2009 dias ou 66 meses. A Figura 5.2 ilustra a trajetória planejada da espaçonave pelo Sistema Solar.

Figura 5.2 - Trajetória interplanetária planejada para a sonda Europa Clipper no referencial heliocêntrico



A Figura, gerada em MATLAB, ilustra a trajetória interplanetária da sonda Europa Clipper no referencial heliocêntrico e em relação às órbitas da Terra, Marte e de Júpiter. É notável os encontros de assistência gravitacional com os planetas Marte e Terra em diferentes momentos de sua trajetória. Os elementos orbitais dos planetas foram extraídos de (SPOHN et al., 2014) e (GIORGINI et al., 2024), enquanto a trajetória da sonda foi extraída das efemérides, disponíveis em (GIORGINI et al., 2024).

Fonte: elaboração própria.

Os dados acerca do gasto energético e do tempo de voo de todas estas missões estão dispostos na Tabela 1.

Tabela 5.1 - Gasto energético e tempo de voo de missões convencionais até o sistema joviano (não considera a manobra de inserção orbital)

Missão	Tipos de trajetórias interplanetárias até Júpiter	Velocidade inicial (referencial geocêntrico – em km/s)	Gasto energético em manobras (ΔV_{total} – em km/s)	Tempo de voo total (em dias/meses/anos)
<i>Voyager 1</i>	Hohmann/Patched-Conics	14,447	-	546/18/1,5
<i>Juno</i>	2 DSM; ΔV -EGA (Swing-by com a Terra)	11,584	4,472	1796/59/4,9
<i>Europa Clipper</i>	2 Swing-bys (Marte e Terra)	6,668	3,704	2009/66/5,5

Fonte: elaboração própria.

Dispostos os gastos energéticos e o tempo total de voo para as missões convencionais, o objetivo das simulações computacionais é a aplicação de toda a fundamentação teórica acerca das trajetórias de baixa energia em uma missão para Júpiter e suas luas, partindo do sistema Terra-Lua, utilizando-se principalmente das variedades invariantes geradas pelas órbitas periódicas em volta dos pontos Lagrangianos dos respectivos sistemas. Para isso, a obtenção da trajetória final será dada pela sua segmentação em etapas: a integração da trajetória no sistema Terra-Lua, partindo de uma órbita baixa terrestre, cruzando os pontos L1 e L2 e alcançando uma órbita halo em volta do ponto L2 do sistema Sol-Terra; a integração de uma trajetória no sistema joviano, na qual seja desempenhada uma transferência entre luas galileanas (ex. Ganimedes e Europa, Europa e Io) utilizando a Aproximação Remedada de Três Corpos; por fim, a viabilidade da conexão entre os sistemas terrestre e joviano por meio das variedades invariantes será analisada, juntamente da simulação por assistências gravitacionais.

5.3 – Simulação de trajetórias de baixa energia originadas no sistema Sol-Terra-Lua

A simulação das trajetórias na vizinhança envolve a aplicação do Problema Restrito e Circular dos Três Corpos nos sistema Terra-Lua e Sol-Terra, unidos pela Aproximação Remedada de Três Corpos.

Inicialmente, para o sistema Terra-Lua, é feita a transformação do sistema para as coordenadas rotacionais. A distância entre as primárias é normalizada, ou seja, resultará em 1. Logo, 1 unidade de distância equivale a $L = 384.400$ km, tomando a distância média entre a Terra e a Lua (SPOHN et al., 2014). A razão mássica (Equação 2.3) é $\mu \cong 0,01215$ (LO et al., 2000). Logo, seguindo os procedimentos descritos no capítulo 2, temos que as massas da Terra e da Lua são:

$$\mu_1 = 1 - \mu = 0,98795, \quad \mu_2 = \mu = 0,01215 \quad (5.1)$$

A origem desse sistema de coordenadas rotacional (Figura 2.1) corresponde ao baricentro do sistema Terra-Lua. Logo, a Terra está localizada a uma distância de $-\mu$ do centro de massa, enquanto a Lua, $1 - \mu$.

Como explorado no capítulo 2, a energia do terceiro corpo deve estar contida no terceiro caso (Figura 2.2) para que a transferência entre as órbitas em volta dos pontos L_1 e L_2 seja possível. Essa energia está no intervalo entre a energia para navegar até o ponto L_2 e pelo ponto L_3 ($E_{L_2} < E < E_{L_3}$). Para determinar essa quantia, é necessário determinar as posições dos pontos colineares neste sistema, dadas pelas resoluções das Equações (2.36). Para o sistema Terra-Lua, temos os seguintes vetores posição (em x,y,z):

$$\begin{aligned} L_1 &= [0,8369, 0, 0] \\ L_2 &= [1,1557, 0, 0] \\ L_3 &= [-1,0051, 0, 0] \end{aligned} \quad (5.2)$$

A energia do ponto L_2 quanto a do ponto L_3 pode ser determinada tanto em termos da integral de Jacobi (Equação 2.21) – equivalente à energia do terceiro corpo – ou da constante de Jacobi (Equação 2.27). As energias e as constantes de Jacobi destes pontos são:

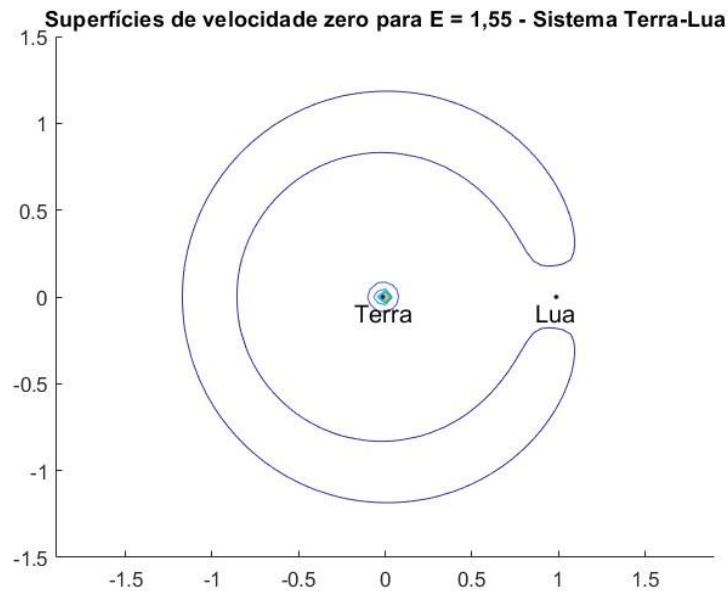
$$\begin{aligned} E_{L_2} &= -1,7629 \\ E_{L_3} &= -1,5233 \\ C_{L_2} &= 3,5257 \\ C_{L_3} &= 3,0467 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dados os valores de energia dos pontos colineares das Equações 5.3, o valor selecionado para a energia do terceiro corpo é:

$$E_{L_2} = -1,55 \quad (5.4)$$

Deste modo, as curvas de velocidade zero para essa energia estão ilustradas na Figura 5.3.

Figura 5.3 - Superfícies de velocidade zero para a energia específica ($E=1,55$) para o Sistema Terra-Lua



Fonte: elaboração própria.

Agora, consideremos a integração das órbitas periódicas em volta dos pontos L1 e L2 – processo descrito nos capítulos 2 e 3. Considerando órbitas tridimensionais do tipo halo, foi aplicada a expansão de Richardson em terceira ordem (subcapítulo 3.3.1) para a obtenção de chutes iniciais para órbitas com amplitude no eixo z específicas. Considerando, agora, uma unidade de distância como a distância entre o ponto lagrangiano considerado e a secundária (Lua), temos que: para a órbita halo em volta do ponto L1, foi selecionada uma amplitude arbitrária $z=0,45$ (aproximadamente 26.120 km); para a órbita L2, uma amplitude arbitrária de $z=0,15$ (aproximadamente 9675,3 km).

Dada as amplitudes no eixo z para as órbitas em volta de L1 e L2, a expansão considerada retorna os seguintes vetores de chutes iniciais para as condições iniciais de posição e velocidade $[x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$ para as órbitas halo:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{0L_1} &= [0,8271, \quad 0, \quad -0,0752, \quad 0, \quad 0,1977, \quad 0] \\ \bar{x}_{0L_2} &= [1,1182, \quad 0, \quad -0,0219, \quad 0, \quad 0,1849, \quad 0]\end{aligned}\tag{5.5}$$

Para a integração das reais condições iniciais, é necessário o uso de um algoritmo de integração de uma trajetória final ideal com base na variação dos valores iniciais. Para a simulação computacional realizada, foi utilizado o algoritmo da correção diferencial – baseado na análise desenvolvida no subcapítulo 2.3.1 – detalhado em (LO et al., 2000) e (HOWELL, 1984).

Idealmente, o vetor chute inicial apresenta o seguinte formato:

$$\bar{x}_0 = [x_0, 0, z_0, 0, \dot{y}_0, 0]\tag{5.6}$$

E é perpendicular ao plano x-z. O vetor final também é simétrico em relação a este plano, logo, se outro cruzamento perpendicular é encontrado, por exemplo:

$$\bar{x}\left(\frac{T}{2}\right) = [x, 0, z, 0, \dot{y}, 0]\tag{5.7}$$

A órbita será periódica com período T.

Os valores do vetor em (5.6), no entanto, podem diferir do vetor final desejado (5.7) e são, portanto, ajustados pela correção diferencial. Este método tem como base a obtenção da matriz de transição de estado, que é a matriz as derivadas parciais associadas com as equações de movimento do sistema (Equações 3.1), de onde são obtidas informações acerca de sua estabilidade. A integração das equações de movimento utilizando os chutes iniciais é feita por meio do método de Runge-Kutta (função *ode45* em MATLAB) até que a coordenada y troque de sinal, ou seja, quando a trajetória cruza o eixo x, o que indica que metade do período de órbita (T/2) foi calculado. Os valores iniciais são levemente ajustados, até que o cruzamento na metade da órbita seja perpendicular – dentro de uma determinada tolerância.

Deste modo, é possível obter as condições iniciais ideais e os períodos orbitais das órbitas halo. O teorema do espelho (pág. 60) garante que, ao obter a trajetória até metade de órbita, a outra metade será a imagem espelhada em relação ao eixo x.

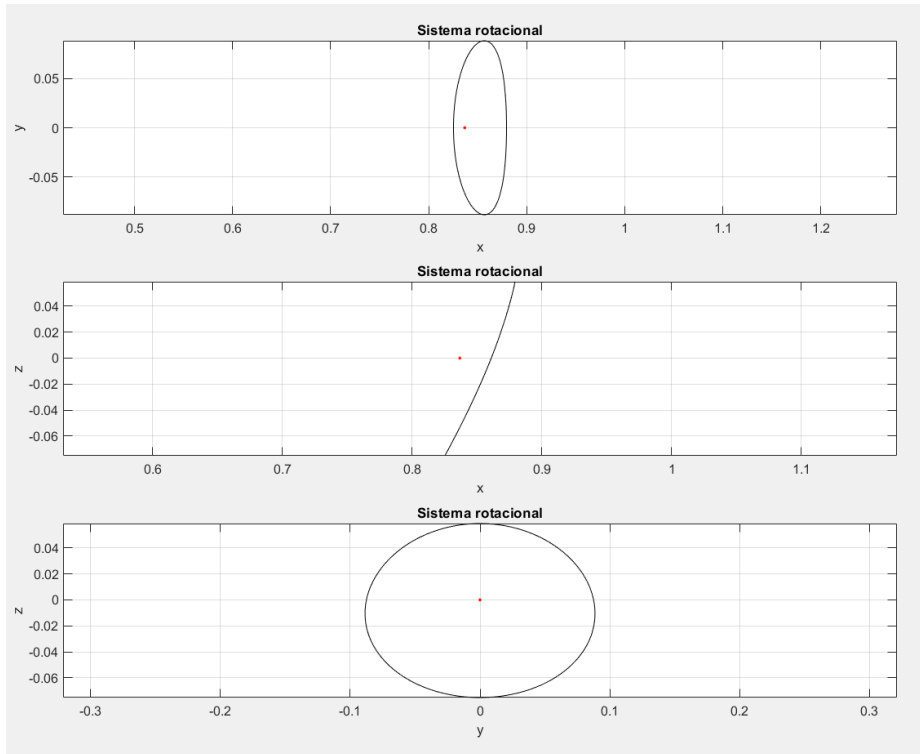
Logo, para os vetores x_{0L_1} e x_{0L_2} , o procedimento de correção diferencial retorna as seguintes condições iniciais para a órbita periódica:

$$\begin{aligned} x_{L_1} &= [0,8253, \quad 0, \quad -0,0752, \quad 0, \quad 0,1882, \quad 0] \\ x_{L_2} &= [1,1169, \quad 0, \quad -0,0219, \quad 0, \quad 0,1862, \quad 0] \end{aligned} \quad (5.8)$$

Os períodos orbitais calculados para as órbitas halo em volta de L1 e L2 são, respectivamente, $T_{L_1} = 2,7736$ e $T_{L_2} = 3,4078$. No sistema rotacional, o período de órbita das primárias em volta do baricentro é $2\pi \cong 6,2832$. Para o sistema Terra-Lua, este período equivale a aproximadamente 27,33 dias (LO et al., 2000). Portanto, as órbitas calculadas possuem períodos equivalentes $T_{L_1} \cong 12,06 \text{ dias}$ e $T_{L_2} \cong 14,82 \text{ dias}$.

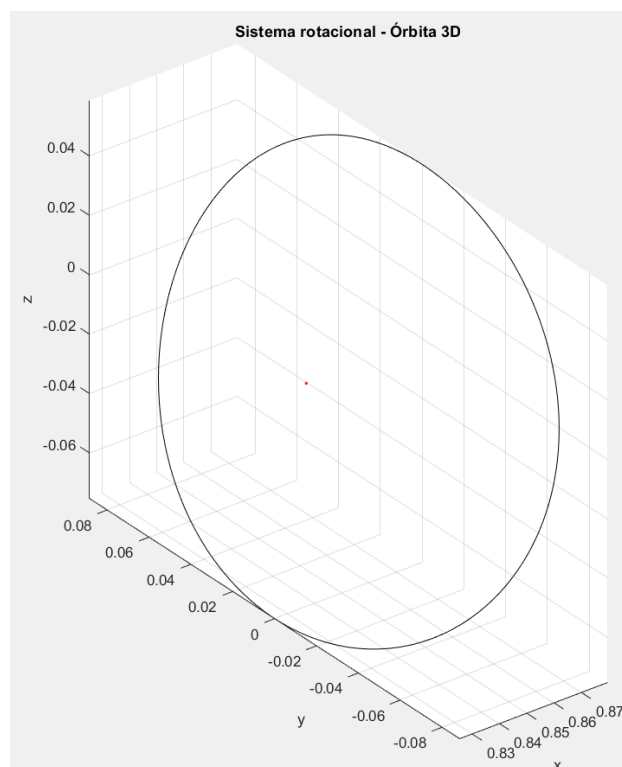
As órbitas halo em volta dos pontos L1 e L2 do sistema Terra-Lua estão ilustradas nas Figuras 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7.

Figura 5.4 – Projeções da órbita halo em volta do ponto L1 Terra-Lua



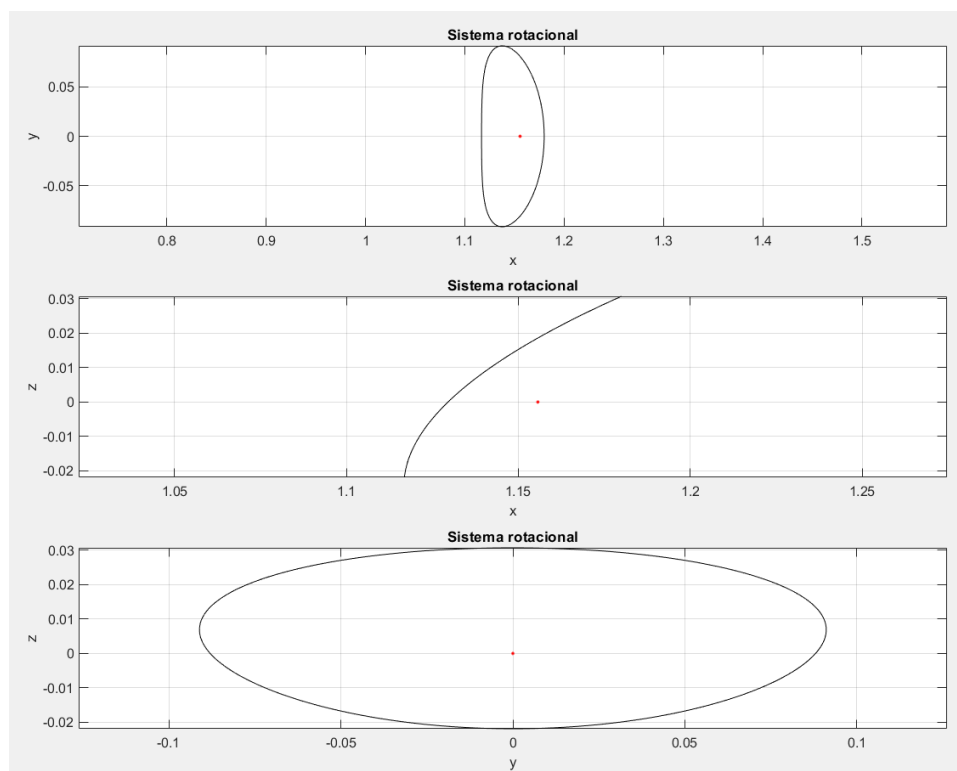
Fonte: elaboração própria.

Figura 5.5 – Projeção tridimensional da órbita halo em volta do ponto L1 Terra-Lua



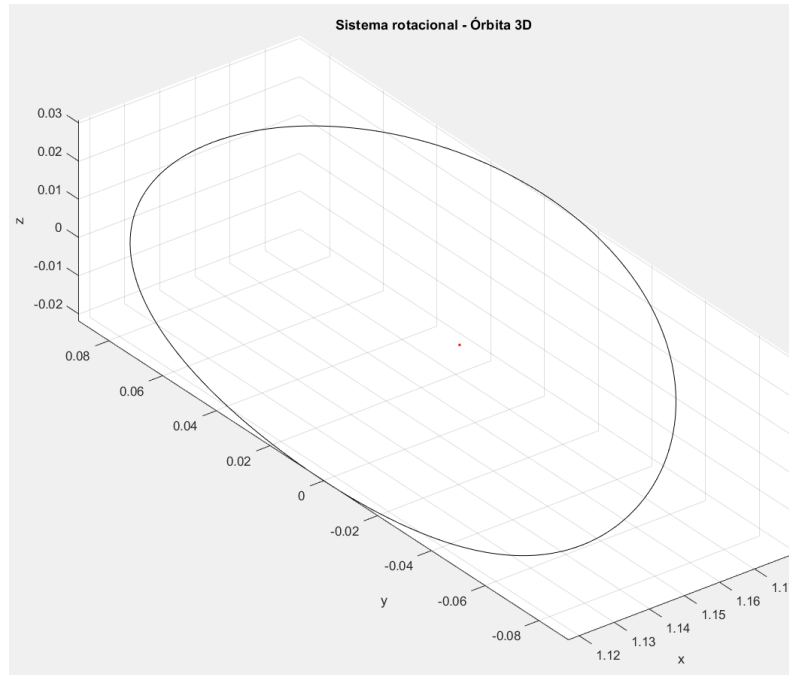
Fonte: elaboração própria.

Figura 5.6 – Projeções da órbita halo em volta do ponto L2 Terra-Lua



Fonte: elaboração própria.

Figura 5.7 – Projeção tridimensional da órbita halo em volta do ponto L2 Terra-Lua

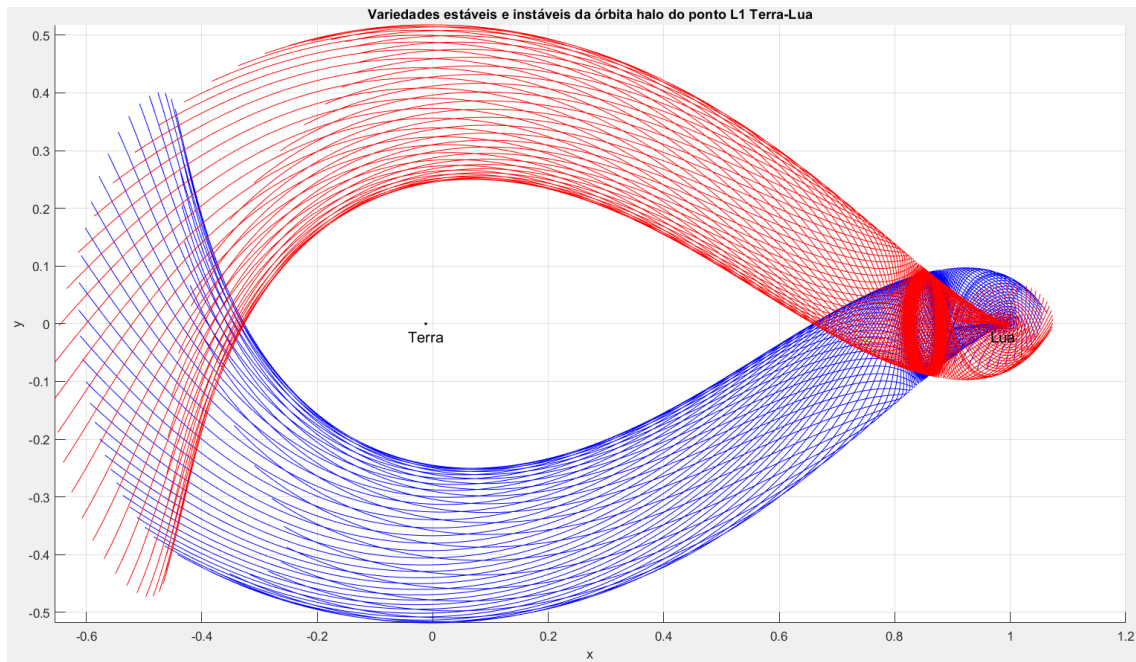


Fonte: elaboração própria.

Com a integração das órbitas halo, é possível analisar a estabilidade das trajetórias associadas (Figura 2.8), e determinar as variedades invariantes – que delimitam as regiões do espaço que podem ser usadas para transferências orbitais de baixo custo energético. As trajetórias, de formato tubular, são calculadas pela matriz de monodromia, que é a matriz de transição de estado após um período orbital. Logo, a combinação desta matriz com a análise da estabilidade do autoespaço associado – explorado no subcapítulo 2.3.1 – fornece as ferramentas do cálculo das trajetórias de baixa energia, explicado com maiores detalhes em (LO et al., 2000), (HOWELL, 1984) e (MAINS, 1993).

As variedades estáveis e instáveis associadas às órbitas halo do sistema Terra-Lua estão representadas nas Figuras 5.8 e 5.9.

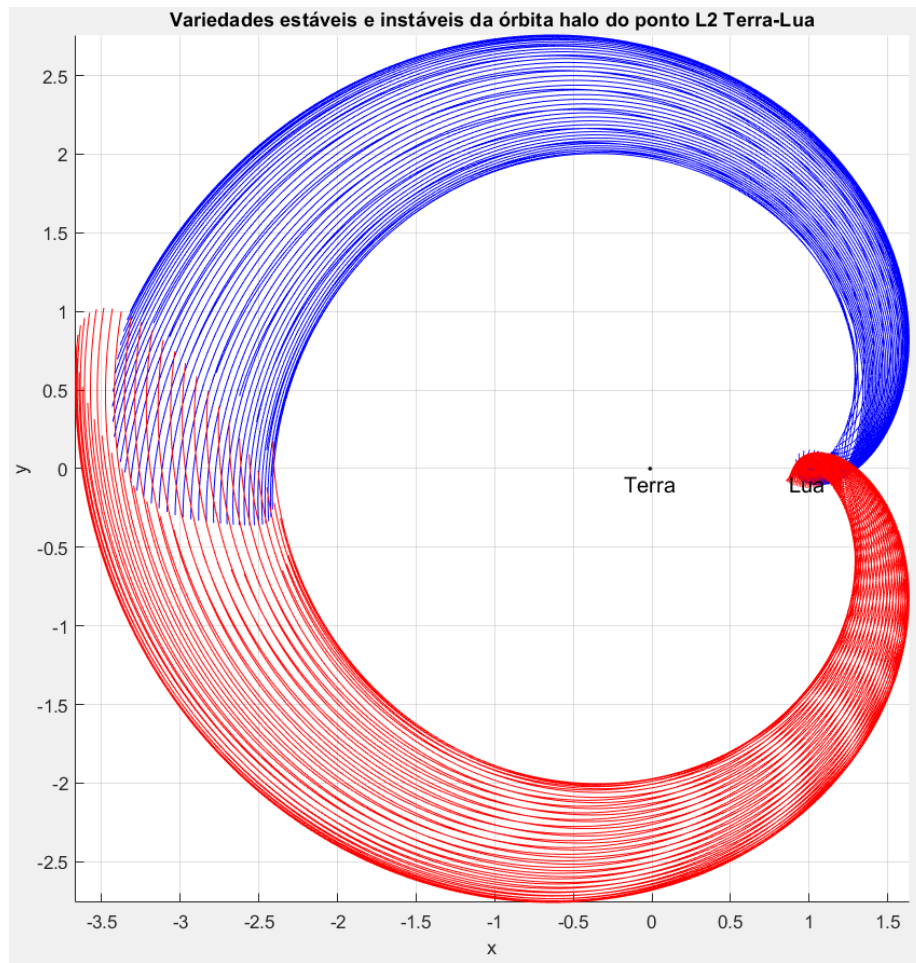
Figura 5.8 – Variedades invariantes associadas à órbita halo do ponto L1 Terra-Lua



As variedades estáveis (em azul) e as variedades instáveis (em vermelho) da órbita halo em volta do ponto L1 intersectam em diferentes regiões do espaço. O terceiro corpo, ao navegar por essas variedades, fica restrito às vizinhanças terrestre e lunar.

Fonte: elaboração própria.

Figura 5.9 – Variedades invariantes associadas à órbita halo do ponto L2 Terra-Lua



As variedades estáveis (em azul) e instáveis (em vermelho) da órbita halo do ponto L2 também intersectam em diferentes regiões do espaço. No entanto, o terceiro corpo sujeito a esta dinâmica flui da vizinhança lunar para o reino exterior do sistema Terra-Lua, e vice-versa.

Fonte: elaboração própria.

Pode-se, ao determinar as seções de Poincaré deste sistema (Figuras 2.13 e 2.14), selecionar as condições iniciais necessárias para que o terceiro corpo flua da vizinhança terrestre para o ambiente exterior, o que possibilita a conexão da trajetória com outros sistemas de três corpos, como o sistema Sol-Terra-espçonave.

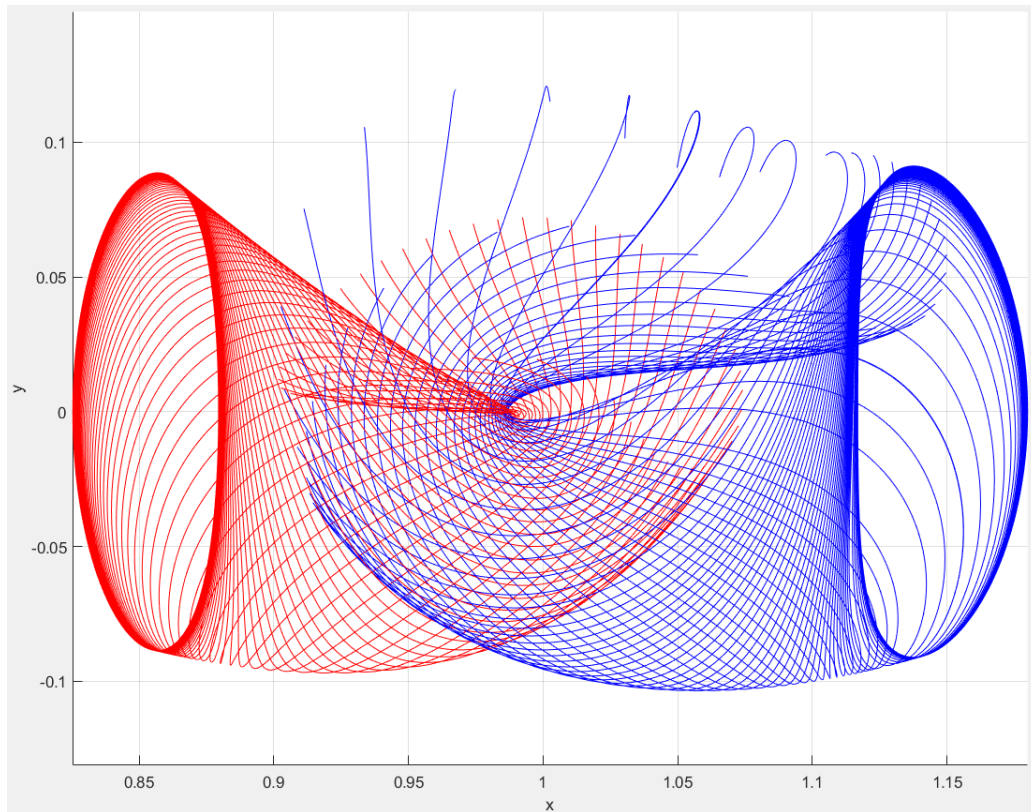
A Figura 2.13 ilustra uma seção útil para o sistema considerado naquele exemplo. No entanto, existem quatro tipos de seções para a análise dos sistemas dinâmicos. A Figura 2.12 esclarece os tipos de seções de Poincaré que contribuem para a análise de trajetórias em sistemas de três corpos.

Para o caso considerado, na qual a trajetória flua do interior, passe pelo ponto L1 e pelo L2 e chegue ao exterior do sistema, a seção adequada à análise é a U_2 , representada por:

$$U_2 = \{(y, \dot{y}) \mid x = 1 - \mu, y < 0, \dot{x} > 0\} \quad (5.9)$$

Logo, é necessário analisar as variedades instáveis da órbita em L1 e suas intersecções com as variedades estáveis da órbita em L2, como ilustrado na Figura 5.10.

Figura 5.10 – Variedade instável e estável dos respectivos pontos L1 e L2 Terra-Lua

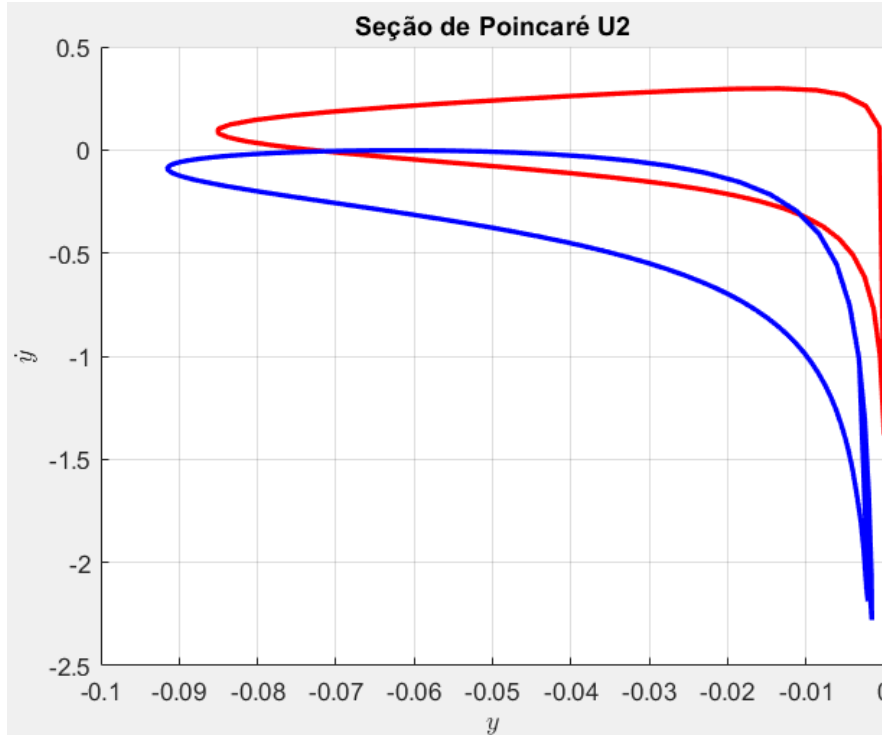


As variedades instáveis (em vermelho) do ponto L1 intersectam as variedades estáveis (em azul) do ponto L2 na região da seção de Poincaré U_2 . Logo, ao selecionar as intersecções que satisfazem as condições estabelecidas pela seção, uma transferência pelas variedades é possibilitada.

Fonte: elaboração própria.

A seção de Poincaré U_2 retornam as intersecções das variedades invariantes, representadas na Figura 5.11.

Figura 5.11 – Seção de Poincaré U2 para o sistema Terra-Lua, em função de y e $\dot{y}$



A seção U2 detalha as intersecções das variedades instável (em vermelho) e estável (em azul) que satisfazem as condições estabelecidas pelo mapa de Poincaré. A região em comum entre as duas curvas apresenta as condições necessárias (y e $\dot{y}$) para migrar da vizinhança terrestre para a externa utilizando as variedades invariantes.

Fonte: elaboração própria.

Portanto, ao selecionar valores de y e $\dot{y}$ que estejam na região de intersecção das duas curvas na Figura 5.11, é possível calcular as condições iniciais de uma trajetória que, ao ser integrada progressivamente no tempo, seja inserida na vizinhança externa do sistema Terra-Lua e, integrada regressivamente, adentre a vizinhança terrestre – em uma órbita em volta da Terra. Seja, então, o vetor trajetória representado por suas condições iniciais:

$$\bar{x} = [x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0] \quad (5.10)$$

Da seção de Poincaré e das condições iniciais para a trajetória, temos os seguintes valores: $x_0 = 1 - \mu$, $z_0 = \dot{z}_0 = 0$. Da região de intersecção presente na Figura 5.11, seleciona-se os seguintes valores para y_0 e $\dot{y}_0$: $y_0 = -0.044$ e $\dot{y}_0 = -0.065$. Logo, apenas $\dot{x}_0$ não foi determinado. No entanto, pela equação da energia do terceiro corpo para o caso espacial de três corpos, temos:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \bar{U}(x, y, z) \quad (5.11)$$

sendo que

$$\bar{U} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + U(x, y, z) \quad (5.12)$$

onde U é fornecido pela Equação 2.13 (também considerando a coordenada z).

Ou seja, pela Equação 5.11 é possível determinar o valor de $\dot{x}_0$. Rearranjando-a, tem-se:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{-\dot{y}^2 - \dot{z}^2 - 2\bar{U}(x, y, z) + 2E} \quad (5.13)$$

No entanto, para a seção U2, toma-se o sinal positivo da raiz quadrada – já que o objetivo é uma transferência de dentro para fora do sistema. Logo, para os valores estabelecidos anteriormente:

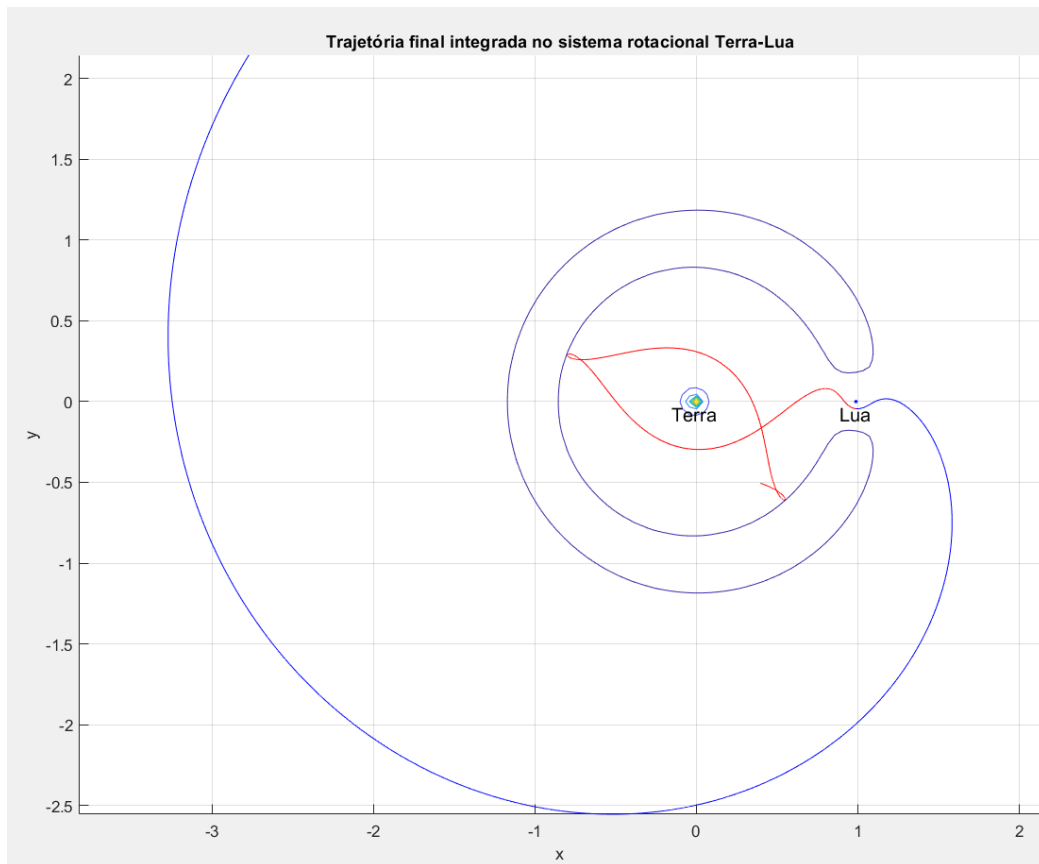
$$\dot{x}_0 = \pm \sqrt{-(-0,065)^2 - 0^2 - 2 \cdot (-1,7579) + 2 \cdot -1,55} = 0,6416 \quad (5.14)$$

Logo, o vetor das condições iniciais dado em (5.10) é:

$$\bar{x} = [0,9879, -0,044, 0,6416, -0,065, 0] \quad (5.15)$$

Portanto, a integração progressiva e regressiva no tempo retorna a seguinte trajetória no sistema rotacional, detalhada na Figura 5.12. Esta trajetória tem uma duração total de dois períodos orbitais das primárias, ou seja, aproximadamente 55 dias.

Figura 5.12 - Trajetória do terceiro corpo no sistema Terra-Lua, com origem em uma órbita terrestre e destinada ao sistema exterior, visualizada no referencial rotacional

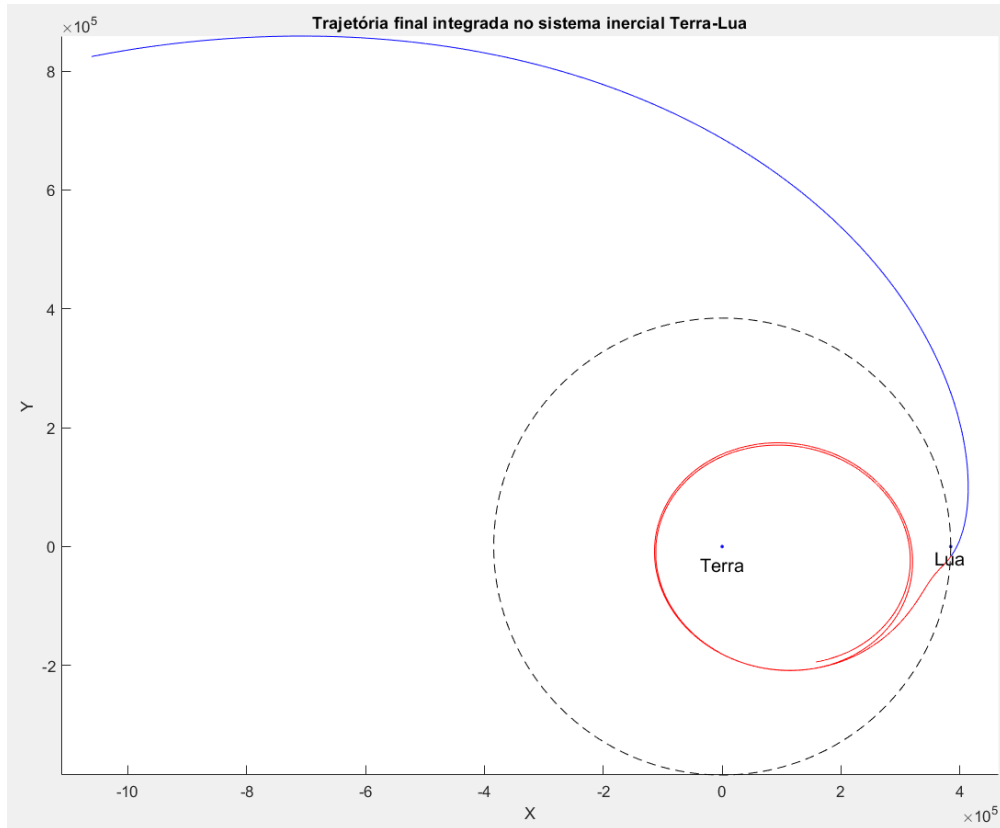


A trajetória inicia-se em uma órbita próxima à Terra (em vermelho). O terceiro corpo utiliza-se das variedades invariantes calculadas para as órbitas periódicas em volta dos pontos lagrangianos para deslocar-se ao ambiente exterior ao sistema Terra-Lua. Integração a partir das condições iniciais, feita progressiva e regressivamente no tempo. As curvas de velocidade zero para a energia indicada estão ilustradas.

Fonte: elaboração própria.

A transformação de coordenadas do sistema rotacional para o inercial culmina na trajetória indicada na Figura 5.13.

Figura 5.13 – Trajetória do terceiro corpo no sistema Terra-Lua, com origem em uma órbita terrestre e destinada ao sistema exterior, visualizada no referencial inercial



A trajetória calculada visualizada no referencial inercial, com centro no baricentro do sistema Terra-Lua. É nítido que, na primeira etapa da trajetória (em vermelho), a órbita em volta da Terra não é kepleriana, já que a energia do terceiro corpo é pequena – o regime não é de dois corpos, e a influência lunar é considerável.

Fonte: elaboração própria.

A transferência de uma órbita baixa terrestre para uma órbita halo em volta do ponto L1 e, em seguida, ao L2 é possível de ser atingida com métodos mais refinados de integração, que serão desenvolvidos na continuidade da pesquisa.

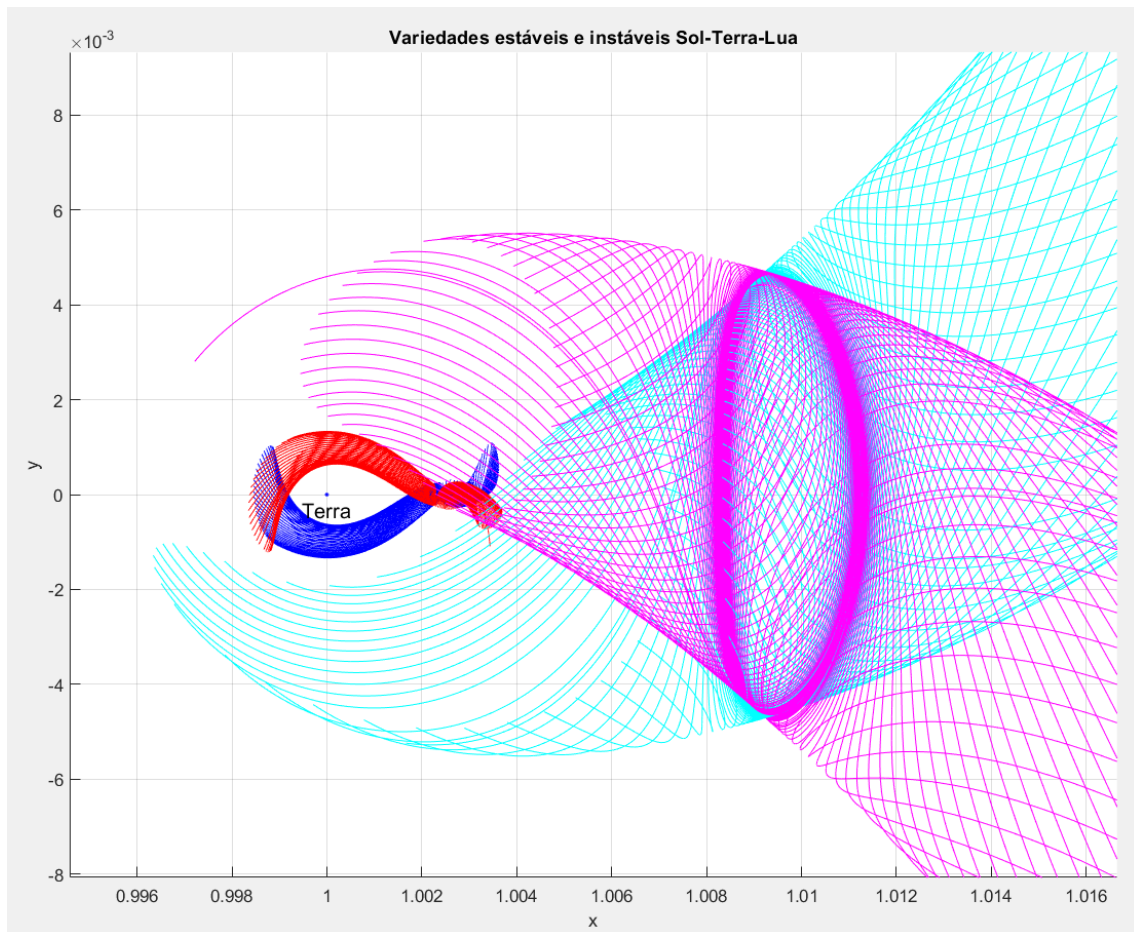
É de futuro interesse identificar as conexões existentes entre o sistema Terra-Lua e o sistema Sol-Terra. Ao integrar as simulações das variedades invariantes do sistema Terra-Lua junto às variedades do ponto L2 sistema Sol-Terra, é possível identificar regiões de intersecções, que servem para uma transferência como a tratada no subcapítulo 4.2 e para transferências para o Sistema Solar exterior.

Para o sistema Sol-Terra, a razão mássica é $\mu = 3,036 \cdot 10^{-6}$ (LO et al., 2000) e a distância média é de, aproximadamente, 149.597.870 km (SPOHN et al., 2014). A simulação para a órbita halo em volta do ponto L2 deste sistema é feita do mesmo modo

que para o sistema Terra-Lua. Neste caso, a amplitude z da órbita halo escolhida foi de 0,1, o que corresponde a 150.700 km de extensão, aproximadamente. A órbita integrada, mostrada na Figura 5.14, possui período orbital de 179,8 dias ($\cong 6$ meses).

Ao realizar a integração da órbita halo do sistema Sol-Terra e de suas variedades, é possível projetá-las em conjunto com as trajetórias do sistema Terra-Lua. A Figura 5.14 ilustra essas conexões entre os dois sistemas com as condições tratadas anteriormente.

Figura 5.14 - Variedades invariantes dos sistemas Sol-Terra (ponto L2) e Terra-Lua



As variedades invariantes calculadas para o sistema Terra-Lua anteriormente aparecem em azul e vermelho. Já as variedades associadas a órbita periódica em volta do ponto L2 do sistema Sol-Terra aparecem em ciano (estável) e magenta (instável). As unidades desta Figura são normalizadas para o sistema Sol-Terra.

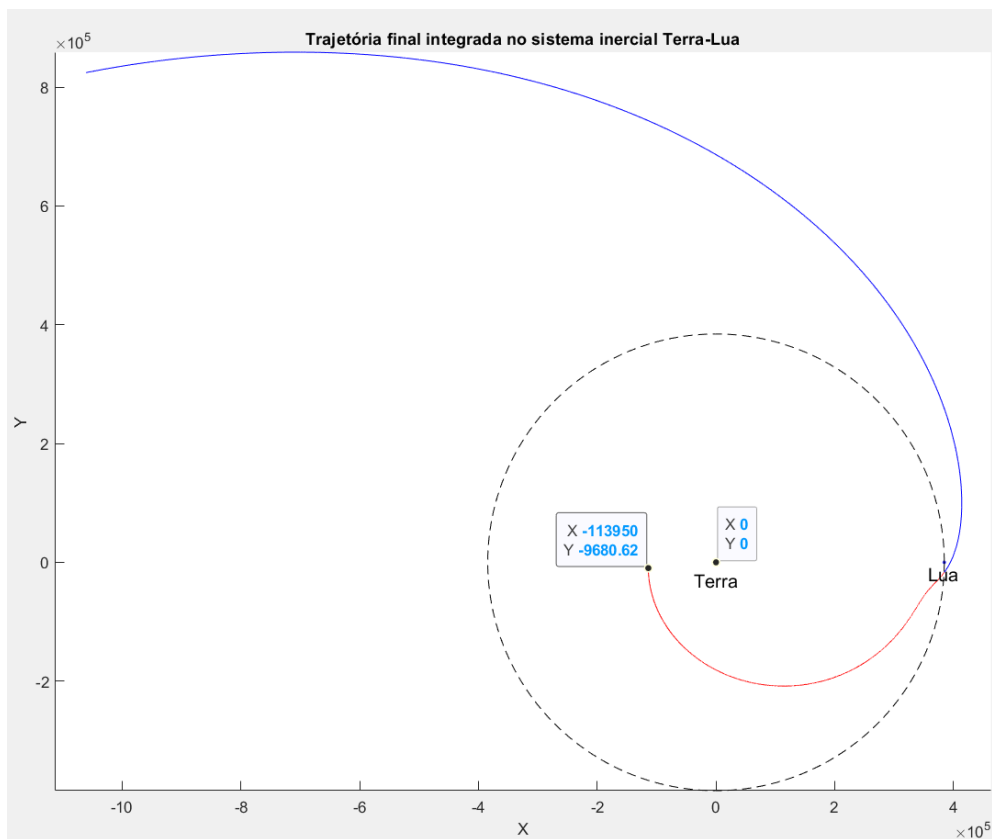
Fonte: elaboração própria.

Para calcular a trajetória que parte da órbita L2 do sistema Terra-Lua até a órbita L2 do sistema Sol-Terra, é necessário determinar as seções de Poincaré comuns a ambos os sistemas, como exemplificado na Figura 4.3, e aplicar métodos de controle para que o

terceiro corpo adentre a órbita periódica a partir da trajetória já calculada no sistema Terra-Lua. Isto será realizado durante a continuidade da pesquisa.

Assumindo que a trajetória calculada na Figura 5.12 inicie-se nas proximidades terrestres (não necessariamente no perigeu) – como ilustrado na Figura 5.15 – temos que a distância inicial é de 114.360,47 km (em relação ao centro da Terra). Esta trajetória até a Lua apresenta duração de $\frac{1}{4}$ do período orbital das primárias, ou seja, 6,8325 dias. A segunda etapa da trajetória permanece inalterada.

Figura 5.15 – Trajetória da espaçonave no sistema Terra-Lua



Fonte: elaboração própria.

Portanto, os valores calculados para esta trajetória no sistema Terra-Lua estão dispostos na Tabela 5.2:

Tabela 5.2 – Dados acerca do deslocamento do terceiro corpo no sistema Terra-Lua

Energia do terceiro corpo (normalizada)	-1,55
Energia específica do terceiro corpo (km²/s²)	-1,622
Tempo empregado na vizinhança terrestre (dias)	6,8325
Tempo empregado no ambiente exterior (dias)	27,33
Tempo total empregado na primeira etapa (dias)	34,2

Fonte: elaboração própria.

A energia específica no referencial inercial é calculada por (LO et al., 2000):

$$\varepsilon = E_{rot} * \left(\frac{L}{T} \right)^2 \quad (5.16)$$

onde $L = 384400 \text{ km}$ e $T = 2,361 \cdot 10^6 \text{ s}$ para o sistema Terra-Lua. Ela é, em módulo, ligeiramente maior que a energia no sistema rotacional, pois considera-se a parcela de energia rotacional do terceiro corpo em seu cálculo, informação que é perdida ao adotar o referencial girante.

Portanto, por meio das análises preliminares realizadas, verifica-se que mesmo com a baixa energia da espaçonave na vizinhança terrestre, o regime de três corpos permite que o deslocamento do terceiro corpo seja extenso, e que saia das proximidades da Terra e alcance o ambiente externo do sistema. No entanto, a espaçonave permanece por cerca de 34,2 dias sob o sistema Terra-Lua. Neste mesmo período, as sondas de outras missões já estavam em ambiente interplanetário. Logo, é possível inferir que a escala temporal de uma missão de baixa energia é superior às missões com grandes gastos energéticos.

As simulações envolvendo a transferência entre o sistema terrestre e o joviano por meio das variedades invariantes serão realizadas durante a continuação do projeto de pesquisa, bem como a dinâmica do deslocamento da espaçonave por entre as luas de Júpiter. Esta etapa constituirá parte essencial na análise da viabilidade da dinâmica de três corpos em uma trajetória interplanetária integral para o sistema joviano, e será somada aos dados já obtidos para o sistema Terra-Lua.

5.4 – Conclusões do capítulo

A aplicação dos fundamentos teóricos expostos ao longo do relatório em simulações computacionais realizadas em software MATLAB renderam dados preliminares importantes e conforme a literatura existente. Ao dividir a trajetória de baixa energia interplanetária almejada – partindo do sistema Terra-Lua e destinada ao sistema joviano, com posterior deslocamento por entre as luas de Júpiter – em segmentos, é possível simplificar a análise da dinâmica do terceiro corpo nos sistemas.

O estudo do Problema Restrito dos Três Corpos garantiu o domínio das ferramentas de integração de órbitas periódicas em volta dos pontos lagrangianos, baseadas em análises de estabilidade derivadas do cálculo variacional e da álgebra linear. O início da simulação se deu no sistema Terra-Lua, com a determinação das condições de energia necessárias para a navegação neste sistema sob o espectro dos três corpos. Partindo de tentativas iniciais para as condições de órbitas periódicas do tipo halo, obtidas por meio da expansão em terceira ordem de Richardson, foi aplicado o método da correção diferencial para o cálculo das órbitas finais – envolve a variação do vetor estado inicial para inferir como se dá a mudança no vetor estado final.

Com a integração das órbitas halo finalizada, seguiu-se para a determinação das variedades invariantes a elas associadas. Por meio das matrizes de transição de estado e monodromia, foi possível determinar a estabilidade do sistema dinâmico, e calcular as trajetórias estáveis e instáveis que se conectam às órbitas periódicas. Com o artifício do mapa de Poincaré, torna-se possível a determinação de condições iniciais de trajetórias que transitam entre as regiões onde as órbitas estão inseridas – e, conseqüentemente, entre as vizinhanças próximas à Terra, Lua ou exterior a ambas, neste caso.

Deste modo, determinadas as seções de Poincaré para as órbitas periódicas calculadas, foram selecionados valores pertencentes à intersecção entre as variedades instável e estável dos pontos L1 e L2, respectivamente, que possibilitavam o cálculo de uma trajetória que deixasse a vizinhança terrestre, cruzasse a órbita lunar e tornasse viável o acesso ao Sistema Solar exterior.

Em posse de dados, obtidos na literatura, de missões ao sistema joviano baseadas em trajetórias interplanetárias de alto gasto energético, como as missões Voyager, Juno e Europa Clipper, é possível inferir preliminarmente a característica vantagem energética da aplicação do Problema Restrito de Três Corpos e seus derivados no planejamento de missões interplanetárias. No entanto, é evidente que, ao sujeitar a missão a uma dinâmica natural dos corpos do Sistema Solar, os tempos envolvidos em transferências entre trajetórias e órbitas são muito maiores se comparados à projetos contendo elevados gastos propulsivos.

Portanto, as simulações realizadas em MATLAB e expostas neste capítulo constituem resultados preliminares importantes para a verificação da viabilidade do emprego das trajetórias de baixa energia baseadas em variedades invariantes e dinâmicas de três corpos em missões espaciais interplanetárias para o sistema joviano. Os fundamentos teóricos apresentados durante este relatório e os desenvolvimentos computacionais aqui apresentados estabelecem uma base para elaboração das simulações numéricas no sistema joviano, na integração de trajetórias do sistema Sol-Terra-Lua e na conexão entre estes sistemas, a serem tratadas na continuidade da pesquisa.

CONCLUSÃO

As trajetórias de baixa energia, derivadas sobre a égide do Problema Restrito e Circular de Três Corpos, constituem uma análise moderna na elaboração de missões espaciais, sejam elas voltadas ao ambiente terrestre ou de cunho interplanetário. A possibilidade do deslocamento de um veículo espacial por diversos locais do Sistema Solar utilizando a dinâmica natural das interações gravitacionais e poucos impulsos energéticos interessa à comunidade astronáutica, já que o custo associado ao deslocamento espacial em uma missão seria substancialmente reduzido.

O objetivo primário deste projeto era a verificação da viabilidade da aplicação das trajetórias de baixa energia para trajetórias interplanetárias com destino à Júpiter e suas luas, dado o constante interesse científico neste sistema, fomentado atualmente pela possibilidade do desenvolvimento de vida em alguns de seus satélites. Para isso, fundamentações teóricas envolvidas na análise de trajetórias geradas por sistemas de três corpos foram estabelecidas e constituíram grande parte desta pesquisa. O estudo das mecânicas newtoniana, lagrangiana e hamiltoniana esclareceu as diferentes abordagens matemáticas dos sistemas dinâmicos, e a derivação de informações que permaneceriam ocultas caso os problemas não fossem vistos sob outras óticas.

Estes diferentes formalismos constituíram a essência para a interpretação crítica do Problema Restrito e Circular dos Três Corpos, seja em sua versão planar ou espacial. A manipulação de matrizes e do autoespaço das equações de movimento mostrou-se fundamental para a análise da estabilidade dos sistemas de três corpos, permitiu a derivação dos tipos de trajetórias próximas aos pontos colineares, das condições necessárias para a integração de órbitas periódicas e a determinação dos caminhos energeticamente viáveis para a astronáutica.

Essas ferramentas foram aplicadas primeiramente em estudos das trajetórias compreendidas nas vizinhanças da Terra e da Lua, e em como a transferência entre uma órbita terrestre e uma órbita lunar utilizando-se das variedades invariantes e capturas balísticas torna-se possível sob o escopo da Aproximação Remendada de Três Corpos. Essa análise foi, então, estendida ao sistema joviano, que acumula características chave

no deslocamento de baixa energia por entre as luas constituintes, como a combinação das variedades invariantes e ressonâncias orbitais na dinâmica da transferência entre órbitas pelos satélites, como Ganimedes e Calisto.

A estudo tornou-se mais completo com a reunião de dados e informações acerca das trajetórias de missões espaciais já elaboradas para Júpiter e suas luas, como as missões Voyager, Juno e Europa Clipper. Os gastos energéticos, tipos de manobras adotadas e o tempo empreendido no deslocamento destas sondas espaciais para este sistema foram descritos no relatório, e serviram (e ainda servirão) como parâmetros comparativos da eficiência, tanto energética como temporal, das trajetórias de baixa energia calculadas neste projeto.

As simulações computacionais – foco integral da continuação da pesquisa – desenvolvidas neste relatório compõem uma análise preliminar das órbitas e do deslocamento no sistema Terra-Lua e Sol-Terra, mas geraram dados relevantes envolvendo a energia necessária para o deslocamento do veículo espacial, o tempo empregado nas transferências nestes sistemas e as condições iniciais de órbitas periódicas e trajetórias de baixa energia. Ademais, constituirão base necessária para a continuidade das simulações do sistema terrestre e no sucesso da integração de órbitas no sistema joviano.

Estes dados obtidos acerca do deslocamento de um veículo espacial no sistema Terra-Lua sujeito a dinâmica de três corpos permitiram inferir a vantagem energética deste método sobre as trajetórias convencionais derivadas com base em sistemas de dois corpos e no método de *Patched-Conics*. É notável a capacidade do terceiro corpo em deslocar-se para além da órbita lunar sem qualquer impulso energético adicional. No entanto, verifica-se que, para as missões com trajetórias de alta energia, para este mesmo período empregado no sistema Terra-Lua, as sondas já adentraram o ambiente interplanetário. Logo, é nítida a desvantagem temporal presente na dinâmica de três corpos.

Por conseguinte, os feitos deste relatório estão em total conformidade com os objetivos estipulados no início da pesquisa. A fundamentação teórica apresentada neste relatório mostrou-se essencial para o domínio do tema e para o desenvolvimento das

simulações ao final do estudo, sendo que constituirá base para o progresso nas simulações computacionais restantes acerca do sistema joviano e sua integração com o sistema Sol-Terra-Lua. Os tópicos presentes foram exibidos de maneira a ocasionar a melhor compreensão possível deste tema e de seus constituintes aos leitores, sejam eles especialistas ou não na área de Dinâmica Orbital.

Espera-se, também, que o relatório desenvolvido estimule o estudo e aplicação das trajetórias de baixa energia na elaboração de missões espaciais interplanetárias em outras pesquisas. A integração de trajetórias entre as luas jovianas, em uma missão do tipo orbitador multilunar, e a aplicabilidade do Problema Restrito de Três Corpos neste sistema e em outros sistemas planetários do Sistema Solar constituem grandes oportunidades para novos projetos de pesquisa e artigos científicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LO, Martin W. *et al.* **Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design**. Pasadena, California, EUA: World Scientific, 2000. 331p.
- [2] CURTIS, Howard D. **Orbital Mechanics for Engineering Students**. 3. ed. rev. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2014. 912 p.
- [3] VALTONEN, Mauri. KARTTUNEN, Hannu. **The Three-Body Problem**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. 356 p.
- [4] A. CONWAY, Bruce; E. PRUSSING, John. **Orbital Mechanics**. 2. ed. rev. e atual. [S. l.]: Oxford University Press, 2013. 304 p. ISBN 978-0199837700.
- [5] GLEISER, Marcelo. **A Dança do Universo**. 1. ed. [S. l.]: Editora Schwarcz, 1997. 440 p.
- [6] MCFADDEN, Johnjoe. **A Navalha de Ockham: O princípio filosófico que libertou a ciência e ajudou a explicar o Universo**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sextante, 2022. 368 p.
- [7] LO, Martin W. **The InterPlanetary Superhighway and the Origins Program**. In: IEEE AEROSPACE CONFERENCE, 2002, Big Sky. Anais. Pasadena: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2002. p. 1-20. Doi:10.1109/AERO.2002.1035332.
- [8] MURRAY, Carl D.; DERMOTT, Stanley F. **Solar System Dynamics**. 1. ed. Nova Iorque: Cambridge University Press, 2009. 606 p. ISBN 0-521-57295-9.
- [9] FELIPE, Gislaine de. **Transferências Orbitais Envolvendo Órbitas Do Tipo Halo**. Orientador: Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado. 2005. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, [S. l.], 2005. p. 222.
- [10] FORTES, Elaine Cristina Ferreira Silva. AZEVEDO, Franciane. KOLLAND, Marcos. **Desvendando o Endereço Físico do Telescópio James Webb**. Revista Brasileira de Ensino de Física, [s. l.], v. 40, ed. 3, 28 nov. 2017.

- [11] SPOHN, Tilman. *et al.* **Encyclopedia of the Solar System**. 3. ed. aum. Oxford: Elsevier, 2014. 1272 p
- [12] KOON, Wang S. LO, Martin W. MARSDEN, Jerrold E. ROSS, Shane D. **Constructing a Low Energy Transfer Between Jovian Moons**. Contemporary Mathematics, 292. 2000. pp. 129-146. ISSN 0271-4132
- [13] IKEDA, Kanta. *et al.* **Design of Low-Energy Transfer Trajectories from Jupiter to Europa with Ballistic Transfer**. Journal of Evolving Space Activities, v. 1, 2023.
- [14] DOODY, Dave. **Deep Space Craft: An Overview of Interplanetary Flight**. 1. ed. Heidelberg: Springer, 2009. 440 p.
- [15] KOHLHAZE, E. C.; PENZO, P.A. Voyager mission description. **Space Science Reviews**, Dordrecht, ed. 21, p. 77-101, 1977.
- [16] BOLTON, Scott J. *et al.* The Juno Mission. **Space Science Reviews**, [s. l.], ano 2017, v. 213, p. 5-37, 2 nov. 2017.
- [17] HOWELL, Kathleen Connor. Three-dimensional, periodic, ‘halo’ orbits. **Celestial Mechanics**, [s. l.], ed. 32, p. 53-71, Janeiro 1984.
- [18] MAINS, Deanna Lynn. **Transfer Trajectories from Earth Parking Orbits to L1 Halo Orbits**. 1993. 135 p. Tese (Mestrado em Ciências Aeronáuticas e Astronáuticas) - Purdue University, [S. l.], 1993.
- [19] ROSS, Shane D. **Books and Monographs**. [S. l.], 2024. Disponível em: <https://ross.aoe.vt.edu/books/>. Acesso em: 5 ago. 2024.
- [20] GIORGINI, Jon D. *et al.* **Horizons System**. [S. l.]: Jet Propulsion Laboratory, 8 ago. 2024. Disponível em: <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>. Acesso em: 8 ago. 2024.

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES DE EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS PARA A PESQUISA

Equação de órbita para o Problema de Dois Corpos

Para resolver a Equação (1.33), deve-se tomar o produto vetorial dela com o momento angular específico:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\frac{\mu \vec{r}}{r^3} \times \vec{h} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad (\text{A.1})$$

O lado direito da equação pode ser resolvido por uma identidade de produto vetorial:

$$-\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \frac{\mu}{r^3} [\dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})] = \frac{\mu}{r^3} [\dot{\vec{r}}r^2 - r\dot{\vec{r}}] \quad (\text{A.2})$$

Logo, a Equação (A.1) pode ser tratada como:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu \left[\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2} \right] \quad (\text{A.3})$$

Porém, temos a seguinte relação:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{\dot{\vec{r}}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2} \quad (\text{A.4})$$

Portanto, a Equação (A.3) resulta em:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (\text{A.5})$$

que pode ser integrada em relação ao tempo, o que fornece:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu \left(\frac{\vec{r}}{r} + \vec{C} \right) \quad (\text{A.6})$$

onde o vetor $\vec{C}$ é constante e conhecido como vetor de Laplace. Rearranjando os termos:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} = \mu \vec{C} \quad (\text{A.7})$$

Essa equação corresponde à uma integral de movimento desse sistema. Equações que expressam funções de posição e/ou velocidade que são iguais a constantes são conhecidas como integrais de movimento.

Ao realizar o produto escalar da Equação (A.7) pelo vetor momento angular específico, temos:

$$(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \cdot \vec{h} - \mu \frac{\vec{r} \cdot \vec{h}}{r} = \vec{C} \cdot \vec{h} \quad (\text{A.8})$$

$\dot{\vec{r}} \times \vec{h}$ resulta em um vetor perpendicular tanto à $\dot{\vec{r}}$ quanto à $\vec{h}$, logo o produto escalar com $\vec{h}$ é nulo, $(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \cdot \vec{h} = 0$. O vetor posição e o vetor momento angular específico também são perpendiculares entre si, logo $\vec{r} \cdot \vec{h} = 0$. Portanto:

$$\vec{C} \cdot \vec{h} = 0 \quad (\text{A.9})$$

O que implica que o vetor de Laplace está contido no plano orbital. Rearranjando a Equação (A.7), tem-se:

$$\frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{h}}{\mu} = \frac{\vec{r}}{r} + \vec{e} \quad (\text{A.10})$$

onde $\vec{e} = \frac{\vec{C}}{\mu}$ é o vetor excentricidade, que define a linha das apses. Para obter uma equação escalar, pode-se realizar o produto escalar da Equação (A.10) pelo vetor posição:

$$\frac{(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \cdot \vec{r}}{\mu} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} + \vec{r} \cdot \vec{e} \rightarrow \frac{(\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) \cdot \vec{h}}{\mu} = \frac{r^2}{r} + \vec{r} \cdot \vec{e} \quad (\text{A.11})$$

Como $\dot{\vec{r}} \times \vec{r} = \vec{h}$, temos:

$$\frac{h^2}{\mu} = r + \vec{r} \cdot \vec{e} \quad (\text{A.12})$$

O produto escalar $\vec{r} \cdot \vec{e}$ pode ser reescrito como $\vec{r} \cdot \vec{e} = r \cos(\theta)$. Logo, ao rearranjar os termos da Equação (A.12), temos, finalmente:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos(\theta)} \quad (\text{A.13})$$

□

Equações de movimento para o PRPC3C no sistema girante

A fim de se determinar as equações de movimento no sistema girante, tem-se que realizar a derivação temporal das coordenadas x e y duas vezes, relacionadas pelas Equações (2.11). A primeira derivada das duas coordenadas resulta em:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{X} \cos t - X \sin t + \dot{Y} \sin t + Y \cos t \\ \dot{y} &= -\dot{X} \sin t - X \cos t + \dot{Y} \cos t - Y \sin t\end{aligned}\tag{A.14}$$

Para $\ddot{x}$, temos:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{X} \cos t - \dot{X} \sin t - \dot{X} \sin t - X \cos t + \ddot{Y} \sin t + \dot{Y} \cos t \\ &\quad + \dot{Y} \cos t - Y \sin t\end{aligned}\tag{A.15}$$

Ou ainda,

$$\ddot{x} = \ddot{X} \cos t - 2\dot{X} \sin t - X \cos t + \ddot{Y} \sin t + 2\dot{Y} \cos t - Y \sin t\tag{A.16}$$

Para realizar a simplificação da fórmula, soma-se os seguintes termos à equação:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{X} \cos t - 2\dot{X} \sin t - X \cos t + \ddot{Y} \sin t + 2\dot{Y} \cos t - Y \sin t \\ &\quad + 2X \cos t - 2X \cos t + 2Y \sin t - 2Y \sin t\end{aligned}\tag{A.17}$$

que resulta em:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{X} \cos t + \ddot{Y} \sin t + 2(-\dot{X} \sin t + \dot{Y} \cos t - X \cos t - Y \sin t) \\ &\quad - (X \cos t + Y \sin t) + 2(X \cos t + Y \sin t)\end{aligned}\tag{A.18}$$

Ao simplificar e rearranjar os termos, obtemos a primeira equação de movimento:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = \ddot{X} \cos t + \ddot{Y} \sin t\tag{A.19}$$

De forma análoga, para $\ddot{y}$, tem-se uma equação da forma:

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\ddot{X} \sin t + \ddot{Y} \cos t\tag{A.20}$$

As equações, no entanto, ainda possuem termos coordenados relacionados ao sistema inercial. De forma a removê-los, as equações em (2.4) serão utilizadas. Para a primeira equação de movimento:

$$\begin{aligned}
\ddot{X} \cos t &= -\frac{(1-\mu)(X \cos t - X_1 \cos t)}{\vec{r}_1^3} - \frac{\mu(X \cos t - X_2 \cos t)}{\vec{r}_2^3} \\
\ddot{Y} \sin t &= -\frac{(1-\mu)(Y \sin t - Y_1 \sin t)}{\vec{r}_1^3} - \frac{\mu(Y \sin t - Y_2 \sin t)}{\vec{r}_2^3}
\end{aligned} \tag{A.21}$$

A soma desses termos, aliada a definição de x , resulta em:

$$\ddot{X} \cos t + \ddot{Y} \sin t = -\frac{(1-\mu)(x + \mu)}{\vec{r}_1^3} - \frac{\mu(x + \mu - 1)}{\vec{r}_2^3} \tag{A.22}$$

A realização dos mesmos procedimentos para a segunda equação de movimento resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} - x &= -\frac{(1-\mu)(x + \mu)}{\vec{r}_1^3} - \frac{\mu(x + \mu - 1)}{\vec{r}_2^3} \\
\ddot{y} + 2\dot{x} - y &= -\frac{(1-\mu)y}{\vec{r}_1^3} - \frac{\mu y}{\vec{r}_2^3}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

onde $\vec{r}_1 = (x - (-\mu))\hat{i} + y\hat{j}$ e $\vec{r}_2 = (x - (1 - \mu))\hat{i} + y\hat{j}$

□