



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INTRODUÇÃO À FÍSICA DOS BURACOS NEGROS E A ALGUMAS SOLUÇÕES EXÓTICAS DA RELATIVIDADE GERAL

Mário Raia Neto

Relatório Final de Iniciação Científica, orientado pelo Dr. Luiz Claudio Lima Botti.

URL do documento original:
<<http://urlib.net/xx/yy>>

INPE
São José dos Campos
2023

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Coordenação de Ensino, Pesquisa e Extensão (COEPE)
Divisão de Biblioteca (DIBIB)
CEP 12.227-010
São José dos Campos - SP - Brasil
Tel.:(012) 3208-6923/7348
E-mail: pubtc@inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):**Presidente:**

Dra. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Coordenação-Geral de Ciências da Terra (CGCT)

Membros:

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia, Tecnologia e Ciência Espaciais (CGCE)

Dr. Rafael Duarte Coelho dos Santos - Coordenação-Geral de Infraestrutura e Pesquisas Aplicadas (CGIP)

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Ivone Martins - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INTRODUÇÃO À FÍSICA DOS BURACOS NEGROS E A ALGUMAS SOLUÇÕES EXÓTICAS DA RELATIVIDADE GERAL

Mário Raia Neto

Relatório Final de Iniciação Científica, orientado pelo Dr. Luiz Claudio Lima Botti.

URL do documento original:
<<http://urlib.net/xx/yy>>

INPE
São José dos Campos
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Raia Neto, Mário. Botti, Luiz Claudio Lima.

Cutter INTRODUÇÃO À FÍSICA DOS BURACOS NEGROS E A
ALGUMAS SOLUÇÕES EXÓTICAS DA RELATIVIDADE GE-
RAL / Mário Raia Neto; Luiz Claudio Lima Botti. – São José dos
Campos : INPE, 2023.

ix + 19 p. ; ()

Relatório Final (PIBIC) – Instituto Nacional de Pesquisas Es-
paciais, São José dos Campos, .

Orientador : Luiz Claudio Lima Botti.

1. Relatividade Geral. 2. Buracos Negros 3. Astrofísica. 4. Bu-
racos de Minhoca. 5. Palavra chave I. Título.

CDU 000.000



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](#).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](#).

Informar aqui sobre marca registrada (a modificação desta linha deve ser feita no arquivo publicacao.tex).

Informar aqui sobre fontes financiadoras (a modificação desta linha deve ser feita no arquivo publicacao.tex).

RESUMO

O presente projeto estudou os aspectos da matemática, física teórica e astrofísica de buracos negros, bem como dois outros espaços-tempos ditos “exóticos”: buracos de minhoca e warp drives com simetria esférica. Os buracos negros de Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr e Kerr-Newman formam então soluções de vácuo e eletro-vácuo das equações de campo de Einstein; respectivamente são buracos negros, neutros, com carga elétrica, com rotação, com rotação e carga elétrica. A análise de trajetórias tipo-luz ao redor de buracos negros foi feita, a fim de estudar o comportamento de partículas não-massivas nestes espaços curvos, posteriormente tal análise foi empregada no estudo das “sombras” buracos de minhoca, discutindo então os efeitos da carga elétrica no formato da chamada fotosfera. Além disso, foi estudado o mecanismo de Blandford-Znajek; Em especial, o projeto estudou as sombras de buracos de minhoca com carga elétrica, que configurou um resultado inédito dentro da área da física relativística.

Palavras-chave: Relatividade Geral. Buracos Negros. Buracos de Minhoca. Processo Blandford-Znajek. Jatos relativísticos.

INTRODUCTION TO BLACK HOLE PHYSICS AND TO SOME EXOTIC SOLUTIONS OF GENERAL RELATIVITY

ABSTRACT

The present project investigated aspects of mathematics, theoretical physics, and astrophysics related to black holes, as well as two other so-called "exotic" spacetimes: wormholes and spherically symmetric warp drives. The black holes of Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr, and Kerr-Newman then form solutions of vacuum and electro-vacuum of Einstein's field equations; respectively, they are black holes, neutral ones, with electric charge, with rotation, and with both rotation and electric charge. The analysis of light trajectories around black holes was conducted in order to study the behavior of massless particles in these curved spaces. Subsequently, this analysis was applied to the study of wormhole "shadows," discussing the effects of electric charge on the shape of the so-called photosphere. Additionally, the Blandford-Znajek mechanism was studied; In particular, the project investigated the shadows of charged wormholes, which constituted a novel result within the field of relativistic physics.

Keywords: General Relativity. Black Holes. Wormholes. Blandford-Znajek Process. Relativistic Jets.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
2 BURACOS NEGROS	3
2.1 Soluções Esféricamente Simétricas	3
2.1.1 Buracos Negros de Schwarzschild	3
2.1.2 Buracos Negros de Reissner-Nordstrom	3
2.2 Soluções Axisimétricas	4
2.2.1 Buracos Negros de Kerr	4
2.2.2 Buracos Negros de Kerr-Newman	5
2.2.3 Horizontes de Eventos e Singularidades no Espaço-Tempo de Kerr	6
2.3 Dinâmica Orbital de Geodésicas Tipo-Luz no Espaço-Tempo de Kerr	7
2.4 Astrofísica de Buracos Negros	7
2.4.1 Processo Blandford-Znajek	7
3 SOLUÇÕES EXÓTICAS	9
3.1 Buracos de Minhoca com Carga Elétrica	9
4 RESULTADOS	11
4.1 Sombras de Buracos de Minhoca Carregados	11
5 PERSPECTIVAS E ANÁLISES FUTURAS	13
6 CONCLUSÕES	15
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	17

1 INTRODUÇÃO

A gravitação de Newton pode ser resumida em(THORNE et al., 1973):

$$\nabla^2\Phi_g = 4\pi G\rho_m. \quad (1.1)$$

Onde Φ_g é o potencial gravitacional e ρ_m a densidade de massa que gera o potencial. Sendo assim, distribuições de massa geram modificações no campo escalar, por conseguinte um campo gravitacional movimenta a distribuição de massa. Do ponto de vista relativístico, a distribuição de matéria ρ_m é generalizada pelo chamado *tensor energia-momento* $T_{\mu\nu}$. E ainda mais, a divergência deste tensor é de tal sorte que:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.2)$$

Logo, usando a proriiedade da divergência do tensor energia-momento e do tensor de Einstein, tem-se que $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. A constante de proporcionalidade foi descoberta quando analisou-se o limite newtoniano. E então, as famosas Equações de Campo de Einstein tomam a forma usual(CARROLL, 2019):

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

As equações agora são covariantes e compatíveis com a relatividade, bem como descrevem a interação gravitacional. Contudo seu conteúdo mais fundamental ainda é o mesmo: a curvatura do espaço-tempo modifica a matéria, e a matéria influencia e curva no espaço-tempo.

A classe de soluções que satisfazem as equações de Einstein na forma:

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (1.4)$$

São chamadas de *soluções de vácuo*. Os Buracos Negros, tema central do projetom são soluções que satisfazem as equações acima(FROLOV; ZELNIKOV, 2011). Ainda mais, os buracos de minhoca também constituem soluções das equações de Einstein, para o caso em que a matéria é dada como um fluido perfeito:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left((\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_\nu \right) \quad (1.5)$$

O presente relatório lida então com a análise da astrofísica e geometria das soluções de vácuo e de fluido perfeito da relatividade geral, dentro do contexto de buracos negros e buracos de minhoca (FROLOV; ZELNIKOV, 2011), (VISSER, 1996).

Precisamente, o estudo que segue trata principalmente da dinâmica do movimento geodésico das trajetórias de luz nos espaços-tempos de kerr e de buracos de minhoca carregados. Geodésicas são curvas tais que, quando procuramos a curva que minimiza o funcional (THORNE et al., 1973):

$$S = \int \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda, \quad (1.6)$$

obtém-se justamente,

$$\delta S = 0 \implies \frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0, \quad (1.7)$$

onde λ é um parâmetro *afim*.

A interpretação física mais concreta, a equação geodésica é uma generalização para espaço-curvos da Primeira Lei de Newton. Pois, se os símbolos de Christoffel forem nulos, temos justamente a equação clássica da segunda lei de Newton. Ainda mais, quando impomos o auto-parallelismo, vemos que:

$$F^k = \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad (1.8)$$

onde agora o parâmetro afim é o tempo t . Logo, a principal interpretação de uma geodésica é: *a trajetória livre de forças*.

Especificamente, em buracos negros e buracos de minhoca, trajetórias de luz podem orbitar o objeto compacto em órbitas fechadas, gerando então a órbita de fótons e a fotosfera. O principal resultado deste projeto foi a análise da órbita de fótons nos buracos de minhoca carregados, conjuntamente com a análise geodésica.

2 BURACOS NEGROS

2.1 Soluções Esféricamente Simétricas

2.1.1 Buracos Negros de Schwarzschild

Em 1916 Karl Schwarzschild(SCHWARZSCHILD, 1916) conseguiu resolver analiticamente as Equações de Campo de Einstein no vácuo, para uma geometria estática,esféricamente simétrica, sem momentum angular e sem carga elétrica e magnética. Essa geometria revelou então qual deveria ser o aspecto do espaço-tempo exterior de um corpo esférico, tal como uma estrela ou um planeta. A métrica de Schwarzschild é então:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (2.1)$$

Onde G é a constante gravitacional de Newton e M pode ser interpretada como a massa. Nota-se que quando $r \rightarrow \infty$ a métrica de Schwarzschild torna-se igual a métrica de Minkowski, isto é, a métrica é *assintoticamente plana*. Isso significa que o espaço-tempo é plano uma distância afastada da fonte de curvatura.

2.1.2 Buracos Negros de Reissner-Nordstrom

É possível ainda adicionar o campo eletromagnético nas equações de campo de Einstein. Ao fazer tal consideração, chega-se duas outras soluções que geram buracos negros: a *solução de Reissner-Nordström*(CARROLL, 2019) e a *solução de Kerr-Newman*.Respectivamente a solução estática com carga elétrica e magnética e a solução com momentum angular com carga elétrica e magnética.

Sendo assim, as equações de campo consideram um tensor energia-momentum não nulo dado por:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\gamma}F_{\nu}{}^{\gamma} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta} \quad (2.2)$$

Onde $F_{\mu\gamma}$ é o *Tensor Eletromagnético* dado por:

$$F_{\mu\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & -B_y \\ E_x/c & B_z & 0 & -B_y \\ E_x/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, as equações de campo de Einstein ficam:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[F_{\mu\gamma} F_{\nu}{}^{\gamma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \right] \quad (2.3)$$

A primeira solução que envolve o campo eletromagnético e as equações de campo de Einstein, é a solução de Reissner-Nordström. Essa solução é uma solução estática e esfericamente simétrica, e por conta do tensor energia momentum ser não nulo mas não envolver nenhum outro campo além do eletromagnético, essa solução pode ser chamada de solução de *Eletrovácuo*.

A métrica de Reissner-Nordström é¹:

$$ds^2 = -\Sigma dt^2 + \Sigma^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (2.4)$$

Onde

$$\Sigma = \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2 + P^2)}{r^2} \right) \quad (2.5)$$

e Q é a carga elétrica e P a carga magnética.

2.2 Soluções Axisimétricas

2.2.1 Buracos Negros de Kerr

Em 1963, Roy Kerr encontrou uma solução das equações de campo de Einstein para uma simetria não mais esférica, mas sim axial (KERR, 1963). Essa solução introduz o momentum angular nos corpos esféricos modelados pela métrica de Schwarzschild. Essa métrica chama-se *métrica de Kerr* e é dada por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{\rho} \right) dt^2 - \frac{2GM a \sin^2(\theta)}{\rho^2} [dt d\phi + d\phi dt] +$$

¹com $c = 1$

$$+\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2d\theta^2 + \frac{\sin^2(\theta)}{\rho^2} \left[(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2(\theta) \right] d\phi^2 \quad (2.6)$$

Onde Δ e ρ são as seguintes funções

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 \quad (2.7)$$

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2\cos^2(\theta) \quad (2.8)$$

$$a = \frac{J}{M} \quad (2.9)$$

Onde J é o momentum angular

2.2.2 Buracos Negros de Kerr-Newman

A solução de Kerr-Newman, é aquela que define um buraco negro com rotação e carga elétrica e magnética(CARROLL, 2019),(FROLOV; ZELNIKOV, 2011):

$$ds^2 = -Fdt^2 - G\left(dtd\phi + d\phi dt\right) + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2d\theta^2 + \frac{\sin^2(\theta)}{\rho^2} \left[(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2(\theta) \right] d\phi^2 \quad (2.10)$$

Onde Δ e ρ são as seguintes funções :

$$F = 1 - \frac{2GMr - G(Q^2 + P^2)}{\rho^2} \quad (2.11)$$

$$G = \frac{2GMr - G(Q^2 + P^2)a\sin^2(\theta)}{\rho^2} \quad (2.12)$$

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr - G(Q^2 + P^2) + a^2 \quad (2.13)$$

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2(\theta) \quad (2.14)$$

$$a = \frac{J}{M} \quad (2.15)$$

Onde J é o momentum angular.

2.2.3 Horizontes de Eventos e Singularidades no Espaço-Tempo de Kerr

A rotação no espaço-tempo introduz modificações nas regiões próximas aos buracos negros de Kerr, notadamente, a rotação introduz dois horizontes de eventos (FROLOV; ZELNIKOV, 2011):

$$\Delta = 0 \implies r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (2.16)$$

Onde r_+ é o horizonte de eventos externo e r_- o horizonte de eventos interno. Ainda mais, a mera rotação modifica a topologia da singularidade pontual para uma geometria anelar:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2(\theta) = 0 \implies \begin{cases} r = 0 \\ \cos(\theta) = 0 \end{cases}. \quad (2.17)$$

Sendo assim, a singularidade ocorre sempre que $r = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Devido à rotação do espaço-tempo, mais estrutura é adicionada ao redor dos buracos negros, como foi visto acima. Contudo, uma das regiões mais importantes para a astrofísica é a chamada *ergoregião*. A ergoregião é uma região que, dada uma família de observadores neste domínio, tais observadores serão obrigados a co-rotacionar com o buraco negro, não podendo portanto contra-rotacioná-lo. Tal região é dada pela equação (FROLOV; ZELNIKOV, 2011):

$$r_{ergo} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (2.18)$$

Contudo, para o presente projeto, o fato mais importante que a ergoregião instaura é a possibilidade de extração de energia rotacional via o chamado *processo de Penrose*.

2.3 Dinâmica Orbital de Geodésicas Tipo-Luz no Espaço-Tempo de Kerr

Para geodésicas nulas na métrica de Kerr, existem duas quantidades conservadas: a energia por unidade de massa em repouso \mathcal{E} e o momento angular azimutal por unidade de massa em repouso \mathcal{L} . Usando as quantidades conservadas, as equações de movimento para geodésicas nulas podem ser escritas de forma mais compacta:

$$\dot{t} = \frac{\mathcal{E}(r^2 + a^2) - a\mathcal{L}}{\Delta}, \quad (2.19)$$

$$\dot{r}^2 = \mathcal{E}^2 - \Delta + \frac{\mathcal{L}^2}{r^2}, \quad (2.20)$$

$$\dot{\theta}^2 = \mathcal{L}^2 - a^2\mathcal{E}^2 \cos^2 \theta, \quad (2.21)$$

$$\dot{\phi} = \frac{a\mathcal{E}(r^2 + a^2) - \mathcal{L}}{\Delta \sin^2 \theta} \quad (2.22)$$

2.4 Astrofísica de Buracos Negros

2.4.1 Processo Blandford-Znajek

O processo Blandford-Znajek (BZ) pressupõe uma magnetosfera estacionária e axialmente simétrica - composta por um campo eletromagnético e um plasma altamente condutor - ao redor de um buraco negro em rotação. A energia do campo eletromagnético é grande em comparação com a densidade de massa de repouso do plasma em todos os lugares, exceto próximo ao plano equatorial, onde a matéria entra em acreção em um disco de alta densidade. Assumimos a configuração de divisão de monopolo, onde o disco é considerado como uma folha de corrente, e as linhas do campo magnético são consideradas assintoticamente radiais à medida que cruzam esferas distantes do buraco negro. Fora do disco, o campo eletromagnético implica a condição de livre de forças (BLANDFORD.D.R.; R., 1977):

$$F_{\mu\nu}J^\nu = 0 \quad (2.23)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Faraday do campo eletromagnético, e $J^\nu = \nabla_\mu F^{\mu\nu}$ é o quadrivetor de corrente. O disco aparece como uma descontinuidade para o campo eletromagnético, e as linhas do campo magnético cruzam o plano equatorial apenas através do buraco negro central. O fluxo total de energia do campo eletromagnético

extraído do buraco negro, também conhecido como potência BZ, é(J, 2022):

$$P = 4\pi \int_0^{\pi/2} \left[\Omega(\Omega_H - \Omega(\partial_\theta \psi))^2 \sqrt{\frac{g_{\phi\phi}}{g_{\theta\theta}}} \right] d\theta. \quad (2.24)$$

Onde Ω e I são funções do campo ψ o campo poloidal. O processo BZ descreve a extração de energia rotacional de um buraco negro em rotação por meio da interação entre o campo magnético do buraco negro e um plasma circundante. Nesse processo, o campo magnético "amarra" parte do plasma próximo ao buraco negro, criando um poderoso gerador de energia que extrai e libera parte da energia rotacional do buraco negro na forma de jatos relativísticos de matéria e radiação.

3 SOLUÇÕES EXÓTICAS

3.1 Buracos de Minhoca com Carga Elétrica

A solução dos buracos de minhoca carregados é dada tal como(S; H., 2001):

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (3.1)$$

E as equações de estrutura do buraco de minhoca, tais como(NETO M. PÉREZ; PELLE, 2023):

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{b'(r)}{r^2} - \frac{Q^2}{r^4} \right\}. \quad (3.2)$$

$$\sigma(r) = -\frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{b(r)}{r^3} - 2 \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \frac{\Phi'(r)}{r} + \frac{Q^2}{r^4} \right\}. \quad (3.3)$$

$$p(r) = \frac{1}{8\pi} \left\{ \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left[\Phi''(r) + (\Phi'(r))^2 - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r(r - b(r))} \Phi'(r) - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r^2(r - b(r))} + \frac{\Phi'(r)}{r} - \frac{Q^2}{r^4} \right] \right\}. \quad (3.4)$$

Onde $\rho(r)$ é a densidade de energia, $\sigma(r)$ é a tensão e $p(r)$ a pressão. A análise foi feita, considerando então a função de forma:

$$b(r) = \frac{b_0^2}{r}. \quad (3.5)$$

Quando $Q = 0$, a solução descreve um buraco de minhoca transitável neutro, e quando $b(r) = 0$, a geometria do espaço-tempo corresponde à solução Reissner-Nordström sem massa. A garganta do wormhole é(NETO M. PÉREZ; PELLE, 2023):

$$1 - \frac{b_0^2}{r^2} + \frac{Q^2}{r^2} = 0, \quad (3.6)$$

que nos leva a:

$$r = \pm \sqrt{b_0^2 - Q^2}. \quad (3.7)$$

Notemos que a coordenada r é definida no domínio $r \in (-\infty, -\sqrt{b_0^2 - Q^2}] \cup [+\sqrt{b_0^2 - Q^2}, +\infty)$.

4 RESULTADOS

4.1 Sombras de Buracos de Minhoca Carregados

Utilizando as trajetórias tipo-luz mostramos como o anel de fótons é projetado no céu. Para esse fim, introduzimos coordenadas celestes que são definidas como (NETO M. PÉREZ; PELLE, 2023):

$$\alpha = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left(-r_0^2 \sin \theta_0 \frac{d\phi}{dr} \right), \quad (4.1)$$

and

$$\beta = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left(r_0^2 \frac{d\theta}{dr} \right), \quad (4.2)$$

onde r_0 é a coordenada de posição do observador remoto e θ_0 é o ângulo de inclinação entre o eixo de simetria do buraco de minhoca e a direção para o observador distante. Usando as equações geodésicas, obtemos

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\xi \csc^2(\theta)}{r^2 E \sqrt{1 - \frac{b_0^2}{r^2} + \frac{Q^2}{r^2}} \sqrt{\frac{1}{\frac{Q^2}{r^2} + 1} - \frac{\eta}{r^2}}}, \quad (4.3)$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\sqrt{\eta - \xi^2 \csc^2(\theta)}}{r^2 E \sqrt{1 - \frac{b_0^2}{r^2} + \frac{Q^2}{r^2}} \sqrt{\frac{1}{\frac{Q^2}{r^2} + 1} - \frac{\eta}{r^2}}}. \quad (4.4)$$

Then, expressions (4.3) e (4.4) ficam,

$$\alpha = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left(- \frac{\xi \csc(\theta_0)}{\sqrt{1 - \frac{b_0^2}{r_0^2} + \frac{Q^2}{r_0^2}} \sqrt{\frac{1}{\frac{Q^2}{r_0^2} + 1} - \frac{\eta}{r_0^2}}} \right), \quad (4.5)$$

$$\beta = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{\eta - \xi^2 \csc^2(\theta_0)}}{\sqrt{1 - \frac{b_0^2}{r_0^2} + \frac{Q^2}{r_0^2}} \sqrt{\frac{1}{\frac{Q^2}{r_0^2} + 1} - \frac{\eta}{r_0^2}}} \right). \quad (4.6)$$

Então,

$$\alpha = -\xi \csc(\theta_0), \quad (4.7)$$

$$\beta = \sqrt{\eta - \xi^2 \csc^2(\theta_0)}. \quad (4.8)$$

Logo, o locus do anel de fótons \mathcal{S} do buraco de minhoca, é dado tal como

$$\mathcal{S}(\alpha, \beta) =: \alpha^2 + \beta^2, . \quad (4.9)$$

e

$$\mathcal{S}(\alpha, \beta) = \eta = \frac{r_{ph}^2}{1 + \frac{Q^2}{r_{ph}^2}} = \frac{(b_0^2 - Q^2)^2}{b_0^2}. \quad (4.10)$$

Os resultados obtidos com a análise geodésica no espaço-tempo de buracos de minhoca carregados pode ser visto no seguinte gráfico:

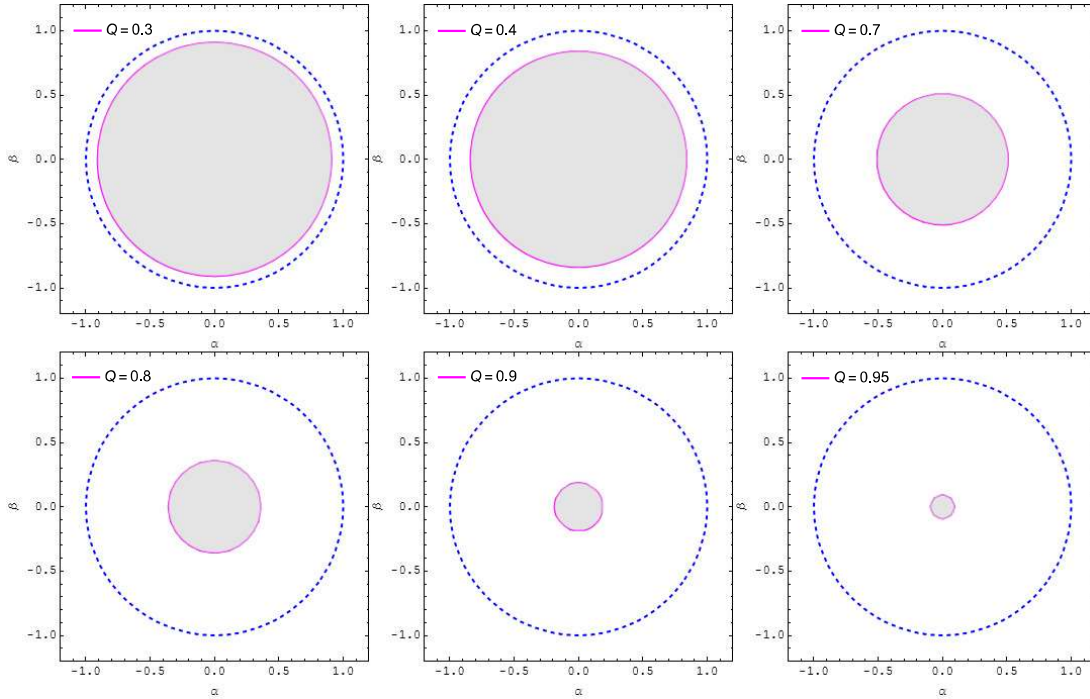


Figura 4.1 -

O principal resultado foi então a Figura 4.1 que consistem na projeção do anel de fótons. Observamos que à medida que o valor da carga aumenta, o tamanho do anel de fótons diminui, ou seja, o buraco de minhoca se torna mais compacto. No limite, tem-se a destruição do objeto compacto. Tal resultado foi publicado em, como um resultado inédito para a física dos wormholes (NETO M. PÉREZ; PELLE, 2023).

5 PERSPECTIVAS E ANÁLISES FUTURAS

O estudo teórico dos buracos negros foi feito, bem como a análise de uma solução exótica da relatividade geral: os buracos de minhoca carregados. Com o estudo do mecanismo de Blandford-Znajek, bem como toda a geometria de Kerr, espera-se em estudos futuros abordar questões de astrofísica observacional como a fonte *OJ287*, um binário de buracos negros, e a fenomenologia da interação do disco de acreção com o buraco negro que orbita *OJ287*, a fim de aplicar a teoria desenvolvida. A análise posterior será feita dentro do tratamento da análise de dados, possivelmente utilizando modelos ARMA e outras ferramentas para o estudo de séries temporais.

6 CONCLUSÕES

Este projeto abordou a matemática, física teórica e astrofísica no contexto dos buracos negros, bem como explorou um espaço-tempo considerado "exótico": o buraco de minhoca carregado. As soluções encontradas para os buracos negros - Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr e Kerr-Newman - representam casos de vácuo e eletro-vácuo das equações de campo de Einstein, caracterizados por propriedades como neutralidade, carga elétrica, rotação e combinações destes. A análise das trajetórias de luz em torno dos buracos negros proporcionou o entendimento sobre o comportamento das partículas não-massivas nesses espaços curvos. Esse entendimento foi posteriormente aplicado na investigação das "sombras" dos buracos de minhoca, permitindo a exploração dos efeitos da carga elétrica na conformação da fotosfera. O estudo do mecanismo de Blandford-Znajek resultou na fórmula da potência que é emitida por esse mecanismo e conjuntamente com o estudo da geometria de Kerr, mais sobre o panorama astrofísico de AGNs foi compreendido. Em particular, a pesquisa concentrou-se nas sombras de buracos de minhoca carregados, por onde a carga influencia explicitamente no tamanho do buraco de minhoca, pois é notável que a sua fotosfera é a própria garganta. Por fim, o panorãma elementar da geometria e física dos buracos negros astrofísicos foi estudada, e em estudos futuros o projeto se concentrará em analisar fontes reais da astrofísica, notadamente *OJ287*.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BLANDFORD.D.R.; R., Z. L. Electromagnetic extraction of energy from kerr black holes. **Monthly Notices**, v. 179, n. 3, p. 433–456, 1977. 7
- CARROLL, S. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. 2st. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. ISBN 1108488390. 1, 3, 5
- FROLOV, V.; ZELNIKOV, A. **Introduction to Black Hole Physics**. 1st. ed. [S.l.]: Oxford, 2011. ISBN 0198729111. 1, 2, 5, 6
- J, e. a. D. Blandford-znajek process in quadratic gravity. **Phys. Rev. D**, v. 105, n. 4, p. 044008, 2022. 8
- KERR, R. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. **Phys. Rev. Lett.**, v. 11, n. 5, p. 237, 1963. 4
- NETO M. PÉREZ, D. R.; PELLE, J. The shadow of charged traversable wormholes. **Int.J.Mod.Phys.D**, v. 32, n. 2, p. 1–17, 2023. 9, 11, 12
- S, K.; H., L. Exact solutions of a charged wormhole. **Phys. Rev. D**, v. 63, n. 6, p. 064014, 2001. 9
- SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. **Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin**, p. 189–196, 1916. 3
- THORNE, K.; WHEELER, J.; MISNER, C. **Gravitation**. 1st. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 1973. ISBN 9780691177793. 1, 2
- VISSER, M. **Lorentzian Wormholes**. 1st. ed. [S.l.]: Springer, 1996. ISBN 1563966530. 2