



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc m21d/2023/09.14.21.35-TDI

## PROPRIEDADES DE TRANSPORTE DE VELAS SOLARES

Gabriella Aureliano Braz

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Maisa de Oliveira Terra, aprovada em 31 de agosto de 2023.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/49QU99P>>

INPE  
São José dos Campos  
2023

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE  
Coordenação de Ensino, Pesquisa e Extensão (COEPE)  
Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
CEP 12.227-010  
São José dos Campos - SP - Brasil  
Tel.:(012) 3208-6923/7348  
E-mail: pubtc@inpe.br

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):**

**Presidente:**

Dra. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Coordenação-Geral de Ciências da Terra (CGCT)

**Membros:**

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação (CPG)  
Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia, Tecnologia e Ciência Espaciais (CGCE)  
Dr. Rafael Duarte Coelho dos Santos - Coordenação-Geral de Infraestrutura e Pesquisas Aplicadas (CGIP)  
Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon  
Clayton Martins Pereira - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Ivone Martins - Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)





MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc m21d/2023/09.14.21.35-TDI

## PROPRIEDADES DE TRANSPORTE DE VELAS SOLARES

Gabriella Aureliano Braz

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Maisa de Oliveira Terra, aprovada em 31 de agosto de 2023.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/49QU99P>>

INPE  
São José dos Campos  
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Braz, Gabriella Aureliano.

B739p Propriedades de transporte de velas solares / Gabriella Aureliano Braz. – São José dos Campos : INPE, 2023.  
xxviii + 112 p. ; (sid.inpe.br/mtc m21d/2023/09.14.21.35-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2023.

Orientadores : Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Maisa de Oliveira Terra.

1. Dinâmica de velas solares. 2. Problema restrito de três corpos. 3. Equilíbrios artificiais. 4. Bacias de escape. 5. Sistemas dinâmicos. I.Título.

CDU 629.7.031:529.3

---



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÃO



## INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

Serviço de Pós-Graduação - SEPGR

### DEFESA FINAL DE TESE DE GABRIELLA AURELIANO BRAZ REG. 135739/2018, BANCA Nº 214/2023

No dia 31 de agosto de 2023, às 14h, de forma online, o(a) aluno(a) mencionado(a) acima defendeu seu trabalho final (apresentação oral seguida de arguição) perante uma Banca Examinadora, cujos membros estão listados abaixo. O(A) aluno(a) foi APROVADO(A) pela Banca Examinadora, por unanimidade, em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de Doutora em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle. O trabalho não precisa de correções.

**Título:** "PROPRIEDADES DE TRANSPORTE DE VELAS SOLARES"

#### Membros da banca:

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes – Presidente – INPE

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado – Orientador – INPE

Dra. Maisa de Oliveira Terra – Orientadora - ITA

Dra. Sheila Crisley de Assis – Membro Externo – IFC

Dr. Tadashi Yokoyama – Membro Externo – UNESP



Documento assinado eletronicamente por **Rodolpho Vilhena de Moraes (E), Usuário Externo**, em 18/09/2023, às 22:23 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Chefe da Divisão de Pós-Graduação**, em 19/09/2023, às 04:10 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tadashi Yokoyama (E), Usuário Externo**, em 19/09/2023, às 06:36 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maisa de Oliveira Terra (E), Usuário Externo**, em 20/09/2023, às 18:18 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **SHEILA CRISLEY DE ASSIS (E), Usuário Externo**, em 27/09/2023, às 10:51 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.mcti.gov.br/verifica.html>, informando o código verificador **11309304** e o código CRC **E62A0613**.

---

**Referência:** Processo nº 01340.006903/2023-19

SEI nº 11309304

*“Ninguém possui idoneidade para fazer afirmações a respeito do espaço absoluto ou do movimento absoluto. São meras formas do espírito, construções mentais que não podem ser embasadas na experiência. Todos os princípios da mecânica resultam dos nossos conhecimentos empíricos a respeito das posições e dos movimentos relativos dos corpos.” — ALBERT EINSTEIN*



*A meus pais **Luiz e Maria**, à minha irmã **Elizangela** e  
a **Deus**.*





## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

Agradeço ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (*INPE*), seu corpo docente, funcionários de secretarias, portarias, biblioteca e tecnologia da informação, direção e administração geral, que possibilitou meu ingresso e me auxiliaram ao longo do curso sempre com muita cordialidade. Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (*CAPES*) pelo suporte fundamental.

Agradeço aos meus grandes orientadores, Dra. Maisa de Oliveira Terra e Dr. Antonio F. Bertachini de A. Prado, por todos os ensinamentos proporcionados ao longo do curso. Por estarem sempre a disposição para auxiliar, por todo acompanhamento, apoio e compreensão, essenciais para realização desse trabalho.

Agradeço a carismática pesquisadora Dra. Ariadna Farrés Besiana, pelos esclarecimentos voluntários que auxiliaram bastante no processo inicial de desenvolvimento dessa pesquisa e aos estimados pesquisadores Dr. Diogo Merguizo Sanchez e Dr. Safwan Aljbaae, por toda assustência técnica fornecido ao longo do curso.

Agradeço aos colegas de grupos de pesquisa, sempre dispostos a ajudarem; em especial, aos antigos colegas Dr. Francis F. Franco e Dr. Dalton Oliveira, sempre solitários.

Agradecimentos especiais também aos meus antigos professores que muito me inspiraram e exerceram grande influência na minha carreira, em especial, ao meu grande amigo, mentor e ilustre professor José C. R. V. Júnior e a professora Clarice E. C. Conforti.

Agradeço a meus maravilhosos pais, Luiz J. Braz e Maria J. I. A. Braz e a minha querida irmã, Elizangela M. A. Braz, pelo constante estímulo e encorajamento nos momentos difíceis, por todo amparo e companhia, mesmo na distância. A contribuição que me forneceram, tornou possível essa etapa.

Agradeço ao meu querido Marco Wagner, pelas contribuições diversas que me forneceu ao longo desse período. Agradeço também a todos os meus amigos que mesmo na distância, se fizeram presentes para alegrar e conceder ânimo nessa jornada.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para tais realizações.



## RESUMO

A vela solar é um dispositivo que consiste basicamente em um grande espelho membranoso através do qual, a energia adquirida com o impacto e reflexão dos fótons provenientes de uma fonte de radiação em sua superfície gera um impulso a espaçonave, tratando-se assim, de uma forma alternativa de propulsão que pode ser à base de uma fonte de energia renovável. Essa tecnologia tem sido estudada na literatura e já foi validada. Visando sua aplicabilidade, este trabalho tem sido dedicado a explorar o efeito da pressão da radiação solar nas propriedades dinâmicas do sistema quando os parâmetros da vela são alterados, utilizando o modelo do Problema Restrito de Três Corpos Circular Espacial clássico com a inclusão de um termo relacionado a aceleração devido a pressão de radiação, aplicado ao sistema Sol-Terra; considerando uma vela solar ideal e a evolução de condições iniciais situadas na região de Hill da Terra. Em geral, o sistema dinâmico considerado é conservativo no sentido de preservar a área. No entanto, somente no caso de incidência ortogonal dos fótons solares na superfície da vela, a dinâmica permanece Hamiltoniana, preservando uma primeira integral de movimento  $C_{J\beta}$ . A análise conduzida no sistema Hamiltoniano inclui o comportamento dos pontos de equilíbrio Lagrangianos, suas estabilidades e a constante de Jacobi associada a eles, além das curvas de velocidade zero, quando o parâmetro principal da vela definido como a razão entre as acelerações devido a pressão de radiação e gravitacional sofridas pela vela,  $\beta$ , assume diferentes valores. Com a finalidade de fornecer uma visão geral da dinâmica desse sistema, seções de Poincaré são apresentadas no sistema Hamiltoniano e bacias de escape são avaliadas tanto no caso Hamiltoniano como no caso não-Hamiltoniano, com o movimento da vela contido no plano. Dessa forma, uma análise qualitativa e quantitativa do comportamento de trajetórias evoluídas como uma função de  $\beta$ ,  $C_{J\beta}$  e dos parâmetros referentes a orientação da vela,  $\alpha$  e  $\delta$ , é desenvolvida. A partir dos resultados alcançados, algumas características dinâmicas notáveis são relatadas e possíveis aplicações e implicações práticas para o projeto de trajetórias são discutidas, demonstrado que missões espaciais com objetivos diversos podem se beneficiar da dinâmica natural de velas solares nesse sistema.

Palavras-chave: Dinâmica de velas solares. Problema restrito de três corpos. Equilíbrios artificiais. Bacias de escape. Sistemas dinâmicos.



# TRANSPORT PROPERTIES OF SOLAR SAIL

## ABSTRACT

The solar sail is a device that basically consists of a sizeable membranous mirror through which the energy acquired with the impact and reflection of photons emerging from a source of radiation on its surface generates an impulse to the spacecraft, thus being treated as an alternative form of propulsion that can be based on a renewable energy source. This technology has been studied in the literature and has already been validated. Aiming at its applicability, this work has been dedicated to exploring the effect of solar radiation pressure on the dynamic properties of the system when the sail parameters are changed, using the classic Spatial Circular Restricted Three-Body Problem model with the inclusion of a term related to the acceleration due to radiation pressure, applied to the Sun-Earth system; considering an ideal solar sail and the evolution of initial conditions located in the Hill region of the Earth. In general, the dynamic system considered is conservative in the sense of being area-preserving. However, only in the case of orthogonal incidence of solar photons on the surface of the sail, the dynamics remain Hamiltonian, maintaining a first integral of motion  $C_{J\beta}$ . The conducted analysis in the Hamiltonian system includes the behavior of the Lagrangian equilibrium points, their stabilities and the Jacobi constant associated with them, in addition to the zero velocity curves, when the main sail parameter defined as the ratio between the accelerations due to pressure radiation and gravitational suffered by the sail,  $\beta$ , assumes different values. In order to provide an overview of the dynamics of this system, Poincaré sections are presented in the Hamiltonian system and escape basins are evaluated in both the Hamiltonian and non-Hamiltonian cases, with the sail motion contained in the plane. Thus, a qualitative and quantitative analysis of the behavior of evolved trajectories as a function of  $\beta$ ,  $C_{J\beta}$  and the parameters referring to the sail orientation,  $\alpha$  and  $\delta$ , is developed. From the achieved results, some remarkable dynamical features are reported and possible applications and practical implications for trajectory design are discussed, demonstrating that space missions with different objectives can benefit from the natural dynamics of solar sails in this system.

Keywords: Dynamics of solar sails. Restricted three-body problem. Artificial equilibria. Escape basins. Dynamical systems.



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 À esquerda: uma vela solar de 20 m x 20 m em teste de implantação em solo; e à direita: imagem da missão espacial IKAROS, com uma membrana de vela solar de 196 m <sup>2</sup> e massa total da espaçonave de 307 kg. . . . .	2
1.2 Imagem ilustrativa da missão Starshot, onde uma série de lasers em fase ou projetor de luz irá impulsionar a espaçonave em direção a Próxima Centauri. . . . .	4
2.1 Sistema de coordenadas para o <i>PR3CCE</i> . Os eixos (X, Y, Z) correspondem ao sistema inercial e os eixos ( $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ) estão relacionados ao sistema não-inercial que gira com velocidade angular $\omega$ , de forma a acompanhar o movimento de $m_1$ e $m_2$ no tempo $t^*$ , portanto os primários estão em repouso nesse referencial. A origem do sistema de coordenadas é o centro de massa de $m_1$ e $m_2$ e os eixos Z e $\bar{z}$ coincidem. . . . .	12
2.2 Representação esquemática de uma vela solar perfeitamente refletora. . . . .	17
2.3 Representação esquemática da decomposição dos vetores de incidência e reflexão dos fótons em função do vetor de direção normal a superfície da vela $\vec{n}$ e do vetor na direção paralela a área de superfície da vela $\vec{p}_a$ . . . . .	18
2.4 Representação gráfica dos ângulos $\alpha$ e $\delta$ que definem a orientação da vela. $\alpha$ é o ângulo entre as projeções de $\vec{S}$ e $\vec{n}$ no plano eclíptico e $\delta$ é o ângulo das projeções entre $\vec{S}$ e $\vec{n}$ no plano $y = 0$ . . . . .	24
2.5 Representação esquemática do sistema em coordenadas esféricas. . . . .	26
2.6 Representação esquemática dos vetores $\hat{n}$ e $\hat{S}$ em função dos ângulos $\alpha, \delta, \psi, \phi$ . . . . .	27
2.7 Trajetória da espaçonave em verde, à esquerda, onde os pontos em azul, são os corpos primários do sistema. Variação de $C_J$ ao longo do tempo, à direita, para tal órbita. . . . .	32
2.8 Variação de $C_J$ (à esquerda) e de $C_{J\beta}$ (à direita) ao longo do tempo, para uma trajetória com parâmetros iniciais $\beta = 5 \times 10^{-6}$ , $\alpha = 0$ e $\delta = 0$ . . . . .	32
2.9 Gráficos para comparação entre o comportamento de $C_{J\beta}$ e $\tilde{C}_{J\beta\delta}$ ao longo do tempo de evolução da órbita de uma vela solar. . . . .	33
2.9 Continuação. . . . .	34
2.10 Representação esquemática da localização dos pontos Lagrangianos no sistema não-inercial (girante) para o <i>PR3CCE</i> . . . . .	35

2.11	Gráfico da variação da coordenada $x$ dos pontos de equilíbrio do $PR3CCEV$ , à esquerda e comportamento destes no plano $x-y$ , à direita, para $0 \leq \beta \leq 1$ . Em ambos os gráficos foram atribuídas as cores verde para $SL_1$ , laranja para $SL_2$ , azul para $SL_3$ , roxo para $SL_4$ e vermelho para $SL_5$ . $SL_4$ e $SL_5$ se sobrepõem no gráfico da esquerda. . . . .	43
2.12	Gráficos de $\beta \times C_{J\beta}$ para os cinco pontos de equilíbrio com $\alpha$ e $\delta$ nulos para $\beta$ variando entre 0 e 1, à esquerda e para $\beta$ variando na região de interesse, entre 0 e 0.07, à direita. Os valores referentes a $SL_1, SL_3, SL_4$ e $SL_5$ se sobrepõem nessas escalas. . . . .	44
2.13	Ampliações dos gráficos de $\beta \times C_{J\beta}$ para os pontos de equilíbrio $SL_1$ e $SL_2$ com $\alpha$ e $\delta$ nulos, à esquerda e da diferença entre $C_{J\beta}$ de $SL_2$ e $C_{J\beta}$ de $SL_1$ ( $\Delta C_{J12} = C_{J2} - C_{J1}$ ), à direita, em torno do ponto em que $C_{J2}$ passa a ser maior do que $C_{J1}$ . . . . .	45
2.14	Diferenças entre os valores de $C_{J\beta}$ nos pontos de equilíbrio $SL_1$ e $SL_2$ ( $\Delta C_{J12}$ ), $\Delta C_{J13} = C_{J3} - C_{J1}$ e $\Delta C_{J45} = C_{J5} - C_{J4}$ , para $\beta$ variando de 0 a 0.07. . . . .	45
2.15	Resumo da classificação dos pontos de equilíbrio em duas dimensões. . . . .	48
2.16	Parte real (Re) e imaginária (Im) dos autovalores dos pontos de equilíbrio $SL_1$ e $SL_2$ para $\alpha = \delta = 0$ e valores diversos de $\beta$ . . . . .	49
2.17	Curvas de Velocidade Zero geradas para o modelo do $PR3CCE$ conforme o valor de $C_J$ decresce. Em (a), (e) e (g) temos o conjunto de $CVZs$ sem ampliações, que desaparece completamente em (h). De (b) a (d) temos as ampliações destas, no entorno da Terra, enquanto em f) temos uma ampliação no entorno de $L_3$ . Os pontos em azul representam os primários e em vermelho os pontos de equilíbrio do sistema. . . . .	51
2.17	Continuação. . . . .	52
2.18	Comportamento das $CVZs$ para valores diversos de $\beta$ , conforme variamos $C_{J\beta}$ , para $\alpha$ e $\delta$ nulos. . . . .	53
3.1	Representação esquemática da construção de uma seção de Poincaré $\Sigma$ , para um conjunto de pontos $V$ de órbitas periódicas. . . . .	56
3.2	Seções de Poincaré no plano $x-y$ para $\beta = 0$ (a) Quando $C_J > C_{J1}$ , (b) quando $C_{J1} > C_J > C_{J2}$ , (c) quando $C_{J2} > C_J$ . (Ver os valores da Tabela 3.1 para $I = 1$ .) . . . . .	59
3.3	Seções de Poincaré no plano $x-y$ para $\beta = 5 \times 10^{-6}$ . (a) Quando $C_{J\beta} > C_{J1}$ , (b) quando $C_{J1} > C_{J\beta} > C_{J2}$ , (c) quando $C_{J2} > C_{J\beta}$ . (Ver os valores da Tabela 3.1 para $I = 2$ .) . . . . .	60



3.4	Seção de Poincaré no plano $x - y$ para $\beta = 1.00074 \times 10^{-4}$ , a partir do qual nota-se a inversão da ordem de abertura dos canais de transporte em $SL_1$ e $SL_2$ , para $C_{J\beta} = 3.000688$ , em que ambos abrem juntos. . . . .	61
3.5	Seções de Poincaré no plano $x - y$ para $\beta = 10^{-3}$ . (a) Quando $C_{J\beta} > C_{J_2}$ , (b) quando $C_{J_2} > C_{J\beta} > C_{J_1}$ , (c) quando $C_{J_1} > C_{J\beta}$ . (Ver os valores da Tabela 3.1 para $I = 3$ .) . . . . .	62
3.6	Seções de Poincaré no plano $x - y$ para $\beta = 0.01$ . (a) Quando $C_{J\beta} > C_{J_2}$ , (b) quando $C_{J_2} > C_{J\beta} > C_{J_1}$ , (c) quando $C_{J_1} > C_{J\beta}$ . (Ver os valores da Tabela 3.1 para $I = 4$ .) . . . . .	63
3.7	Seções de Poincaré no plano $x - y$ para $\beta = 0.03$ . (a) Quando $C_{J\beta} > C_{J_2}$ , (b) e (c) quando $C_{J_2} > C_{J\beta} > C_{J_1}$ , (d) quando $C_{J_1} > C_{J\beta}$ . (Ver os valores da Tabela 3.1 para $I = 5$ .) . . . . .	64
3.8	Seções de Poincaré no plano $x - y$ para $\beta = 0.05$ . (a) Quando $C_{J\beta} > C_{J_2}$ , (b) e (c) e (d) quando $C_{J_2} > C_{J\beta} > C_{J_1}$ . (Ver os valores da Tabela 3.1 para $I = 6$ .) . . . . .	65
3.9	Seções de Poincaré no plano $x - y$ para $\beta = 10^{-3}$ , à esquerda e $\beta = 0.05$ , à direita. . . . .	66
3.10	Trajetória obtida através de uma $CI$ escolhida na seção de Poincaré da Figura 3.4 para $\beta = 1.00074 \times 10^{-4}$ . . . . .	67
3.11	Trajetórias (a) e (b) obtidas através de duas diferentes $CI$ s escolhidas na seção de Poincaré da Figura 3.6(a) para $\beta = 0.01$ . . . . .	67
3.12	Trajetórias (a), (b) e (c) obtidas através de três diferentes $CI$ s escolhidas nas seções de Poincaré da Figura 3.7(a), (b) e (d), respectivamente, para $\beta = 0.03$ . . . . .	69
3.13	Trajetória obtida através de uma $CI$ escolhida na seção de Poincaré da Figura 3.8(a) para $\beta = 0.05$ , à esquerda e ampliação desta trajetória na região em que ela fura a seção de Poincaré, à direita, onde a projeção da trajetória é representada pelas linhas tracejadas; em marrom temos os furos de Poincaré e o ponto quadrado indica a $CI$ usada. . . . .	70
3.14	Bacias de escape no plano $x - y$ para $\beta = 0$ . (a) Quando $C_J > C_{J_1}$ , (b) quando $C_{J_1} > C_J > C_{J_2}$ , (c) quando $C_{J_2} > C_J$ (ver os valores da Tabela 3.1 para $I = 1$ ). . . . .	73
3.15	Bacias de escape no plano $x - y$ para $\beta = 5 \times 10^{-6}$ . (a) Quando $C_{J\beta} > C_{J_1}$ , (b) quando $C_{J_1} > C_{J\beta} > C_{J_2}$ , (c) quando $C_{J_2} > C_{J\beta}$ (ver os valores da Tabela 3.1 para $I = 2$ ). . . . .	74

3.16	Bacias de escape no plano $x - y$ para $\beta = 1.00074 \times 10^{-4}$ , valor em que ocorre a inversão da ordem de abertura dos canais de transporte em $SL_1$ e $SL_2$ para $C_{J\beta} = 3.000688$ em que ambos abrem juntos para (a) $t_f = 200$ e (b) $t_f = 300$ . . . . .	75
3.17	Bacias de escape no plano $x - y$ para $\beta = 10^{-3}$ . (a) Quando $C_{J\beta} > C_{J_2}$ , (b) quando $C_{J_2} > C_{J\beta} > C_{J_1}$ , (c) quando $C_{J_1} > C_{J\beta}$ (ver os valores da Tabela 3.1 para $I = 3$ ). . . . .	76
3.18	Bacias de escape no plano $x - y$ para $\beta = 0.01$ . (a) Quando $C_{J\beta} > C_{J_2}$ , (b) e (c) quando $C_{J_2} > C_{J\beta} > C_{J_1}$ , (d) quando $C_{J_1} > C_{J\beta}$ (ver os valores da Tabela 3.1 para $I = 4$ ). . . . .	77
3.19	Bacias de escape no plano $x - y$ para $\beta = 0.03$ . (a) Quando $C_{J\beta} > C_{J_2}$ , (b) e (c) quando $C_{J_2} > C_{J\beta} > C_{J_1}$ , (d) quando $C_{J_1} > C_{J\beta}$ (ver os valores da Tabela 3.1 para $I = 5$ ). . . . .	78
3.20	Bacias de escape no plano $x - y$ para $\beta = 0.05$ . (a) Quando $C_{J\beta} > C_{J_2}$ , (b), (c) e (d) quando $C_{J_2} > C_{J\beta} > C_{J_1}$ , (e) quando $C_{J_1} > C_{J\beta}$ (ver os valores da Tabela 3.1 para $I = 6$ ). . . . .	79
3.21	(a) tempo de colisão para a bacia a) da Figura 3.14, (b) e (c) tempos de colisão e escape por $L_1$ respectivamente, para a bacia (b) da Figura 3.14, (d), (e) e (f) tempos de colisão, escape por $L_1$ e escape por $L_2$ para a bacia (c) da Figura 3.14, para $\beta = \alpha = \delta = 0$ . . . . .	82
3.22	(a) tempo de colisão para a bacia (a) da Figura 3.15, (b) e (c) tempos de colisão e escape por $SL_1$ respectivamente, para a bacia (b) da Figura 3.15, (c), (d) e (e) tempos de colisão, escape por $SL_1$ e escape por $SL_2$ para a bacia (c) da Figura 3.15, para $\beta = 5 \times 10^{-6}$ e $\alpha = \delta = 0$ . . . . .	83
3.23	(a), (b) e (c) tempos de colisão, escape por $SL_2$ e escape por $SL_1$ para a bacia da Figura 3.16 (a), com $t_f = 200$ e (e) e (f) escape por $SL_2$ e escape por $SL_1$ para a bacia da Figura 3.16 (b), com $200 \leq t_f \leq 300$ , para $\beta = 1.00074 \times 10^{-4}$ e $\alpha = \delta = 0$ . . . . .	85
3.24	(a) tempo de colisão para a bacia (a) da Figura 3.17, (b) e (c) tempos de colisão e escape por $SL_2$ respectivamente, para a bacia (b) da Figura 3.17, (c), (d) e (e) tempos de colisão, escape por $SL_1$ e escape por $SL_2$ para a bacia (c) da Figura 3.17, para $\beta = 10^{-3}$ e $\alpha = \delta = 0$ . . . . .	87
3.25	(a) tempo de colisão para a bacia (a) da Figura 3.18, (b) e (c) tempos de colisão e escape por $SL_2$ respectivamente, para a bacia (b) da Figura 3.18, (c), (d) e (e) tempos de colisão, escape por $SL_1$ e escape por $SL_2$ para a bacia (d) da Figura 3.18, para $\beta = 0.01$ e $\alpha = \delta = 0$ . . . . .	88

3.26	(a) tempo de colisão para a bacia (a) da Figura 3.19, (b) e (c) tempos de colisão e escape por $SL_2$ respectivamente, para a bacia (c) da Figura 3.19, (c), (d) e (e) tempos de colisão e escape por $SL_2$ para a bacia (d) da Figura 3.19, para $\beta = 0.03$ e $\alpha = \delta = 0$ . . . . .	89
3.27	(a) tempo de colisão para a bacia (a) da Figura 3.20, (b) e (c), (d) e (e), (f) e (g) tempos de colisão e escape por $SL_2$ respectivamente, para as bacias (b), (c) e (d) da Figura 3.20, (h), (i) e (j) tempos de colisão, escape por $SL_1$ e escape por $SL_2$ para a bacia (e) da Figura 3.20, para $\beta = 0.05$ e $\alpha = \delta = 0$ . . . . .	90
3.27	Continuação. . . . .	91
3.28	Bacias de escape no plano $x - y$ para $\beta \approx 10^{-4}$ (Figura (a)), $\beta = 0.01$ (Figura (b)), $\beta = 0.03$ (Figuras (c) a (f)) e $\beta = 0.05$ (Figuras (g) e (h)) geradas a partir dos mesmos conjuntos de condições iniciais usados para obtê-las no caso Hamiltoniano. . . . .	94
3.28	Continuação. . . . .	95
3.29	Em (a), (b) e (c) tempos de colisão, escape por $SL_2$ e escape por $SL_1$ para a bacia da Figura 3.28 (a), para $\beta = 1.00074 \times 10^{-4}$ , $\alpha = 60^\circ$ e $\delta = 0$ . . . . .	97
3.30	Em (a) e (b) tempos de colisão e escape por $SL_2$ para a bacia da Figura 3.28 (b), para $\beta = 0.01$ , $\alpha = 15^\circ$ e $\delta = 0$ . . . . .	98
3.31	Em (a) e (b), tempos de colisão e escape por para a bacia da Figura 3.28 (c), para $\beta = 0.03$ , $\alpha = 15^\circ$ e $\delta = 0$ . Em (c), tempos de colisão para a bacia da Figura 3.28 (d), para $\beta = 0.03$ , $\alpha = 60^\circ$ e $\delta = 0$ . . . . .	99
3.32	Em (a), (b) e (c), tempos de colisão, escape por $SL_2$ e escape por $SL_1$ para a bacia da Figura 3.28 (e), para $\beta = 0.03$ , $\alpha = 60^\circ$ e $\delta = 0$ . Em (d), (e) e (f), tempos de colisão, escape por $SL_2$ e escape por $SL_1$ para a bacia da Figura 3.28 (f), para $\beta = 0.03$ , $\alpha = 60^\circ$ e $\delta = 0$ . . . . .	100
3.33	Em (a) tempos de colisão para a bacia da Figura 3.28 (g), para $\beta = 0.05$ , $\alpha = 60^\circ$ e $\delta = 0$ . Em (b), (c) e (d),tempos de colisão, escape por $SL_2$ e escape por $SL_1$ para a bacia da Figura 3.28 (h), para $\beta = 0.05$ , $\alpha = 0$ e $\delta = 60^\circ$ . . . . .	101
3.34	Trajatórias evoluídas no plano $x - y$ e correspondentes variações de $C_{J\beta}$ ao longo do tempo de evolução de cada trajetória. As $CIs$ são marcadas como pontos azuis ou vermelhos de acordo com a bacia a qual pertencem e as trajetórias são marcadas em roxo. . . . .	103



## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Relação entre o número de luminosidade ( $\beta$ ), o parâmetro de carga ( $\sigma$ ), a aceleração característica ( $a_0$ ) e a área da vela ( $A$ ) requisitados para uma vela solar ideal de 10 kg. . . . .	23
2.2 Coordenadas dos pontos de equilíbrio do <i>PR3CCE</i> para o sistema Sol-Terra-satélite. . . . .	42
3.1 Valores de $C_{J\beta}$ nos pontos de equilíbrio $SL_1$ , $SL_2$ e $SL_3$ para diversos valores de $\beta$ , com $\alpha$ e $\delta$ nulos. . . . .	58
3.2 Valores de $C_{J\beta}$ nos pontos de equilíbrio $SL_4$ e $SL_5$ para diversos valores de $\beta$ , com $\alpha$ e $\delta$ nulos. . . . .	58
3.3 Quantidade de condições iniciais que permanece na bacia limitada, que colide com um dos primários e que escapa por $SL_1$ ou $SL_2$ , nas bacias de escape com $\alpha$ e $\delta$ nulos, para $t_f = 200$ e diversos valores de $\beta$ e $C_{J\beta}$ . $C_{J\beta}^*$ refere-se a $t_f = 300$ . . . . .	80
3.4 Porcentagens de condições iniciais que permanecem na bacia limitada, que colidem com um dos primários e que escapam por $SL_1$ ou $SL_2$ , nas bacias de escape com $\alpha \neq 0$ ou $\delta \neq 0$ , para $t_f = 200$ e diversos valores de $\beta$ e $C_{J\beta}$ . . . . .	93



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AU	–	Unidade Astronômica
CVZ	–	Curva de Velocidade Zero
CI	–	Condição Inicial
GPS	–	Global Positioning System
IKAROS	–	Interplanetary Kite-craft Accelerated by Radiation of the Sun
JAXA	–	Japan Aerospace Exploration Agency
NASA	–	National Aeronautics and Space Administration
P3C	–	Problema de Três Corpos
PR3C	–	Problema Restrito de Três Corpos
PR3CCE	–	Problema Restrito de Três Corpos Circular Espacial
PR3CCEV	–	Problema Restrito de Três Corpos Circular Espacial para a Vela
SVZ	–	Superfície de Velocidade Zero





## LISTA DE SÍMBOLOS

$G$	–	Constante de gravitação universal.
$C_1, C_2$	–	Corpos primários do <i>PR3C</i> .
$C_3$	–	Corpo de massa desprezível, no <i>PR3C</i> .
$m_1, m_2$	–	Massas dos primários, com $m_1 > m_2$ .
$m_3$	–	Massa infinitesimal, no <i>PR3C</i> .
$C_J$	–	Constante de Jacobi do <i>PR3CCE</i> .
$C_{J1, \dots, 5}$	–	Constante de Jacobi nos cinco pontos de equilíbrio.
$C_{J\beta}$	–	Constante de Jacobi para o <i>PR3CCEV</i> .
$\tilde{C}_{J\beta\delta}$	–	Expressão semelhante a $C_{J\beta}$ para o caso em que $\delta \neq 0$ .
$L_{1, \dots, 5}$	–	Pontos de Equilíbrio Lagrangianos no <i>PR3CCE</i> .
$SL_{1, \dots, 5}$	–	Soluções de Equilíbrio no <i>PR3CCEV</i> .
$\mu$	–	Massa reduzida do menor primário.
$\Omega$	–	Potencial efetivo do <i>PR3CCE</i> .
$\Omega_\beta$	–	Potencial efetivo para o <i>PR3CCEV</i> .
$\tilde{\Omega}_{\beta\delta}$	–	Expressão semelhante a $\Omega_\beta$ para o caso em que $\delta \neq 0$ .
$L_S$	–	Luminosidade do Sol.
$W$	–	Fluxo de energia.
$\sigma_B$	–	Constante de Boltzmann.
$T_{ef}$	–	Temperatura efetiva.
$h$	–	Constante de Planck.
$c$	–	Velocidade da luz no vácuo.
$\beta$	–	Número de luminosidade (parâmetro adimensional da vela solar).
$\beta_{cr}$	–	Valor de $\beta$ crítico.
$\sigma$	–	Parâmetro de carga da vela.
$\hat{S}$	–	Linha da direção Sol-Vela.
$\vec{n}$	–	Vetor normal a superfície da vela.
$\alpha, \delta$	–	Ângulos que definem a orientação da vela solar.
$\eta$	–	Coeficiente de refletividade da vela.
$a_0$	–	Aceleração característica da vela.



## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	5
1.2 Objetivo . . . . .	6
1.3 Organização do trabalho . . . . .	6
<b>2 CONCEITOS TEÓRICOS E METODOLOGIA</b> . . . . .	<b>7</b>
2.1 Problema Restrito de Três Corpos Circular Espacial . . . . .	7
2.2 Vela solar no Problema Restrito de Três Corpos . . . . .	12
2.2.1 Pressão de radiação solar . . . . .	13
2.2.2 Força de pressão de radiação . . . . .	17
2.2.2.1 Aceleração característica . . . . .	22
2.2.3 Orientação da vela solar . . . . .	23
2.2.4 Equações de movimento . . . . .	25
2.3 Famílias de pontos de equilíbrio . . . . .	34
2.3.1 Estabilidade dos pontos de equilíbrio . . . . .	46
2.4 Superfícies de Velocidade Zero . . . . .	49
<b>3 ANÁLISE DO SISTEMA DINÂMICO</b> . . . . .	<b>55</b>
3.1 Mapas e seções de Poincaré . . . . .	55
3.2 Bacias de Escape . . . . .	70
3.2.1 Casos não-Hamiltonianos do modelo da vela solar ( $\alpha \neq 0$ ou $\delta \neq 0$ ) . . . . .	92
<b>4 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>105</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .	<b>109</b>



# 1 INTRODUÇÃO

Através de métodos muito precisos da física nuclear, como a datação radioativa em fragmentos de meteoritos, estima-se na atualidade que a Terra tenha uma idade aproximada de 4.5 bilhões de anos (DALRYMPLE, 1991) e por meio do estudo de registros arqueológicos como fósseis, considera-se que o surgimento do *Homo sapiens* (“homem sábio”), deu-se entre cerca de 100 e 200 mil anos atrás (HUBLIN et al., 2017) mas apesar de grande parte do conhecimento fundamental para o progresso da ciência, da engenharia e das tecnologias espaciais adquirido ter sido introduzido e constantemente aperfeiçoado desde alguns séculos, com o advento da filosofia e o avanço das tecnologias primordiais, o desenvolvimento e a realização de missões espaciais resumem-se ainda em poucas décadas. Dessa forma, há uma enorme variedade de questões a serem discutidas e solucionadas envolvendo novas limitações tecnológicas cujas respostas podem ser encontradas em uma maior compreensão da natureza espacial, que inclui a identificação, formação ou evolução de corpos celestes e a dinâmica espacial.

A medida que novas tecnologias e descobertas científicas tem sido desenvolvidas a respeito da conquista e exploração espacial, diversas aplicações práticas como por exemplo o sistema *GPS (Sistema de Posicionamento Global)*, o aperfeiçoamento das técnicas de previsão do tempo, a ampliação dos serviços de cobertura de internet ou de monitoramento ambiental entre uma infinidade de itens, tem gerado enormes benefícios para a sociedade, de forma que foram incorporadas com grande êxito em nosso cotidiano. Com o avanço da ciência e das tecnologias espaciais, muitas outras aplicações são esperadas para os próximos anos, que podem envolver a remoção de detritos espaciais e a mineração de asteróides entre outras.

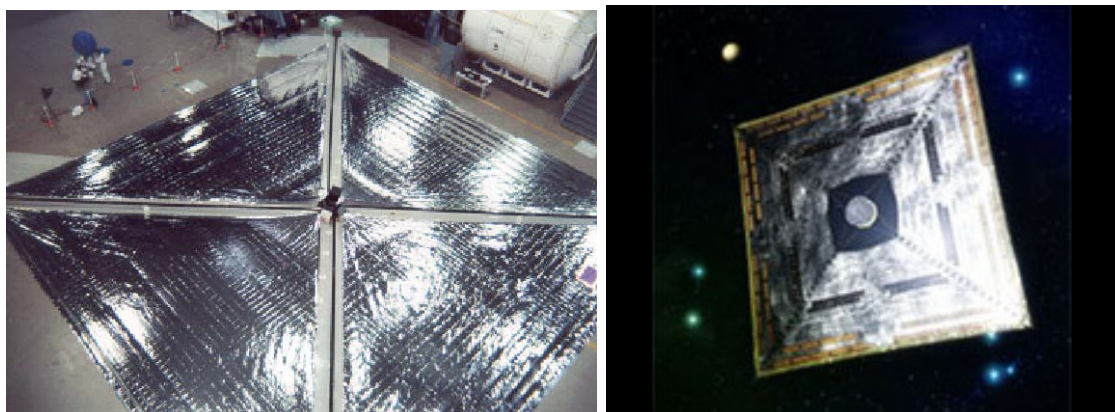
Quando se trata de missões espaciais de modo geral, há uma grande preocupação principalmente com o gasto de combustível e com o tempo de duração das manobras orbitais desejadas, que são os maiores limitantes dos projetos de missões. Nesse contexto, pode ser interessante, analisar as propriedades dinâmicas do sistema e as vantagens que podem ser obtidas ao incluir no modelo matemático, as perturbações que exercem influência significativa sobre os corpos envolvidos, de acordo com os objetivos específicos de determinadas missões.

Uma das alternativas mais interessantes encontradas para reduzir o consumo de combustível das espaçonaves ou mesmo como fonte de energia primária é a utilização da pressão de radiação solar como forma de propulsão. Isso se justifica pois a maior parte da energia gerada pelo Sol através de fusões nucleares, é irradiada na forma de

radiação eletromagnética (GOMES, 2018) que abrange todo o Sistema Solar e algumas vezes o efeito dessa pressão de radiação aumenta muito, podendo exceder até mesmo a força gravitacional exercida pelo Sol (MCINNES, 1999). Na vizinhança de corpos pequenos como cometas e asteroides, por exemplo, a aceleração gravitacional local pode ser da mesma ordem que a pressão de radiação solar. A poeira interplanetária também é afetada pela pressão de radiação solar, que sob certas condições pode ser ejetada do espaço interestelar, quando a pressão de radiação exercida passa a ser dominante. Além disso, por se tratar de uma fonte de energia ilimitada, possui uma aplicação ainda mais interessante para missões de longa duração como por exemplo, para exploração do Sistema Solar e do espaço interestelar (FARRÉS, 2009).

A vela solar é um dispositivo que consiste em um grande espelho membranoso desenvolvido com a finalidade de converter a energia adquirida com o impacto e a reflexão dos fótons emitidos pelo Sol em sua superfície, em momento, impulsionando a espaçonave (FARRÉS, 2009). Uma vela solar deve possuir pequena massa para alcançar grandes velocidades, grande área de contato para interceptar o maior número de fótons possível, superfície lisa altamente reflexiva e de espessura fina de modo a garantir a maior transferência de momento dos fótons para a vela e maximizar o efeito da propulsão. Além disso, o desempenho dos veículos espaciais que utilizam velas solares como forma de propulsão, dependem grandemente da atitude da vela (SANTOS, 2015).

Figura 1.1 - À esquerda: uma vela solar de 20 m x 20 m em teste de implantação em solo; e à direita: imagem da missão espacial IKAROS, com uma membrana de vela solar de 196 m<sup>2</sup> e massa total da espaçonave de 307 kg.

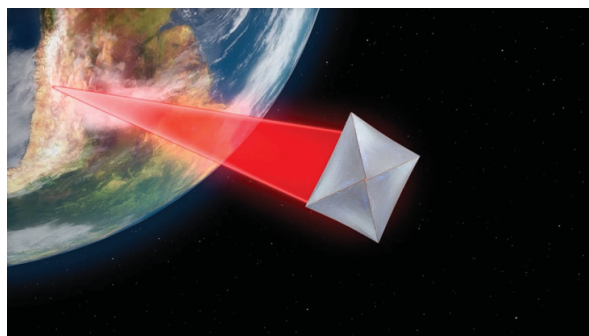


Fonte: Herbeck et al. (2002) e Japan Aerospace Exploration Agency (JAXA) (2020).

O primeiro veículo espacial a utilizar a pressão de radiação como forma de propulsão primária foi lançado em 2010 pela *Japan Aerospace Exploration Agency (JAXA)*, na missão *Interplanetary Kite-craft Accelerated by Radiation of the Sun (IKAROS)*, realizada com sucesso desde sua fase inicial (VAN DER HA et al., 2015). A *IKAROS* foi também a primeira vela solar a realizar uma viagem interplanetária. Posteriormente, a missão *NanoSail-D2* da *National Aeronautics and Space Administration (NASA)*, lançada em 2011 e mais recentemente, a missão *LightSail-2* lançada pela *Planetary Society* em 2019, também foram implantados com grande êxito, demonstrando a tecnologia e validando o conceito de velas solares. Muitas outras missões que devem utilizar velas solares para impulsionar a espaçonave são esperadas para os próximos anos, como a *Solar Cruiser* proposta pela *NASA* para testar uma grande vela solar em uma órbita artificial entre a Terra e o Sol em 2025 e a *Oversize Kite-craft for Exploration and Astronautics in the Outer Solar System (OKEANOS)* que planeja explorar um asteroide troiano de Júpiter em 2026. Um resumo histórico dos primeiros estudos e projetos envolvendo as velas solares pode ser encontrado em (MCINNES, 1999; SANTOS, 2015).

Um dos projetos de missão espacial de grande interesse recente, que surgiu com o advento das velas solares é o ambicioso projeto *Breakthrough Starshot*, desenvolvido pela *Starshot Breakthrough Initiative*, com o objetivo principal de alcançar a Próxima Centauri b, que é um exoplaneta dentro da zona habitável da estrela mais próxima da Terra que é a Próxima Centauri, a 4.2 anos-luz de distância da Terra em aproximadamente 20 anos, embora haja ainda um grande número de desafios a serem solucionados pela engenharia para que possa se tornar realidade (PARKIN, 2018). Com isso, espera-se que o conceito para espaçonaves ultraleves movidas a radiação de laser seja provado, gerando grandes benefícios para a astronomia, com a exploração do Sistema Solar e de asteróides próximos a Terra. A espaçonave consiste em uma vela solar impulsionada por pressão de radiação de laser, com uma carga útil contendo os componentes eletrônicos e sensores necessários para coletar dados e transmiti-los de volta (ATWATER et al., 2018).

Figura 1.2 - Imagem ilustrativa da missão Starshot, onde uma série de lasers em fase ou projetor de luz irá impulsionar a espaçonave em direção a Próxima Centauri.



Fonte: Atwater et al. (2018).

Podemos encontrar na literatura uma grande quantidade de trabalhos que utilizam o modelo matemático do *Problema Restrito de Três Corpos Fotogravitacional* para estudar a interação da pressão de radiação solar exercida em um determinado sistema. Vladimir V. Radzievskii foi um dos primeiros cientistas a formular e discutir o problema em 1950, onde pelo menos um dos corpos é um emissor de radiação intensa. Através do estudo desse modelo, descobriu-se que ocorre uma mudança na posição dos pontos de equilíbrio além de surgirem novos pontos de equilíbrio em comparação com o problema clássico (CHERNIKOV, 1970). Descobriu-se também que tratando-se do caso tridimensional, quando ambos os primários são emissores de radiação e o menor primário é um esferóide oblato, existem pontos de equilíbrio fora do plano (SHANKARAN et al., 2011). Além disso, assumindo que ambos os primários são fontes de radiação e considerando o modelo fora do plano, concluiu-se também que não existem pontos de equilíbrio estáveis fora do plano (TODORAN, 1994).

Considerando ainda a formulação do *Problema Restrito de Três Corpos Fotogravitacional* no caso planar, onde o primário mais massivo é um emissor de radiação de massa quatro vezes maior que a do primário menor, bacias de escape de condições iniciais foram estudadas. Neste caso, as órbitas de colisão, escape ou que permanecem em movimento limitado foram classificadas em um disco de raio  $R_d = 10$  em que o critério de colisão foi imposto para as órbitas que atravessam as circunferências orbitais referentes a trajetória dos primários e as órbitas de movimento limitado são aquelas que permanecem dentro do círculo de raio  $R_d$  após um tempo de integração  $t_{max} = 10^4$ . Tais análises revelaram que a pressão de radiação exerce um grande impacto no caráter da estrutura das órbitas com respeito a energia total



orbital (ZOTOS, 2015).

O modelo do *Problema Restrito de Três Corpos Fotogravitacional* está contido nas equações de movimento da vela solar, quando assume-se uma orientação específica para a vela em que o sistema é Hamiltoniano.

Dentre a grande variedade de trabalhos que abordam diversos aspectos essenciais para o desenvolvimento e aplicação das velas solares, ressaltamos algumas referências principais, as quais utilizamos sistematicamente no decorrer dessa pesquisa. Em McInnes (1999), encontramos desde uma descrição detalhada sobre como projetar e construir as velas, um relato histórico do advento das velas solares e possíveis aplicações, até a formulação matemática envolvida em sua utilização atendendo considerações diversificadas na modelagem apresentada. Há também uma extensa coletânea incluindo Farrés (2009), Farrés; Jorba (2015) e Farrés; Jorba (2016) em que se utiliza o modelo matemático do *Problema Restrito de Três Corpos* com a inclusão da pressão de radiação e diversas formas de parametrização da orientação da vela, onde a reação dos pontos de equilíbrio artificiais à variação de parâmetros foi estudada, o efeito da pressão de radiação em uma dada trajetória quando se modifica a orientação da vela, além da disponibilidade de variedades invariantes de diferentes pontos de equilíbrio que se conectam, propiciando órbitas de transferência.

## 1.1 Motivação

Trabalhos anteriores foram desenvolvidos utilizando o *Problema Restrito de Três Corpos Circular Planar* aplicado a 10 sub-sistemas dentro do Sistema Solar para analisar a dependência de propriedades das bacias de escape de condições iniciais com a energia e o comportamento das órbitas ao redor de pontos de equilíbrio (ASSIS, 2014; ASSIS; TERRA, 2014; ASSIS; TERRA, 2015). Além disso, diversas pesquisas exemplares e muito estimulantes tem sido realizadas abrangendo a dinâmica de velas solares.

Para que seja possível utilizar a pressão de radiação como uma forma de propulsão alternativa, reduzindo de forma significativa os custos das missões espaciais é imprescindível o estudo da dinâmica natural das velas solares e das propriedades dinâmicas do sistema considerando o efeito da pressão de radiação, a fim de que sejam examinadas e compreendidas suas características. Explorando e conhecendo mais detalhadamente o caráter e a riqueza dinâmica envolvida no sistema, quando seus parâmetros são variados, pode-se otimizar os benefícios resultantes.

## 1.2 Objetivo

O objetivo desse trabalho é estudar a dinâmica natural de uma vela solar no sistema Sol-Terra, onde sua massa e suas dimensões são consideradas, utilizando o modelo do *Problema Restrito de Três Corpos Circular Espacial* incluindo a interação com a pressão de radiação gerada pelo Sol. Para isso, pretende-se analisar a dependência do comportamento das seções de Poincaré e de bacias de escape de condições iniciais, além dos pontos de equilíbrio Lagrangianos e suas estabilidades, quando se adiciona a pressão de radiação e os parâmetros do sistema são alterados, considerando a região de Hill ao redor da Terra como região de interesse. Tais análises devem ampliar a compreensão das características deste sistema, com a finalidade de classificar as condições em que se pode observar diferentes fenômenos. Dessa forma, torna-se viável realizar um melhor planejamento para as diversas missões espaciais futuras, visando as vantagens que podem ser obtidas.

## 1.3 Organização do trabalho

Inicialmente, definimos o modelo matemático utilizado para a vela solar, descrevemos algumas propriedades importantes envolvidas no *Problema Restrito de Três Corpos* e verificamos o que se altera ao introduzirmos a pressão de radiação solar, no Capítulo 2. No Capítulo 3, apresentamos a metodologia envolvida nesta análise dinâmica, assim como os resultados obtidos. Conclusões e propostas de trabalhos futuros são apresentados no Capítulo 4.

## 2 CONCEITOS TEÓRICOS E METODOLOGIA

O modelo matemático do *Problema de N Corpos* foi proposto por Isaac Newton (1643-1727) onde as equações de movimento que descrevem a trajetória dos planetas no Sistema Solar foram apresentadas. Em sua formulação, Newton considerou os corpos como sendo pontos de massa, frequentemente denominados partículas e estes estão sujeitos a força de atração gravitacional mútua, que rege seus movimentos. O problema consiste em, determinadas as massas dos  $N$  corpos e suas respectivas posições e velocidades em um certo instante de tempo, calcular suas posições e velocidades num instante futuro (PRADO, 2001).

Quando se considera  $N = 3$  temos o *Problema de Três Corpos (P3C)*, que é um caso especial do *Problema de N Corpos* e se aplica a uma enorme quantidade de situações em que é possível desconsiderar a presença dos demais corpos, devido a massas envolvidas e de acordo com as distâncias entre eles, ou em uma idealização, esses corpos estão isolados em um conjunto no Universo.

No entanto, em muitas situações de interesse é necessário estudar o movimento de um corpo ( $C_3$ ) de massa muito pequena, usualmente referida como desprezível, na presença de dois corpos ( $C_1$  e  $C_2$ ) de massas maiores. Dessa forma, o Problema de N Corpos recebe mais uma simplificação e este modelo é conhecido como *Problema Restrito de Três Corpos (PR3C)*.

### 2.1 Problema Restrito de Três Corpos Circular Espacial

O modelo utilizado nesse trabalho é o *Problema Restrito de Três Corpos Circular Espacial (PR3CCE)*, que trata do movimento de um corpo de massa infinitesimal  $m_3$  no espaço tridimensional que contém as órbitas circulares e coplanares dos corpos de massas finitas  $m_1$  e  $m_2$  em torno do centro de massa.

Os primários movem-se com velocidade angular constante  $\omega$  em torno do centro de massa comum em órbitas circulares, assim, é possível traçar um eixo girante que conecta ambos e definir um sistema de coordenadas ortonormal centrado no bari-centro que gira com os primários, chamado sistema sinódico. Sendo assim, podemos calcular as órbitas de  $C_3$  tanto em relação ao sistema inercial (sideral) quanto ao não-inercial (sinódico) no qual  $C_1$  e  $C_2$  estão estáticos.

A equação de movimento para um corpo de massa  $m_i$  obtida a partir da lei da gravitação universal de Newton para o problema de três corpos no sistema inercial é definida por:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_{ij}), \quad (N = 3; j \neq i; j = 1, \dots, N); \quad (2.1)$$

onde  $G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$  é a constante de gravitação universal,  $\vec{r}_{ji} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$  é o raio-vetor que aponta de  $m_i$  para  $m_j$ ,  $\vec{r}_{ij} = -\vec{r}_{ji}$  e

$$r_{ij} = |\vec{r}_{ij}| = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}. \quad (2.2)$$

Considerando a aproximação  $m_3 \ll m_1, m_2$  nas equações de movimento do problema geral de três corpos (Equação (2.1)), obtemos as equações para o problema restrito de três corpos, que torna possível estudar primeiramente o movimento dos primários e posteriormente, o movimento do terceiro corpo, afinal, a massa  $m_3$  não interfere no movimento dos primários. Então podemos escrever a Equação de Newton para o terceiro corpo de massa  $m_3$  no referencial inercial como:

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3}. \quad (2.3)$$

Realizando uma rotação no sistema de coordenadas e utilizando relações de transformação trigonométricas conhecidas, pode-se escrever as equações que transformam as coordenadas do sistema inercial para o sinódico da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X &= \bar{x} \cos(\omega t^*) - \bar{y} \sin(\omega t^*), \\ Y &= \bar{x} \sin(\omega t^*) + \bar{y} \cos(\omega t^*), \\ Z &= \bar{z}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Estas, podem ser reescritas na forma matricial

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{r}}, \quad (2.5)$$

onde o vetor  $\mathbf{R}$  tem componentes  $(X, Y, Z)$  e o vetor  $\bar{\mathbf{r}}$  tem componentes  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  e a matriz  $\mathbf{A}$  é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t^*) & -\sin(\omega t^*) & 0 \\ \sin(\omega t^*) & \cos(\omega t^*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

A Equação (2.3) pode ser separada nas componentes X, Y e Z e sua transformação para o sistema não-inercial deve ser simplificada quando as variáveis complexas são introduzidas. Tais etapas podem ser encontradas detalhadamente em Szebehely (1967).

Definindo o potencial negativo, também chamado função-força,

$$F = U(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{\omega^2}{2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + G \left( \frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right), \quad (2.7)$$

onde o termo  $(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$  é o potencial devido a força centrífuga na direção de  $\vec{r}$  e os termos  $1/r_{13}$  e  $1/r_{23}$  devem-se ao potencial gravitacional dos primários, a Equação (2.3) pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^{*2}} - 2\omega \frac{d\bar{y}}{dt^*} = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}}, \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dt^{*2}} + 2\omega \frac{d\bar{x}}{dt^*} = \frac{\partial F}{\partial \bar{y}}, \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2 \bar{z}}{dt^{*2}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}, \quad (2.10)$$

que são as equações de movimento de  $C_3$  no sistema de referência girante, nas quais, os termos  $-2\omega \frac{d\bar{y}}{dt^*}$  e  $2\omega \frac{d\bar{x}}{dt^*}$  correspondem a força fictícia de Coriolis, que depende da velocidade de  $C_3$  no sistema referencial não-inercial (MURRAY; DERMOTT, 1999).

A função  $F$  é chamada de função-força do sistema, pois suas derivadas parciais em relação as coordenadas envolvidas são iguais as componentes das forças agindo no sistema. Observa-se, no entanto, que  $U$  não é o potencial verdadeiro, devido sua definição com sinal oposto (BROUWER; CLEMENCE, 1961), além disso, algumas, mas não todas as acelerações experimentadas por  $C_3$  no referencial girante podem ser derivadas deste (MURRAY; DERMOTT, 1999), contudo, pode ser chamado de “pseudo-potencial”.

O problema geral de três corpos não possui uma dependência explícita no tempo, portanto, sabe-se que a energia do sistema é constante, no entanto, no problema restrito, a energia total do sistema varia, violando o princípio de conservação de energia. Essa variação na energia total ocorre devido ao efeito de  $C_3$  no movimento de  $C_1$  e  $C_2$  ser negligenciada, pois é assumido que  $m_3 = 0$  na dinâmica dos primários.

Multiplicando as equações de movimento de  $C_3$  no sistema girante (Equações (2.8) a (2.10)) por  $\dot{\bar{x}}$ ,  $\dot{\bar{y}}$  e  $\dot{\bar{z}}$  respectivamente, somando as expressões e integrando no tempo, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \left[ \left( \frac{d^2 \bar{x}}{dt^{*2}} \right) \dot{\bar{x}} + \left( \frac{d^2 \bar{y}}{dt^{*2}} \right) \dot{\bar{y}} + \left( \frac{d^2 \bar{z}}{dt^{*2}} \right) \dot{\bar{z}} \right] dt^* \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\bar{x}}{dt^*} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{y}}{dt^*} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{z}}{dt^*} \right)^2 \right] \\
&= \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \dot{\bar{y}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \dot{\bar{z}} \right) dt^* = F - \frac{C_J}{2};
\end{aligned} \tag{2.11}$$

onde  $dF = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \dot{\bar{y}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \dot{\bar{z}}$  e  $\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\bar{x}}{dt^*} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{y}}{dt^*} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{z}}{dt^*} \right)^2 \right] = \bar{v}^2$ .  $\bar{v}^2$  é a magnitude da velocidade relativa ao sistema de coordenadas girante.

Substituindo a expressão da função-força  $F$  (Equação (2.7)) nas Equações (2.11) e chamando  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \bar{r}^2$  obtemos que

$$\bar{v}^2 = \omega^2 \bar{r}^2 + 2G \left( \frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) - C_J. \tag{2.12}$$

Esse resultado é conhecido como Integral de Jacobi, às vezes denominado de integral de energia relativa, onde  $C_J$  é a constante de Jacobi.

Utilizando quantidades adimensionalizadas pela distância entre os primários, pela massa total do sistema ( $m_1 + m_2$ ) e pela velocidade angular do sistema girante, as equações de movimento de  $C_3$  no sistema de referência girante (Equações (2.8) a (2.10)) podem ser reescritas na forma:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \quad (2.13)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y, \quad (2.14)$$

$$\ddot{z} = \Omega_z, \quad (2.15)$$

nas quais, os subscritos x, y e z indicam derivadas parciais do potencial efetivo que resulta da adimensionalização da função-força, definido por:

$$\Omega(x, y, z) = \frac{(x^2 + y^2)}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2}, \quad (2.16)$$

onde  $r_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2}$  e  $r_2 = \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2 + z^2}$ .

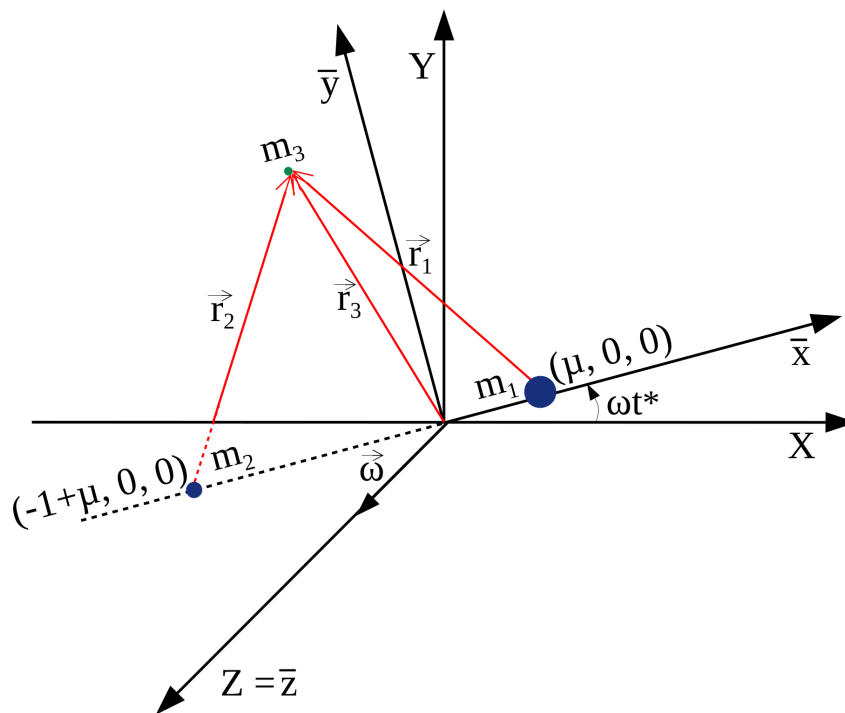
O termo constante  $\frac{\mu(1-\mu)}{2}$ , conhecido como constante de simetria, foi adicionado ao potencial efetivo por uma simples conveniência numérica, mas por ter derivada nula, não altera as equações dinâmicas e a integral de Jacobi também pode ser reescrita na forma:

$$C_J = 2\Omega - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (2.17)$$

onde  $C_J$  é a constante de Jacobi, que se relaciona com a energia orbital total de  $C_3$  através da expressão  $C_J = -2E$  (KOON et al., 2022), sendo assim associada a um nível de energia de suas trajetórias no espaço de fase.

A figura esquemática a seguir, ilustra esse sistema de três corpos, localizados tanto no sistema sideral, quanto no sinódico, no qual a localização do menor primário de massa  $m_2 = \mu$  é dada por  $(-1 + \mu, 0, 0)$  e a localização do maior primário de massa  $m_1 = (1 - \mu)$  é definida por  $(\mu, 0, 0)$ , no sistema de unidades adimensional, em que as coordenadas de posição são definidas por um vetor de coordenadas  $(x, y, z)$ .

Figura 2.1 - Sistema de coordenadas para o *PR3CCE*. Os eixos  $(X, Y, Z)$  correspondem ao sistema inercial e os eixos  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  estão relacionados ao sistema não-inercial que gira com velocidade angular  $\omega$ , de forma a acompanhar o movimento de  $m_1$  e  $m_2$  no tempo  $t^*$ , portanto os primários estão em repouso nesse referencial. A origem do sistema de coordenadas é o centro de massa de  $m_1$  e  $m_2$  e os eixos  $Z$  e  $\bar{z}$  coincidem.



Ao adotar esse sistema adimensional, também conhecido como sistema de unidades canônicas, a distância entre os primários, a massa total do sistema, a constante gravitacional e a velocidade angular do sistema girante tornam-se unitárias e o período do movimento angular equivale a  $2\pi$ .

## 2.2 Vela solar no Problema Restrito de Três Corpos

A vela solar representa um novo conceito de propulsão para espaçonaves, cujo objetivo é aproveitar a pressão de radiação para produzir momento. Apesar da aceleração adquirida pelo veículo espacial ser muito menor que a alcançada por um propulsor “tradicional”, esta, age de forma contínua, podendo acelerar continuamente a espaçonave (FARRÉS, 2009).



Nesta seção introduziremos o modelo matemático utilizado para velas solares, nas equações de movimento do corpo de massa  $m_3$  (Equações (2.13) a (2.15)) do *PR3CCE*.

### 2.2.1 Pressão de radiação solar

Embora a verificação experimental da existência da pressão de radiação tenha sido realizada com sucesso em 1900, por Pyotr Lebedev na Universidade de Moscow, em 1619, Johannes Kepler já havia proposto que a cauda dos cometas eram empurradas na direção contrária ao Sol devido à pressão exercida através da luz solar (MCINNES, 1999; SANTOS, 2015).

Existe uma gama de possíveis modelagens para a pressão de radiação, que podem ser modificadas de acordo com a natureza da fonte de energia e com as especificações de  $C_3$ . Pode-se ainda utilizar a descrição quântica ou eletromagnética da luz, além de diversas considerações.

Usando a descrição eletromagnética da luz, o momento é transferido para a vela solar por uma onda eletromagnética enquanto que na descrição quântica da luz, o momento é transportado pelos fótons, ou seja, pacotes de energia quantizados, pelos quais a luz é composta. Neste trabalho, utilizaremos a formulação da descrição quântica da luz, no entanto sua descrição eletromagnética pode também ser consultada detalhadamente em McInnes (1999).

O conceito de fótons tem sua origem na investigação da radiação térmica, realizada por Max Planck e outros cientistas no início do século XX (MCINNES, 1999). Segundo a lei de Planck, um fóton de frequência  $\nu$  transporta uma energia  $E$  dada por:

$$E = h\nu, \quad (2.18)$$

onde  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$  é a constante de Planck. Além disso, fazendo uso da Relatividade Especial desenvolvida por Albert Einstein em 1905, temos a seguinte relação entre a energia total de uma partícula em movimento, com massa de repouso  $m_0$  e momento  $p$ :

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2, \quad (2.19)$$

na qual  $c = 299,792,458 \text{ m/s}$  é a velocidade da luz no vácuo. O primeiro termo dessa equação representa a energia de repouso e o segundo termo, a energia devido seu movimento. Para um fóton, que possui massa de repouso nula, a Equação (2.19) pode ser reescrita como

$$p = \frac{E}{c}. \quad (2.20)$$

Devemos considerar que um fluxo de fótons atinge a vela solar, então podemos reescrever a Equação (2.20) da seguinte forma:

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{c}; \quad (2.21)$$

onde  $\Delta p$  é a quantidade de momento produzido pelo fluxo de fótons de energia  $\Delta E$ .

A luminosidade  $L_S$  é a potência luminosa, isto é, a energia emitida pela fonte de radiação, que neste caso é o Sol, em todas as direções em uma unidade de tempo  $t$  e o fluxo de energia  $W$  é a energia emitida pelo corpo radiante em uma área de emissão  $A'$ , por unidade de tempo, conforme as seguintes equações:

$$L_S = \frac{E}{t}, \quad W = \frac{E}{tA'}. \quad (2.22)$$

Se o emissor é um corpo esférico com emissão isotrópica, então a área que engloba toda a emissão de radiação a uma distância  $r$  entre o emissor e o receptor do fluxo de energia é a área de uma esfera de raio  $r$ ,  $A' = 4\pi r^2$  (SANTOS, 2015).

Segundo a Lei de Stefan-Boltzmann o fluxo de energia na fotosfera de uma estrela é definido por:

$$W = \sigma_B T_{ef}^4, \quad (2.23)$$

onde  $\sigma_B = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  é a constante de Boltzmann e  $T_{ef}$  é a temperatura de um corpo negro <sup>1</sup> que emite a mesma quantidade de energia por unidade de área

---

<sup>1</sup>Um corpo negro é definido como um objeto que absorve toda a luz que incide sobre ele, sem refletir nada. Um corpo com essa propriedade, não pode ser visto e assim é denominado como negro. Para tal corpo estar em equilíbrio termodinâmico, deve irradiar energia na mesma taxa em que absorve, caso contrário esquentaria ou esfriaria, e sua temperatura variaria. Portanto, um

e por unidade de tempo que a estrela, sendo portanto sua temperatura efetiva. Para o Sol é  $T_{ef} \approx 5772 K$  na fotosfera (NASA, 2020).

De acordo com as Equações (2.22), para uma estrela esférica de raio  $r$  a luminosidade é obtida multiplicando-se o fluxo de energia na fotosfera da estrela  $W$  pela área da fotosfera  $A'$ ,

$$L_S = 4\pi r^2 \sigma_B T_{ef}^4. \quad (2.24)$$

O Sol possui um raio médio de  $R_S = 6.957 \times 10^8 m$ , portanto, uma luminosidade  $L_S \approx 3.83 \times 10^{26} W$ , que por ser uma medida absoluta da potência luminosa, independe da distância do observador. A uma distância da Terra ao Sol,  $R_{ST} \approx 1496 \times 10^{11} m$  (uma Unidade Astronômica<sup>2</sup>) produz um fluxo de energia igual a

$$W_{ST} = \frac{L_S}{4\pi R_{ST}^2}. \quad (2.25)$$

Devido a órbita da Terra ao redor do Sol ser ligeiramente elíptica, o fluxo de energia recebido na Terra varia em aproximadamente 3.5% ao longo do ano e ainda considerando o ciclo solar de 11 anos, há mais uma variação de 0.3%. Um valor médio aceitável é a constante solar de  $W_{ST} = 1368 J s^{-1} m^{-2}$ . Esse valor é medido por satélites, acima da atmosfera terrestre. Além disso, a atmosfera terrestre reflete 39% dessa radiação, de forma que apenas 61% é usada no aquecimento da Terra (MCINNES, 1999; OLIVEIRA FILHO; SARAIVA, 2011).

Substituindo a Equação (2.23) na Equação (2.24), isolando  $W$ , multiplicando e dividindo por  $R_{ST}$  e considerando  $W_{ST}$  conforme definido na Equação (2.25), podemos escrever o fluxo de energia em função da constante  $W_{ST}$ ,

$$W = W_{ST} \left( \frac{R_{ST}}{r} \right)^2. \quad (2.26)$$

Para definirmos a pressão de radiação solar sobre a vela, devemos no entanto consi-

---

corpo negro é tanto um absorvedor perfeito quanto um emissor perfeito (OLIVEIRA FILHO; SARAIVA, 2011).

<sup>2</sup>A *Unidade Astronômica (AU)* é uma medida de comprimento definida como a distância média da Terra ao Sol.

derar que o fluxo de energia  $W$  intercepta a superfície da vela solar de área  $A$ , com uma quantidade de energia  $\Delta E$  em uma unidade de tempo  $\Delta t$  e a uma distância  $r$  da fonte. Partindo da Equação (2.22) podemos escrever

$$W' = \frac{1}{A} \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad (2.27)$$

Como um corpo negro emite radiação isotropicamente, o fluxo de energia do Sol depende apenas de sua temperatura efetiva, logo,  $W' = W$  (SANTOS, 2015).

Substituindo a Equação (2.21) na Equação (2.27), obtemos a taxa de variação do momento em função do fluxo de energia, como

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{WA}{c}. \quad (2.28)$$

A pressão exercida numa superfície é definida como a força de radiação na direção normal de incidência por unidade de área de superfície. Utilizando a segunda lei de Newton obtém-se também que a pressão é a quantidade de momento transportado por unidade de área de superfície e por unidade de tempo, assim, podemos escrever a pressão de radiação solar como

$$P = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{1}{A} \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (2.29)$$

Substituindo a Equação (2.28) na Equação (2.29) podemos ainda definir a pressão de radiação exercida sobre a superfície  $A$  da vela solar em função do fluxo de energia que a intercepta, da seguinte forma:

$$P = \frac{W}{c}. \quad (2.30)$$

A partir dessa equação, pode-se calcular a pressão de radiação solar exercida sobre uma vela solar a uma distância  $r$  do Sol, utilizando a Equação (2.26).

A pressão de radiação exercida em uma vela solar a uma distância  $R_{ST}$  é igual a  $4.56 \times 10^{-6} Nm^{-2}$ . Para o caso de uma vela perfeitamente reflexiva, a pressão observada é o dobro desse valor ( $P = 9.12 \times 10^{-6} Nm^{-2}$ ), como os fótons que atingem

a superfície da vela são totalmente refletidos. Porém, quando esse não é o caso, deve-se adicionar um coeficiente de rugosidade ( $\eta < 1$ ) relacionado a reflectibilidade da vela (MCINNES, 1999; FARRÉS, 2009).

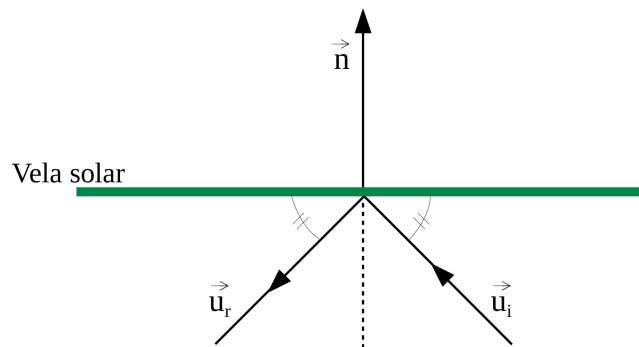
A princípio, consideraremos apenas a pressão de radiação solar agindo no sistema considerado para esse trabalho, além da interação gravitacional dos primários. No entanto, poderia ainda ser considerado o albedo do menor primário, que é a magnitude do brilho aparente causado pela reflexão dos raios solares em sua superfície.

### 2.2.2 Força de pressão de radiação

Uma vela solar é uma superfície orientada, de modo que sua aceleração é uma função de sua área e orientação. A orientação é dada pela direção normal a superfície da vela ( $\vec{n}$ ) (FARRÉS, 2009).

Para uma vela perfeitamente refletora (lisa), o ângulo dos fótons incidentes com a superfície da vela é o mesmo que o ângulo dos fótons refletindo com a superfície da vela e a magnitude da força dos fótons incidentes é a mesma dos fótons refletidos, conforme o esboço a seguir.

Figura 2.2 - Representação esquemática de uma vela solar perfeitamente refletora.



Se a vela não é perfeitamente reflexiva (superfície não plana ou possuindo alguma rugosidade) os ângulos de incidência e reflexão dos fótons com a superfície da vela diferem, assim como a magnitude de suas forças. Para o caso da missão espacial IKAROS, estima-se que devido a sua superfície não ser perfeitamente plana, a aceleração efetiva desta é 4% inferior em comparação com a vela plana ideal, devido ao fato de sua área e reflexividade efetivas serem menores (VAN DER HA et al., 2015;

SANTOS, 2015).

Neste trabalho, consideraremos uma vela solar perfeitamente refletora. Sendo  $A$  a área de superfície da vela, a força exercida devido aos fótons incidentes da direção  $\vec{u}_i$  é dada por:

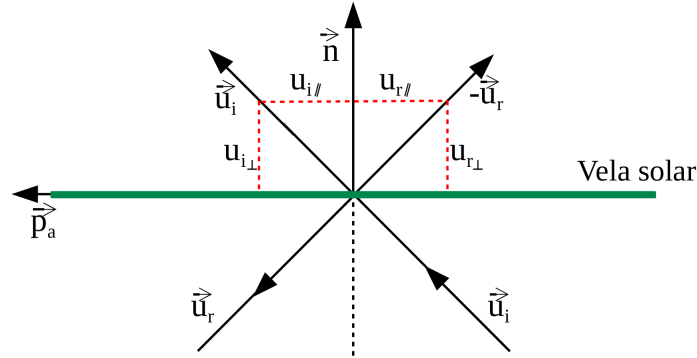
$$\vec{F}_i = PAu_{i\perp}\hat{u}_i, \quad (2.31)$$

onde  $P$  é a pressão de radiação exercida na vela e  $u_{i\perp}$  é a componente do vetor  $\hat{u}_i$  na direção normal ( $\hat{n}$ ) a superfície de incidência do fluxo de energia, que pode ser obtida através da seguinte relação:

$$u_{i\perp} = (\hat{u}_i \cdot \hat{n}) \quad \text{onde,} \quad \hat{u}_i = u_{i\perp}\hat{n} + u_{i\parallel}\hat{p}_a, \quad (2.32)$$

na qual,  $\hat{p}_a$  é o vetor na direção paralela à superfície de área da vela, conforme ilustrado na figura a seguir.

Figura 2.3 - Representação esquemática da decomposição dos vetores de incidência e reflexão dos fótons em função do vetor de direção normal a superfície da vela  $\vec{n}$  e do vetor na direção paralela a área de superfície da vela  $\vec{p}_a$ .



Como o produto escalar entre dois vetores perpendiculares é nulo ( $\hat{p}_a \cdot \hat{n} = 0$ ), substituindo a componente  $u_{i\perp}$  definida na Equação (2.32) na Equação (2.31), podemos reescrever a força de pressão de radiação exercida pela incidência dos fótons na vela como

$$\vec{F}_i = PA(\hat{u}_i \cdot \hat{n})\hat{u}_i. \quad (2.33)$$

Analogamente, podemos escrever a força de pressão de radiação exercida sobre a vela pela reflexão dos fótons da forma

$$\vec{F}_r = -PA(\hat{u}_i \cdot \hat{n})\hat{u}_r, \quad (2.34)$$

afinal,  $u_{r\perp}$ , que é a componente do versor  $\hat{u}_r$  na direção normal ( $\hat{n}$ ) a superfície de reflexão do fluxo de energia é definido como

$$u_{r\perp} = (-\hat{u}_r \cdot \hat{n}) \quad \text{onde,} \quad -\hat{u}_r = u_{r\perp} \hat{n} + u_{r//} (-\hat{p}_a), \quad (2.35)$$

e lembrando que estamos considerando uma vela solar perfeitamente reflexiva, isto é, a radiação incidente sobre a vela é totalmente refletida de forma especular, podemos definir

$$u_{i\perp} = u_{r\perp} \quad \text{e} \quad u_{i//} = u_{r//} \quad \longrightarrow \quad (-\hat{u}_r \cdot \hat{n}) = (\hat{u}_i \cdot \hat{n}), \quad (2.36)$$

assim, substituindo a Equação (2.36) na Equação (2.35), resulta em

$$u_{r\perp} = (\hat{u}_i \cdot \hat{n}). \quad (2.37)$$

Então, a força total de pressão de radiação solar ( $\vec{F}_S$ ) exercida pelos fótons que atingem a vela é a soma da força de incidência (Equação (2.33)) com a força de reflexão (Equação (2.34)), ou seja,

$$\begin{aligned} \vec{F}_S &= \vec{F}_i + \vec{F}_r, \\ \vec{F}_S &= PA(\hat{u}_i \cdot \hat{n})(\hat{u}_i - \hat{u}_r). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Utilizando as Equações (2.32), (2.35), (2.36) e (2.37), podemos ainda escrever

$$\begin{aligned}
(\hat{u}_i - \hat{u}_r) &= (u_{i\perp} + u_{r\perp}) \hat{n} + (u_{i//} - u_{r//}) (\hat{p}_a), \\
(\hat{u}_i - \hat{u}_r) &= 2u_{i\perp} \hat{n} = 2(\hat{u}_i \cdot \hat{n}) \hat{n}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Substituindo a Equação (2.39) na Equação (2.38) e definindo  $\hat{u}_i = \hat{S}$ , em que  $\hat{S}$  é o vetor radial unitário do Sol para a vela, que é a direção de incidência de radiação para uma vela solar em órbita heliocêntrica (MCINNES, 1999), podemos reescrever a força total de pressão de radiação solar exercida pelos fótons sobre a vela como

$$\vec{F}_S = 2PA(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \hat{n}. \tag{2.40}$$

Podemos ainda substituir a pressão de radiação solar exercida na vela, definida na Equação (2.30) e o fluxo de energia que a intercepta em função da luminosidade solar, definido nas Equações (2.25) e (2.26) em (2.40), deste modo, obtemos

$$\vec{F}_S = \frac{L_S A}{2\pi c r^2} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \hat{n}. \tag{2.41}$$

A aceleração dessa força é obtida dividindo a Equação (2.41) pela massa  $m$  da vela:

$$\vec{a}_S = \frac{L_S A}{2\pi m c r^2} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \hat{n} \tag{2.42}$$

ou

$$\vec{a}_S = W_{ST} \left( \frac{R_{ST}}{r} \right)^2 \frac{2A}{mc} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \hat{n}. \tag{2.43}$$

Multiplicando e dividindo a Equação (2.43) pelo módulo da aceleração gravitacional do Sol sobre a vela, podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned}
\vec{a}_S &= W_{ST} \left( \frac{R_{ST}}{r} \right)^2 \frac{2A}{mc} \left( \frac{GM_S/r^2}{GM_S/r^2} \right) (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \hat{n}, \\
\vec{a}_S &= \beta \frac{GM_S}{r^2} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \hat{n},
\end{aligned} \tag{2.44}$$



onde  $M_S$  é a massa do Sol,  $G$  é a constante gravitacional universal e  $\beta$  é um parâmetro adimensional usado para descrever o desempenho da vela, chamado de número de luminosidade, que é definido como sendo a razão entre os módulos da aceleração da pressão de radiação solar e da aceleração gravitacional do Sol sobre a vela, situada a uma distância  $r$  do Sol (FARRÉS, 2009; SANTOS, 2015), ou seja,

$$\beta \equiv \frac{a_s}{a_g} = \frac{\left[ W_{ST} \left( \frac{R_{ST}}{r} \right)^2 \frac{2A}{mc} \right]}{\left( \frac{GM_S}{r^2} \right)},$$

$$\beta = \frac{W_{ST} R_{ST}^2 2A}{GM_S mc} = \frac{L_S}{2\pi c \sigma GM_S},$$

$$\beta = \frac{\sigma^*}{\sigma} \quad \text{onde,} \quad \sigma^* = \frac{L_S}{2\pi c GM_S} \approx 1.53203 \text{ g/m}^2 \quad (2.45)$$

em que  $\sigma \equiv \frac{m}{A}$  é o parâmetro principal para se projetar a vela, conhecido como parâmetro de carga da vela e  $W_{ST}$  é o fluxo de energia proveniente dos fótons solares a uma distância  $R_{ST}$  igual a 1 UA, cuja luminosidade é  $L_S$  (MCINNES, 1999).

O número de luminosidade  $\beta$  depende somente da área de superfície da vela solar ( $A$ ) e da massa total da espaçonave ( $m$ ). Portanto, para uma vela cuja massa e a área não variam ao longo do tempo,  $\beta$  permanece constante durante toda evolução temporal (SANTOS, 2015).

Se  $\beta = 1$ , a força de pressão de radiação solar e a força de atração gravitacional agindo sobre a vela se equivalem, se  $\beta < 1$ , a força de atração gravitacional é dominante sobre o movimento da vela solar e se  $\beta > 1$ , a força de pressão de radiação solar se torna a força primária e a atração gravitacional age como uma força de perturbação sobre a vela.

Para o modelo adotado nesse trabalho, o Sol é considerado como um corpo negro e assumimos que a vela solar é uma superfície plana perfeitamente reflexiva. No entanto, para se obter uma modelagem mais realística, adequada para análise de missão, alguns dos efeitos que podem ser considerados são:

- contribuições da absorção e emissão da radiação solar, em uma vela que não é perfeitamente reflexiva e plana;
- alterações na forma geométrica da vela e variação da temperatura, ou

estimativas da variação dos parâmetros da vela causados por alterações de suas propriedades óticas devido a degradação de seu material;

- leis de controle precisas que mantenham a orientação da vela mais favorável em relação a fonte de radiação;
- um modelo alternativo ao de corpo negro para a fonte de radiação, que considere um fluxo de energia variável no tempo.

Alguns desses efeitos são abordados em [McInnes \(1999\)](#), nos Capítulos 2 e 3.

### 2.2.2.1 Aceleração característica

Para comparar projetos de velas solares é necessário uma medida de desempenho padrão. A forma mais utilizada para avaliar é através de sua aceleração característica  $a_0$ , definida como sendo a contribuição da pressão de radiação solar na aceleração da vela, quando esta se encontra na direção perpendicular a incidência de radiação solar e posicionada a  $1AU$  do Sol ([MCINNES, 1999](#)). Partindo da Equação (2.40) e considerando uma vela perfeitamente reflexiva, sua aceleração característica é dada por:

$$a_0 = \frac{2PA}{m}. \quad (2.46)$$

Quando se considera uma vela solar que não é perfeitamente reflexiva, no entanto, é necessário incluir nessa equação um coeficiente de refletividade  $\eta < 1$ . Conforme mencionado anteriormente, na Seção 2.2.1, a pressão de radiação exercida em uma vela solar a 1 AU do Sol é  $4.56 \times 10^{-6} \text{N m}^{-2}$ , dessa forma a Equação (2.46) pode ser reescrita como

$$a_0 = \frac{2\eta P}{\sigma} = \frac{9.12\eta}{\sigma[\text{g m}^{-2}]} \quad \text{em } [\text{mm s}^{-2}]. \quad (2.47)$$

Normalmente, a eficiência total de uma vela solar é de ordem  $\eta = 0.9$  ([MCINNES, 1999](#)). Na tabela a seguir podemos analisar algumas das possíveis relações entre os parâmetros  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $a_0$  e a área da vela  $A$  que descrevem o desempenho de uma vela solar de 10 kg perfeitamente reflexiva.

Tabela 2.1 - Relação entre o número de luminosidade ( $\beta$ ), o parâmetro de carga ( $\sigma$ ), a aceleração característica ( $a_0$ ) e a área da vela ( $A$ ) requisitados para uma vela solar ideal de 10 kg.

$\beta$	$\sigma[\text{g m}^{-2}]$	$a_0[\text{mm s}^{-2}]$	$A[\text{m}^2]$
$5 \times 10^{-6}$	306406	$2.976 \times 10^{-5}$	$\approx 0.2 \times 0.2$
0.01	153.203	0.0595	$\approx 8 \times 8$
0.03	51.0676	0.1786	$\approx 14 \times 14$
0.05	30.6406	0.2976	$\approx 18 \times 18$
0.07	21.8861	0.4167	$\approx 21 \times 21$
0.1	15.3203	0.5953	$\approx 26 \times 26$
0.2	7.6602	1.1906	$\approx 36 \times 36$

Observamos que a aceleração característica da vela cresce conforme os valores de  $\beta$  e  $A$  aumentam e conforme o parâmetro de carga diminui.

Para a espaçonave da missão espacial *IKAROS*, por exemplo, obteve-se um valor de  $\beta \approx 9.781 \times 10^{-4}$  considerando sua massa total (com propelente). No entanto, com as tecnologias existentes na atualidade é possível considerar valores de  $\beta \leq 0.05$  (FARRÉS, 2009), que requer um parâmetro de carga da vela de  $\sigma \geq 30.6\text{g/m}^2$  que por sua vez, pode corresponder em uma de suas possibilidades, a uma vela quadrada de  $75\text{m} \times 75\text{m}$ , que é a área necessária para uma espaçonave de massa total de 170kg e fornece uma aceleração característica de  $a_0 \approx 0.30\text{mm/s}^2$ .

### 2.2.3 Orientação da vela solar

Uma vela solar é uma superfície orientada. Alterações em sua atitude geram variações na magnitude da força de pressão de radiação exercida sobre esta e mudanças na direção do impulso.

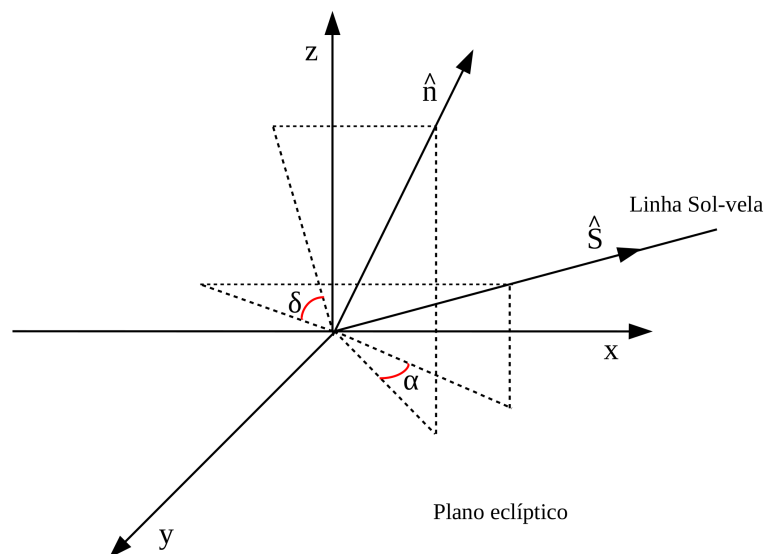
Para controlar a direção da vela no espaço é necessário definir leis de controle, no entanto, para o desenvolvimento desse trabalho, assumiremos que é mantida uma certa orientação fixa para a vela. Tal orientação pode ser definida em termos da direção normal a superfície da vela parametrizada por dois ângulos  $\alpha$  e  $\delta$ , relacionados ao deslocamento horizontal e vertical da direção normal ( $\vec{n}$ ) em relação a linha Sol-vela ( $\hat{S}$ ) respectivamente, em um dado sistema de referência. Existem formas diversas para definir ambos os ângulos e é sempre possível encontrar uma mudança de variáveis entre essas notações, ainda que do ponto de vista dinâmico, a escolha de uma ou outra orientação fixa pode conduzir a diferentes resultados (FARRÉS, 2009).

Utilizaremos a seguinte definição:

- $\alpha$  é o ângulo entre as projeções da linha de direção Sol-vela ( $\vec{S}$ ) e do vetor normal a superfície da vela ( $\vec{n}$ ) no plano eclíptico, que é o plano da órbita da Terra ao redor do Sol;
- $\delta$  é o ângulo dado pela diferença entre o ângulo da linha de direção Sol-vela ( $\vec{S}$ ) com o plano eclíptico e o ângulo do vetor normal a superfície da vela ( $\vec{n}$ ) com o plano eclíptico no plano  $y = 0$ .

A figura a seguir, ilustra a definição desses ângulos.

Figura 2.4 - Representação gráfica dos ângulos  $\alpha$  e  $\delta$  que definem a orientação da vela.  $\alpha$  é o ângulo entre as projeções de  $\vec{S}$  e  $\vec{n}$  no plano eclíptico e  $\delta$  é o ângulo das projeções entre  $\vec{S}$  e  $\vec{n}$  no plano  $y = 0$ .



Dessa forma, se fixamos  $\delta$  e variamos  $\alpha$ , a vela é movida na direção direita/esquerda e se fixamos  $\alpha$  e alteramos  $\delta$ , a vela se move na direção cima/baixo em relação à linha Sol-vela (FARRÉS; JORBA, 2016).

Devemos considerar ainda, que em uma situação real, a vela não é perfeitamente reflexiva, assim, parte da radiação incidente é absorvida pelo material da vela e necessita ser dissipada por emissão térmica através de uma de suas faces, evitando

um super aquecimento da vela, que poderia danificar a superfície refletora e consequentemente, reduzir o efeito da força de pressão de radiação na aceleração da vela. Portanto, somente a parte reflexiva da vela, deve ser exposta diretamente a radiação solar, isto é, a direção normal a superfície da vela,  $\vec{n}$ , não pode apontar para o Sol, devendo obedecer a restrição  $(\vec{S} \cdot \vec{n}) \geq 0$ . No caso de uma vela solar plana, podemos então estabelecer os seguintes intervalos para os ângulos de orientação:  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  e  $\delta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Outras abordagens podem ainda levar em consideração o design das velas, opções de substratos, filmes e revestimentos como forma de evitar um super aquecimento da vela. Mais informações sobre essa questão podem ser encontradas em [McInnes \(1999\)](#).

#### 2.2.4 Equações de movimento

Para descrever o movimento da vela solar, utilizamos o modelo do *Problema Restrito de Três Corpos Circular Espacial para a Vela (PR3CCEV)*, onde acrescentamos um termo nas equações de movimento do *PR3CCE* referente a aceleração devido a força de pressão de radiação solar.

Este procedimento é feito adicionando a Equação (2.44) em termos das coordenadas  $x, y$  e  $z$ , às Equações (2.13), (2.14) e (2.15). Dessa forma obtemos

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= x - \frac{(1-\mu)}{r_1^3}(x-\mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x+1-\mu) + \frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= y \left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right) + \frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_y, \\ \ddot{z} &= -z \left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) + \frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_z,\end{aligned}\tag{2.48}$$

onde

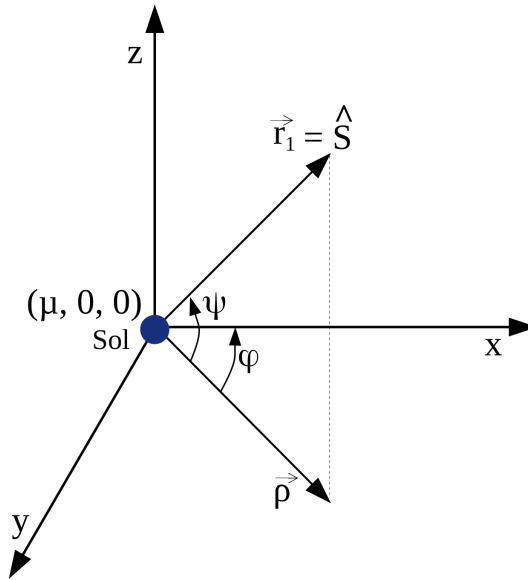
$$r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x-\mu+1)^2 + y^2 + z^2\tag{2.49}$$

e o vetor de direção Sol-vela é definido como:

$$\hat{r}_1 \equiv \hat{S} \equiv \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(x - \mu, y, z)}{\sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2}}. \quad (2.50)$$

Utilizamos coordenadas esféricas, de acordo com a figura a seguir, para definir os versores  $\hat{S}$  e  $\hat{n}$ .

Figura 2.5 - Representação esquemática do sistema em coordenadas esféricas.



Para isso, definimos

$$\begin{aligned} x - \mu &= \rho \cos(\phi) = r_1 \cos(\psi) \cos(\phi), & r_1 &= \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2}, \\ y &= \rho \sin(\phi) = r_1 \cos(\psi) \sin(\phi), & \tan(\phi) &= \frac{y}{x - \mu}, \\ z &= r_1 \sin(\psi), & \tan(\psi) &= \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{(x - \mu)^2 + y^2}}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde

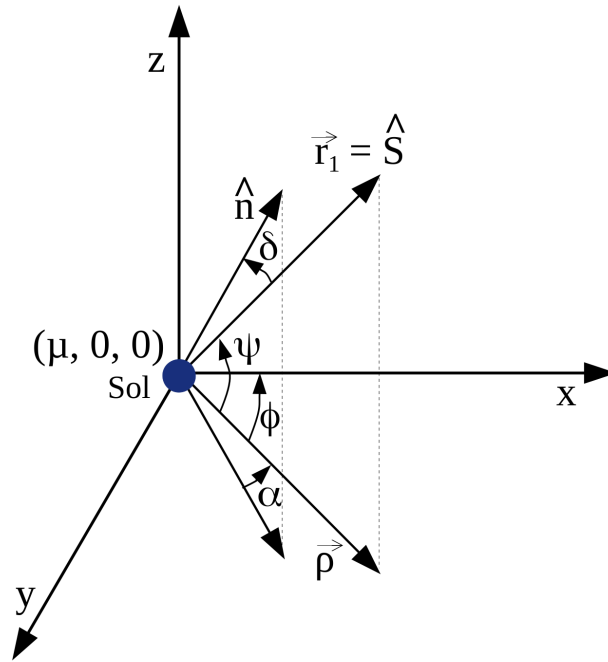
$$\rho \equiv \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2}. \quad (2.52)$$

Assim, o vetor de direção da linha Sol-vela da Equação (2.50) é definido em função dos ângulos  $\phi$  e  $\psi$ , como

$$\hat{r}_1 = \hat{S} = \cos(\psi) \cos(\phi) \hat{i} + \cos(\psi) \sin(\phi) \hat{j} + \sin(\psi) \hat{k}. \quad (2.53)$$

Podemos ainda definir os ângulos de direção  $\alpha$  e  $\delta$  conforme a figura a seguir.

Figura 2.6 - Representação esquemática dos vetores  $\hat{n}$  e  $\hat{S}$  em função dos ângulos  $\alpha, \delta, \psi, \phi$ .



Dessa forma, as componentes do vetor normal a superfície da vela podem ser escritas da seguinte forma:

$$n_x = \cos(\phi + \alpha) \cos(\psi + \delta),$$

$$\begin{aligned}
n_y &= \cos(\psi + \delta) \sin(\phi + \alpha), \\
n_z &= \sin(\psi + \delta)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

e utilizando as Equações (2.51), (2.53), (2.54) e transformações trigonométricas conhecidas, obtemos

$$(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 = \left[ \frac{(\rho^2 \cos \alpha + z^2) \cos \delta + z\rho(1 - \cos \alpha) \sin \delta}{r_1^2} \right]^2. \tag{2.55}$$

De acordo com as equações de movimento (Equações (2.48)), notamos que a dinâmica da vela solar depende do movimento relativo entre o vetor normal a sua superfície ( $\hat{n}$ ) e a direção de incidência da radiação solar ( $\hat{S}$ ). Quando a direção normal a área de superfície da vela estiver posicionada perpendicularmente a direção de incidência da radiação solar, isto é, quando  $\hat{S} \perp \hat{n} \rightarrow (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 = 0$ , a contribuição da pressão de radiação na dinâmica do *PR3CCEV* será nula, dessa forma voltamos ao *PR3CCE* (sem a vela) e quando a direção normal a superfície da vela estiver posicionada paralelamente a direção de incidência da radiação solar, ou seja, quando  $\hat{S} \parallel \hat{n} \rightarrow (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 = 1$ , a contribuição da pressão de radiação na dinâmica da vela será máxima.

As componentes do vetor normal a superfície da vela ( $\hat{n}$ ) podem ainda ser reescritas, aplicando as seguintes relações trigonométricas nas Equações (2.54).

$$\begin{aligned}
\sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a, \\
\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\
\sin(\arctan x) &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
n_x &= \frac{x - \mu}{r_1} \cos \alpha \cos \delta - \frac{(x - \mu)z}{\rho r_1} \cos \alpha \sin \delta - \frac{y}{r_1} \sin \alpha \cos \delta + \frac{yz}{\rho r_1} \sin \alpha \sin \delta, \\
n_y &= \frac{x - \mu}{r_1} \sin \alpha \cos \delta - \frac{(x - \mu)z}{\rho r_1} \sin \alpha \sin \delta + \frac{y}{r_1} \cos \alpha \cos \delta - \frac{yz}{\rho r_1} \cos \alpha \sin \delta,
\end{aligned} \tag{2.57}$$



$$n_z = \frac{z}{r_1} \cos \delta + \frac{\rho}{r_1} \sin \delta,$$

que são mais interessantes, pois eliminam erros numéricos devido à não-linearidade da função arco-tangente, observados quando se utiliza as Equações (2.54).

Quando  $\alpha$  e  $\delta$  são nulos, essas expressões das Equações (2.57) são simplificadas da seguinte forma:

$$n_x = \frac{x - \mu}{r_1}, \quad n_y = \frac{y}{r_1}, \quad n_z = \frac{z}{r_1}. \quad (2.58)$$

Além disso, o produto da Equação (2.55),  $(\hat{S} \cdot \hat{n}) = 1$ , dessa forma, as equações de movimento da vela solar (Equações (2.48)) podem ser assumidas simplesmente como

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_{\beta_x}, \quad (2.59)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_{\beta_y}, \quad (2.60)$$

$$\ddot{z} = \Omega_{\beta_z}, \quad (2.61)$$

onde os subscritos  $x, y$  e  $z$  indicam derivadas parciais do potencial efetivo definido por:

$$\Omega_\beta(x, y, z) = \frac{(x^2 + y^2)}{2} + \frac{(1 - \mu)(1 - \beta)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}. \quad (2.62)$$

Nota-se que quando consideramos  $\beta = 0$  na Equação (2.62),  $\Omega_\beta(x, y, z)$  passa a ser igual a  $\Omega(x, y, z)$  da Equação (2.16) sem a vela. Ainda para este caso em que a direção normal a superfície da vela é posicionada paralelamente a direção de incidência da radiação solar ( $\alpha = \delta = 0$ ), o sistema é Hamiltoniano, afinal, as forças agindo no sistema são obtidas através da derivada do potencial e a constante de Jacobi pode ser reescrita como

$$C_{J\beta} = 2\Omega_\beta - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (2.63)$$

Já para o caso em que  $\alpha \neq 0$  e/ou  $\delta \neq 0$ , o sistema dinâmico não admite uma integral primeira. Sendo assim, não é possível encontrar uma simples expressão para o potencial de forma que as equações de movimento possam ser expressas de forma semelhante as Equações (2.59), (2.60) e (2.61), dessa forma o sistema deixa de ser Hamiltoniano e não há mais um invariante análogo a constante de Jacobi.

No entanto para o caso em que  $\alpha = 0$  e  $\delta \neq 0$ , o produto da Equação (2.55),  $(\hat{S} \cdot \hat{n}) = \cos \delta$  e as componentes do vetor normal a superfície da vela apresentadas na Equação (2.57) se reduzem a

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{x - \mu}{r_1} \cos \delta - \frac{(x - \mu)z}{\rho r_1} \sin \delta, \\ n_y &= \frac{y}{r_1} \cos \delta - \frac{yz}{\rho r_1} \sin \delta, \\ n_z &= \frac{z}{r_1} \cos \delta + \frac{\rho}{r_1} \sin \delta. \end{aligned} \quad (2.64)$$

e ainda é possível expressar as equações de movimento da seguinte forma:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \tilde{\Omega}_{\beta\delta_x} - \frac{\beta(1 - \mu)(x - \mu)z}{\rho r_1^3} \cos^2 \delta \sin \delta, \quad (2.65)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \tilde{\Omega}_{\beta\delta_y} - \frac{\beta(1 - \mu)yz}{\rho r_1^3} \cos^2 \delta \sin \delta, \quad (2.66)$$

$$\ddot{z} = \tilde{\Omega}_{\beta\delta_z} + \frac{\beta(1 - \mu)\rho}{r_1^3} \cos^2 \delta \sin \delta, \quad (2.67)$$

onde os subscritos  $x, y$  e  $z$  indicam derivadas parciais de  $\tilde{\Omega}_{\beta\delta}(x, y, z)$  definido por:

$$\tilde{\Omega}_{\beta\delta}(x, y, z) = \frac{(x^2 + y^2)}{2} + \frac{(1 - \mu)(1 - \beta \cos^3 \delta)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}. \quad (2.68)$$

Ainda que nesse caso não haja mais a Integral de Jacobi para auxiliar na redução da dimensão do espaço de fase, podemos recorrer a uma expressão semelhante a constante de Jacobi que embora não necessariamente deva se conservar ao longo das trajetórias, ainda pode ser utilizada como um "nível de energia aproximado" através da qual é possível classificar trajetórias e comparar o comportamento dos casos Hamiltoniano e não-Hamiltoniano (FARRÉS, 2009). Esta é definida como

$$\tilde{C}_{J\beta\delta} = 2\tilde{\Omega}_{\beta\delta} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{2\beta(1-\mu)z\rho}{r_1^3} \cos^2 \delta \sin^2 \delta. \quad (2.69)$$

Note que quando  $\delta = 0$  na Equação (2.69),  $\tilde{C}_{J\beta\delta} = C_{J\beta}$  definido na Equação (2.63). Além disso, quando

$$\dot{z} = \frac{z}{\rho^2} [(x - \mu)\dot{x} + y\dot{y}] \quad (2.70)$$

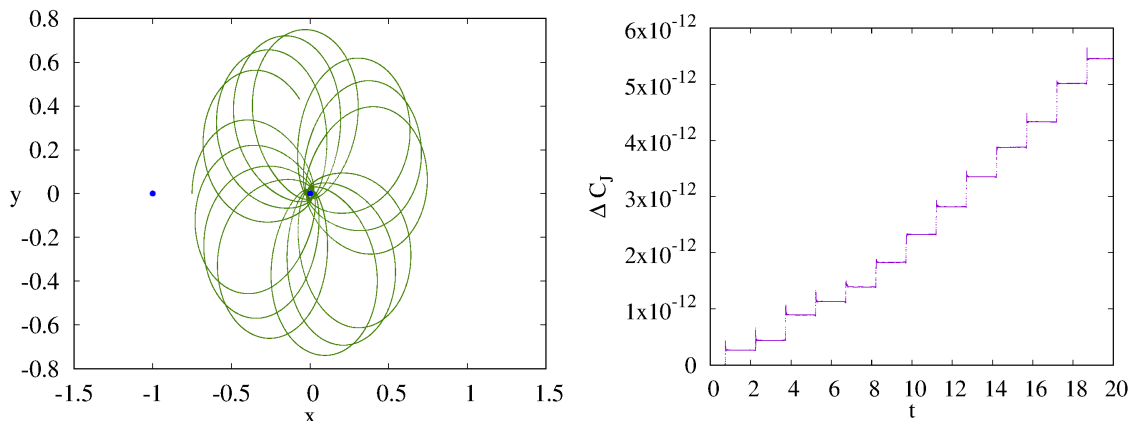
$\tilde{C}_{J\beta\delta}$  deve ser constante, pois o termo extra na derivada temporal da Equação (2.69) se anula e para trajetórias próximas aos pontos de equilíbrio do sistema, o valor de  $\tilde{C}_{J\beta\delta}$  apresenta pequenas variações, da ordem de  $10^{-6} - 10^{-8}$  (FARRÉS; JORBA, 2010).

Para uma simples comparação entre o comportamento de  $C_J$ ,  $C_{J\beta}$  e  $\tilde{C}_{J\beta\delta}$ , efetuamos o cálculo da trajetória de uma espaçonave no sistema Sol-Terra inicialmente com os parâmetros  $\beta$ ,  $\alpha$  e  $\delta$  nulos (sem vela solar) e  $\mu = \mu_{ST}$  nas equações de movimento do *PR3CCEV* (Equações 2.48) em um algoritmo de precisão dupla, para a qual observamos uma variação de  $C_J$  da ordem de  $10^{-12}$  ao longo do tempo. Utilizamos os valores de massa dos primários, conforme disponibilizados em websites da *NASA* (NASA, 2020) e obtivemos o seguinte valor para o parâmetro  $\mu_{ST}$ .

$$\mu_{ST} = \frac{m_T}{m_S + m_T} \approx 3.0034609314206353 \times 10^{-6}. \quad (2.71)$$

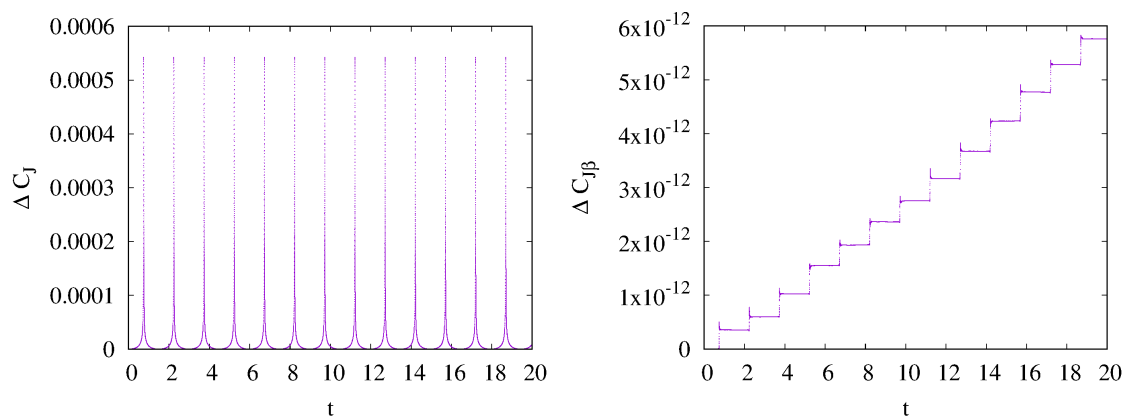
Utilizamos o integrador numérico Runge-Kutta (subrotina *RKF78* com coeficientes de Fehlberg) com controle de passo automático, tolerância de erro relativo de  $10^{-14}$  e tolerância de erro absoluto de  $10^{-15}$ , para evoluirmos a trajetória e a cada passo de tempo calculamos a constante de Jacobi. Para tal, consideramos as condições iniciais de posição  $(x_{P2} + 0.25, 0, 0)$  e de velocidade  $(0, 1, 0)$ , onde  $x_{P2} = (-1 + \mu)$  é a posição do primário menor, conforme definida na Figura 2.1.

Figura 2.7 - Trajetória da espaçonave em verde, à esquerda, onde os pontos em azul, são os corpos primários do sistema. Variação de  $C_J$  ao longo do tempo, à direita, para tal órbita.



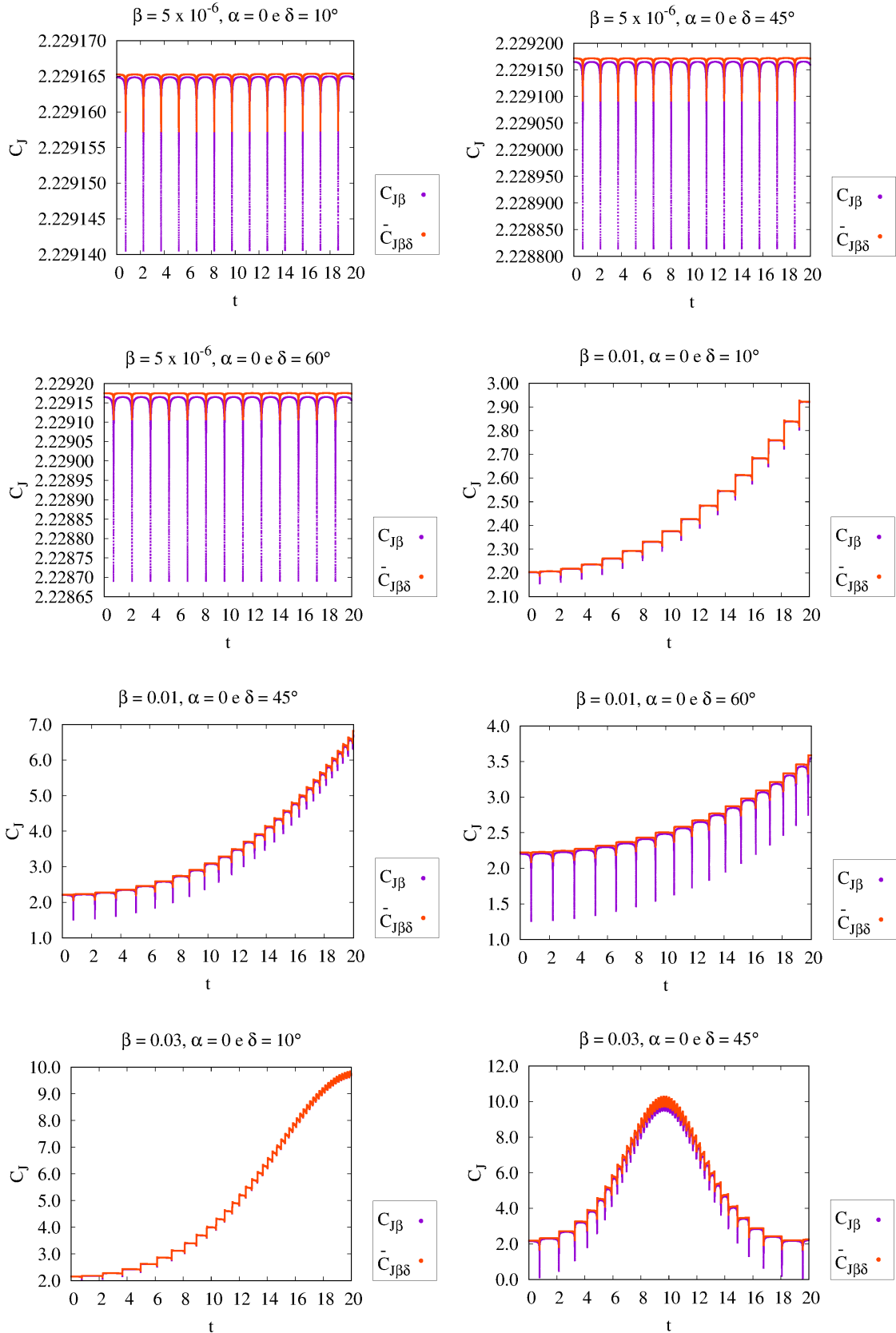
Em seguida, utilizando as mesmas condições iniciais que originaram a trajetória da Figura 2.7, alteramos o valor de  $\beta$  para  $5 \times 10^{-6}$  e  $C_J$  passou a ter variações da ordem de  $10^{-4}$ , enquanto  $C_{J\beta}$  obteve variações da ordem de  $10^{-12}$ .

Figura 2.8 - Variação de  $C_J$  (à esquerda) e de  $C_{J\beta}$  (à direita) ao longo do tempo, para uma trajetória com parâmetros iniciais  $\beta = 5 \times 10^{-6}$ ,  $\alpha = 0$  e  $\delta = 0$ .



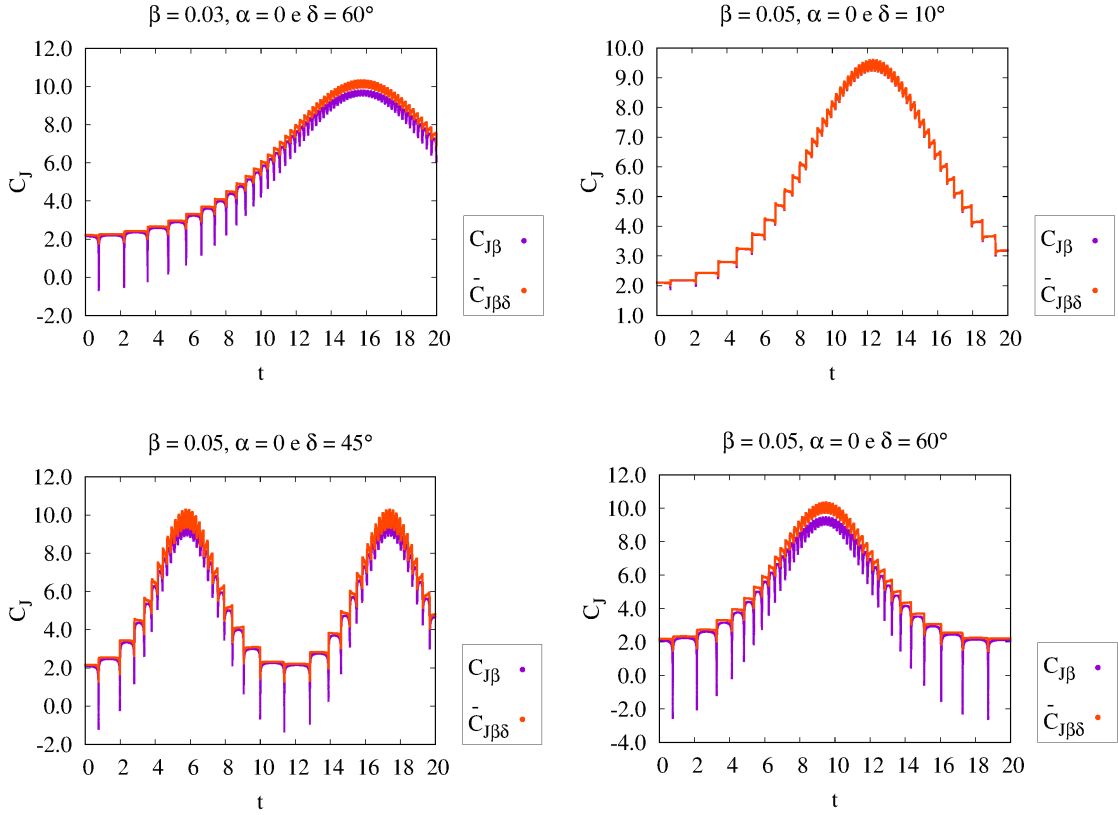
Ainda mantendo as mesmas condições iniciais, passamos a alterar o parâmetro  $\delta$ , para valores diferentes de  $\beta$ , conforme as seguintes figuras.

Figura 2.9 - Gráficos para comparação entre o comportamento de  $C_{J\beta}$  e  $\tilde{C}_{J\beta\delta}$  ao longo do tempo de evolução da órbita de uma vela solar.



(Continua)

Figura 2.9 - Continuação.



Dessa vez, podemos notar que quanto menor o valor de  $\beta$  e quanto maior o valor de  $\delta$ , a quantidade  $\tilde{C}_{J\beta\delta}$  varia menos que  $C_{J\beta}$ , embora também não permaneça constante para os casos testados. Os pontos extremos da variação de ambos, estão relacionados a menor distância do primário maior. Além disso, observamos que a partir de  $\beta = 0.01$  (para  $\delta \geq 45^\circ$ ) tanto a variação de  $C_{J\beta}$  quanto de  $\tilde{C}_{J\beta\delta}$  passam a ser da ordem de grandeza da unidade, no decorrer do tempo. Portanto, para  $\delta \neq 0$ , de forma geral, verificamos que nenhuma das quantidades investigadas são preservadas ao longo das trajetórias no decorrer do tempo para os casos não-Hamiltonianos da vela. Além disso, verifica-se a amplitude de variação destas quantidades ao variar os parâmetros da vela.

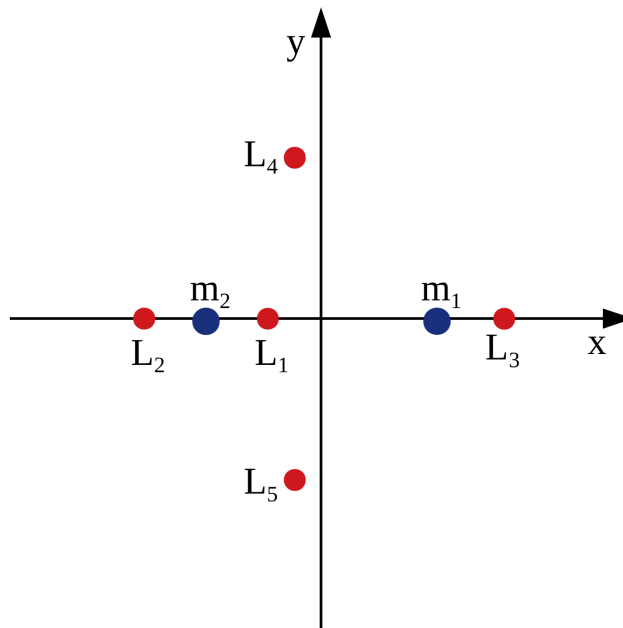
### 2.3 Famílias de pontos de equilíbrio

Os pontos de Libração, Pontos Fixos ou Pontos Lagrangianos são pontos de equilíbrio do sistema, onde a resultante de todas as forças que atuam no sistema é nula e consequentemente, o gradiente do potencial é nulo ( $\vec{\nabla}\Omega = \vec{0}$ ). A partir das Equações

(2.13), (2.14) e (2.15) do *PR3CCE*, nota-se que uma partícula com velocidade inicial nula, colocada em um dos pontos de equilíbrio, permanecerá nesse ponto indefinidamente, por isso também são chamados de Pontos Estacionários (BOYCE; DIPRIMA, 2015).

Sabemos que para o *PR3CCE* é possível identificar cinco pontos Lagrangianos ( $L_1, \dots, L_5$ ) e suas posições são obtidas a partir do cálculo das derivadas parciais de  $\Omega$  (definido na Equação (2.16)) em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , que fornecem dois casos de soluções possíveis no sistema referencial girante. O primeiro caso de solução, ocorre quando  $y = 0$ , originando os pontos  $L_1, L_2$  e  $L_3$ , conhecidos como pontos de Euler ou pontos de equilíbrio colineares e o segundo caso, quando  $y \neq 0$ , originando os pontos  $L_4$  e  $L_5$ , denominados como pontos de equilíbrio triangulares, conforme esquematizado na figura a seguir (SZBEHELY, 1967).

Figura 2.10 - Representação esquemática da localização dos pontos Lagrangianos no sistema não-inercial (girante) para o *PR3CCE*.



Quando se considera o efeito da pressão de radiação solar, no entanto, novas famílias de pontos de equilíbrio aparecem ( $SL_1, \dots, SL_5$ ), neste caso, onde a força da pressão de radiação solar e as forças gravitacionais dos primários, que estão agindo no

sistema, se contrabalanceiam, gerando uma força resultante nula (FARRÉS, 2009). Estas soluções surgem quando consideramos as velocidades e acelerações como sendo nulas, nas equações de movimento da vela (Equações (2.48)), de forma a satisfazer

$$\begin{aligned}
-x + \frac{(1-\mu)}{r_1^3}(x-\mu) + \frac{\mu}{r_2^3}(x+1-\mu) &= \frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_x, \\
-y \left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right) &= \frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_y, \\
z \left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) &= \frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_z,
\end{aligned} \tag{2.72}$$

observando que o lado esquerdo da igualdade é o gradiente do potencial do *PR3CCE* clássico, definido na Equação (2.16). Assim, podemos reescrever as Equações (2.72) da forma

$$-\nabla\Omega = \frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \hat{n}. \tag{2.73}$$

Portanto, as posições para os pontos de equilíbrio do *PR3CCEV* dependem do número de luminosidade  $\beta$ , variando de acordo com a massa da vela ( $m = m_3$ ) e sua área de superfície ( $A$ ) e dependem também da atitude da vela ( $\hat{n}$ ) em relação a direção de incidência do fluxo de fótons solares ( $\hat{S}$ ), parametrizada pelos ângulos  $\alpha$  e  $\delta$  definidos na Subseção 2.2.3, que justifica o surgimento das novas famílias de pontos de equilíbrio.

Conforme o parâmetro  $\beta$  e a atitude da vela são alterados, em relação a direção de incidência da radiação, verifica-se que as cinco soluções de equilíbrio clássicas, posicionadas no plano eclíptico são deslocadas no espaço de configurações, saindo do plano, quando o ângulo de direção  $\delta \neq 0$  (SANTOS, 2015).

Quando  $\beta = 0$  os pontos colineares estão dispostos no plano  $x - y$ , de forma que  $L_2$  é localizado à esquerda do segundo primário (em  $\mu - 2 \leq x_2 \leq \mu - 1$ ),  $L_1$  está entre os primários (em  $\mu - 1 \leq x_1 \leq \mu$ ) e  $L_3$  está à direita do primeiro primário (em  $\mu \leq x_3 \leq \mu + 1$ ), conforme o esquema da Figura 2.10 (SZBEHELY, 1967), conforme  $\beta$  se altera, assumindo valores diferentes de zero, os pontos se movem dentro desses intervalos no eixo  $x$  e se deslocam também no eixo  $y$ , saindo do eixo



$y = 0$ ; enquanto os pontos triangulares  $SL_{4,5}$  são definidos por  $r_1 = (1 - \beta)^{1/3}$  e  $r_2 = 1$  quando  $\alpha = \delta = 0$ , de tal forma que, quando  $\beta \rightarrow 1$ , os pontos de equilíbrio se aproximam de  $m_1$ , com exceção de  $SL_2$ , que se aproxima da  $m_2$  (FARRÉS, 2009). Esse comportamento pode ser observado nos gráficos da Figura 2.11 a seguir, onde foram obtidos os pontos de equilíbrio do *PR3CCEV* para o sistema Sol-Terra-vela para valores de  $0 \leq \beta \leq 1$ , quando  $\alpha$  e  $\delta$  são nulos.

O algoritmo de dupla precisão programado para cálculo desses pontos de equilíbrio obteve inicialmente apenas os cinco pontos Lagrangianos do *PR3CCE* clássico, que corresponde ao sistema das Equações (2.72) para  $\beta = 0$ , varrendo uma caixa de condições iniciais  $(x, y, z)$  e as soluções encontradas, apresentadas na Tabela (2.2), foram utilizadas para obtenção os pontos de equilíbrio do *PR3CCEV* através do método de continuação numérica, que consiste basicamente em variar o valor de  $\beta$  entre 0 e  $\beta_L$ , considerando as soluções encontradas para  $\beta = 0$  como condições iniciais e sendo  $\beta_L$  o valor de  $\beta \neq 0$  para o qual deseja-se encontrar as novas soluções.

Para resolver o sistema das Equações (2.72), as três equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que descrevem o movimento de uma vela solar na presença de dois corpos primários (Equações (2.48)) foram reescritas como seis equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, considerando

$$\begin{aligned} x_1 &= x & x_4 &= \dot{x} = \dot{x}_1 \\ x_2 &= y & x_5 &= \dot{y} = \dot{x}_2 \\ x_3 &= z & x_6 &= \dot{z} = \dot{x}_3. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Assim, as Equações (2.48) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} f_1 &= \dot{x}_1 = x_4, \\ f_2 &= \dot{x}_2 = x_5, \\ f_3 &= \dot{x}_3 = x_6, \end{aligned} \tag{2.75}$$

$$f_4 = \dot{x}_4 = 2x_5 + x_1 - \frac{(1 - \mu)(x_1 - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x_1 + 1 - \mu)}{r_2^3}$$

$$+ \frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2} \left\{ \frac{[\rho^2 \cos \alpha + x_3^2] \cos \delta + x_3 \rho(1 - \cos \alpha) \sin \delta}{r_1^2} \right\}^2 \times$$

$$\frac{x-\mu}{r_1} \cos \alpha \cos \delta - \frac{(x-\mu)z}{\rho r_1} \cos \alpha \sin \delta - \frac{y}{r_1} \sin \alpha \cos \delta + \frac{yz}{\rho r_1} \sin \alpha \sin \delta,$$

$$f_5 = \dot{x}_5 = -2x_4 + x_2 - \frac{(1-\mu)x_2}{r_1^3} - \frac{\mu x_2}{r_2^3}$$

$$+ \frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2} \left\{ \frac{[\rho^2 \cos \alpha + x_3^2] \cos \delta + x_3 \rho(1 - \cos \alpha) \sin \delta}{r_1^2} \right\}^2 \times$$

$$\frac{x-\mu}{r_1} \sin \alpha \cos \delta - \frac{(x-\mu)z}{\rho r_1} \sin \alpha \sin \delta + \frac{y}{r_1} \cos \alpha \cos \delta - \frac{yz}{\rho r_1} \cos \alpha \sin \delta,$$

$$f_6 = \dot{x}_6 = -\frac{(1-\mu)x_3}{r_1^3} - \frac{\mu x_3}{r_2^3}$$

$$+ \frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2} \left\{ \frac{[\rho^2 \cos \alpha + x_3^2] \cos \delta + x_3 \rho(1 - \cos \alpha) \sin \delta}{r_1^2} \right\}^2 \times$$

$$\frac{z}{r_1} \cos \delta + \frac{\rho}{r_1} \sin \delta.$$

Utilizamos o método de Newton-Raphson para sistemas de equações não-lineares para encontrar as soluções de equilíbrio numericamente, que consiste em resolver iterativamente o sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_5} & \frac{\partial f_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4}{\partial x_5} & \frac{\partial f_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5}{\partial x_5} & \frac{\partial f_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6}{\partial x_4} & \frac{\partial f_6}{\partial x_5} & \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta x_5 \\ \Delta x_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(X^k) \\ f_2(X^k) \\ f_3(X^k) \\ f_4(X^k) \\ f_5(X^k) \\ f_6(X^k) \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

que pode ser reescrito de forma compacta, como:

$$Df(X^k)\Delta X^k = -f(X^k) \quad (2.77)$$

onde  $\Delta X^k = X^{k+1} - X^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  indica a  $k$ -ésima iteração,  $X^k \in \mathbb{R}^6$  é a  $k$ -ésima solução tentativa e  $Df(X^k)$  é a matriz jacobiana do sistema calculada em  $X^k$ , que pode ser reescrita como

$$Df(X^k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_4(X^k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(X^k)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(X^k)}{\partial x_3} & 0 & 2 & 0 \\ \frac{\partial f_5(X^k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5(X^k)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5(X^k)}{\partial x_3} & -2 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_6(X^k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6(X^k)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6(X^k)}{\partial x_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Como  $f_1 = x_4 = 0$ ,  $f_2 = x_5 = 0$  e  $f_3 = x_6 = 0$  o sistema de seis dimensões pode ser reduzido para o sistema de três dimensões

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_4(X^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(X^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(X^*)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_5(X^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5(X^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5(X^*)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_6(X^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6(X^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6(X^*)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_4(X^*) \\ f_5(X^*) \\ f_6(X^*) \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

cujas soluções obtidas após a convergência do método, de acordo com a precisão estabelecida, fornecem as soluções de equilíbrio do sistema. Os elementos da matriz jacobiana são dados por

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = 1 - \frac{(1 - \mu)}{r_1^3} - \frac{3(1 - \mu)(x_1 - \mu)^2}{r_1^5} - \frac{\mu}{r_2^3} + \frac{3\mu(x_1 + 1 - \mu)^2}{r_2^5}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\beta(1-\mu)(x_1-\mu)}{r_1^4}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_x \\
& +\frac{2\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})(x_1-\mu) \left[ \frac{2\cos\alpha\cos\delta + \rho^{-1}x_3(1-\cos\alpha)\sin\delta}{r_1^2} \right] n_x \\
& -\frac{4\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})(x_1-\mu) \left[ \frac{(\rho^2\cos\alpha + x_3^2)\cos\delta + x_3\rho(1-\cos\alpha)\sin\delta}{r_1^4} \right] n_x \\
& +\frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \frac{x_2}{\rho^2} \cos \left[ \arctan\left(\frac{x_3}{\rho}\right) + \delta \right] \sin \left[ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1-\mu}\right) + \alpha \right] \\
& +\frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \frac{x_3(x_1-\mu)}{\rho r_1^2} \cos \left[ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1-\mu}\right) + \alpha \right] \sin \left[ \arctan\left(\frac{x_3}{\rho}\right) + \delta \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_5}{\partial x_1} &= \frac{3(1-\mu)(x_1-\mu)x_2}{r_1^5} + \frac{3\mu x_2(x_1+1-\mu)}{r_2^5} - \frac{2\beta(1-\mu)(x_1-\mu)}{r_1^4}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_y \\
& +\frac{2\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})(x_1-\mu) \left[ \frac{2\cos\alpha\cos\delta + \rho^{-1}x_3(1-\cos\alpha)\sin\delta}{r_1^2} \right] n_y \\
& -\frac{4\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})(x_1-\mu) \left[ \frac{(\rho^2\cos\alpha + x_3^2)\cos\delta + x_3\rho(1-\cos\alpha)\sin\delta}{r_1^4} \right] n_y \\
& -\frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \frac{x_2}{\rho^2} \cos \left[ \arctan\left(\frac{x_3}{\rho}\right) + \delta \right] \cos \left[ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1-\mu}\right) + \alpha \right] \\
& +\frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \frac{x_3(x_1-\mu)}{\rho r_1^2} \sin \left[ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1-\mu}\right) + \alpha \right] \sin \left[ \arctan\left(\frac{x_3}{\rho}\right) + \delta \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_6}{\partial x_1} &= \frac{3(1-\mu)(x_1-\mu)x_3}{r_1^5} + \frac{3\mu x_3(x_1+1-\mu)}{r_2^5} - \frac{2\beta(1-\mu)(x_1-\mu)}{r_1^4}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_z \\
& +\frac{2\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})(x_1-\mu) \left[ \frac{2\cos\alpha\cos\delta + \rho^{-1}x_3(1-\cos\alpha)\sin\delta}{r_1^2} \right] n_z \\
& -\frac{4\beta(1-\mu)}{r_1^2}(\hat{S} \cdot \hat{n})(x_1-\mu) \left[ \frac{(\rho^2\cos\alpha + x_3^2)\cos\delta + x_3\rho(1-\cos\alpha)\sin\delta}{r_1^4} \right] n_z \\
& -\frac{\beta(1-\mu)}{\rho r_1^4}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 x_3(x_1-\mu) \cos \left[ \arctan\left(\frac{x_3}{\rho}\right) + \delta \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_4}{\partial x_2} &= \frac{3(1-\mu)(x_1-\mu)x_2}{r_1^5} + \frac{3\mu(x_1+1-\mu)x_2}{r_2^5} - \frac{2\beta(1-\mu)x_2}{r_1^4}(\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_x \\
& +\frac{4\beta(1-\mu)x_2}{r_1^4}(\hat{S} \cdot \hat{n}) \left[ \cos\alpha\cos\delta + \frac{x_3}{2\rho}(1-\cos\alpha)\sin\delta \right] n_x \\
& -\frac{4\beta(1-\mu)x_2}{r_1^4}(\hat{S} \cdot \hat{n}) \left[ \frac{(\rho^2\cos\alpha + x_3^2)\cos\delta + x_3\rho(1-\cos\alpha)\sin\delta}{r_1^2} \right] n_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta(1-\mu)(x_1-\mu)}{\rho^2 r_1^2} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \cos \left[ \arctan \left( \frac{x_3}{\rho} \right) + \delta \right] \sin \left[ \arctan \left( \frac{x_2}{x_1-\mu} \right) + \alpha \right] \\
& + \frac{\beta(1-\mu)x_2x_3}{\rho r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \cos \left[ \arctan \left( \frac{x_2}{x_1-\mu} \right) + \alpha \right] \sin \left[ \arctan \left( \frac{x_3}{\rho} \right) + \delta \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_5}{\partial x_2} &= 1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{3(1-\mu)x_2^2}{r_1^5} - \frac{\mu}{r_2^3} + \frac{3\mu x_2^2}{r_2^5} - \frac{2\beta(1-\mu)x_2}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_y \\
& + \frac{4\beta(1-\mu)x_2}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n}) \left[ \cos \alpha \cos \delta + \frac{x_3}{2\rho} (1 - \cos \alpha) \sin \delta \right] n_y \\
& - \frac{4\beta(1-\mu)x_2}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n}) \left[ \frac{(\rho^2 \cos \alpha + x_3^2) \cos \delta + x_3 \rho (1 - \cos \alpha) \sin \delta}{r_1^2} \right] n_y \\
& + \frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \frac{(x_1-\mu)}{\rho^2} \cos \left[ \arctan \left( \frac{x_3}{\rho} \right) + \delta \right] \cos \left[ \arctan \left( \frac{x_2}{x_1-\mu} \right) + \alpha \right] \\
& + \frac{\beta(1-\mu)}{r_1^2} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \frac{x_2x_3}{\rho r_1^2} \sin \left[ \arctan \left( \frac{x_2}{x_1-\mu} \right) + \alpha \right] \sin \left[ \arctan \left( \frac{x_3}{\rho} \right) + \delta \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_6}{\partial x_2} &= \frac{3(1-\mu)x_2x_3}{r_1^5} + \frac{3\mu x_2x_3}{r_2^5} - \frac{2\beta(1-\mu)x_2}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_z \\
& + \frac{4\beta(1-\mu)x_2}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n}) \left[ \cos \alpha \cos \delta + \frac{x_3}{2\rho} (1 - \cos \alpha) \sin \delta \right] n_z \\
& - \frac{4\beta(1-\mu)x_2}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n}) \left[ \frac{(\rho^2 \cos \alpha + x_3^2) \cos \delta + x_3 \rho (1 - \cos \alpha) \sin \delta}{r_1^2} \right] n_z \\
& - \frac{\beta(1-\mu)x_2x_3}{\rho r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \cos \left[ \arctan \left( \frac{x_3}{\rho} \right) + \delta \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_4}{\partial x_3} &= \frac{3(1-\mu)(x_1-\mu)x_3}{r_1^5} + \frac{3\mu(x_1+1-\mu)x_3}{r_2^5} - \frac{2\beta(1-\mu)x_3}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_x \\
& + \frac{2\beta(1-\mu)}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n}) [2x_3 \cos \delta + \rho(1 - \cos \alpha) \sin \delta] n_x \\
& - \frac{4\beta(1-\mu)x_3}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n}) \left[ \frac{(\rho^2 \cos \alpha + x_3^2) \cos \delta + x_3 \rho (1 - \cos \alpha) \sin \delta}{r_1^2} \right] n_x \\
& - \frac{\beta(1-\mu)\rho}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \sin \left[ \arctan \left( \frac{x_3}{\rho} \right) + \delta \right] \cos \left[ \arctan \left( \frac{x_2}{x_1-\mu} \right) + \alpha \right],
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_3} = \frac{3(1-\mu)x_2x_3}{r_1^5} + \frac{3\mu x_2x_3}{r_2^5} - \frac{2\beta(1-\mu)x_3}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_y$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\beta(1-\mu)}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n}) [2x_3 \cos \delta + \rho(1 - \cos \alpha) \sin \delta] n_y \\
& - \frac{4\beta(1-\mu)x_3}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n}) \left[ \frac{(\rho^2 \cos \alpha + x_3^2) \cos \delta + x_3 \rho(1 - \cos \alpha) \sin \delta}{r_1^2} \right] n_y \\
& - \frac{\beta(1-\mu)\rho}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \sin \left[ \arctan \left( \frac{x_3}{\rho} \right) + \delta \right] \sin \left[ \arctan \left( \frac{x_2}{x_1 - \mu} \right) + \alpha \right], \\
\\
& \frac{\partial f_6}{\partial x_3} = -\frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{3(1-\mu)x_3^2}{r_1^5} - \frac{\mu}{r_2^3} + \frac{3\mu x_3^2}{r_2^5} - \frac{2\beta(1-\mu)x_3}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 n_z \\
& + \frac{2\beta(1-\mu)}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n}) [2x_3 \cos \delta + \rho(1 - \cos \alpha) \sin \delta] n_z \\
& - \frac{4\beta(1-\mu)x_3}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n}) \left[ \frac{(\rho^2 \cos \alpha + x_3^2) \cos \delta + x_3 \rho(1 - \cos \alpha) \sin \delta}{r_1^2} \right] n_z \\
& + \frac{\beta(1-\mu)\rho}{r_1^4} (\hat{S} \cdot \hat{n})^2 \cos \left[ \arctan \left( \frac{x_3}{\rho} \right) + \delta \right].
\end{aligned}$$

A cada iteraçãõ, a matriz jacobiana do sistema é resolvida usando decomposiçãõ LU (PRESS et al., 1992).

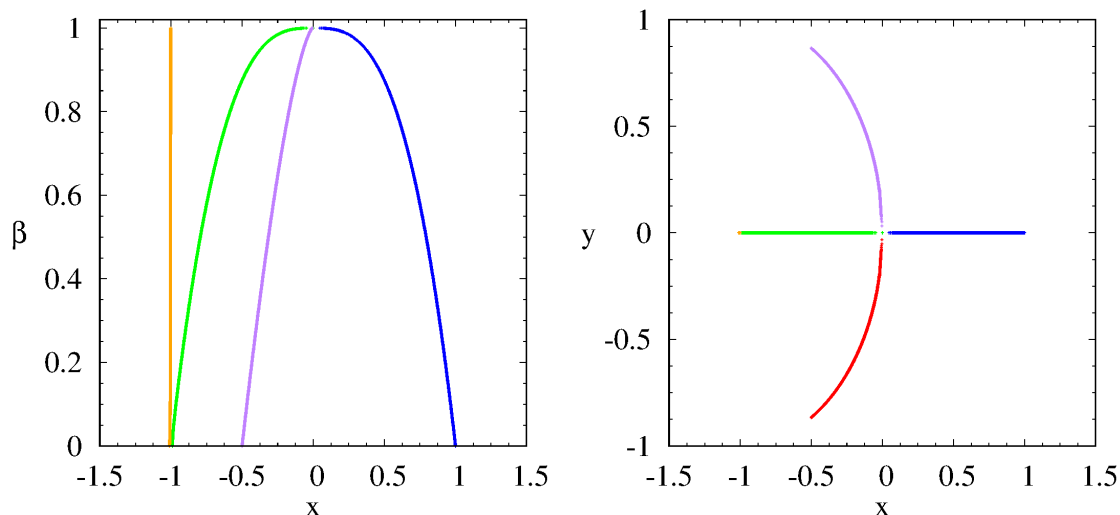
Entãõ, conforme mencionado anteriormente, apresentamos na tabela a seguir as soluções obtidas para os cinco pontos de equilíbrio do *PR3CCE* clássico para o sistema Sol-Terra-satélite.

Tabela 2.2 - Coordenadas dos pontos de equilíbrio do *PR3CCE* para o sistema Sol-Terra-satélite.

Pontos de equilíbrio	x	y	z
$L_1$	-0.99002661557522897	0	0
$L_2$	-1.0100340944658723	0	0
$L_3$	1.0000012514420551	0	0
$L_4$	-0.49999699653932506	0.86602540378429060	0
$L_5$	-0.49999699653739310	-0.86602540378540627	0

Nos gráfcos a seguir, apresentamos a variaçãõ da coordenada  $x$  dos cinco pontos de equilíbrio do sistema Sol-Terra-vela e seus deslocamentos no plano bidimensional para  $\alpha$  e  $\delta$  nulõs, conforme o parâmetro  $\beta$  assume valores diversos entre 0 e 1.

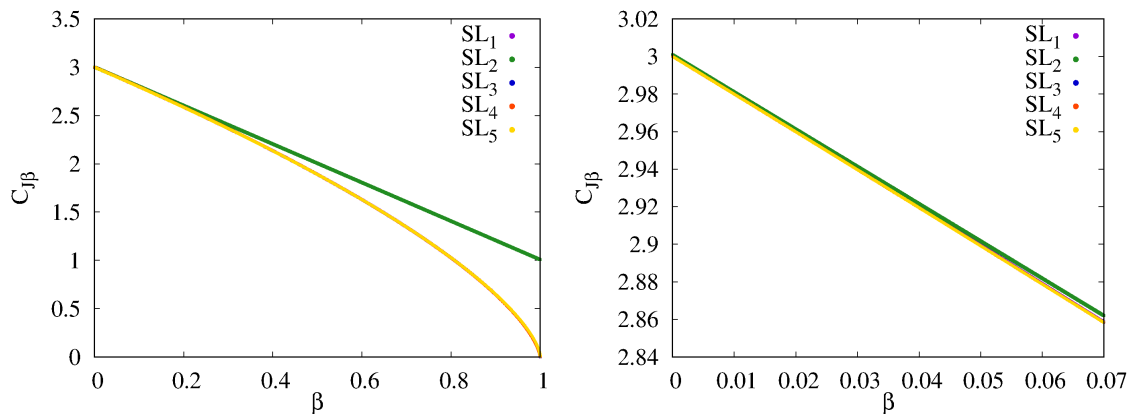
Figura 2.11 - Gráfico da variação da coordenada  $x$  dos pontos de equilíbrio do  $PR3CCEV$ , à esquerda e comportamento destes no plano  $x-y$ , à direita, para  $0 \leq \beta \leq 1$ . Em ambos os gráficos foram atribuídas as cores verde para  $SL_1$ , laranja para  $SL_2$ , azul para  $SL_3$ , roxo para  $SL_4$  e vermelho para  $SL_5$ .  $SL_4$  e  $SL_5$  se sobrepõem no gráfico da esquerda.



Devemos lembrar que  $\beta = 1$  refere-se ao caso em que a força de pressão de radiação solar e a força de atração gravitacional agindo sobre a vela se equivalem, o que não é uma situação realística para o sistema estudado. No entanto, com as tecnologias existentes na atualidade é possível considerar valores de  $\beta \leq 0.05$ , conforme mencionado na Seção 2.2.2.1.

Em seguida, utilizando a Equação (2.63), calculamos a constante de Jacobi  $C_{J\beta}$  correspondente a cada um dos cinco pontos de equilíbrio apresentados nos gráficos da Figura 2.11, conforme  $\beta$  varia entre 0 e 1, para  $\alpha$  e  $\delta$  nulos. Para isso, consideramos cada ponto de equilíbrio obtido como condição inicial para evoluir uma trajetória de velocidade inicial nula, pois como dito anteriormente, uma partícula de velocidade inicial nula colocada em um dos pontos de equilíbrio, deve permanecer nesse ponto indefinidamente. Para evoluirmos a trajetória, utilizamos novamente o integrador numérico Runge-Kutta (subrotina *RKF78*) com controle de passo automático para integrar as equações do sistema do  $PR3CCEV$  (Equações 2.48) e a cada passo de tempo calculamos a constante de Jacobi para conferir sua conservação. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 2.12, a seguir.

Figura 2.12 - Gráficos de  $\beta \times C_{J\beta}$  para os cinco pontos de equilíbrio com  $\alpha$  e  $\delta$  nulos para  $\beta$  variando entre 0 e 1, à esquerda e para  $\beta$  variando na região de interesse, entre 0 e 0.07, à direita. Os valores referentes a  $SL_1, SL_3, SL_4$  e  $SL_5$  se sobrepõem nessas escalas.



Notamos que para  $\alpha = \delta = 0$ , conforme o valor de  $\beta$  aumenta, o valor da constante de Jacobi de todos os pontos de equilíbrio diminuem.

Ampliando o gráfico da Figura 2.12, nota-se que para valores de  $\beta > \beta_{cr} \approx 1 \times 10^{-4}$  (ver Figura 2.13) os valores de  $C_{J\beta}$  correspondentes ao ponto de equilíbrio  $SL_2$ ,  $C_{J2}$ , passam a ser maiores do que os valores de  $C_{J\beta}$  correspondentes a  $SL_1$ ,  $C_{J1}$ , o que indica que a possibilidade de uma vela solar em uma trajetória no interior da região de Hill da Terra escapar para a região externa às regiões dos primários surge antes da possibilidade de ocorrer trânsito entre as regiões de Hill dos primários, para  $\beta > \beta_{cr}$ .

A partir dos Gráficos 2.14 podemos observar ainda, que essa diferença entre  $C_{J\beta}$  nos pontos de equilíbrio  $SL_1$  e  $SL_2$  aumenta, enquanto a diferença entre  $C_{J\beta}$  nos pontos de equilíbrio  $SL_1$  e  $SL_3$  diminui assintoticamente, a medida que  $\beta$  assume valores maiores. Além disso, a diferença entre os valores de  $C_{J\beta}$  em  $SL_1$  e  $SL_4$  também diminui conforme  $\beta$  aumenta e a diferença entre  $C_{J\beta}$  nos pontos de equilíbrio  $SL_4$  e  $SL_5$ ,  $\Delta C_{J45}$ , mantém-se nula, o que significa que para  $\alpha$  e  $\delta$  nulos, as regiões do espaço de fase no entorno de  $SL_4$  e  $SL_5$  se tornam simultaneamente acessíveis ao terceiro corpo.



Figura 2.13 - Ampliações dos gráficos de  $\beta \times C_{J\beta}$  para os pontos de equilíbrio  $SL_1$  e  $SL_2$  com  $\alpha$  e  $\delta$  nulos, à esquerda e da diferença entre  $C_{J\beta}$  de  $SL_2$  e  $C_{J\beta}$  de  $SL_1$  ( $\Delta C_{J12} = C_{J2} - C_{J1}$ ), à direita, em torno do ponto em que  $C_{J2}$  passa a ser maior do que  $C_{J1}$ .

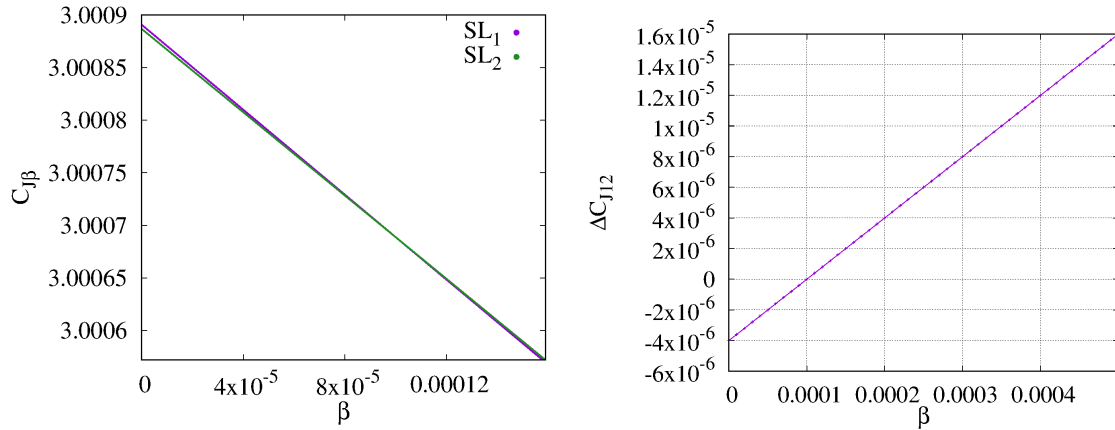
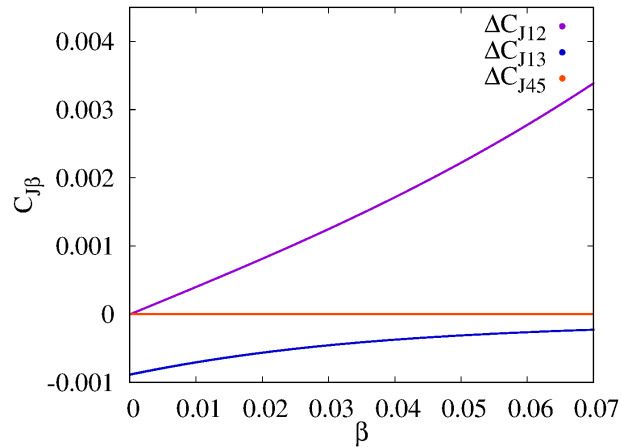


Figura 2.14 - Diferenças entre os valores de  $C_{J\beta}$  nos pontos de equilíbrio  $SL_1$  e  $SL_2$  ( $\Delta C_{J12}$ ),  $\Delta C_{J13} = C_{J3} - C_{J1}$  e  $\Delta C_{J45} = C_{J5} - C_{J4}$ , para  $\beta$  variando de 0 a 0.07.



Quando consideramos valores de  $\alpha \neq 0$  na obtenção dos pontos de equilíbrio, estes se deslocam no plano  $x - y$ , no entanto, quando consideramos valores de  $\delta \neq 0$ , passam a se mover no espaço tridimensional.

Ainda devido a pressão de radiação emitida por um dos primários, surgem duas novas soluções de equilíbrio  $SL_6$  e  $SL_7$  fora do plano eclíptico. Estas se movem assintoticamente no eixo  $z$ , com  $z \rightarrow \infty$  quando  $\beta \rightarrow 1$ . Além disso, quando os dois primários emitem radiação, são obtidas mais duas soluções de equilíbrio fora do plano  $SL_8$  e  $SL_9$  (MCINNES, 1999; SANTOS, 2015). Dado que estas soluções localizam-se muito distantes dos primários, e portanto não estão diretamente associadas a propriedades de transporte na região de interesse, não serão consideradas neste trabalho.

### 2.3.1 Estabilidade dos pontos de equilíbrio

Em geral, o conceito de estabilidade é fundamental para o estudo de sistemas dinâmicos e está associado a característica de uma dada solução do sistema. Podemos compreendê-la a partir da resposta do sistema a uma determinada perturbação. Se esta perturbação não afetar significativamente uma dada solução, então ela é estável, caso contrário, é instável.

A estabilidade local de uma dada solução pode ser definida a partir do critério de Lyapunov, onde analisa-se uma dada trajetória, que representa a solução do sistema dinâmico e sua perturbação é representada por uma trajetória vizinha, que permanece próxima a ela indefinidamente se ela for Lyapunov estável (SAVI, 2006).

Um ponto de equilíbrio  $p$  é chamado de estável ou Lyapunov estável se toda condição inicial  $p_0$  que é escolhida muito próxima a  $p$  tem a propriedade de que a solução  $F(t, p_0)$  permanece próxima a  $p$  para  $t \geq 0$ , caso contrário, é instável. Se além de estável for atrativo, isto é, se a solução  $F(t, p_0)$  converge para  $p$  a medida que  $t \rightarrow \infty$ , o ponto de equilíbrio é denominado assintoticamente estável e se além de ser assintoticamente estável, para todas as condições iniciais convergir para  $p$  é dito globalmente assintoticamente estável. Ambos os conceitos de estabilidade são independentes, de forma que há pontos de equilíbrio atrativos que não são estáveis e pontos de equilíbrios estáveis que não são atrativos (ALLIGOOD et al., 1996).

Como primeiro passo para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema não-linear, considera-se a expansão das equações de movimento em série de Taylor, próxima ao ponto de equilíbrio que deseja-se estudar, tomando-se termos de até a primeira ordem a fim de se obter o sistema linear análogo ao sistema dinâmico original (SANTOS, 2015). Isso é feito através do cálculo da matriz jacobiana do sistema,  $Df(X_i)$ , conforme apresentada na Equação (2.78), na qual, as derivadas parciais  $\frac{df_j}{dx_k}$  com  $j = 4, 5, 6$  e  $k = 1, 2, 3$  são dadas na Seção 2.3. O índice  $i$  refere-se a um dos pontos fixos colineares ou triangulares.

Dessa forma, o sistema linearizado ao redor dos pontos de equilíbrio é definido como

$$\dot{X} = Df(X_i)X. \quad (2.80)$$

Supondo que sua solução seja na forma  $X_i(t) = X_0 e^{\lambda_i t}$  e substituindo na Equação (2.80), obtém-se que

$$Df(X_i)X = \lambda_i X, \quad (2.81)$$

onde  $\lambda_i$  são os autovalores do sistema, que existem se e somente se

$$\det(Df(X_i) - \lambda_i I) = 0. \quad (2.82)$$

em que  $I$  é a matriz identidade de ordem seis. Essa equação possui seis raízes complexas que podem ser escritas de forma genérica como

$$\lambda_i = \text{Re}(\lambda_i) + i\text{Im}(\lambda_i), \quad (2.83)$$

na qual  $\text{Re}$  e  $\text{Im}$  representam respectivamente as partes real e imaginária de  $\lambda_i$ . Nota-se que se  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ ,  $e^{\lambda_i t}$  cresce continuamente no tempo e assim,  $X_i(t) \rightarrow \infty$ , o que significa que trajetórias próximas ao ponto de equilíbrio, se afastarão, mas se  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ,  $e^{\lambda_i t}$  decresce ao longo do tempo e  $X_i(t) \rightarrow 0$ , ou seja, as trajetórias próximas ao ponto fixo convergem para ele.

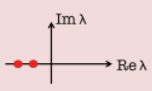


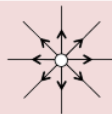
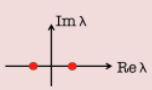
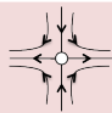
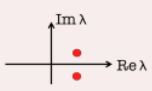

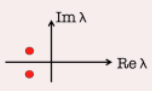

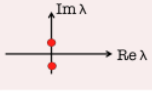

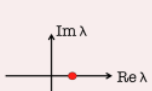
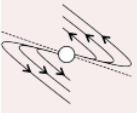
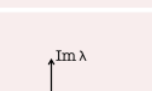
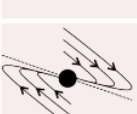
Sendo assim, os seis autovalores associados a cada equilíbrio do *PR3CCEV* podem determinar o tipo de estabilidade das soluções e para conhecer as possíveis dinâmicas em suas proximidades, é necessário conhecer as diferentes combinações dos autovalores.

A classificação de estabilidade dos pontos de equilíbrio, que são pontos fixos no sistema girante, é então definida pelos autovalores do fluxo linearizado em torno destes, de acordo com a tabela apresentada na Figura 2.15 a seguir.

O algoritmo preparado para o cálculo dos autovalores do *PR3CCEV* utiliza a subrotina de precisão dupla "DGEEV", do pacote *Linear Algebra Package (LAPACK)*

para resolução da Equação (2.82).

Figura 2.15 - Resumo da classificação dos pontos de equilíbrio em duas dimensões.

Autovalores	Sinal da Parte Real	Representação no Plano Complexo	Ponto Fixo	Estabilidade	Exemplo
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$		nó	estável	
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$		nó	instável	
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$		sela	instável	
$\lambda_1 = \lambda_2^*$ (Complexos Conjugados)	Positiva		espiral	instável	
	Negativa		espiral	estável	
	Nula		centro (caso degenerado)	estável	
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$	Nula	CASOS DEGENERADOS			
$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	Positiva		nó impróprio	instável	
	Negativa		nó impróprio	estável	

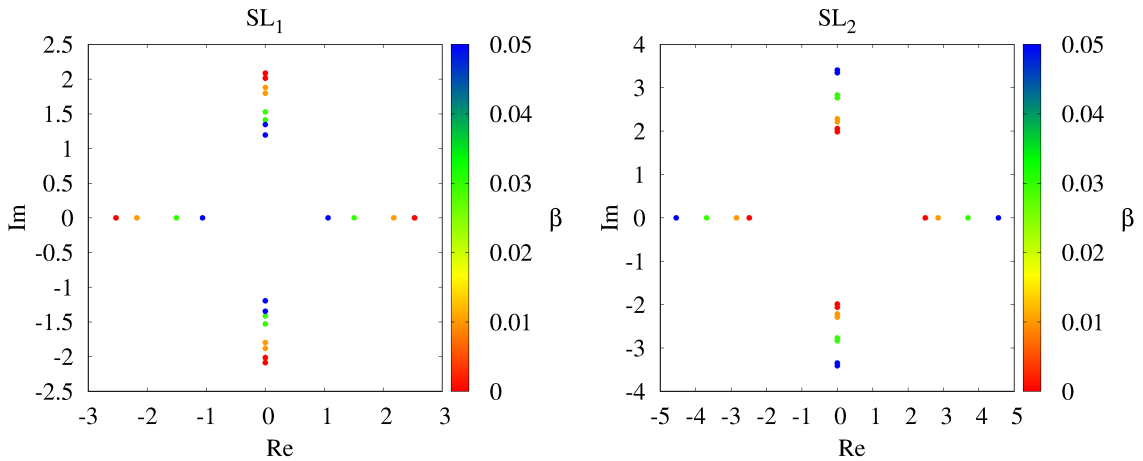
Fonte: Onias (2012) e Fiedler-Ferrara; Prado (1994).

Para o *PR3CCE* (sem vela solar) que possui cinco pontos de equilíbrio, os pontos colineares  $L_{1,2,3}$  são linearmente instáveis do tipo sela-centro-centro e os pontos de equilíbrio triangulares  $L_{4,5}$  são linearmente estáveis do tipo centro-centro-centro para

o sistema Sol-Terra (SANTOS, 2015). Na verdade a estabilidade não-linear de  $L_{4,5}$  é definida através da investigação incluindo-se termos de ordem superior na expansão da série de Taylor respectiva e já foi realizada em trabalhos anteriores.

Para o *PR3CCEV*, observamos nas Figuras 2.16, que esse tipo de estabilidade se mantém para os pontos colineares  $SL_1$  e  $SL_2$ , para  $\alpha$  e  $\delta$  nulos (FARRÉS et al., 2019). No entanto, conforme  $\beta$  cresce, tanto a parte real, quanto imaginária dos autovalores de  $SL_1$  diminuem em módulo, enquanto as partes real e imaginária dos autovalores de  $SL_2$ , crescem, em módulo, o que sugere um aumento na instabilidade de  $SL_2$ , enquanto  $SL_1$  passa a ter um comportamento menos instável.

Figura 2.16 - Parte real (Re) e imaginária (Im) dos autovalores dos pontos de equilíbrio  $SL_1$  e  $SL_2$  para  $\alpha = \delta = 0$  e valores diversos de  $\beta$ .



## 2.4 Superfícies de Velocidade Zero

As *Superfícies de Velocidade Zero (SVZs)*, delimitam a região no espaço, em que o movimento de  $C_3$  é permitido, de acordo com suas condições iniciais. Estas superfícies são definidas através da integral de Jacobi, apresentada na Equação (2.17), que pode ser reescrita como

$$v^2 = 2\Omega(x, y, z) - C_J. \quad (2.84)$$

A Equação (2.84) sugere que as regiões permitidas para o movimento de  $C_3$  é delimitada por  $2\Omega \geq C_J$ . A região inacessível, que corresponde a  $C_J > 2\Omega$  em que a velocidade de  $C_3$  é imaginária, é denotada como região proibida e a fronteira entre ambas, é um conjunto de superfícies no espaço tridimensional de velocidade zero, que varia em função de  $C_J$  (HAAPALA, 2014; SZBEHELY, 1967). Conforme o valor de  $C_J$  decresce, o espaço contido por essas superfícies, isto é, a região proibida, diminui gradativamente, até que o movimento de  $C_3$  possa ocorrer irrestritamente por todo o espaço.

Os cortes destas *SVZs* em  $z = 0$  são denominadas como *Curvas de Velocidade Zero (CVZs)*, *Curvas de Hill* ou ainda, *Curvas Equipotenciais*.

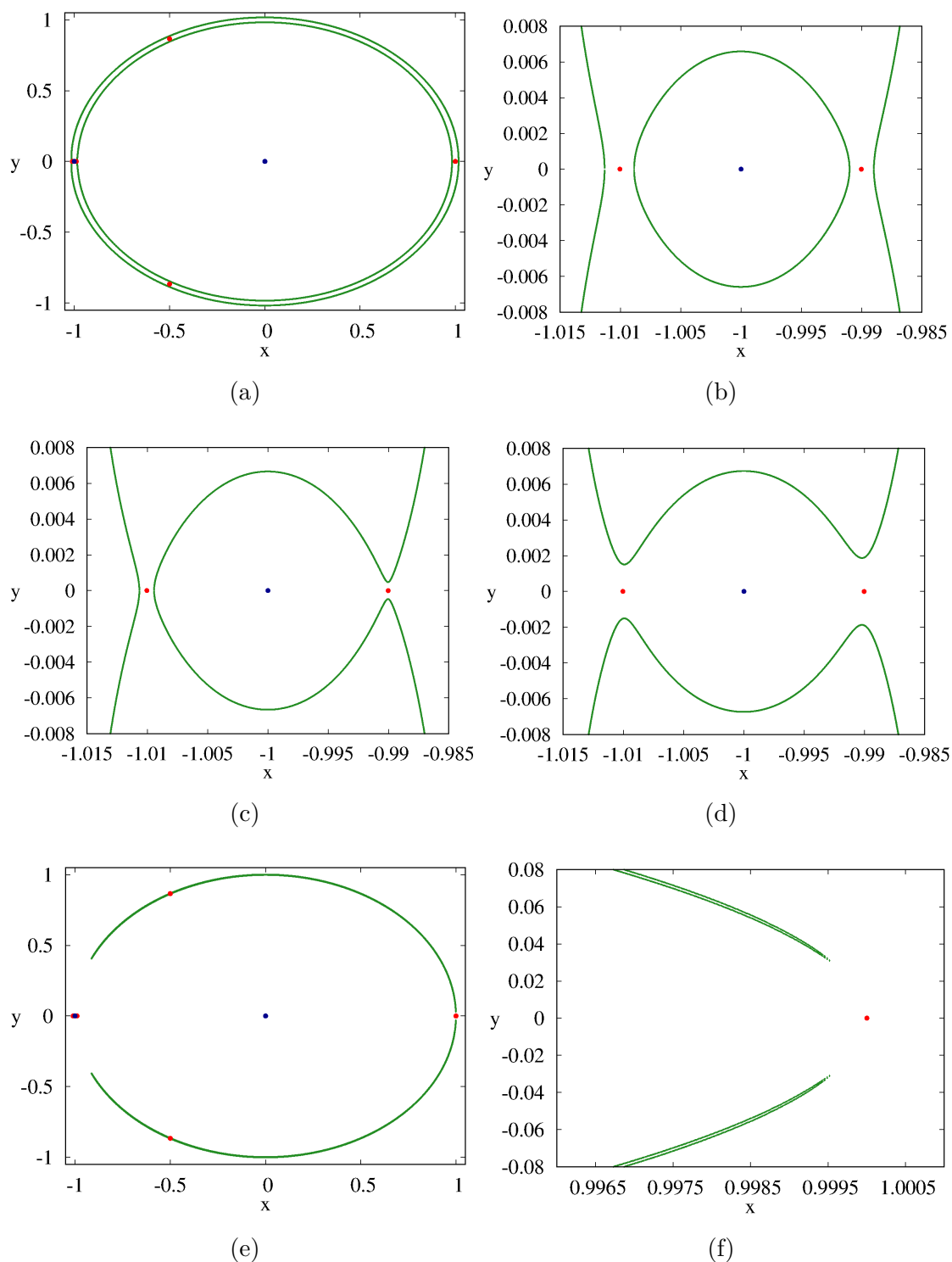
Para a obtenção das *CVZs* no decorrer deste trabalho, o algoritmo utilizado busca solucionar a Equação (2.84) quando  $v = 0$ , através de uma combinação dos métodos de Newton-Raphson apresentado na Seção 2.3 e da bisseção, que operam juntos no aperfeiçoamento da técnica de convergência.

O método da bisseção consiste basicamente em: dado um intervalo  $[a, b]$  com  $(f(a) \times f(b)) < 0$ , define-se o ponto médio ( $c = (a + b)/2$ ). Se  $f(c) = 0$  a raiz foi encontrada, caso contrário, se  $(f(a) \times f(c)) < 0$  ou  $(f(c) \times f(b)) < 0$  um novo intervalo que contém a raiz ( $[a, c]$  ou  $[c, b]$ ) é definido e prosseguimos com a investigação.

Então, um valor de  $C_J$  é fixado a princípio, para o qual deseja-se calcular as *CVZs* e define-se uma grade de pontos no plano bidimensional  $x - y$  de velocidade nula. Para cada ponto, calcula-se o valor de  $C_J$  conforme a Equação (2.84) que é comparado com o valor fixado inicialmente a fim de identificar as raízes da função que quando identificadas, acionam o método de Newton-Raphson. Sempre que a solução sai dos limites ou que os desvios demoram a reduzirem pelo método de Newton-Raphson, é introduzido um passo de bisseção (PRESS et al., 1992).

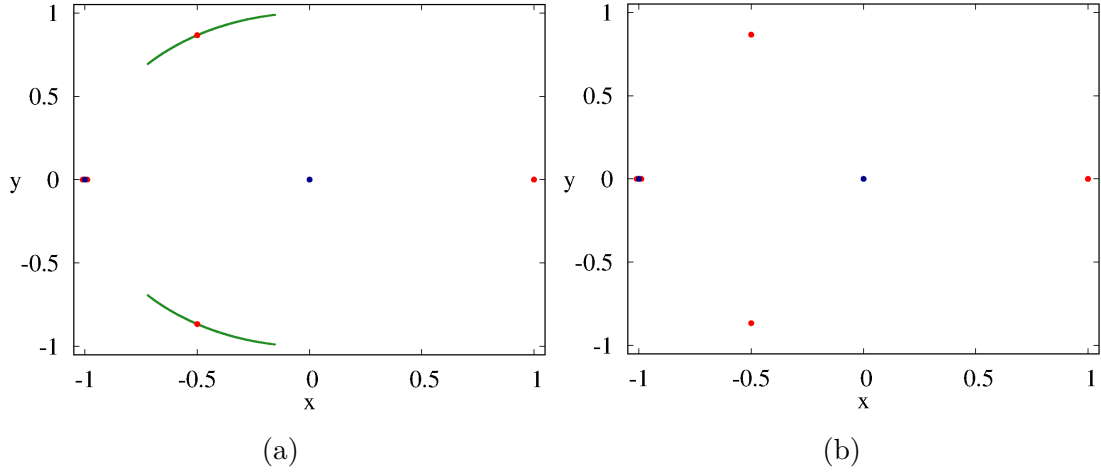
Nas figuras a seguir, a fim de exemplificar, temos as *CVZs* geradas para o sistema Sol-Terra-satélite utilizando o modelo do *PR3CCE* em cinco situações diferentes: 1) quando  $C_J > C_{J1}$  (Figuras (a) e (b)), 2) quando  $C_{J1} > C_J > C_{J2}$  (Figura (c)), 3) quando  $C_{J2} > C_J > C_{J3}$  (Figura (d)), 4) quando  $C_{J3} > C_J > C_{J4}$  (Figuras (e), (f), e (g)), 5) quando  $(C_{J4} = C_{J5}) > C_J$  (Figura (h)); onde  $C_{J1, \dots, 5}$  correspondem aos valores da constante de Jacobi nos cinco pontos de equilíbrio. Nos casos 2), 3) e 4), são abertos canais de transporte na região dos pontos de equilíbrio colineares, enquanto na Figura (g), pode-se observar que as regiões proibidas são reduzidas no entorno de  $L_4$  e  $L_5$  até que deixam de existir na situação 5).

Figura 2.17 - Curvas de Velocidade Zero geradas para o modelo do *PR3CE* conforme o valor de  $C_J$  decresce. Em (a), (e) e (g) temos o conjunto de *CVZs* sem ampliações, que desaparece completamente em (h). De (b) a (d) temos as ampliações destas, no entorno da Terra, enquanto em f) temos uma ampliação no entorno de  $L_3$ . Os pontos em azul representam os primários e em vermelho os pontos de equilíbrio do sistema.



(Continua)

Figura 2.17 - Continuação.



Para o *PR3CCEV* é possível calcular as *CVZs* de forma semelhante, onde utilizamos  $\Omega_\beta(x, y, z)$  e  $C_{J\beta}$  em vez de  $\Omega(x, y, z)$  e  $C_J$  na Equação (2.84). Dessa forma, podemos analisar seus comportamentos para valores de  $\beta$  e  $C_{J\beta}$  variados.

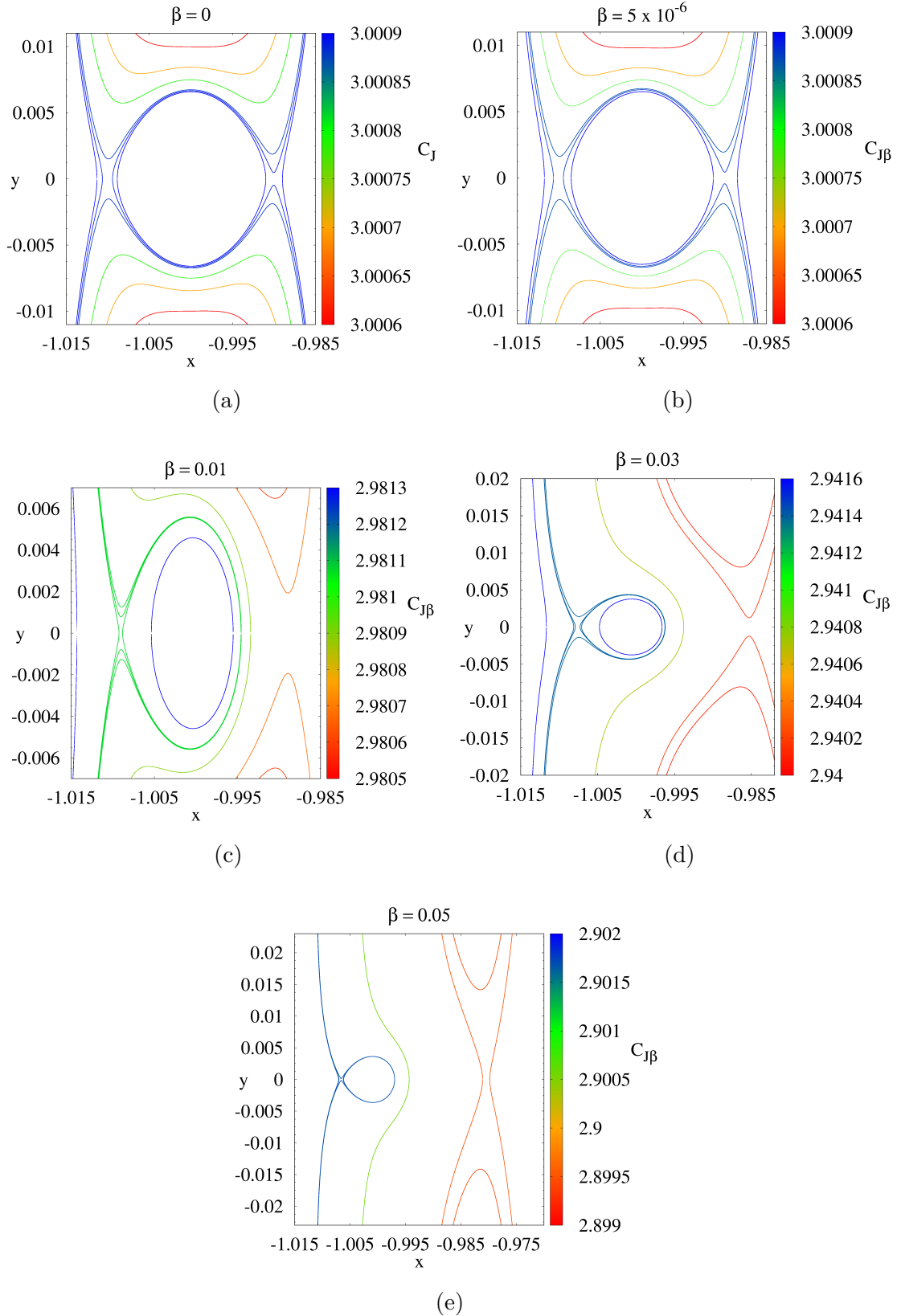
Quando  $\alpha$  ou  $\delta$  são diferentes de zero, no entanto, conforme discutido na Seção 2.2.4, não há mais uma constante de movimento. Além disso, a variação de  $C_J$ , de  $C_{J\beta}$  ou ainda de  $\tilde{C}_{J\beta\delta}$  durante uma dada trajetória, para  $\delta \neq 0$ , cresce muito, conforme  $\beta$  aumenta, o que torna inviável a análise das *CVZs* mesmo que fosse em função de um certo valor de  $\Delta C_{J\beta}$ .

Dessa forma, considerando o *PR3CCEV*, conforme o valor de  $\beta$  cresce, para  $\alpha$  e  $\delta$  nulos, obtemos os seguintes comportamentos apresentados nas Figuras 2.18.

Para valores de  $\beta$  pequenos, como da ordem de  $\beta = 5 \times 10^{-6}$  não observamos diferenças significativas nos perfis das *CVZs* em relação ao caso sem vela.



Figura 2.18 - Comportamento das  $CVZs$  para valores diversos de  $\beta$ , conforme variamos  $C_{J\beta}$ , para  $\alpha$  e  $\delta$  nulos.



Notamos que a medida que  $\beta$  cresce a abertura dos canais de transporte passa a ocorrer para valores de  $C_{J\beta}$  menores, além disso, a abertura dos canais de transporte em  $SL_1$  e  $SL_2$ , passa a ocorrer com uma diferença de  $C_{J\beta}$  cada vez maior, conforme se observa nas Figuras 2.18, de forma a propiciar missões espaciais com destinos contrários a direção do Sol.

Uma vez que a força devido a pressão de radiação solar age sempre no sentido oposto à força gravitacional do Sol, podendo ser considerada como uma correção dessa força gravitacional que exerce influência sobre a vela, é previsível que todos os pontos de equilíbrio Lagrangianos do sistema se aproximem do Sol enquanto  $\beta$  aumenta. Da mesma forma, o pressuposto de que a pressão de radiação solar favoreça o transporte para regiões com sentido contrário a localização do Sol nesse sistema é coerente; então o fato de  $C_{J_2}$  se tornar maior que  $C_{J_1}$ , levando a uma inversão na ordem de abertura dos canais de transporte, além de se observar um aumento na instabilidade de  $SL_2$  a medida que  $\beta$  cresce estão em concordância.

### 3 ANÁLISE DO SISTEMA DINÂMICO

A análise do sistema dinâmico é essencial para projetos de missões espaciais, pois apenas mediante sua ampla compreensão é possível a realização de planejamentos estratégicos, com a exploração de potenciais novos perfis de soluções e a determinação de quais manobras são viáveis para se alcançar os objetivos em questão.

#### 3.1 Mapas e seções de Poincaré

A técnica do mapa de Poincaré foi introduzida em 1881, por Henri Poincaré, como uma estratégia para explorar a estabilidade de órbitas periódicas. Hoje, os mapas de Poincaré são uma ferramenta amplamente usada para análise e visualização do comportamento de um sistema dinâmico à medida que evolui.

Através dessa técnica é possível simplificar a análise qualitativa do comportamento de trajetórias no espaço de fase, definindo um sistema dinâmico de menor dimensão e tempo discreto, isto é, um mapa, que seja difeomorfo<sup>1</sup> a um sistema dinâmico de tempo contínuo de interesse, preservando as propriedades dinâmicas do fluxo estudado.

Definindo uma superfície ou hiperplano<sup>2</sup>  $\Sigma$ , o Mapa de Poincaré é gerado pela evolução de condições iniciais que são registradas e exibidas como cruzamentos consecutivos de trajetórias em  $\Sigma$ , onde  $\Sigma$  é a Seção de Poincaré e as equações que relacionam as sucessivas intersecções dessas trajetórias com o plano é o Mapa de Poincaré (WIGGINS, 1990; HAAPALA, 2014). Dessa forma, em vez de analisar as equações que descrevem estas trajetórias contínuas no tempo, torna-se possível analisar o mapa discreto, gerado por suas intersecções com o plano e assim, possibilitando a identificação de características importantes do sistema, como a presença de órbitas periódicas, variedades estáveis e instáveis e comportamentos regulares ou caóticos.

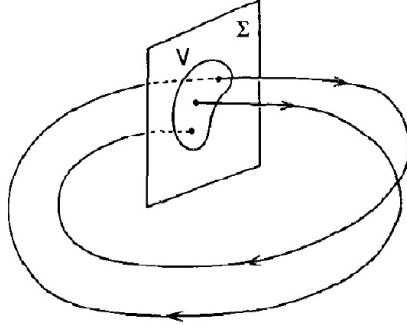
Embora não exista um método geral de construção, o procedimento consiste em definir uma superfície  $\Sigma$ , transversa ao campo vetorial da trajetória em um determinado ponto e encontrar uma transformação, que associe um conjunto de pontos  $V$  dessa trajetória com pontos de retorno em  $\Sigma$ , conforme a ilustração a seguir.

---

<sup>1</sup>Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  é uma bijeção diferenciável cuja inversa é também diferenciável. Se ambas,  $f$  e  $f^{-1}$  são de classe  $C^k$ , dizemos que  $f$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$  ou  $k$ -vezes continuamente diferenciável (LIMA, 2007).

<sup>2</sup>Um hiperplano pode ser definido como um subespaço de dimensão  $(n - 1)$ , para um espaço vetorial de dimensão  $n$ .

Figura 3.1 - Representação esquemática da construção de uma seção de Poincaré  $\Sigma$ , para um conjunto de pontos  $V$  de órbitas periódicas.



Fonte: Wiggins (1990).

Nesse trabalho, adotamos a superfície de seção de Poincaré definida pelo hiperplano

$$\Sigma = \{(x, y) \mid J(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_{J\beta}, \quad \text{para } \dot{x} = 0, \dot{y} \leq 0, z = 0, \dot{z} = 0\}, \quad (3.1)$$

para estudar o movimento de trajetórias com condições iniciais localizadas na região de Hill da Terra, isto é, entre  $SL_1$  e  $SL_2$ . Então o algoritmo de precisão quádrupla utilizado para gerar as seções de Poincaré se aplica ao caso planar, considerando  $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$  nas Equações (2.48) do *PR3CEV* e a seção foi definida no plano  $x - y$ .

Dado um conjunto de condições iniciais de posição, o programa calcula a velocidade inicial para cada uma delas, de acordo com a Equação (2.84), considerando  $\Omega = \Omega_\beta$  e um valor fixo proposto inicialmente para a constante de Jacobi ( $C_J = C_{J\beta}$ ). Além disso, uma escolha é feita em relação ao sentido da velocidade inicial, assim como também estabelece um sentido para o qual as trajetórias sinalizam quando atravessam a seção, que no caso proposto é  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} \leq 0$ .

Em seguida, estas condições iniciais são evoluídas, utilizando novamente o integrador numérico Runge-Kutta (subrotina *RKF78*) com controle de passo automático, tolerância de erro relativo de  $10^{-14}$  e tolerância de erro absoluto de  $10^{-15}$ . No programa principal foi realizado um controle de passo extra quando a trajetória evoluída se aproxima e se afasta dos primários, com o intuito de evitar que o programa classifique

como colisões, imprecisões numéricas em situações de aproximação dos primários, sem aumentar o custo computacional devido a um passo de tempo muito pequeno, quando desnecessário. Embora os primários sejam considerados como corpos puntiformes, com base em sua distância, o programa classifica quando ocorre colisões com os primários, i.e., colisão com o raio médio destes primários. Além disso, o programa também notifica quando  $C_{J\beta}$  deixa de ser conservada de acordo com a tolerância estipulada a princípio ( $tol = 10^{-10}$ ), se a quantidade de furos na seção de Poincaré atingiu um valor máximo determinado previamente, ou se a espaçonave escapou de uma região de alcance máximo adotada ao caso (uma área de 10 unidades adimensionais no espaço de configuração), ou se houve algum problema durante a integração ou quando o tempo final de integração foi atingido. Em todas essas situações, o programa adverte, interrompe a evolução da órbita e segue para a próxima condição inicial ( $CI$ ).

Dessa forma, as seções de Poincaré foram geradas para um conjunto de condições iniciais ( $CI$ s), definidas no interior da região de Hill do primário menor, tal que  $x_{L_2} \leq x \leq x_{L_1}$ , sendo  $x_{L_1}$  e  $x_{L_2}$ , a coordenada  $x$  dos pontos de equilíbrio  $SL_1$  e  $SL_2$ , respectivamente. Para todas as seções de Poincaré geradas, mantivemos o tempo máximo final de evolução das trajetórias como  $t_f = 1000$  unidades adimensionais de tempo e a quantidade máxima de furos por trajetória evoluída de  $N_{furo} = 500$  unidades.

Para cada valor de  $\beta$ , foram obtidas as seções de Poincaré para três situações diferentes: a) quando todos os canais de transporte estão fechados, o que ocorre quando o valor de  $C_{J\beta}$  mantido ao longo de todas as trajetórias evoluídas é maior que  $C_{J\beta}$  de todos os pontos de equilíbrio do sistema; b) quando o primeiro canal de transporte é aberto, que acontece quando  $C_{J\beta}$  das trajetórias evoluídas passa a ser menor que o maior valor  $C_{J\beta}$  dentre os pontos de equilíbrio; c) quando o segundo canal de transporte também é aberto, ou seja, quando  $C_{J\beta}$  fixado para as trajetórias é menor que os dois maiores valores de  $C_{J\beta}$  entre os pontos de equilíbrio. As linhas em verde escuro em seu entorno, são as  $CVZ$ s.

As tabelas a seguir, Tabela 3.1 e 3.2, expõem os valores de  $C_{J\beta}$  correspondentes aos cinco pontos de equilíbrio colineares e triangulares do sistema Sol-Terra, respectivamente, para diversos valores de  $\beta$  explorados de índice  $I$ , com  $\alpha = \delta = 0$ .

Tabela 3.1 - Valores de  $C_{J\beta}$  nos pontos de equilíbrio  $SL_1$ ,  $SL_2$  e  $SL_3$  para diversos valores de  $\beta$ , com  $\alpha$  e  $\delta$  nulos.

I	$\beta$	$C_{J_1}$	$C_{J_2}$	$C_{J_3}$
1	0	3.000890689960231	3.000886685305136	3.000003003460743
2	$5 \times 10^{-6}$	3.000880589279808	3.000876784705726	2.999993003464924
3	$1 \times 10^{-3}$	2.998870441476166	2.998906460531309	2.998002674482963
4	0.01	2.980677139315348	2.981075496761675	2.979969883690164
5	0.03	2.940156573879587	2.941403575471643	2.939699354175348
6	0.05	2.899463697818291	2.901684246514854	2.899151075180886

Tabela 3.2 - Valores de  $C_{J\beta}$  nos pontos de equilíbrio  $SL_4$  e  $SL_5$  para diversos valores de  $\beta$ , com  $\alpha$  e  $\delta$  nulos.

I	$\beta$	$C_{J_4} = C_{J_5}$
1	0	2.999996996548090
2	$5 \times 10^{-6}$	2.999986996569791
3	$1 \times 10^{-3}$	2.998102171759090
4	0.01	2.979963909918631
5	0.03	2.939693437670031
6	0.05	2.899145242266507

Para  $\alpha$  e  $\delta$  nulos os valores de  $C_{J_1, \dots, 5}$  decrescem a medida que  $\beta$  aumenta, conforme observamos anteriormente.

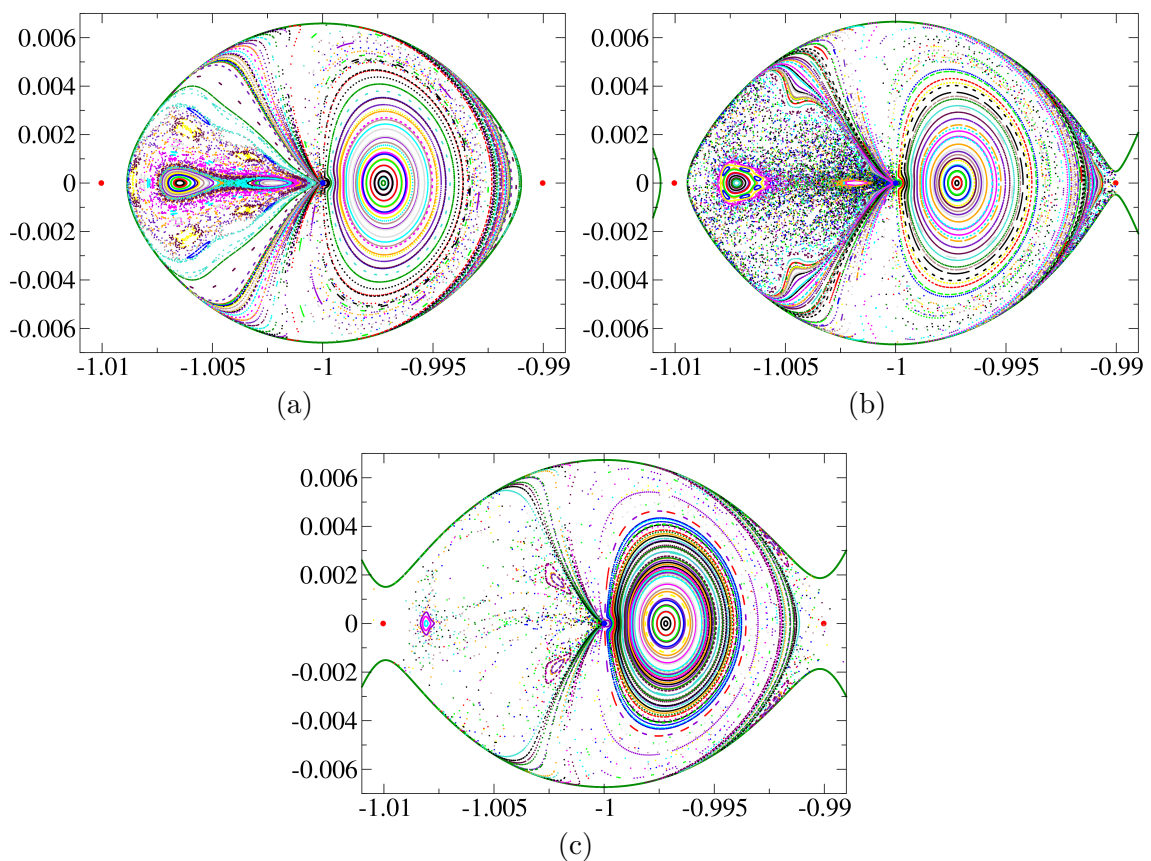
A princípio calculamos a seção de Poincaré para o caso sem vela ( $\beta = 0$ ) para termos de comparação.

Em todas as seções apresentadas na Figura 3.2 podemos observar diversos círculos aparentemente concêntricos situados entre a Terra e  $L_1$ , delineados por sequências de interseções de trajetórias com a seção de Poincaré. Estes círculos representam trajetórias regulares dispostas sobre Toros, neste caso de bidimensional. Enquanto ao lado esquerdo da figura (a), observamos largas regiões de pontos aparentemente aleatórios indicando a presença de Mar Caótico. Observa-se embutidas neste Mar Caótico, a existência de Ilhas de Estabilidade, formadas por estruturas circulares menores próximas de  $y = 0$ . Estas Ilhas de Estabilidade movem-se e diminuem de extensão nas figuras (b) e (c). Em (b), quando o canal de transporte em  $L_1$  abre, observamos também o crescimento da região de Mar Caótico à esquerda de  $L_1$  na

seção  $\Sigma$ . Além disso, a densidade de pontos no Mar Caótico, sugere que as trajetórias que escapam da região de Hill da Terra escapam muito mais lentamente em (b) do que em (c).

Esse padrão comportamental se mantém quando consideramos valores de  $\beta$  pequenos, como  $\beta = 5 \times 10^{-6}$ , mesmo quando variamos  $\alpha$  ou  $\delta$ , observando-se apenas que quando não se tem nenhum canal de transporte aberto, para  $\alpha = \delta = 0$  as regiões de Mar Caótico diminuem consideravelmente entre  $SL_2$  e a Terra (ver Figura 3.3 (a)).

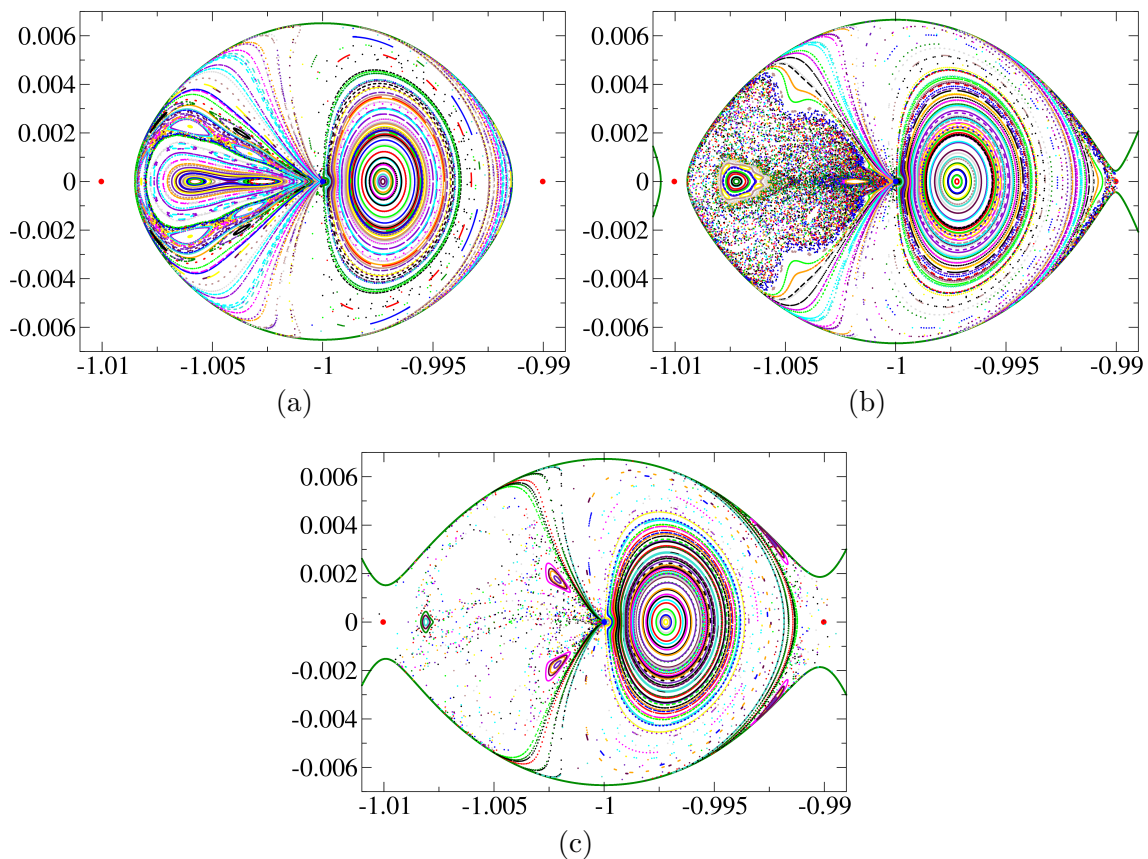
Figura 3.2 - Seções de Poincaré no plano  $x - y$  para  $\beta = 0$  (a) Quando  $C_J > C_{J1}$ , (b) quando  $C_{J1} > C_J > C_{J2}$ , (c) quando  $C_{J2} > C_J$ . (Ver os valores da Tabela 3.1 para  $I = 1$ .)



Uma Ilha de Estabilidade é formada por curvas invariantes que circundam uma órbita periódica estável e uma hierarquia de ilhas secundárias, enquanto os Toros

são conjuntos invariantes consistindo de infinitos pontos, que não formam curvas contínuas (ASSIS, 2014).

Figura 3.3 - Seções de Poincaré no plano  $x - y$  para  $\beta = 5 \times 10^{-6}$ . (a) Quando  $C_{J\beta} > C_{J1}$ , (b) quando  $C_{J1} > C_{J\beta} > C_{J2}$ , (c) quando  $C_{J2} > C_{J\beta}$ . (Ver os valores da Tabela 3.1 para  $I = 2$ .)

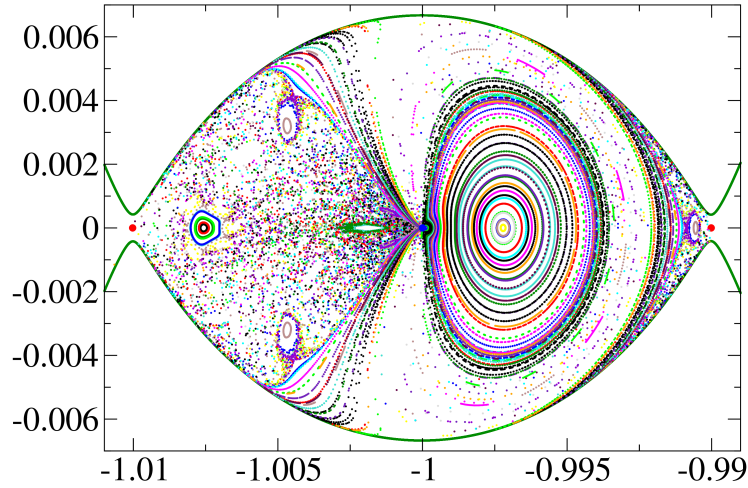


Conforme analisamos na Seção 2.3, para valores de  $\beta$  maiores que  $\beta \approx 1 \times 10^{-4}$ , ocorre uma inversão na ordem de abertura dos canais de transporte de  $SL_1$  e  $SL_2$ , quando  $\alpha = \delta = 0$ , dessa forma, a possibilidade de realizar transporte para corpos que estejam na região exterior às regiões de órbita dos primários surge antes da possibilidade de transitar entre os primários, a medida que  $C_{J\beta}$  diminui. Tal acontecimento, pode ser observado novamente nas seções de Poincaré a seguir.

Nota-se ainda, que para o valor de  $\beta = 1.00074 \times 10^{-4}$  os canais de transporte em  $SL_1$  e  $SL_2$  abrem juntos (ou muito próximos), para  $C_{J\beta} = 3.000688$ .



Figura 3.4 - Seção de Poincaré no plano  $x - y$  para  $\beta = 1.00074 \times 10^{-4}$ , a partir do qual nota-se a inversão da ordem de abertura dos canais de transporte em  $SL_1$  e  $SL_2$ , para  $C_{J\beta} = 3.000688$ , em que ambos abrem juntos.



Na seção de Poincaré obtida para  $\beta = 1.00074 \times 10^{-4}$  (Figura 3.4) surgem três novas estruturas relacionadas a um conjunto de Ilhas de Estabilidade, uma próxima a  $SL_1$  e duas posicionadas no eixo vertical em  $x \approx -1.005$ , logo ao lado da região limite entre o Mar Caótico e a região das órbitas regulares.

Para  $\beta = 10^{-3}$ , quando todos os canais de transporte estão fechados, na Figura 3.5 (a), pode-se observar que a grande região de Toros invariante permanece. No entanto, as Ilhas de Estabilidade observadas anteriormente para  $\beta = 0$  diminuem drasticamente e a região é tomada por um grande Mar Caótico. Quando o primeiro canal de transporte abre em  $SL_2$  (Figura 3.5 (b)), a densidade de  $CI$ s na região do Mar Caótico é imediatamente reduzida, e quando o segundo canal de transporte abre através de  $SL_1$  (Figura 3.5 (c)), a Ilha de Estabilidade desaparece completamente, restando apenas alguns pontos dispersos na região do Mar Caótico devido à rápida fuga de trajetórias da região de Hill da Terra.

Figura 3.5 - Seções de Poincaré no plano  $x - y$  para  $\beta = 10^{-3}$ . (a) Quando  $C_{J\beta} > C_{J2}$ , (b) quando  $C_{J2} > C_{J\beta} > C_{J1}$ , (c) quando  $C_{J1} > C_{J\beta}$ . (Ver os valores da Tabela 3.1 para  $I = 3$ .)

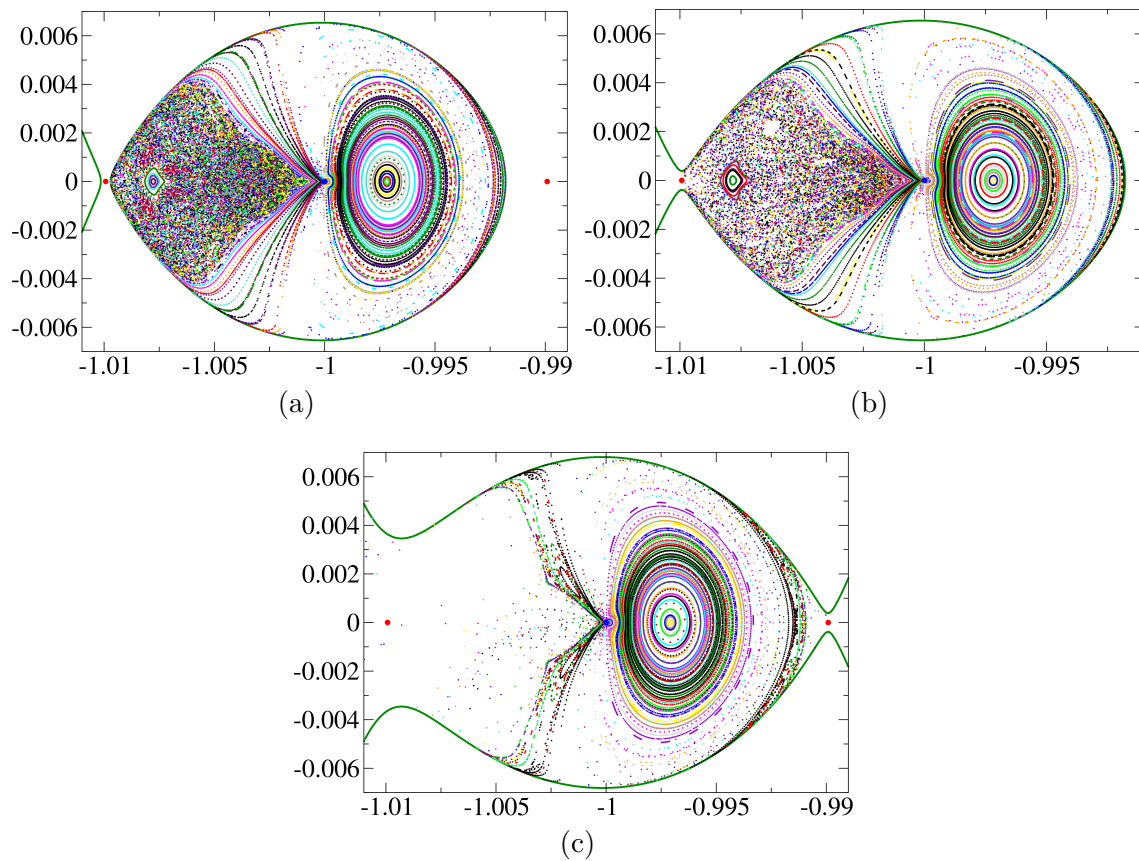
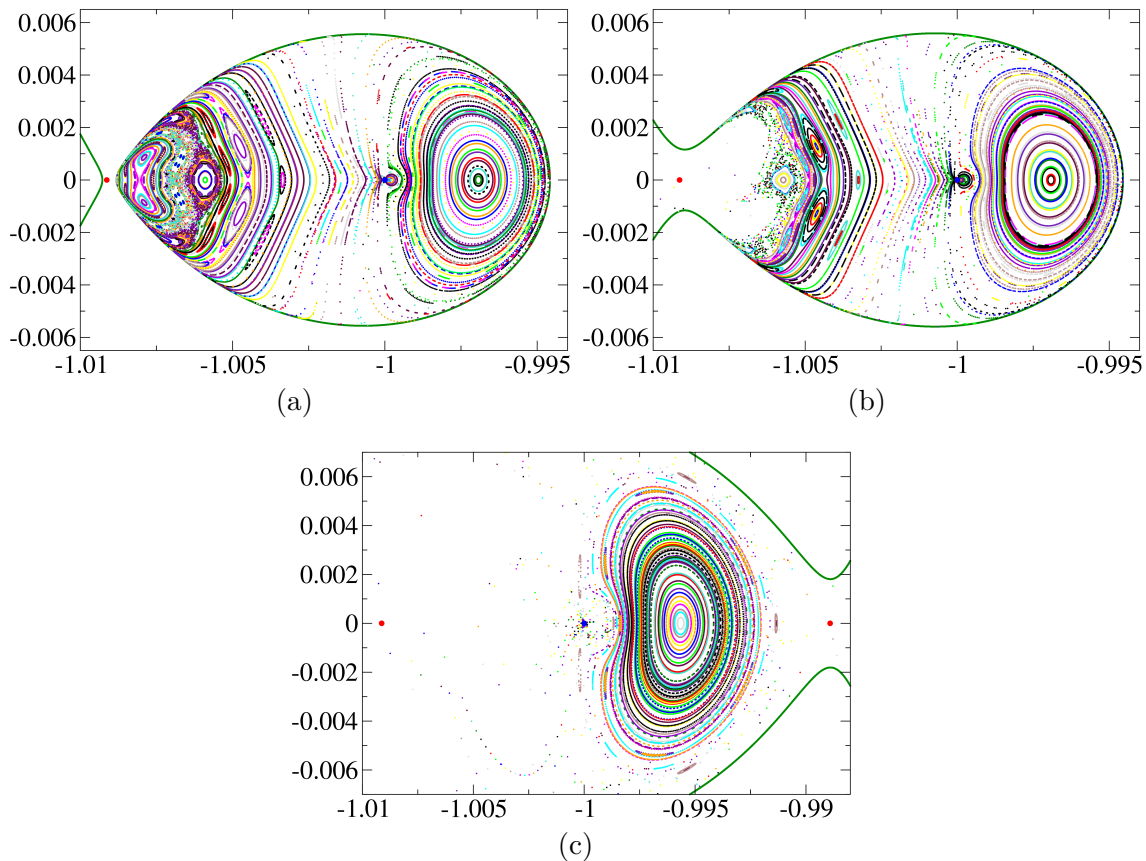


Figura 3.6 - Seções de Poincaré no plano  $x - y$  para  $\beta = 0.01$ . (a) Quando  $C_{J\beta} > C_{J2}$ , (b) quando  $C_{J2} > C_{J\beta} > C_{J1}$ , (c) quando  $C_{J1} > C_{J\beta}$ . (Ver os valores da Tabela 3.1 para  $I = 4$ .)



A partir das seções de Poincaré apresentadas, pode-se observar também que para valores de  $\beta \geq 0.01$  o padrão comportamental das seções de Poincaré se altera significativamente e passamos a observar em ambos os lados da Terra, regiões de órbitas regulares que formam Toros para valores de  $C_{J\beta}$  para os quais ambos os canais de transporte estão fechados ou quando se inicia a primeira abertura. Além disso, os Toros localizados entre  $SL_2$  e a Terra desaparecem antes que o canal de transporte em  $SL_1$  seja aberto, enquanto a região ocupada pelos Toros situado entre a Terra e  $SL_1$  diminui a medida que  $C_{J\beta}$  decresce, até que para  $\beta = 0.05$  ambos desaparecem antes que o canal de transporte em  $SL_1$  seja aberto (Figura 3.8 (d)), para  $\alpha$  e  $\delta$  nulos e trajetórias predominantemente caóticas são encontradas na região.

Quando ambos os canais de transporte estão fechados ou quando começa a primeira abertura, duas estruturas circulares aparecem ao redor da Terra, que crescem à

medida que  $\beta$  aumenta e mesmo quando o canal de transporte em  $SL_2$  está completamente aberto, um acúmulo de pontos ainda é observável nesta região. Além disso, nota-se também uma diminuição na escala da região de movimento permitido para a vela solar ao redor da Terra para situações em que nenhum canal de transporte está disponível ou quando o primeiro canal inicia sua abertura.

Figura 3.7 - Seções de Poincaré no plano  $x - y$  para  $\beta = 0.03$ . (a) Quando  $C_{J\beta} > C_{J2}$ , (b) e (c) quando  $C_{J2} > C_{J\beta} > C_{J1}$ , (d) quando  $C_{J1} > C_{J\beta}$ . (Ver os valores da Tabela 3.1 para  $I = 5$ .)

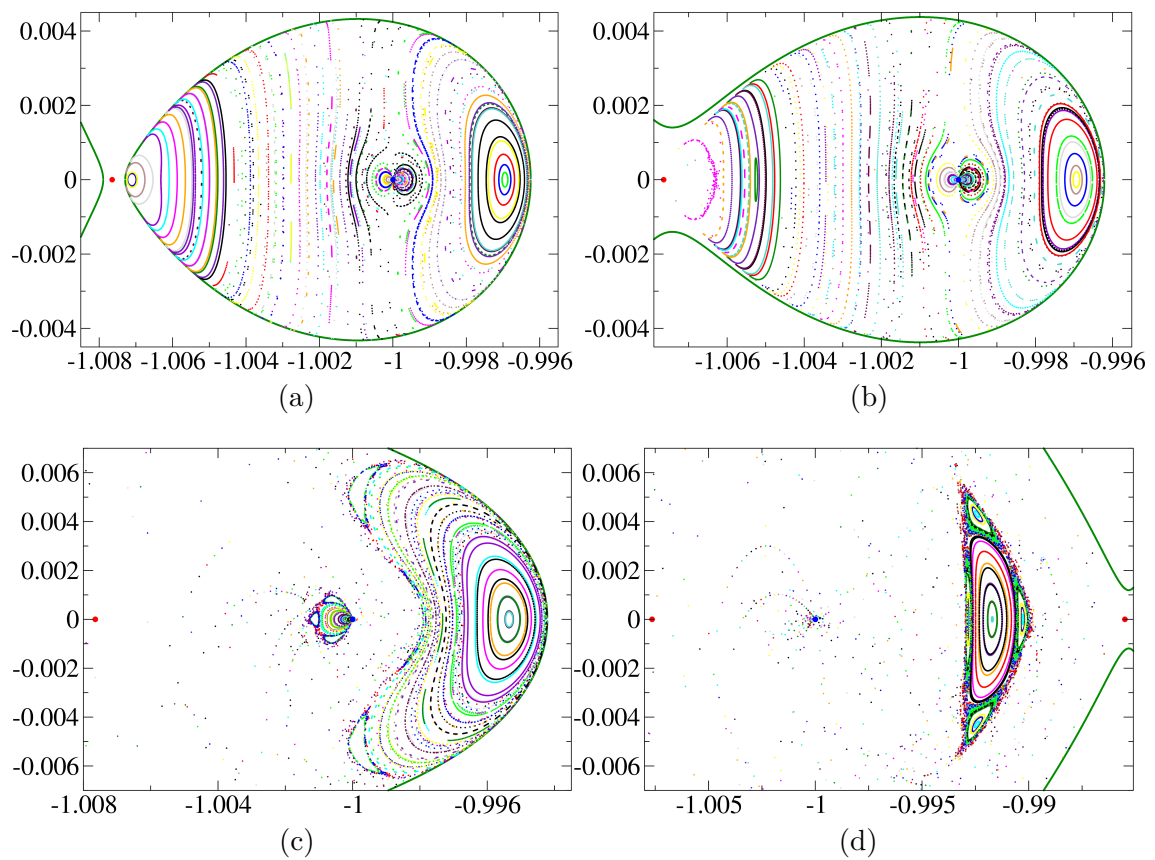
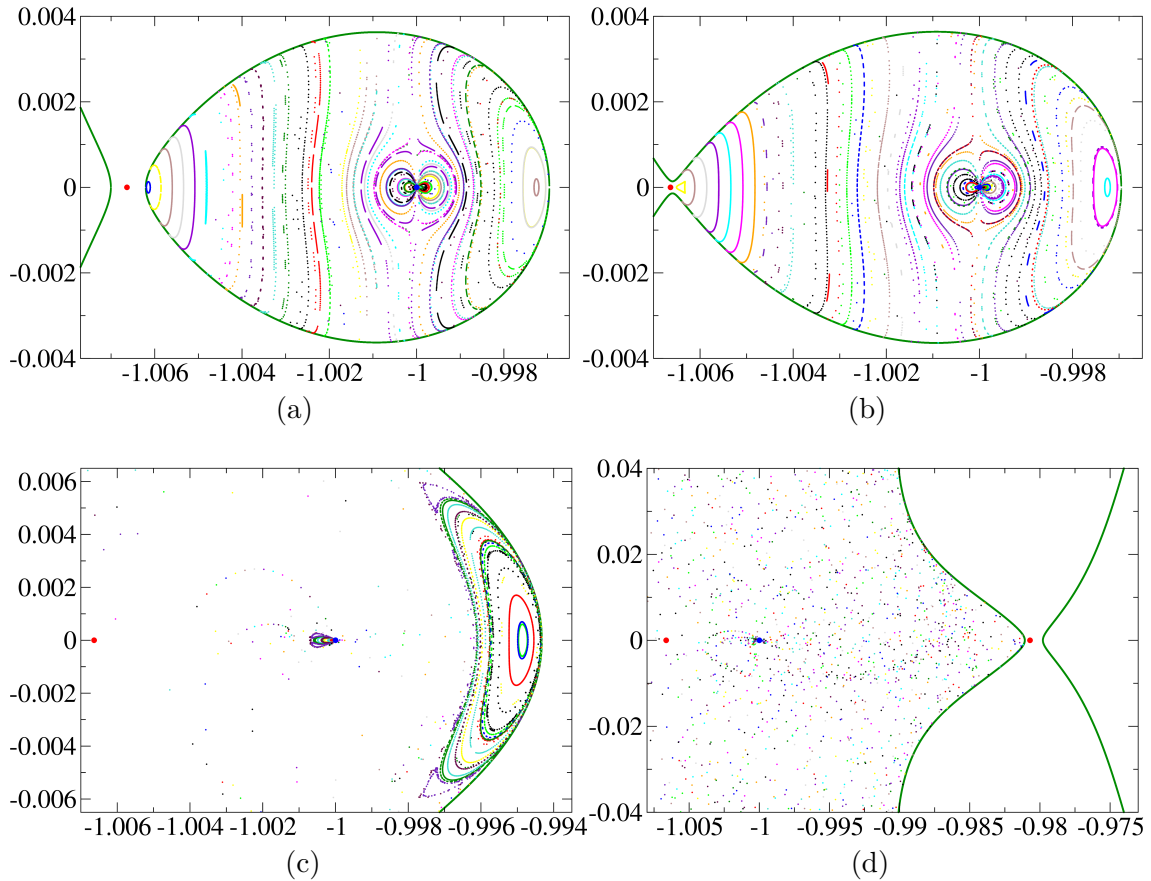
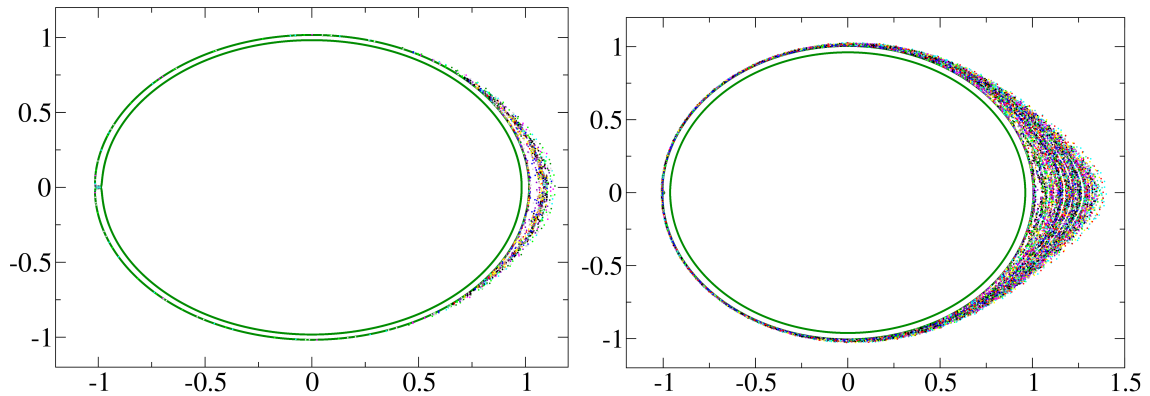


Figura 3.8 - Seções de Poincaré no plano  $x - y$  para  $\beta = 0.05$ . (a) Quando  $C_{J\beta} > C_{J2}$ , (b) e (c) e (d) quando  $C_{J2} > C_{J\beta} > C_{J1}$ . (Ver os valores da Tabela 3.1 para  $I = 6$ .)



Expandindo a região do gráfico de seção de Poincaré de forma a obter uma visão completa do espaço de fase, pode-se analisar ainda que, desde a ocorrência da inversão da ordem de abertura dos canais de transporte, por exemplo, para  $\beta = 10^{-3}$ , assim que o canal de transporte em  $SL_2$  é aberto, muitas trajetórias atravessam a região ao redor das  $CVZs$  próxima a  $SL_3$  e conforme  $\beta$  aumenta, esta região é visitada mais frequentemente, como pode ser visto na Figura 3.9. Se esta região externa próxima a  $SL_3$  é de interesse como destino intermediário ou final, o transporte é favorecido pela dinâmica natural.

Figura 3.9 - Seções de Poincaré no plano  $x - y$  para  $\beta = 10^{-3}$ , à esquerda e  $\beta = 0.05$ , à direita.

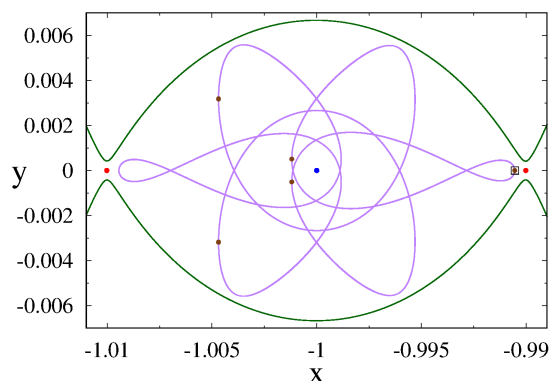


Posteriormente coletamos algumas condições iniciais em determinadas regiões de diversas seções de Poincaré e evoluímos suas trajetórias, com o propósito de fornecer uma análise do perfil dessas órbitas.

Novamente, os pontos marcados em vermelho correspondem a posição dos pontos de equilíbrio ( $SL_1$  e  $SL_2$ , nas figuras apresentadas), os pontos em azul indicam a localização dos primários (do primário menor, nos gráficos apresentados), as linhas em verde escuro representam as  $CVZs$ , as linhas em roxo, correspondem a trajetória evoluída, os pontos em marrom indicam os furos na seção de Poincaré gerados por essa trajetória e o ponto quadrado em preto, marca sua correspondente condição inicial.

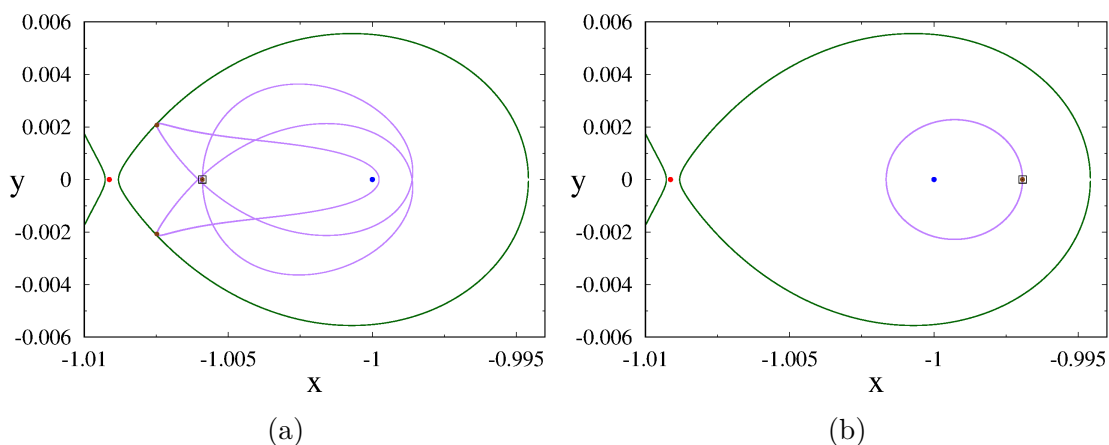
Na Figura 3.10 a seguir, temos a trajetória evoluída a partir de uma  $CI$  escolhida na seção de Poincaré exibida anteriormente para  $\beta = 1.00074 \times 10^{-4}$  (Figura 3.4), em que ambos os canais de transporte em  $SL_1$  e  $SL_2$  estão abertos. Tal  $CI$  foi selecionada na região central de uma Ilha de Estabilidade localizada próxima a  $SL_1$ , na Figura 3.4 e conforme se observa, gerou uma órbita periódica simétrica.

Figura 3.10 - Trajetória obtida através de uma *CI* escolhida na seção de Poincaré da Figura 3.4 para  $\beta = 1.00074 \times 10^{-4}$ .



Nas Figuras 3.11(a) e (b) a seguir, temos novamente duas órbitas periódicas geradas a partir de duas diferentes *CI*s, a primeira, selecionada na região central de uma Ilha de Estabilidade localizada entre  $SL_2$  e a Terra, na seção de Poincaré da Figura 3.6(a) para  $\beta = 0.01$  e a segunda, escolhida na região central dos Toros localizados entre a Terra e  $SL_1$  na mesma seção, para a qual, não há canais de transporte abertos.

Figura 3.11 - Trajetórias (a) e (b) obtidas através de duas diferentes *CI*s escolhidas na seção de Poincaré da Figura 3.6(a) para  $\beta = 0.01$ .

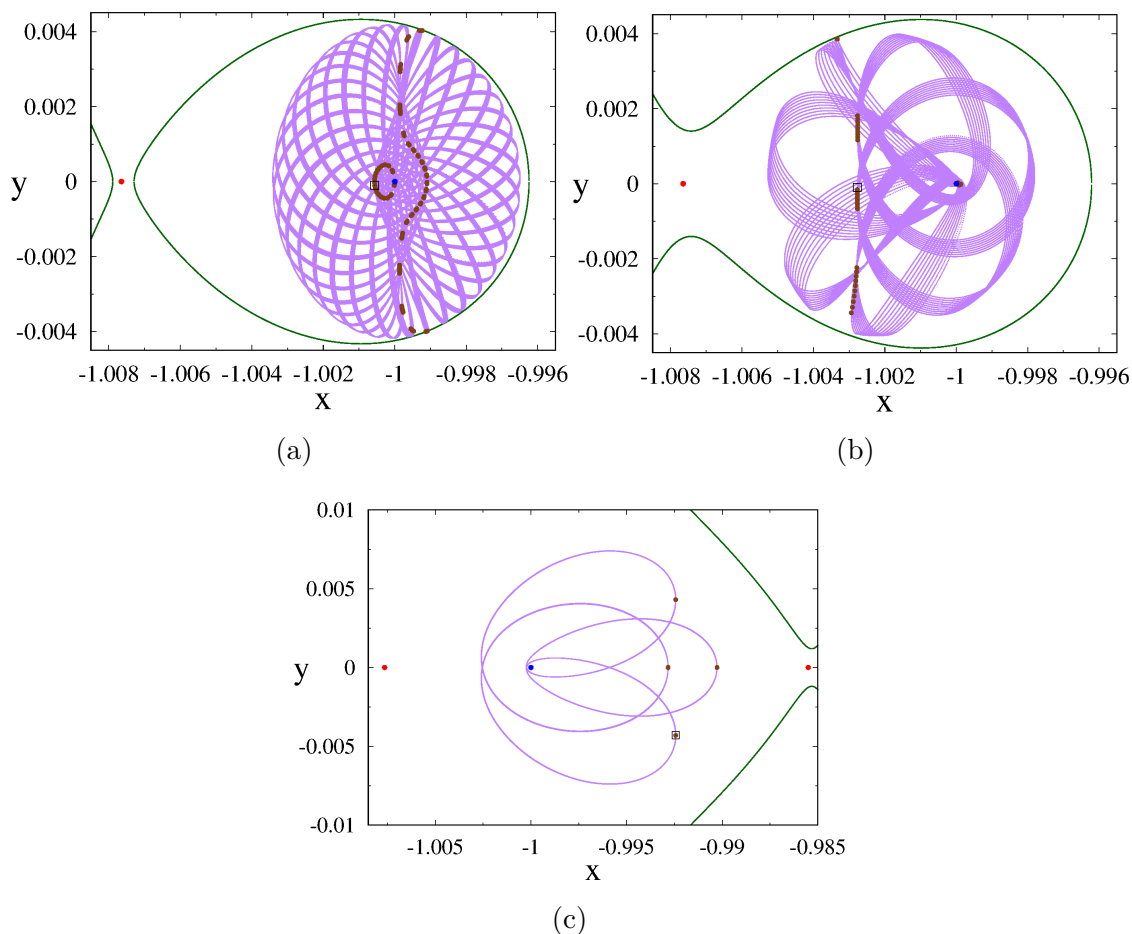


Nas Figuras 3.12(a), (b) e (c) a seguir, apresentamos três trajetórias diversas geradas

a partir de três diferentes *CI*s coletadas nas seções de Poincaré da Figura 3.7(a), (b) e (d), respectivamente. A primeira, da Figura 3.12(a) foi selecionada em uma região no entorno da Terra, para a qual, a seção de Poincaré mostrou o surgimento de uma estrutura circular que cresce a medida que  $\beta$  aumenta. A partir da trajetória obtida, verificamos que trata-se de uma órbita regular que fura a seção de Poincaré tanto na região no entorno da Terra, nessa estrutura circular que apareceu próxima a ela, quanto nas extremidades dos Toros localizados entre a Terra e  $SL_1$  (ver Figura 3.7(a)). A segunda, da Figura 3.12(b), foi escolhida na região entre  $SL_2$  e a Terra, que na seção de Poincaré da Figura 3.7(b) também foi tomada por estruturas semelhantes as dos Toros que no entanto, exibe furos quase verticais e a partir da trajetória gerada na Figura 3.12(b) observamos o perfil de uma órbita regular. A terceira, da Figura 3.12(c), foi selecionada novamente na região central de uma Ilha de Estabilidade da seção de Poincaré da Figura 3.7(d), que é a única estrutura que permanece na seção para essa situação em que ambos os canais de transporte estão abertos e observamos que esta, produz uma órbita periódica.

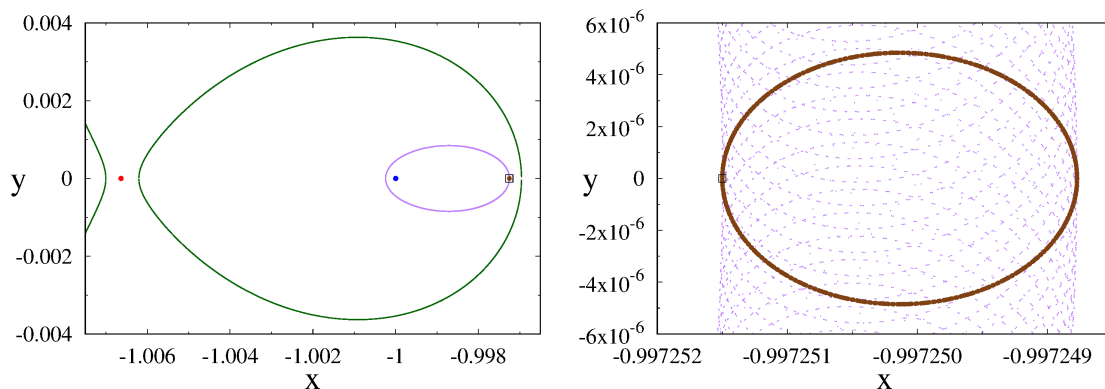


Figura 3.12 - Trajetórias (a), (b) e (c) obtidas através de três diferentes  $CI$ s escolhidas nas seções de Poincaré da Figura 3.7(a), (b) e (d), respectivamente, para  $\beta = 0.03$ .



Nas Figuras 3.13 a seguir, selecionamos uma  $CI$  na seção de Poincaré da Figura 3.8(a) para  $\beta = 0.05$ , na região central dos Toros que se apresentam entre a Terra e  $SL_1$  e verificamos mais uma vez que esta, produz uma órbita periódica. Ampliando a trajetória gerada na região em que ela fura a seção de Poincaré, observamos ainda que a trajetória não forma um círculo contínuo, mas espirala em seu redor. Portanto, essa condição inicial gera uma trajetória quase-periódica e está sobre um Toro bidimensional. Certamente correspondendo a um ótimo chute inicial para um algoritmo de correção diferencial, em busca de uma órbita periódica do sistema.

Figura 3.13 - Trajetória obtida através de uma  $CI$  escolhida na seção de Poincaré da Figura 3.8(a) para  $\beta = 0.05$ , à esquerda e ampliação desta trajetória na região em que ela fura a seção de Poincaré, à direita, onde a projeção da trajetória é representada pelas linhas tracejadas; em marrom temos os furos de Poincaré e o ponto quadrado indica a  $CI$  usada.



As Seções de Poincaré já nos fornecem uma primeira visão do comportamento do sistema dinâmico, revelando informações essenciais ao transporte e permitindo a identificação da presença de estruturas dinâmicas como Toros, Ilhas de Estabilidade e regiões de Mar Caótico e sua evolução, quando os parâmetros  $\beta$  e  $C_{J\beta}$  são alterados. Outra importante ferramenta para auxiliar no entendimento da dinâmica espacial são as Bacias de Escape.

### 3.2 Bacias de Escape

A construção de Bacias de Escape baseia-se na importante tarefa de determinar o comportamento da trajetória de uma espaçonave ao longo de sua evolução, para uma dada condição inicial em uma região delimitada do espaço de fase, denominada Região de Escape ou Região de Espalhamento.

Quando o nível de energia de um sistema Hamiltoniano é inferior a energia de escape, todas as trajetórias permanecem confinadas na região de espalhamento (ASSIS, 2014). No entanto, quando seu nível de energia é maior ou igual a um certo valor crítico, denominado energia de escape, o sistema Hamiltoniano é aberto e as trajetórias podem ou não escapar. Afinal, sabe-se que para uma espaçonave escapar de uma certa região, não basta possuir uma energia superior a energia de escape, uma vez que, existem órbitas periódicas estáveis que possuem energia muito maior que a necessária para escapar e órbitas com condições iniciais próximas a estas,

não escapam. Além disso, o tempo de escape é muito importante a ser considerado (CONTOPOULOS, 1990).

Em sistemas Hamiltonianos não existem atratores (ASSIS, 2014), dessa forma, não definimos bacias de atração quando os parâmetros de inclinação da vela solar,  $\alpha$  e  $\delta$ , são nulos.

Para a construção das bacias de escape, definimos um conjunto de condições iniciais de posição e fixamos um valor de  $C_{J\beta}$  que é utilizado para calcular a velocidade inicial em cada localização de partida, de acordo com a Equação 2.84, dessa forma, escolhemos condições iniciais com um mesmo nível de energia inicial, nos casos em que essa quantidade é preservada pela dinâmica. Para os casos em que o sistema não admite uma integral primeira, adotamos este critério de cálculo da velocidade simplesmente para estabelecer uma forma de definir o conjunto de condições iniciais. De forma semelhante às seções de Poincaré, novamente, uma escolha é feita em relação ao sentido da velocidade inicial e as equações de movimento são integradas no sistema bidimensional. Utilizamos um conjunto de  $1000 \times 1000$  condições iniciais distribuídas no plano  $x - y$ , sendo  $x_{L_2} \leq x \leq x_{L_1}$  e  $y_i \leq y \leq y_f$ , em que  $y_i$  e  $y_f$  variam a cada caso estudado, propomos  $\dot{x} = \dot{z} = z = 0$  e  $\dot{y} \leq 0$  e mantivemos  $t_f = 200$  unidades para o tempo final de evolução das trajetórias. Na sequência, o algoritmo de dupla precisão inicia o cálculo da evolução da trajetória para cada uma das condições iniciais, utilizando novamente o integrador numérico Runge-Kutta (subrotina *RKF78*) com controle de passo de tempo automático e com um controle de passo adicional quando a trajetória se aproxima ou se afasta dos primários, de forma a evitar problemas de precisão numérica com a ocorrência de aproximações de trajetórias de um dos primários, sem aumentar o custo computacional em virtude de um passo de tempo muito pequeno, quando desnecessário.

A integração de cada órbita é interrompida nos seguintes casos: (i) se ocorre uma variação de  $C_{J\beta}$  maior que a tolerância estipulada ( $tol = 10^{-10}$ ); (ii) se o tempo final de evolução é atingido; (iii) se há colisão com algum dos primários, isto é, se a trajetória da espaçonave atinge uma distância menor ou igual ao raio físico médio dos primários; (iv) se a trajetória escapa através de um dos canais de transporte em  $SL_1$  e  $SL_2$ .

Os critérios de escape por  $SL_1$  e  $SL_2$  são definidos da seguinte forma (ASSIS, 2014; ASSIS; TERRA, 2014).

- Escape por  $SL_1$ :  $x > (x_{L_1} + \delta_1)$  e  $r_1 \leq |x_{L_3} - x_{P_1}|$  ;

- Escape por  $SL_2$ :  $y > |y_{L_5}|$  ou  $x < (x_{L_2} - \delta_2)$  ou  $x > (x_{L_1} + \delta_1)$  e  $r_1 > |x_{L_3} - x_{P_1}|$  ;

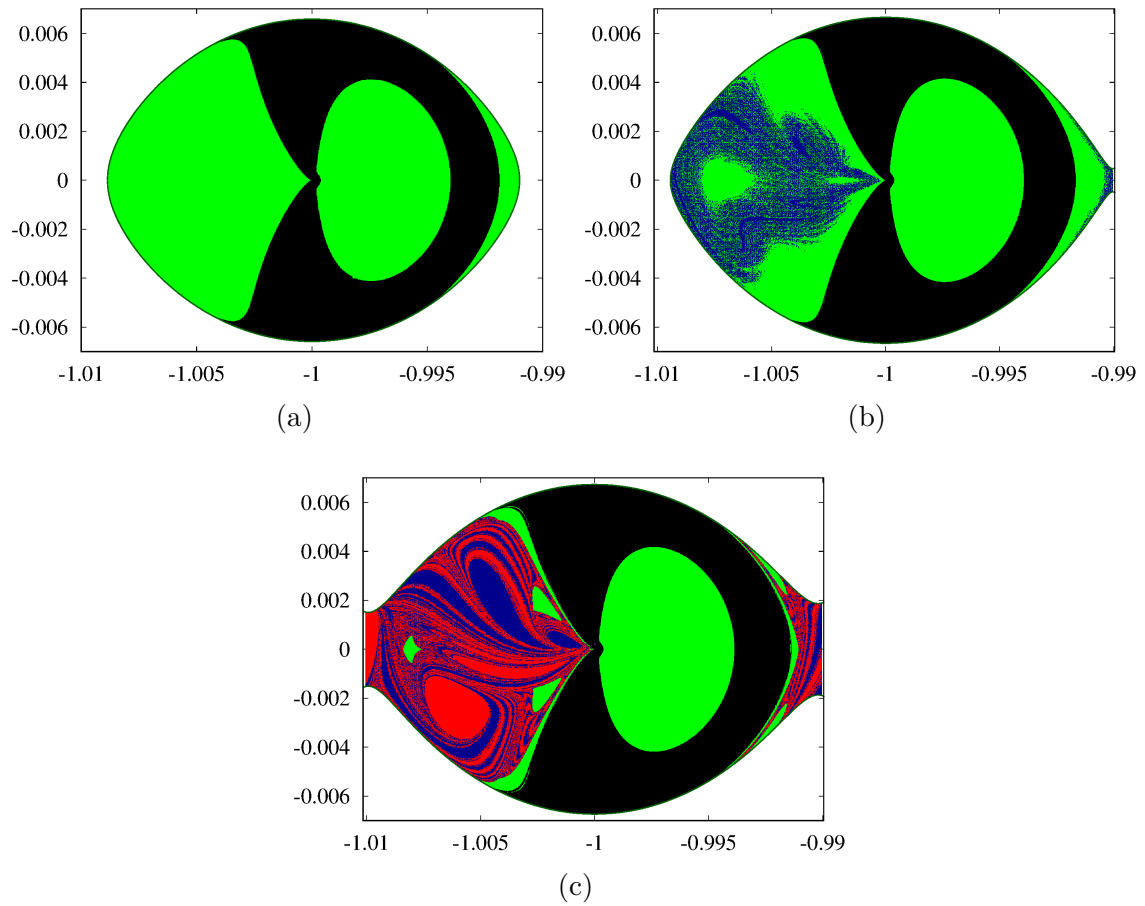
onde  $x_{P_1}$  e  $x_{P_2}$  é localização dos primários no eixo  $x$  e  $\delta_1 = 0.005$  e  $\delta_2 = 0.005$  são tolerâncias estipuladas para evitar que órbitas de Lyapunov ou trajetórias não-trânsito similares, sejam classificadas incorretamente como trajetórias de escape.

As bacias de condições iniciais que colidem com um dos primários antes de atingirem o tempo final de evolução, designadas por bacias colisionais, são marcadas na cor preta, as que escapam por  $SL_1$ , na cor azul, as que escapam por  $SL_2$ , na cor vermelha e as que atingem o tempo final de evolução sem que nada ocorra, denominadas bacias limitadas, são marcadas na cor verde claro. As linhas em verde escuro em seu entorno, são as *CVZs*.

Partimos novamente do caso  $\beta = 0$ , em que ainda não se tem o efeito da pressão de radiação agindo no sistema. Para este caso, obtemos as seguintes bacias de escape de condições iniciais das Figuras 3.14, nas quais, (a) corresponde a um valor de  $C_J > C_{J_1}$ , ou seja, todos os canais de transporte estão fechados, (b) está associada a  $C_{J_1} > C_J > C_{J_2}$ , onde o canal de transporte em  $L_1$  já foi aberto e (c) está relacionada a  $C_{J_2} > C_J$ , quando o canal de transporte em  $L_2$  também já foi aberto.

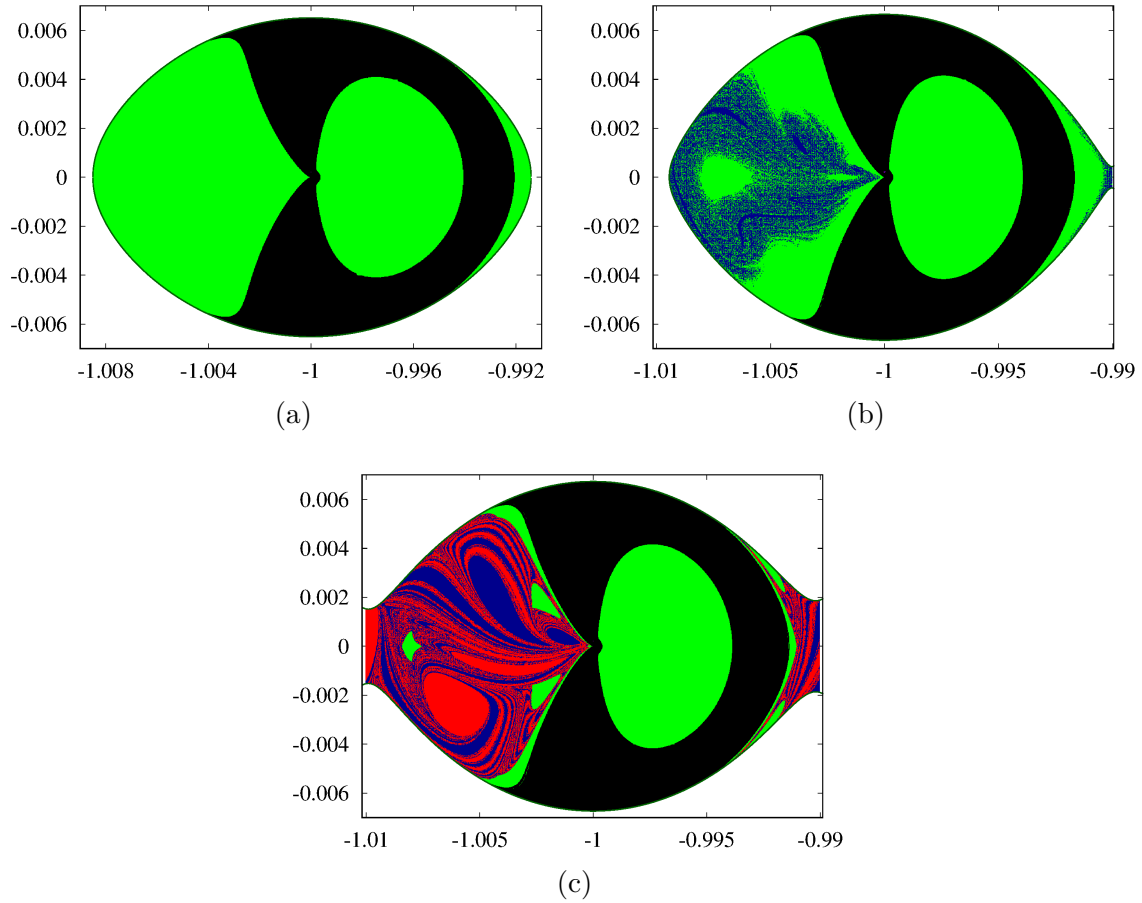
Podemos comparar os resultados das bacias obtidas, com os resultados das seções de Poincaré e observamos que a região oval de condições iniciais limitadas localizadas entre a Terra e  $L_1$ , isto é, que não escaparam e nem colidiram com os primários nos três casos, correspondem a região de órbitas regulares. Em (a) observamos outros dois subconjuntos do conjunto limitado, um deles à esquerda de  $L_1$  e outro maior, contendo Ilhas de Estabilidade, à direita de  $L_2$ . Quando o canal de transporte em  $L_1$  é aberto, em (b), esse conjunto limitado, que está relacionado as Ilhas de Estabilidade, passa a ser rodeado de condições iniciais que escapam por  $L_1$  e quando o canal de transporte em  $L_2$  também é aberto, essa região é dominada por condições que escapam tanto por  $L_1$  quanto por  $L_2$  e ambas se misturam completamente em certas regiões, como nas fronteiras entre uma e outra, temos assim, regiões caóticas.

Figura 3.14 - Bacias de escape no plano  $x - y$  para  $\beta = 0$ . (a) Quando  $C_J > C_{J1}$ , (b) quando  $C_{J1} > C_J > C_{J2}$ , (c) quando  $C_{J2} > C_J$  (ver os valores da Tabela 3.1 para  $I = 1$ ).



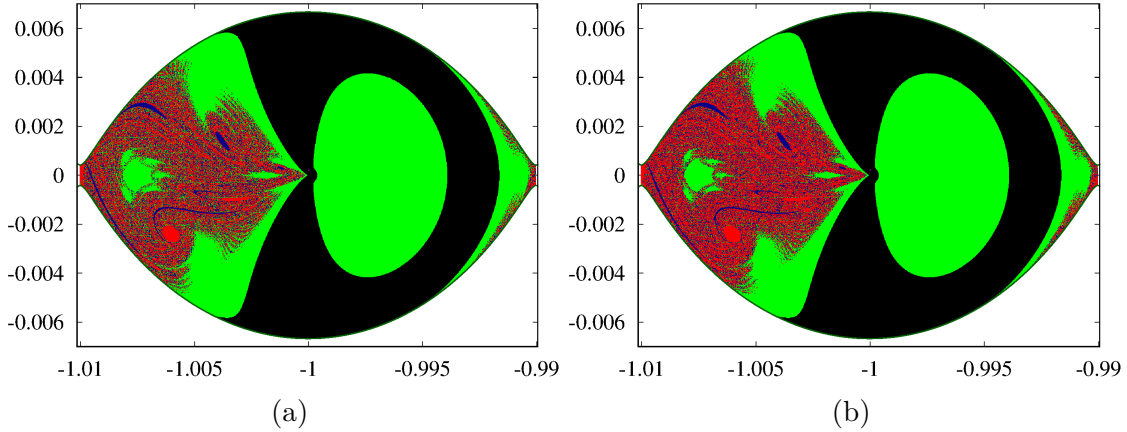
Quando consideramos a vela solar para valores de  $\beta$  muito pequenos, como para  $\beta = 5 \times 10^{-6}$ , mantendo  $\alpha$  e  $\delta$  nulos, observamos o mesmo padrão de comportamento.

Figura 3.15 - Bacias de escape no plano  $x - y$  para  $\beta = 5 \times 10^{-6}$ . (a) Quando  $C_{J\beta} > C_{J1}$ , (b) quando  $C_{J1} > C_{J\beta} > C_{J2}$ , (c) quando  $C_{J2} > C_{J\beta}$  (ver os valores da Tabela 3.1 para  $I = 2$ ).



Para  $\beta \approx 10^{-4}$ , a partir do qual ocorre a inversão na ordem de abertura dos canais de transporte em  $SL_1$  e  $SL_2$ , temos as seguintes bacias de escape para  $C_{J\beta} = 3.000688$ , correspondendo a um valor de  $C_{J\beta}$  próximo ao valor de abertura simultânea de ambos os canais para (a)  $t_f = 200$  e (b)  $t_f = 300$ .

Figura 3.16 - Bacias de escape no plano  $x - y$  para  $\beta = 1.00074 \times 10^{-4}$ , valor em que ocorre a inversão da ordem de abertura dos canais de transporte em  $SL_1$  e  $SL_2$  para  $C_{J\beta} = 3.000688$  em que ambos abrem juntos para (a)  $t_f = 200$  e (b)  $t_f = 300$ .

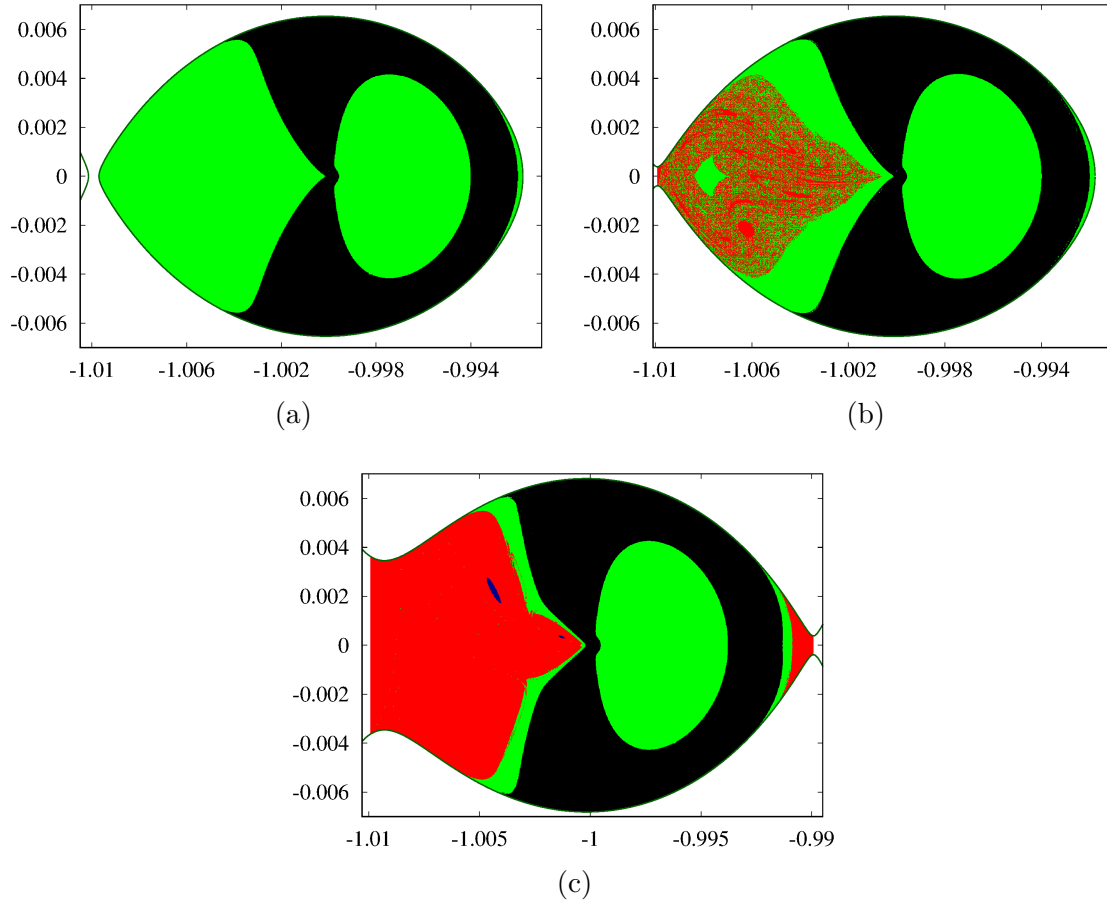


Notamos que nesse caso, as bacias de escape por  $SL_1$  e por  $SL_2$  não possuem mais regiões delimitadas por fronteiras suaves, como observamos anteriormente para  $\beta = 5 \times 10^{-6}$ , mas se misturam completamente, formando assim, uma região caótica em que as possibilidades de escapar por  $SL_1$  ou por  $SL_2$  surgem com uma pequena diferença na posição inicial. Visualmente, não é possível notar diferenças entre as bacias de escape (a) e (b), porém, mais adiante, na Tabela 3.3, uma análise quantitativa é feita e mostra que a quantidade de condições iniciais que escapam aumenta enquanto a bacia limitada reduz, quando  $t_f$  cresce.

Para  $\beta = 10^{-3}$ , observamos na Figura 3.17 (b), condições iniciais que escapam por  $SL_2$ , primeiramente, em comparação com a Figura 3.15. Além disso, para esse valor de  $t_f$ , percebe-se que a fronteira entre as bacias de escape por  $SL_2$  e a limitada são do tipo fractal. Pela análise da seção de Poincaré correspondente, vê-se que essa região de fractalidade de fronteira corresponde a um grande Mar Caótico e portanto à medida que  $t_f$  cresce, mais soluções devem escapar por  $SL_2$  (não testamos qual  $t_f$  corresponde aos valores assintóticos dessas populações). Notamos ainda, que quando o canal de transporte em  $SL_1$  abre, na Figura 3.17 (c), a maior parte das condições iniciais já escaparam por  $SL_2$ , pois a diferença de  $C_{J\beta}$  entre  $SL_1$  e  $SL_2$  cresce, à medida que o valor de  $\beta$  aumenta, conforme já observado anteriormente, na Seção 2.4, portanto, quando o canal de transporte em  $SL_1$  abre, o de  $SL_2$  já está ostensivamente aberto e essa diferença fica mais visível nas figuras que se seguem.

Este comportamento se mantém para valores de  $\beta$  maiores, explorados adiante.

Figura 3.17 - Bacias de escape no plano  $x - y$  para  $\beta = 10^{-3}$ . (a) Quando  $C_{J\beta} > C_{J2}$ , (b) quando  $C_{J2} > C_{J\beta} > C_{J1}$ , (c) quando  $C_{J1} > C_{J\beta}$  (ver os valores da Tabela 3.1 para  $I = 3$ ).



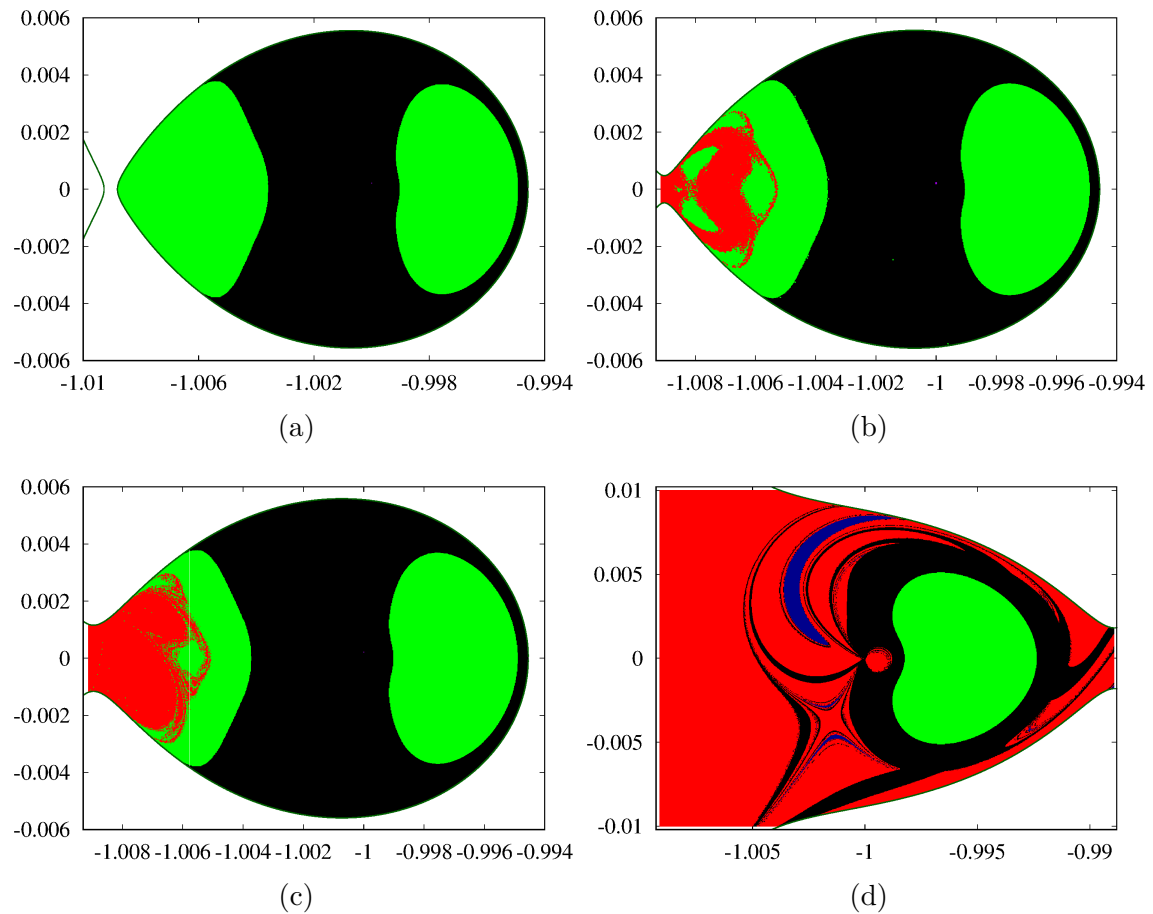
Para  $\beta = 0.01$ , notamos na Figura 3.18 (a) que quando ainda não se tem nenhum canal de transporte aberto, o conjunto de condições iniciais que colidem com o primário, passa a ocupar uma região maior, em relação a observada para  $\beta \leq 10^{-3}$ . Na figura seguinte, para  $\beta = 0.03$ , percebemos que esse conjunto colisional cresce ainda mais, abrangendo quase todo o conjunto de condições iniciais, para  $\beta = 0.05$ , portanto, é proporcional ao valor de  $\beta$ .

Observamos também, na Figura 3.18 (d), que assim que o canal de transporte em  $SL_1$  é aberto e a região no entorno mais próxima da Terra, que está posicionada em



$x = -1 + \mu$ , é dominada por condições iniciais que escapam por  $SL_2$ , o que favorece missões espaciais com destinos ao exterior da órbita terrestre.

Figura 3.18 - Bacias de escape no plano  $x - y$  para  $\beta = 0.01$ . (a) Quando  $C_{J\beta} > C_{J2}$ , (b) e (c) quando  $C_{J2} > C_{J\beta} > C_{J1}$ , (d) quando  $C_{J1} > C_{J\beta}$  (ver os valores da Tabela 3.1 para  $I = 4$ ).



Com o crescimento do conjunto colisional, para valores de  $\beta$  maiores, temos a consequente diminuição do conjunto de condições iniciais limitadas.

Para  $\beta = 0.03$ , na Figura 3.19 (d), notamos que quando o canal de transporte em  $SL_1$  abre, todas as condições iniciais em mar caótico que não são colisionais já escaparam por  $SL_2$ , além disso, o conjunto de condições limitadas é reduzido, em comparação a mesma situação apresentada para  $\beta = 0.01$ . Também se observa que a região do espaço de movimento permitido passa a ser menor, para as Figuras 3.19

(a) e (b), quando os canais de transporte ainda estão fechados e quando inicia sua primeira abertura.

Para  $\beta = 0.05$ , na sequência, o mesmo comportamento se repete, de forma mais intensa.

Figura 3.19 - Bacias de escape no plano  $x - y$  para  $\beta = 0.03$ . (a) Quando  $C_{J\beta} > C_{J2}$ , (b) e (c) quando  $C_{J2} > C_{J\beta} > C_{J1}$ , (d) quando  $C_{J1} > C_{J\beta}$  (ver os valores da Tabela 3.1 para  $I = 5$ ).

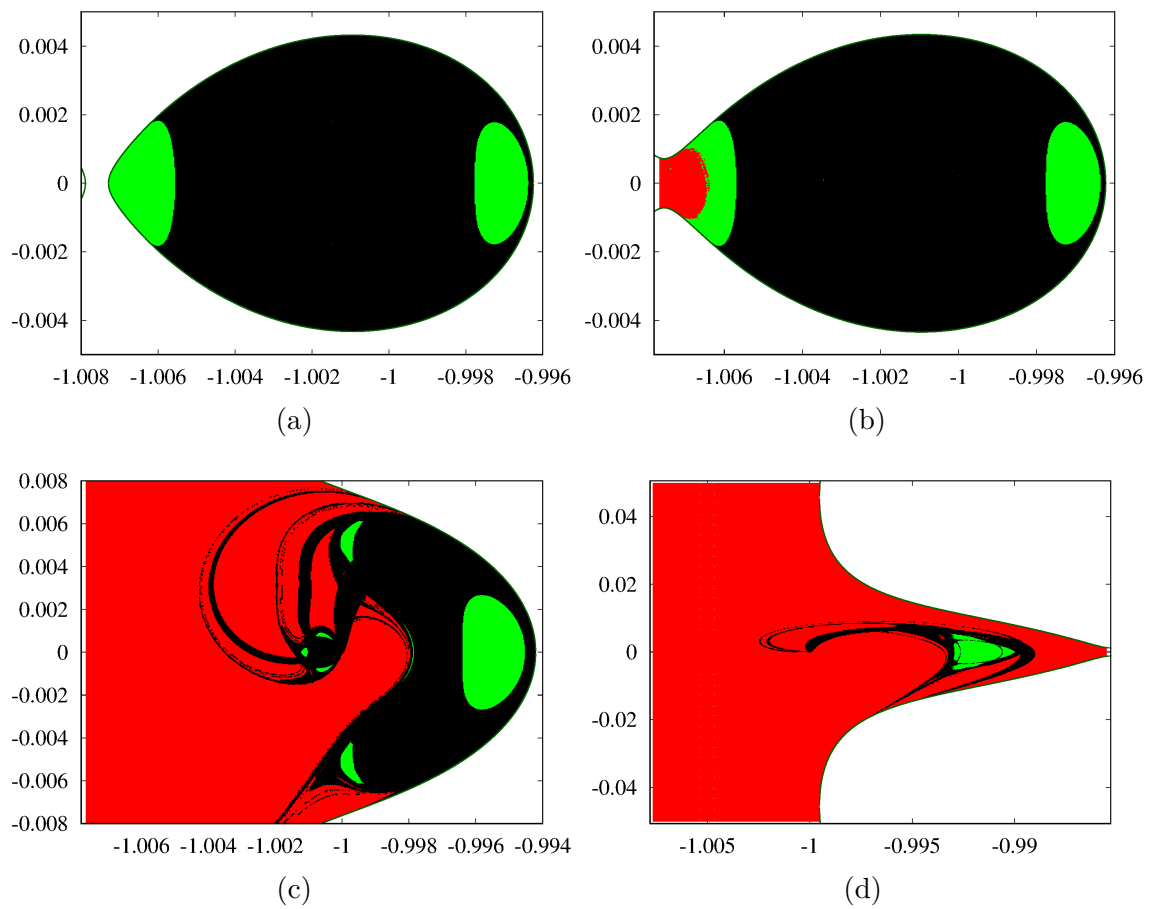
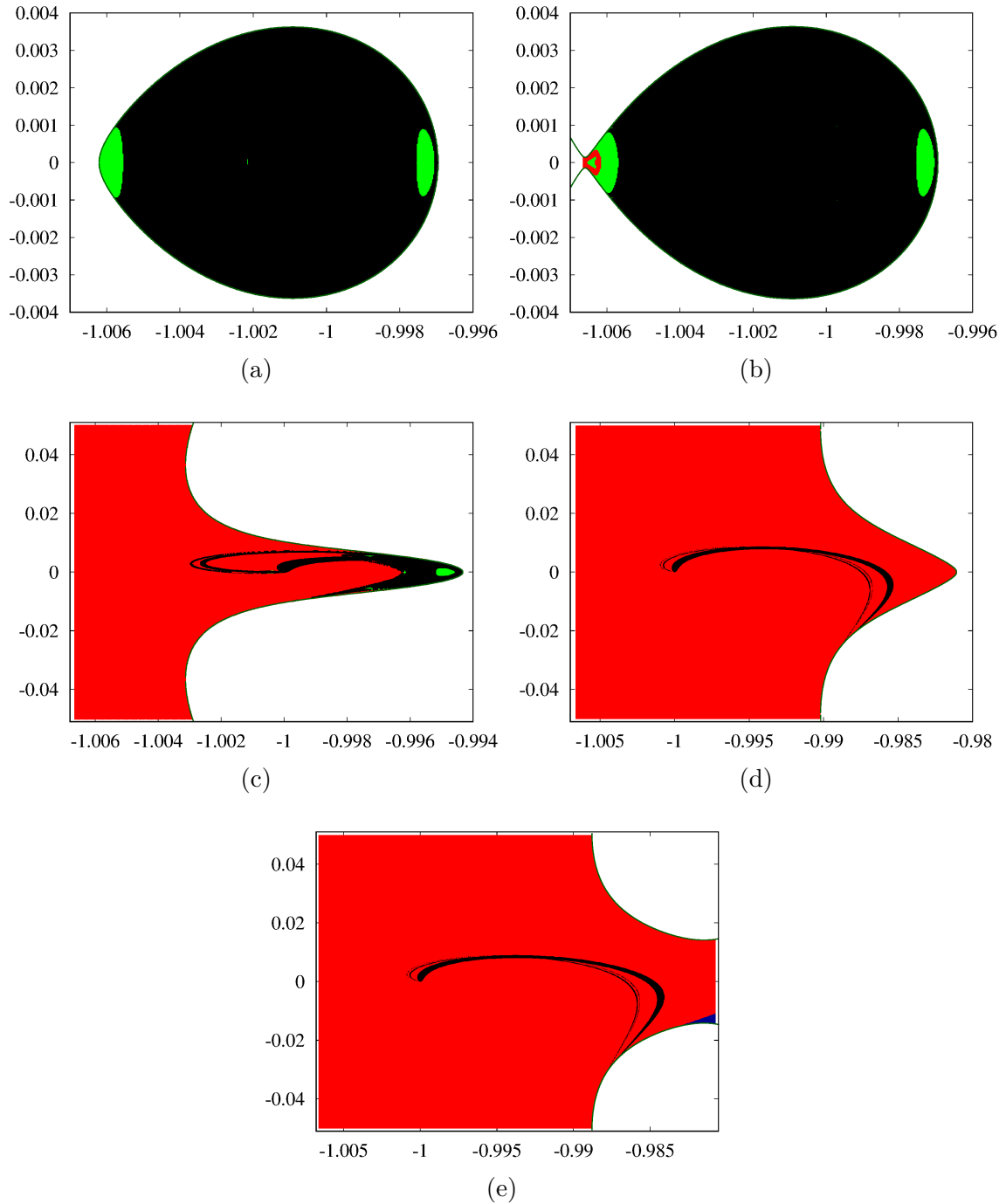


Figura 3.20 - Bacias de escape no plano  $x - y$  para  $\beta = 0.05$ . (a) Quando  $C_{J\beta} > C_{J2}$ , (b), (c) e (d) quando  $C_{J2} > C_{J\beta} > C_{J1}$ , (e) quando  $C_{J1} > C_{J\beta}$  (ver os valores da Tabela 3.1 para  $I = 6$ ).



Com o propósito de se obter uma análise quantitativa dessas bacias, foi calculada a porcentagem de  $CI$ s pertencentes a cada bacia e estas são apresentadas na Ta-

bela 3.3, onde  $C_{J\beta_0}$  corresponde a um valor de  $C_{J\beta}$  para o qual todos os canais de transporte estão fechados,  $C_{J\beta_1}$  quando o primeiro canal de transporte foi aberto e  $C_{J\beta_2}$  quando o segundo canal de transporte foi aberto. Subscritos extras aparecem quando mais de uma bacia de escape foi obtida na mesma situação, com diferenças menores de  $C_{J\beta}$  e  $C_{J\beta}^*$  indica um tempo final de evolução maior,  $t_f = 300$ .

Tabela 3.3 - Quantidade de condições iniciais que permanece na bacia limitada, que colide com um dos primários e que escapa por  $SL_1$  ou  $SL_2$ , nas bacias de escape com  $\alpha$  e  $\delta$  nulos, para  $t_f = 200$  e diversos valores de  $\beta$  e  $C_{J\beta}$ .  $C_{J\beta}^*$  refere-se a  $t_f = 300$ .

$\beta$	$C_{J\beta}$	% limitada	% colisional	% $SL_1$	% $SL_2$
0	$C_{J\beta_0}$	60.9	39.1	—	—
	$C_{J\beta_1}$	51.2	39.0	9.8	—
	$C_{J\beta_2}$	24.5	39.1	22.4	14.0
$5 \times 10^{-6}$	$C_{J\beta_0}$	61.0	39.0	—	—
	$C_{J\beta_1}$	52.1	39.0	8.9	—
	$C_{J\beta_2}$	24.5	39.1	22.2	14.2
$1 \times 10^{-4}$	$C_{J\beta_2}$	47.4	38.7	6.7	7.2
	$C_{J\beta_2}^*$	43.6	38.8	8.5	9.1
$1 \times 10^{-3}$	$C_{J\beta_0}$	59.8	40.2	—	—
	$C_{J\beta_1}$	50.8	40.1	—	9.1
	$C_{J\beta_2}$	25.6	40.6	0.1	33.7
0.01	$C_{J\beta_0}$	44.1	55.9	—	—
	$C_{J\beta_{1_1}}$	39.0	55.8	—	5.2
	$C_{J\beta_{1_2}}$	32.2	55.7	—	12.1
	$C_{J\beta_2}$	21.5	22.6	2.4	53.5
0.03	$C_{J\beta_0}$	14.7	85.3	—	—
	$C_{J\beta_{1_1}}$	11.7	84.5	—	3.8
	$C_{J\beta_{1_2}}$	6.2	27.2	—	66.6
	$C_{J\beta_2}$	7.9	7.7	0	84.4
0.05	$C_{J\beta_0}$	3.7	96.3	—	—
	$C_{J\beta_{1_1}}$	3.3	96.2	—	0.5
	$C_{J\beta_{1_2}}$	0.5	4.9	—	94.6
	$C_{J\beta_{1_3}}$	0	1.4	—	98.6
	$C_{J\beta_2}$	0	1.4	0.2	98.4

Nota-se que para  $\beta$  nulo, o conjunto colisional mantém o mesmo percentual de soluções, enquanto o conjunto limitado cede soluções às bacias de escape por  $L_1$  e

por  $L_2$ , à medida que  $C_J$  diminui. Para  $\beta = 5 \times 10^{-6}$ , resultados muito parecidos são obtidos.

Para  $\beta \approx 10^{-4}$ , tem-se que as contagens das populações das bacias de escape por  $SL_1$  e  $SL_2$  são muito parecidas e que, à medida que o tempo final aumenta, as populações destes conjuntos de escape são incrementadas, com o decréscimo do conjunto limitado. Porém dado a formação de uma extensa sela caótica, longos tempos são necessários para se atingir estados assintóticos.

Para maiores valores de  $\beta$ , a bacia de escape por  $SL_2$  apresenta crescimentos acen- tuados com o decréscimo de  $C_{J\beta}$ , enquanto a bacia de escape por  $SL_1$  apresenta populações muito pequenas. Já o conjunto colisional tem crescimento com beta, mas à medida que os canais de transporte passam a ser disponíveis estes diminuem consideravelmente.

Portanto, certifica-se que, de fato, a bacia limitada diminui drasticamente à medida que a bacia colisional aumenta, quando ainda não há canais de transporte abertos, conforme  $\beta$  cresce. Após a inversão da ordem de abertura dos canais de transporte, em  $\beta \approx 10^{-4}$ , quando o segundo canal de transporte é aberto, geralmente a bacia limitada reduz ainda mais e a bacia colisional também fica menor, à medida que  $\beta$  torna-se elevado e embora ambos os canais de transporte estejam abertos, majoritariamente, apenas escapes por  $SL_2$  são observados.

Na sequência, verificamos a variação do tempo de escape e colisão para as corres- pondentes bacias de escape apresentadas nas Figuras 3.14 a 3.20.

Nas Figuras 3.21, notamos pouca diferença entre (a), (b) e (d), isto é, entre os tempos de colisão das bacias para o caso em que ainda não se tem o efeito da pressão de radiação, ou seja, para  $\beta = 0$ , para os casos em que ainda não há possibilidade de escape, quando o primeiro canal de transporte em  $L_1$  é aberto e o canal em  $L_2$  também se abre, mas o tempo de escape por  $L_1$  é maior quando o canal de transporte em  $L_2$  ainda está fechado, ou seja, o transporte por  $L_1$  é mais lento para um valor de  $C_J$  mais próximo de sua abertura. No momento em que ambos os canais de transporte são abertos, os escapes por  $L_1$  ou  $L_2$  ocorrem em proporções semelhantes, ao longo do tempo. Observamos ainda, que as condições iniciais que demoram mais tempo para colidir ou escapar geralmente estão localizadas nas fronteiras entre os diferentes conjuntos.

Figura 3.21 - (a) tempo de colisão para a bacia a) da Figura 3.14, (b) e (c) tempos de colisão e escape por  $L_1$  respectivamente, para a bacia (b) da Figura 3.14, (d), (e) e (f) tempos de colisão, escape por  $L_1$  e escape por  $L_2$  para a bacia (c) da Figura 3.14, para  $\beta = \alpha = \delta = 0$ .

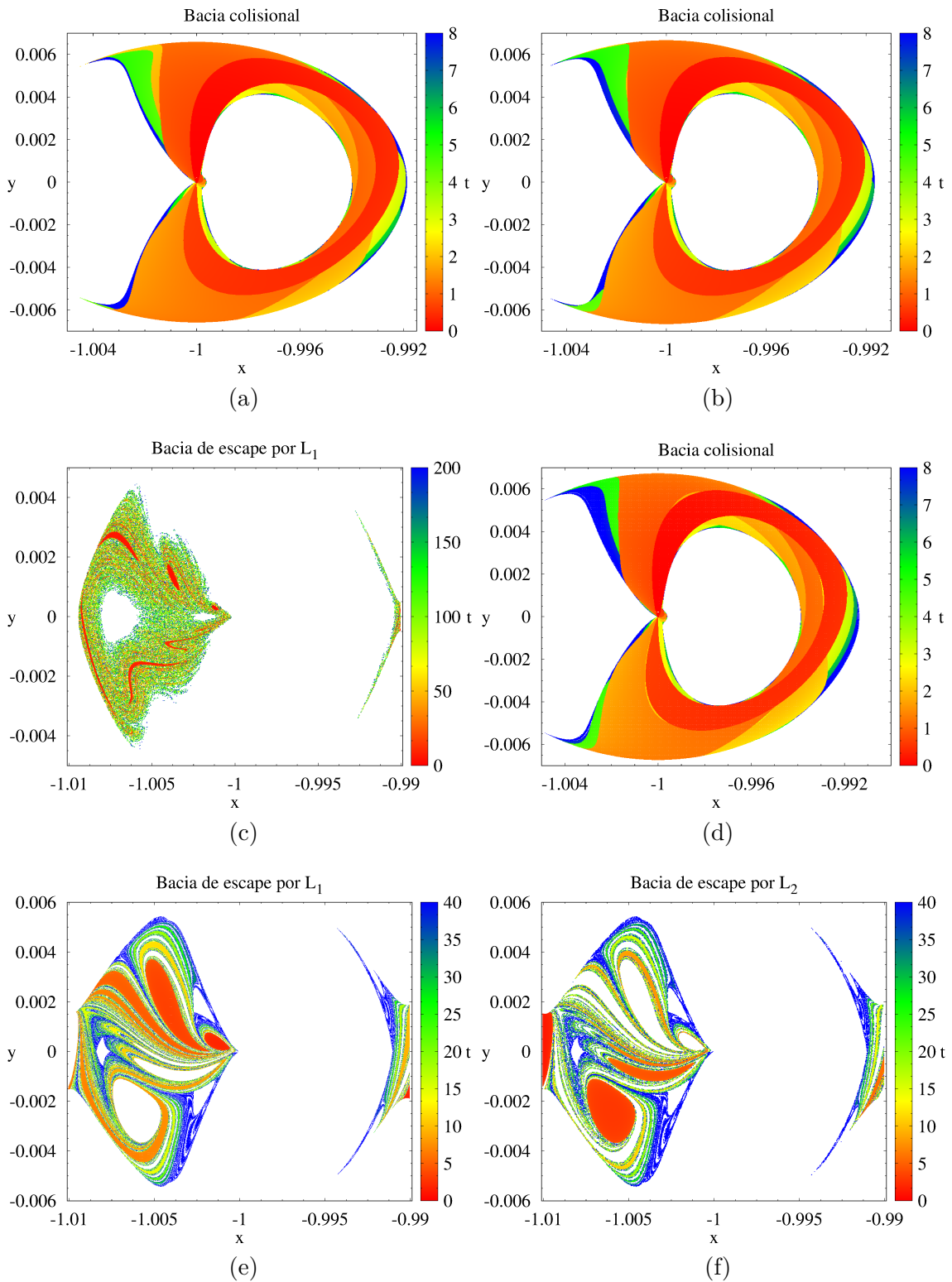
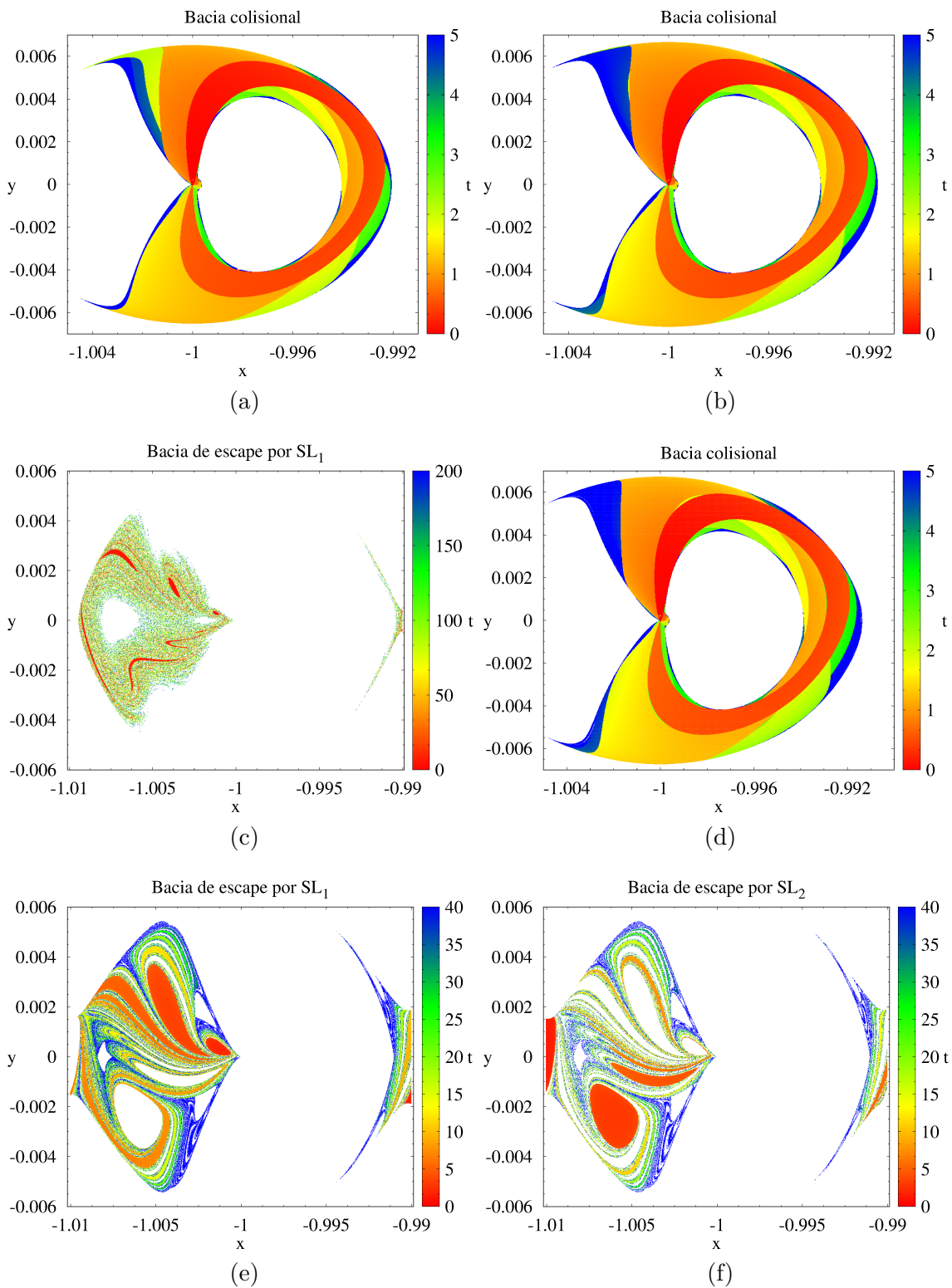


Figura 3.22 - (a) tempo de colisão para a bacia (a) da Figura 3.15, (b) e (c) tempos de colisão e escape por  $SL_1$  respectivamente, para a bacia (b) da Figura 3.15, (c), (d) e (e) tempos de colisão, escape por  $SL_1$  e escape por  $SL_2$  para a bacia (c) da Figura 3.15, para  $\beta = 5 \times 10^{-6}$  e  $\alpha = \delta = 0$ .



Sendo assim, as análises de tempo de escape para  $\beta$  nulo revelam que:

- (i) O padrão de tempo de colisão não depende fortemente de  $C_J$  e que tempo máximo de colisão não excede 8 unidades adimensionais de tempo ( $\approx 1.27$  anos terrestres).
- (ii) A bacia colisional para o Sistema Sol-Terra não ocorre na região de grande Mar Caótico localizado a esquerda da Terra nas respectivas seções de Poincaré  $\Sigma$ .
- (iii) Os tempos de escape são elevados próximos a abertura do primeiro canal de transporte a estar disponível.
- (iv) Os tempos de escape delineiam cortes de Poincaré da variedade estável da órbita de Lyapunov planar dos respectivos pontos Lagrangeanos, sendo que tempos mais curtos estão associados aos primeiros cortes, enquanto tempos maiores estão associados a quebra dessas variedades devido a cruzamentos hétero ou homoclínicos, e portanto a uma sela caótica do sistema dinâmico.

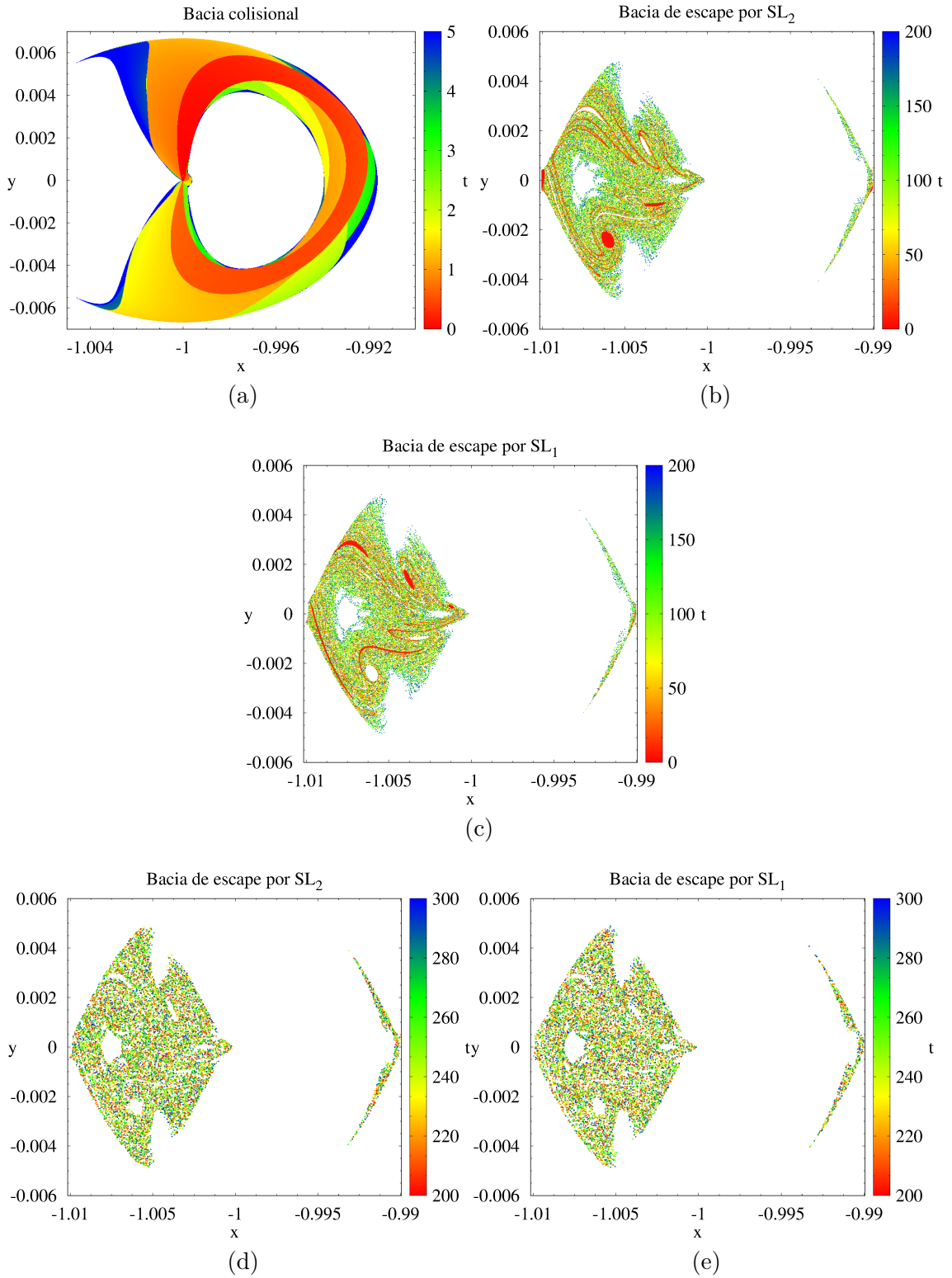
Estas observações são válidas para pequenos valores de  $\beta$  (menores que  $10^{-3}$ ) e são consistentes com o que foi observado por Assis (2014) e Assis; Terra (2015).

Logo, ao introduzirmos a vela solar para valores de  $\beta$  ainda pequenos, como  $\beta = 5 \times 10^{-6}$ , a situação é similar a  $\beta$  nulo (ver Figuras 3.22).

Para  $\beta \approx 10^{-4}$ , a partir do qual ocorre a inversão da ordem de abertura dos canais de transporte em  $SL_1$  e  $SL_2$ , quando ambos os canais de transporte abrem juntos e as condições iniciais que escapam por  $SL_1$  ou  $SL_2$  se misturam, os tempos de escapes variam muito, conforme se observa nas Figuras 3.23. Se adotamos um valor de  $t_f$  maior, observa-se o surgimento de novas  $CIs$  que escapam por ambos os canais de transporte, portanto, nesse caso os escapes ocorrem de forma muito lenta.



Figura 3.23 - (a), (b) e (c) tempos de colisão, escape por  $SL_2$  e escape por  $SL_1$  para a bacia da Figura 3.16 (a), com  $t_f = 200$  e (e) e (f) escape por  $SL_2$  e escape por  $SL_1$  para a bacia da Figura 3.16 (b), com  $200 \leq t_f \leq 300$ , para  $\beta = 1.00074 \times 10^{-4}$  e  $\alpha = \delta = 0$ .



Para  $\beta = 10^{-3}$  lembramos que a inversão da ordem de abertura dos canais de transporte já ocorreu, mas observamos novamente pouca diferença de tempo de colisão para os diversos valores de  $C_{J\beta}$  nas Figuras 3.24. Quando o primeiro canal de transporte se abre (agora em  $SL_2$ ), o escape se dá de forma mais lenta do que quando o segundo já está também aberto e conforme já observado, o conjunto de condições iniciais que escapam por  $SL_1$  é reduzido a medida que  $\beta$  cresce.

Observa-se ainda, que a partir de  $\beta = 10^{-3}$  os escapes passam a ocorrer de forma muito rápida, em comparação com o caso em que não se tem o efeito da pressão de radiação e partir de  $\beta = 0.01$ , além de os conjuntos colisionais serem maiores quando os canais de transporte ainda estão fechados ou no início de sua primeira abertura, o que já verificamos, as condições iniciais que demoram mais tempo para colidir não mais se limitam apenas as regiões de fronteira.

Percebe-se que a análise de tempos de escape e colisão para  $\beta = 0.01$  revela informações sobre estruturas no espaço de fases que as seções de Poincaré e as bacias de escape não apresentam. Não está no escopo deste trabalho, mas futuramente seria interessante investigar as estruturas que as Figuras 3.25 (d), (e) e (f) evidenciam.

Figura 3.24 - (a) tempo de colisão para a bacia (a) da Figura 3.17, (b) e (c) tempos de colisão e escape por  $SL_2$  respectivamente, para a bacia (b) da Figura 3.17, (c), (d) e (e) tempos de colisão, escape por  $SL_1$  e escape por  $SL_2$  para a bacia (c) da Figura 3.17, para  $\beta = 10^{-3}$  e  $\alpha = \delta = 0$ .

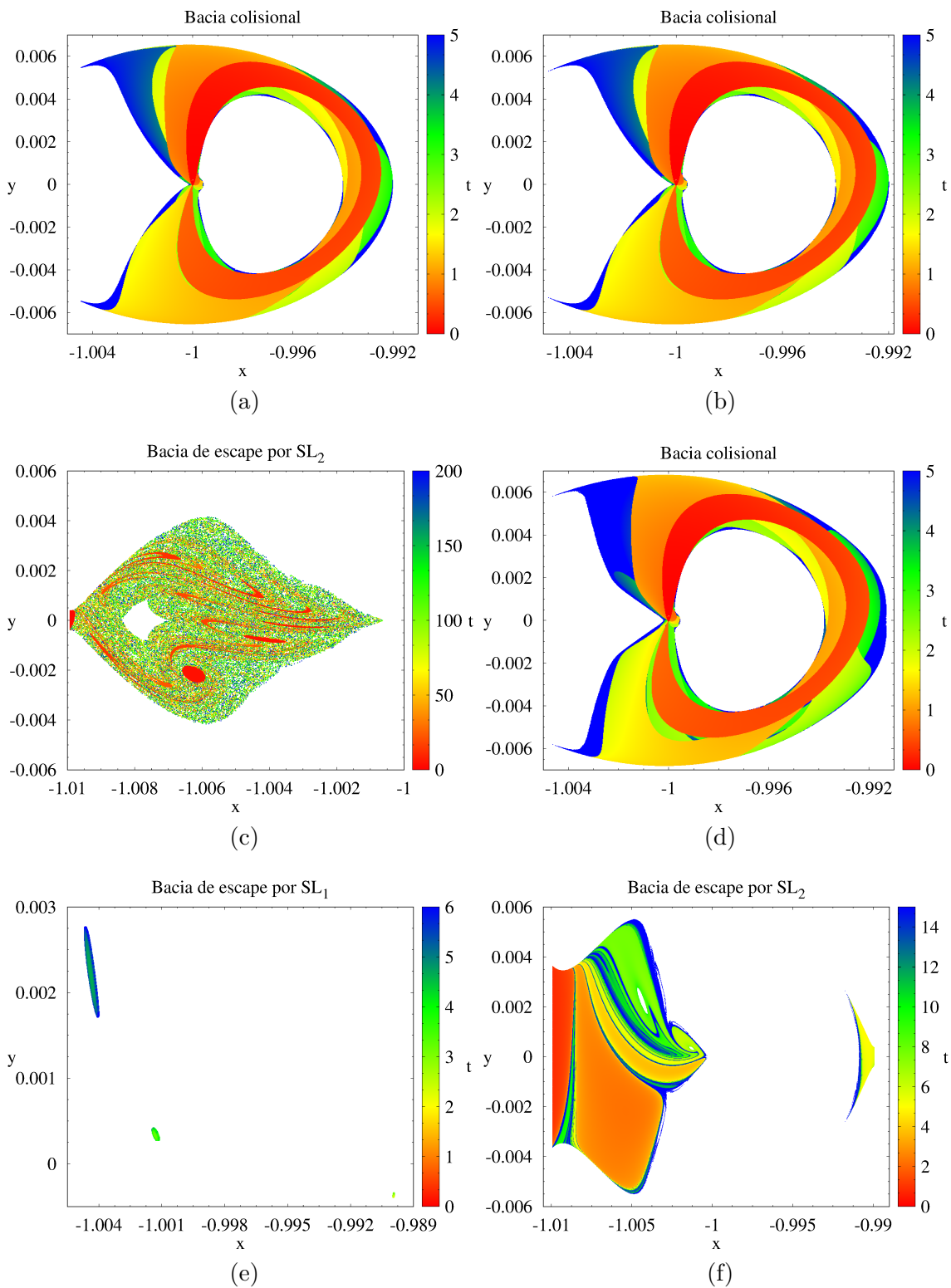


Figura 3.25 - (a) tempo de colisão para a bacia (a) da Figura 3.18, (b) e (c) tempos de colisão e escape por  $SL_2$  respectivamente, para a bacia (b) da Figura 3.18, (c), (d) e (e) tempos de colisão, escape por  $SL_1$  e escape por  $SL_2$  para a bacia (d) da Figura 3.18, para  $\beta = 0.01$  e  $\alpha = \delta = 0$ .

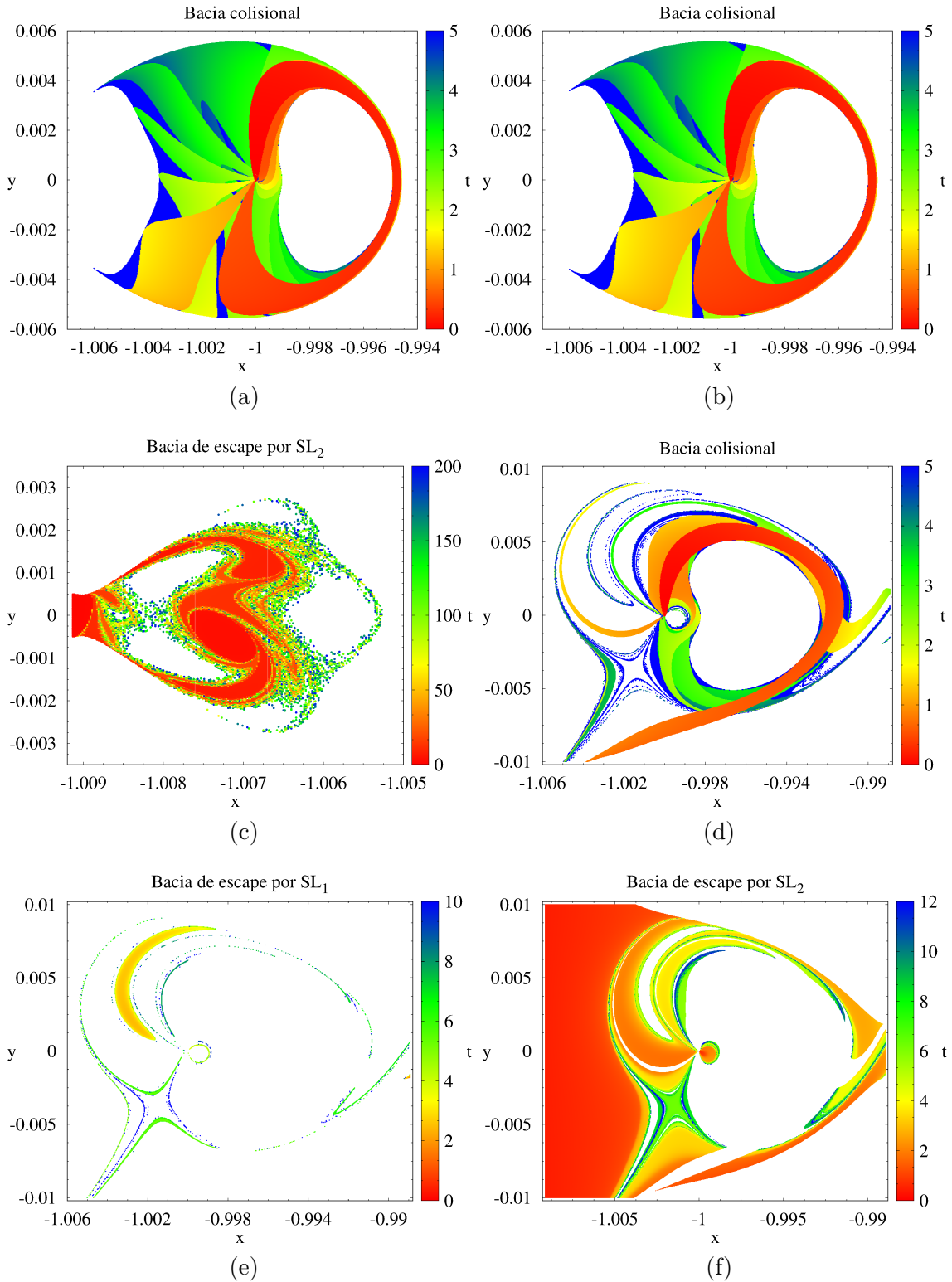


Figura 3.26 - (a) tempo de colisão para a bacia (a) da Figura 3.19, (b) e (c) tempos de colisão e escape por  $SL_2$  respectivamente, para a bacia (c) da Figura 3.19, (c), (d) e (e) tempos de colisão e escape por  $SL_2$  para a bacia (d) da Figura 3.19, para  $\beta = 0.03$  e  $\alpha = \delta = 0$ .

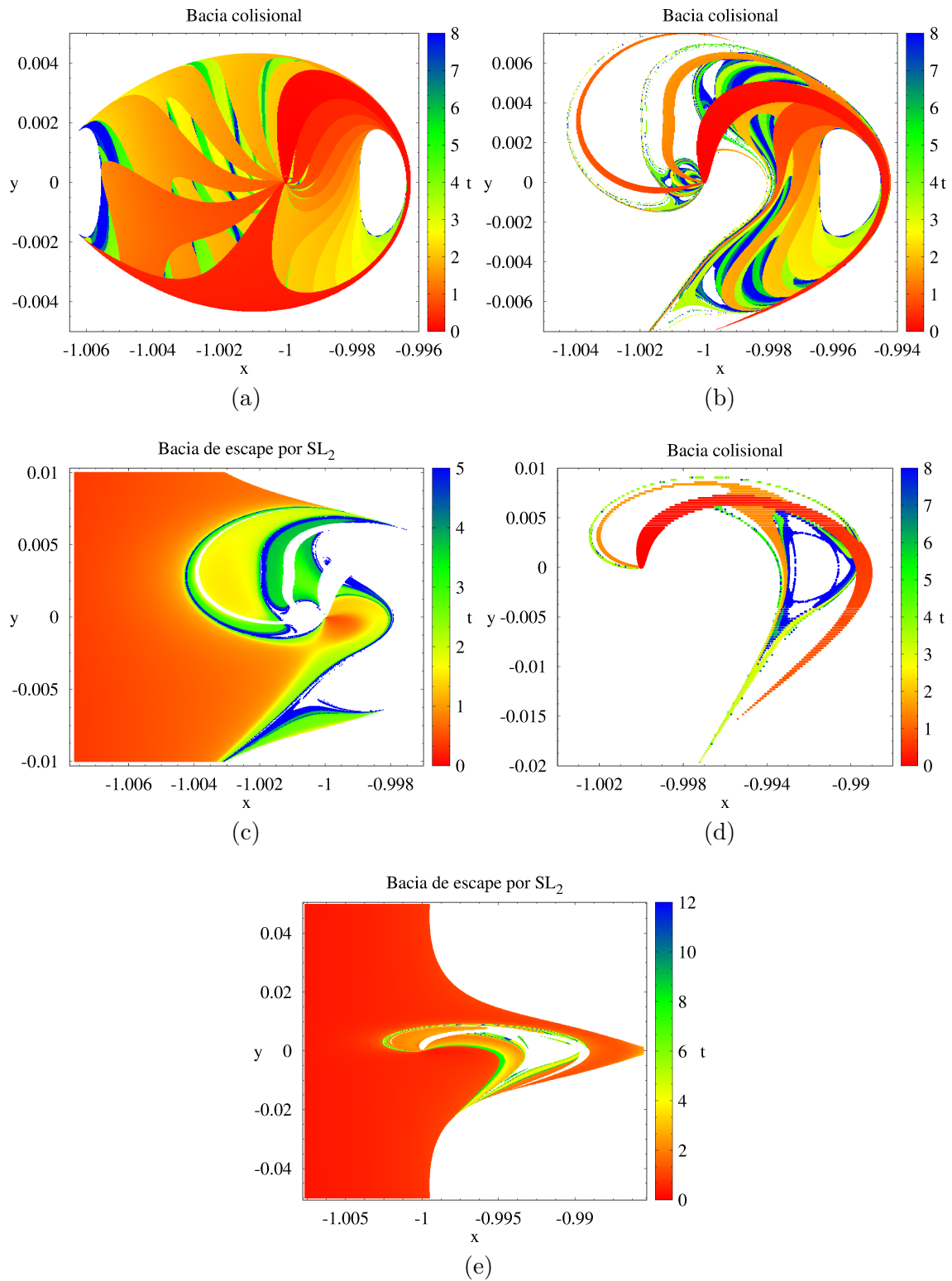
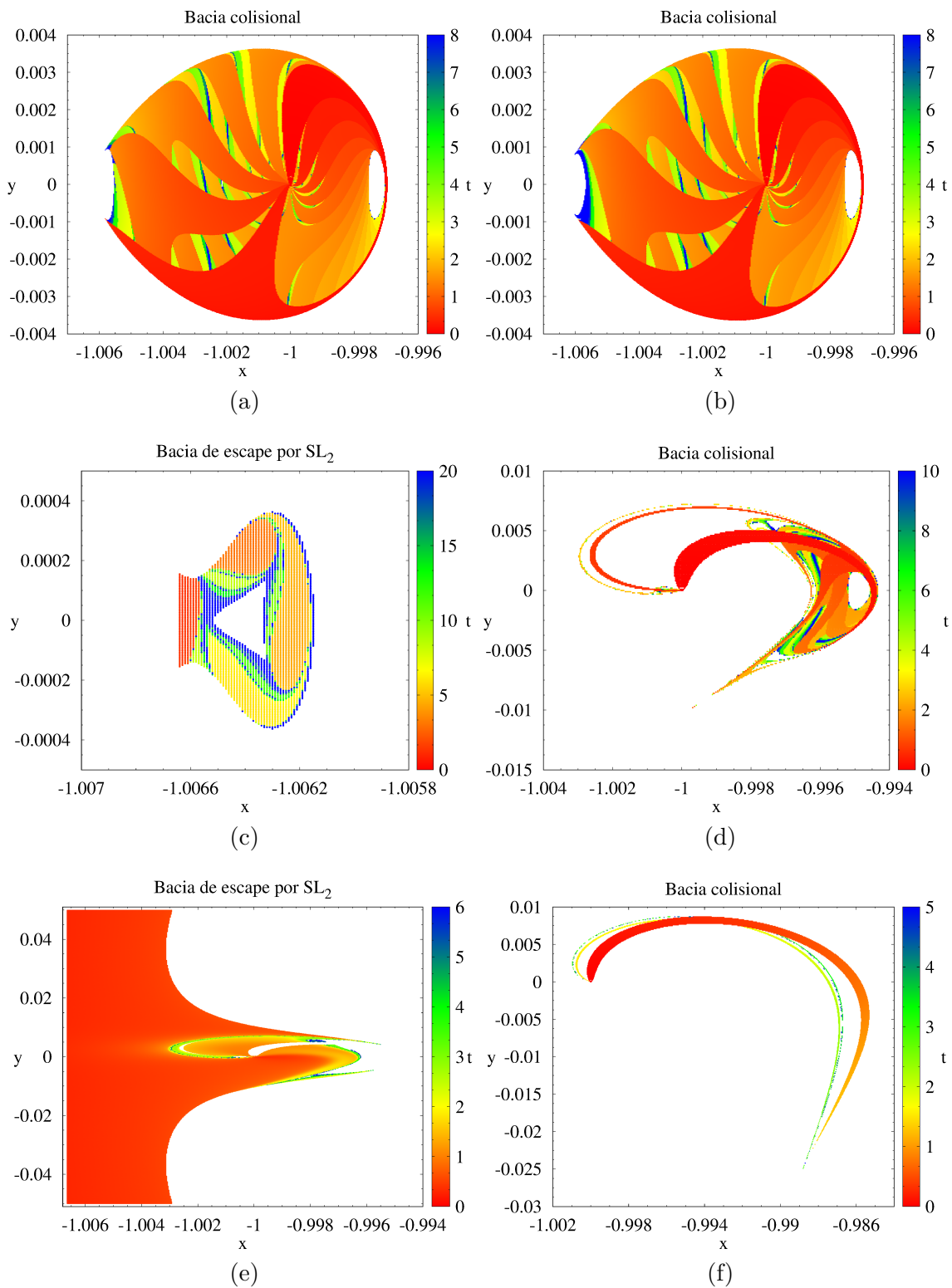
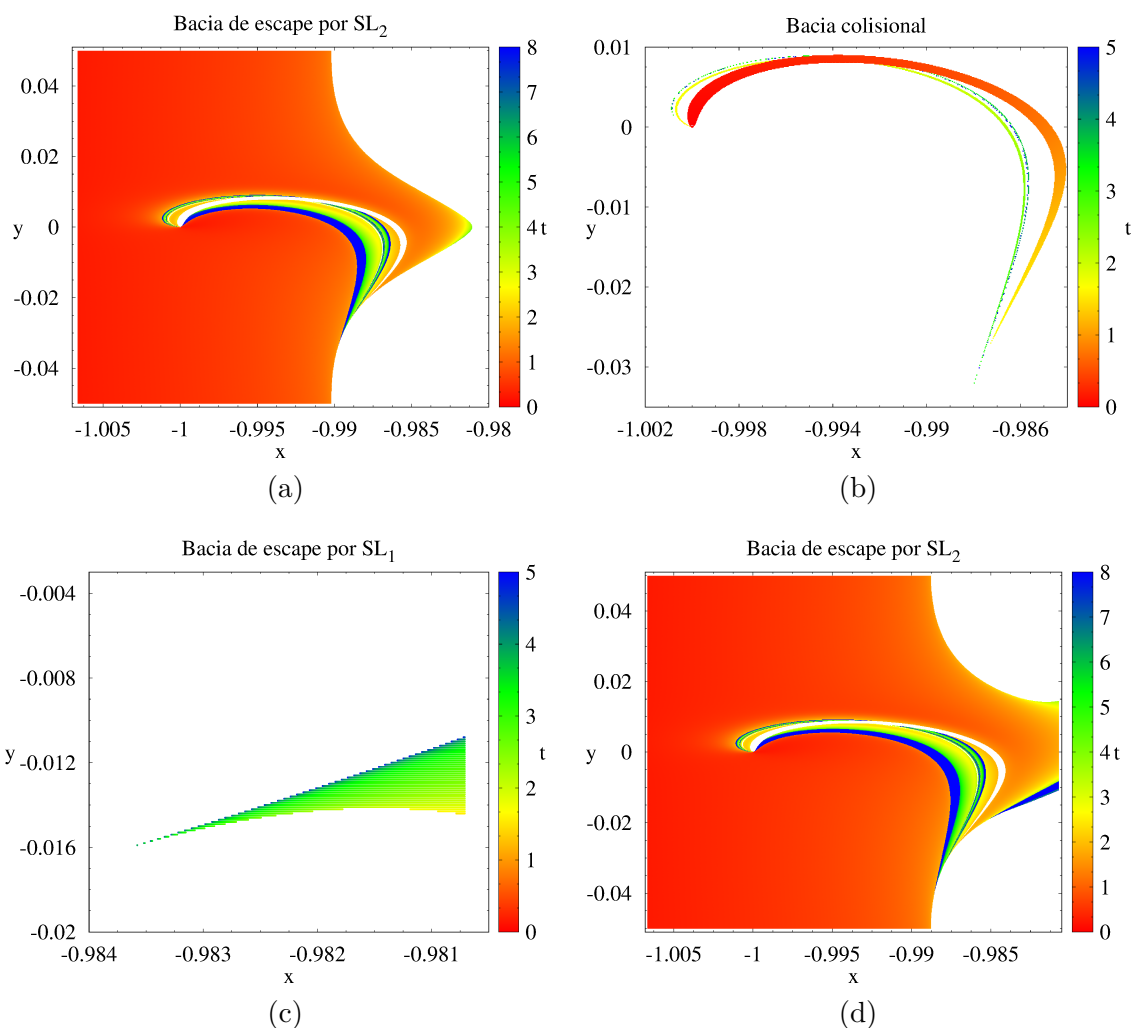


Figura 3.27 - (a) tempo de colisão para a bacia (a) da Figura 3.20, (b) e (c), (d) e (e), (f) e (g) tempos de colisão e escape por  $SL_2$  respectivamente, para as bacias (b), (c) e (d) da Figura 3.20, (h), (i) e (j) tempos de colisão, escape por  $SL_1$  e escape por  $SL_2$  para a bacia (e) da Figura 3.20, para  $\beta = 0.05$  e  $\alpha = \delta = 0$ .



(Continua)

Figura 3.27 - Continuação.



Todos os resultados apresentados até aqui descrevem a dinâmica de uma vela solar no sistema Hamiltoniano. Porém, quando os parâmetros da atitude da vela assumem valores diferentes de zero, não há mais a integral de Jacobi, portanto não há mais constante de movimento, embora o sistema dinâmico ainda seja conservativo. Conseqüentemente, perde-se a definição das *CVZs* que delimitavam a região de espalhamento e não é mais possível classificar as trajetórias da espaçonave de acordo com seu nível de energia orbital, uma vez que este não é preservado ao longo da evolução temporal. Portanto, dado uma *CI*, qualquer comportamento é esperado a princípio, ou seja, independente de como tal *CI* seja definida, a trajetória pode permanecer limitada ou escapar por todos os lados em qualquer situação.

### 3.2.1 Casos não-Hamiltonianos do modelo da vela solar ( $\alpha \neq 0$ ou $\delta \neq 0$ )

Para os casos não-Hamiltonianos do modelo da vela solar, foram mantidas as mesmas definições gerais para obtenção das bacias de escape, uma vez que se aplicam a ambos os casos. A posição dos pontos de equilíbrio  $SL_1$  e  $SL_2$  envolvidos no cálculo de bacias pode sofrer pequenos deslocamentos no plano  $x - y$  ou no espaço tridimensional conforme  $\alpha$  ou  $\delta$  variam entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$  (FARRÉS; JORBA, 2016), porém, agora que não há mais uma definição da região de movimento permitido para a espaçonave devido à inexistência de uma integral primeira, tal como a constante de Jacobi, pequenas oscilações na posição dos pontos de equilíbrio  $SL_1$  ou  $SL_2$  tornam-se irrelevantes para a análise de bacias. Portanto, as definições de escape por  $SL_1$  ou  $SL_2$ , bem como de colisão com os primários, também foram mantidas inalteradas.

Por simples questão de escolha, a delimitação do conjunto de  $CI$ s também foi preservada. Nessas circunstâncias, quando diferentes valores de  $C_{J\beta}$  são mencionados agora, diferentes conjuntos de  $CI$ s são referidos.

Considerando um pequeno valor de  $\beta = 5 \times 10^{-6}$ , conforme  $\alpha$  ou  $\delta$  varia entre  $5^\circ$  e  $60^\circ$  para três diferentes conjuntos de  $CI$ s ( $C_{J\beta_0}$ ,  $C_{J\beta_1}$  e  $C_{J\beta_2}$ ) não foi possível notar diferenças significativas, em relação aos resultados apresentados para o caso Hamiltoniano. Tais resultados podem ser verificados na Tabela 3.4.

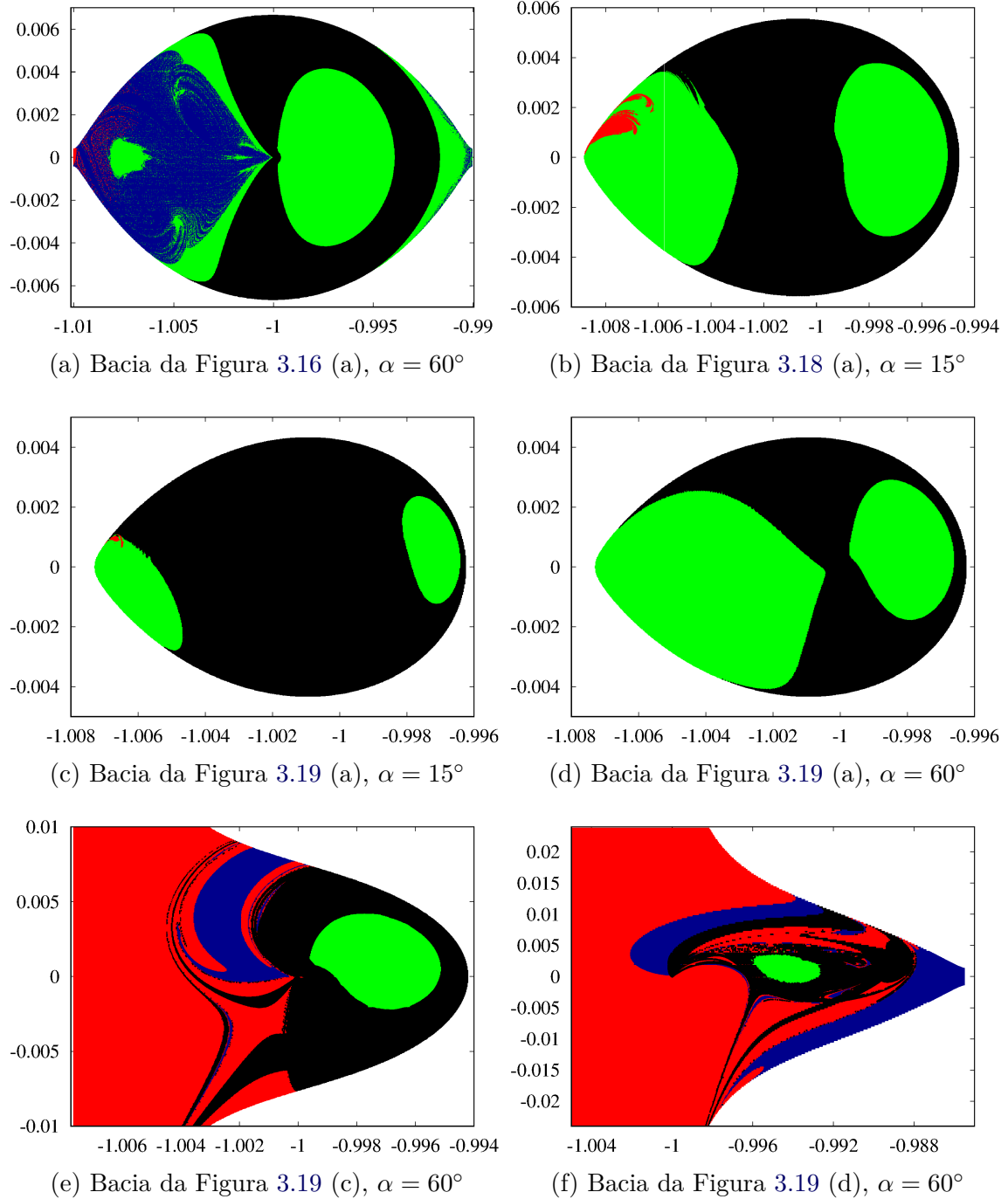
No sistema Hamiltoniano, para  $\beta \approx 10^{-4}$  observou-se que ambos os gargalos em  $SL_1$  e  $SL_2$  abrem juntos para um determinado valor de  $C_{J\beta}$  e quando isso acontece, as bacias de escape por  $SL_1$  ou  $SL_2$  têm aproximadamente as mesmas percentagens de condições iniciais do conjunto completo. Conforme  $\alpha$  ou  $\delta$  variam entre  $5^\circ$  e  $60^\circ$ , entretanto, observa-se que a bacia de colisão é mantida, a bacia delimitada é reduzida, a bacia de escape por  $SL_1$  aumenta e a bacia de escape por  $SL_2$  diminui drasticamente a medida que  $\alpha$  ou  $\delta$  crescem. Essas variações podem ser observadas na Tabela 3.4. Para exemplificar, na Figura 3.28 (a), a mesma bacia de escape obtida para o sistema Hamiltoniano na Figura 3.16 (a) foi reproduzida com  $\alpha = 60^\circ$ .



Tabela 3.4 - Porcentagens de condições iniciais que permanecem na bacia limitada, que colidem com um dos primários e que escapam por  $SL_1$  ou  $SL_2$ , nas bacias de escape com  $\alpha \neq 0$  ou  $\delta \neq 0$ , para  $t_f = 200$  e diversos valores de  $\beta$  e  $C_{J\beta}$ .

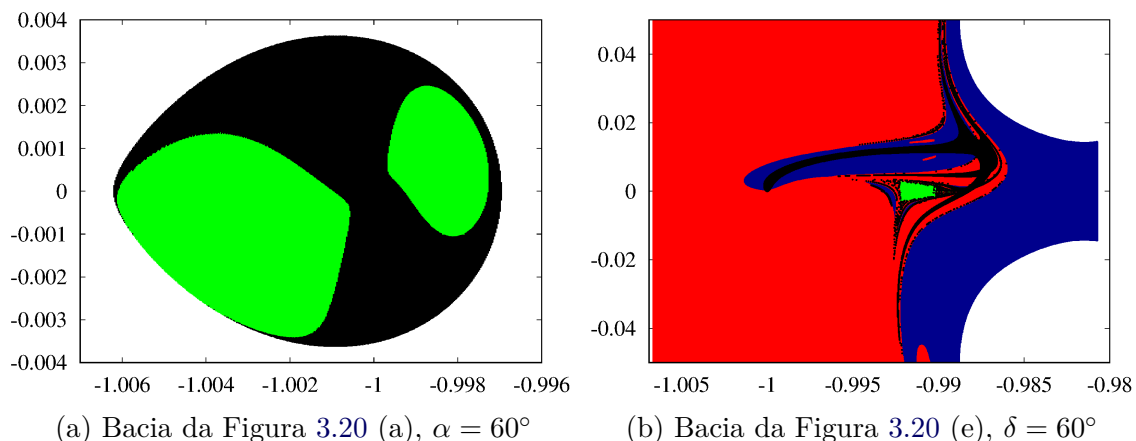
$\beta$	$C_{J\beta}$	$\delta = 0$					$\alpha = 0$				
		$\alpha$	% limitada	% colisional	% $SL_1$	% $SL_2$	$\delta$	% limitada	% colisional	% $SL_1$	% $SL_2$
$5 \times 10^{-6}$	$C_{J\beta_0}$	5°	59.8	40.2	0	0	5°	59.8	40.2	0	0
		15°	59.8	40.2	0	0	15°	59.8	40.2	0	0
		30°	59.8	40.2	0	0	30°	59.8	40.2	0	0
		45°	59.8	40.2	0	0	45°	59.8	40.2	0	0
		60°	59.8	40.2	0	0	60°	59.8	40.2	0	0
	$C_{J\beta_1}$	5°	50.9	40.3	8.8	0	5°	50.6	40.3	9.1	0
		15°	51.1	40.3	8.6	0	15°	50.4	40.3	9.3	0
		30°	51.3	40.3	8.4	0	30°	50.7	40.3	9.0	0
		45°	50.5	40.3	9.2	0	45°	50.5	40.3	9.2	0
		60°	50.2	40.3	9.5	0	60°	50.4	40.3	9.3	0
	$C_{J\beta_2}$	5°	24.2	40.2	21.2	14.4	5°	24.2	40.2	21.3	14.3
		15°	24.1	40.2	21.5	14.2	15°	24.2	40.2	21.2	14.4
		30°	24.1	40.2	21.5	14.2	30°	24.1	40.2	21.9	13.8
		45°	24.1	40.2	21.8	13.9	45°	24.2	40.2	21.3	14.3
		60°	24.1	40.2	21.8	13.9	60°	24.1	40.2	21.9	13.8
$1 \times 10^{-4}$	$C_{J\beta_2}$	5°	47.2	39.9	6.4	6.5	5°	47.1	39.8	6.8	6.3
		15°	48.1	39.9	8.4	3.6	15°	46.5	39.8	8.7	5.0
		30°	44.5	39.7	14.7	1.1	30°	42.7	39.7	15.5	2.1
		45°	40.6	39.8	19.0	0.6	45°	39.6	39.8	19.9	0.7
		60°	38.2	39.9	21.7	0.2	60°	37.1	39.8	22.6	0.5
$1 \times 10^{-3}$	$C_{J\beta_0}$	5°	58.5	41.5	0	0	5°	58.7	41.3	0	0
		15°	58.5	41.5	0	0	15°	58.9	41.1	0	0
		30°	59.0	41.0	0	0	30°	59.8	40.2	0	0
		45°	59.8	40.2	0	0	45°	60.6	39.4	0	0
		60°	60.7	39.3	0	0	60°	61.3	38.7	0	0
	$C_{J\beta_1}$	5°	55.9	41.4	0	2.7	5°	51.4	41.2	0	7.4
		15°	57.9	41.4	0	0.7	15°	58.4	40.9	0	0.7
		30°	58.7	41.1	0	0.2	30°	59.7	40.2	0	0.1
		45°	59.8	40.2	0	0	45°	60.6	39.3	0	0.1
		60°	60.7	39.2	0	0.1	60°	61.3	38.6	0	0.1
	$C_{J\beta_2}$	5°	24.7	41.8	0.4	33.1	5°	25.0	41.6	0.2	33.2
		15°	23.9	42.6	1.8	31.7	15°	25.0	41.6	1.4	32.0
		30°	23.9	42.8	6.0	27.3	30°	25.1	41.6	5.5	27.8
		45°	24.6	41.3	9.9	24.2	45°	25.7	40.2	9.8	24.3
		60°	26.1	40.2	12.2	21.5	60°	26.2	39.7	12.0	22.1
0.01	$C_{J\beta_0}$	5°	41.8	57.4	0	0.8	5°	43.8	56.2	0	0
		15°	42.9	56.0	0	1.1	15°	46.8	53.2	0	0
		30°	49.6	50.3	0	0.1	30°	55.4	44.6	0	0
		45°	56.8	43.2	0	0	45°	64.0	36.0	0	0
		60°	63.7	36.3	0	0	60°	68.4	31.6	0	0
	$C_{J\beta_{12}}$	5°	33.5	56.9	0	9.6	5°	32.4	56.0	0	11.6
		15°	38.0	55.7	0	6.3	15°	39.3	53.0	0	7.7
		30°	47.3	49.9	0	2.8	30°	54.6	44.0	0	1.4
		45°	56.9	42.5	0	0.6	45°	63.9	35.7	0	0.4
		60°	64.2	35.8	0	0	60°	68.7	31.3	0	0
	$C_{J\beta_2}$	5°	19.2	27.7	3.1	50.0	5°	20.4	26.2	3.1	50.3
		15°	16.9	30.4	5.9	46.8	15°	20.7	27.1	5.8	46.4
		30°	15.2	32.1	9.2	43.5	30°	20.7	27.6	9.6	42.1
		45°	14.8	32.3	12.6	40.3	45°	20.0	28.5	13.8	37.7
		60°	15.7	33.7	16.2	34.4	60°	19.0	30.6	17.4	33.0
0.03	$C_{J\beta_0}$	5°	11.9	88.1	0	0	5°	12.1	87.9	0	0
		15°	14.1	85.8	0	0.1	15°	15.2	84.8	0	0
		30°	22.3	77.7	0	0	30°	27.4	72.6	0	0
		45°	39.3	60.7	0	0	45°	52.2	47.8	0	0
		60°	58.3	41.7	0	0	60°	70.6	29.4	0	0
	$C_{J\beta_{11}}$	5°	10.3	87.1	0	2.6	5°	9.9	87.1	0	3.0
		15°	13.1	84.9	0	2.0	15°	14.6	84.0	0	1.4
		30°	21.6	77.0	0	1.4	30°	28.4	71.6	0	0
		45°	40.0	59.9	0	0.1	45°	53.2	46.8	0	0
		60°	59.1	40.9	0	0	60°	71.5	28.5	0	0
	$C_{J\beta_{12}}$	5°	4.9	31.5	0	63.6	5°	6.2	30.3	0	63.5
		15°	5.4	31.2	0	63.4	15°	7.0	32.2	0	60.8
		30°	6.7	33.3	0	60.0	30°	10.4	31.8	0	57.8
		45°	9.2	34.0	0.1	56.7	45°	17.5	28.5	1.4	52.6
		60°	12.2	33.7	8.8	45.3	60°	19.4	30.4	14.1	36.1
$C_{J\beta_2}$	5°	5.4	14.1	0	80.5	5°	6.9	12.7	0	80.4	
	15°	0.3	14.6	0	85.1	15°	6.8	14.9	0.1	78.2	
	30°	0	18.7	0	81.3	30°	11.4	12.0	8.0	68.6	
	45°	0	14.1	6.2	79.7	45°	14.0	12.4	16.5	57.1	
	60°	4.6	18.4	17.6	59.4	60°	14.3	11.7	23.9	50.1	
0.05	$C_{J\beta_0}$	5°	3.2	96.8	0	0	5°	3.4	96.6	0	0
		15°	4.0	96.0	0	0	15°	4.9	95.1	0	0
		30°	8.8	91.2	0	0	30°	13.1	86.9	0	0
		45°	23.1	76.9	0	0	45°	38.0	62.0	0	0
		60°	49.2	50.8	0	0	60°	67.3	32.7	0	0
	$C_{J\beta_{11}}$	5°	3.0	96.5	0	0.5	5°	3.0	96.8	0	0.2
		15°	4.0	95.5	0	0.5	15°	5.2	94.8	0	0
		30°	8.9	91.1	0	0	30°	13.7	86.3	0	0
		45°	23.1	76.9	0	0	45°	38.5	61.5	0	0
		60°	49.6	50.4	0	0	60°	67.5	32.5	0	0
	$C_{J\beta_{12}}$	5°	1.2	16.8	0	82.0	5°	1.6	16.3	0	82.1
		15°	1.3	17.2	0	81.5	15°	1.8	17.4	0	80.8
		30°	2.4	20.7	0	76.9	30°	4.1	21.8	0	74.1
		45°	5.2	22.9	0	71.9	45°	12.1	23.2	1.7	63.0
		60°	10.0	24.9	1.9	63.2	60°	21.1	20.8	14.7	43.4
$C_{J\beta_2}$	5°	0	1.5	0	98.5	5°	0	1.5	0.3	98.2	
	15°	0	1.3	0	98.7	15°	0	1.5	0.7	97.8	
	30°	0	1.2	0	98.8	30°	0.1	1.8	5.6	92.5	
	45°	0	1.3	1.3	97.4	45°	0.3	2.4	15.8	81.5	
	60°	0	1.4	8.0	90.6	60°	0.4	2.7	26.1	70.8	

Figura 3.28 - Bacias de escape no plano  $x-y$  para  $\beta \approx 10^{-4}$  (Figura (a)),  $\beta = 0.01$  (Figura (b)),  $\beta = 0.03$  (Figuras (c) a (f)) e  $\beta = 0.05$  (Figuras (g) e (h)) geradas a partir dos mesmos conjuntos de condições iniciais usados para obtê-las no caso Hamiltoniano.



(Continua)

Figura 3.28 - Continuação.



Quando  $\beta = 10^{-3}$ , no sistema Hamiltoniano, verificou-se que a mudança na ordem de abertura dos canais de transporte entre  $SL_1$  e  $SL_2$  já havia ocorrido. Além disso, quando o canal de transporte em  $SL_1$  foi aberto, grande parte dos  $CI$ s já haviam escapado por  $SL_2$ , de modo que o conjunto que saiu por  $SL_1$  era de tamanho desprezível.

No entanto, à medida que  $\alpha$  ou  $\delta$  cresce entre  $5^\circ$  e  $60^\circ$ , observa-se que a bacia de escape por  $SL_2$  diminui, para ambos os conjuntos  $C_{J\beta_1}$  e  $C_{J\beta_2}$  enquanto a bacia limitada cresce em  $C_{J\beta_1}$  e em  $C_{J\beta_2}$ . Já a bacia de escape por  $SL_1$  aumenta (ver Tabela 3.4). Para todos os conjuntos de  $CI$ s analisados, a bacia colisional permanece praticamente inalterada para  $\beta = 10^{-3}$ .

Além disso, a partir de  $\beta = 10^{-3}$ , assim que  $\alpha$  assume valores diferentes de zero, já se observa a existência de uma quebra de simetria em torno do eixo  $y = 0$ , em comparação ao que se observou no caso Hamiltoniano, simetria esta, explícita nas Seções de Poincaré e que tem suas implicações nos diagramas de bacias de escape. Tal efeito torna-se mais perceptível a partir de  $\beta = 0.01$  e o mesmo ocorre para valores maiores de  $\beta$ , como pode ser observado nas bacias (b) a (d) e (g) da Figura 3.28.

A partir de  $\beta = 0.01$ , no caso Hamiltoniano, observou-se um crescimento expressivo na bacia colisional, nos conjuntos  $C_{J\beta_0}$ , quando todos os canais de transporte ainda estavam fechados e para os maiores valores de  $C_{J\beta_1}$ , ou seja, quando iniciava a abertura do canal de transporte em  $SL_2$ . Variando  $\alpha$  ou  $\delta$ , no entanto, as bacias colisionais voltam a diminuir, à medida que os módulos de  $\alpha$  ou  $\delta$  aumentam, para

esses conjuntos de *CI*s, e isso também ocorre para valores de  $\beta > 0.01$ , como pode ser visto, por exemplo, nas bacias (d) e (g) da Figura 3.28 (comparadas com suas correspondentes bacias 3.19(a) e 3.20(a) respectivamente, no caso Hamiltoniano) ou na Tabela 3.4.

Também foi possível notar que a partir de  $\beta = 0.01$ , no caso Hamiltoniano, para o conjunto  $C_{J\beta 2}$  que a região mais próxima da Terra, em  $x = -1 + \mu$  era dominada por *CI*s que escapavam por  $SL_2$ . Porém, para os maiores valores de  $\alpha$  ou  $\delta$  testados, esta afirmação não é mais válida, afinal, dependendo do valor de  $\beta$  e dos parâmetros  $\alpha$  ou  $\delta$ , para o mesmo conjunto de *CI*s, todas as bacias podem se aproximar da Terra de forma bem delineada, desde  $\beta = 10^{-3}$ . Nas bacias (e), (f) e (h) da Figura 3.28, por exemplo, observa-se que tanto as bacias colisionais quanto as limitadas, bem como aquelas que escapam por  $SL_1$  ou  $SL_2$  são bem delimitados e estão próximos da Terra, beneficiando assim diversos objetivos de missões espaciais.

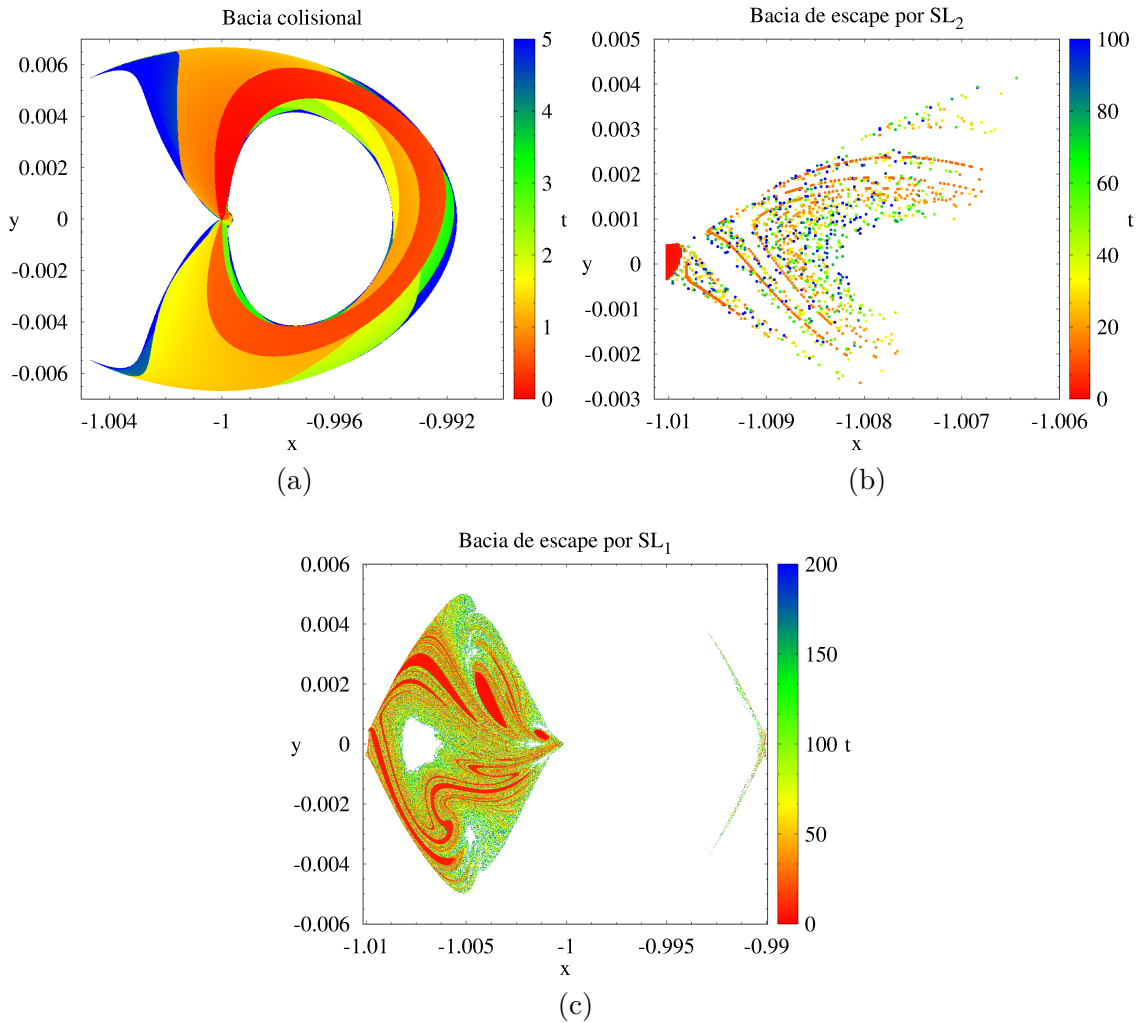
Enfatizamos que não há mais constante de Jacobi quando  $\alpha$  ou  $\delta$  se alteram, de forma que agora é possível notar escapes para situações que não existiam, no caso Hamiltoniano, por exemplo, na bacia (b) da Figura 3.28 (a bacia (a) da Figura 3.18 é sua correspondente no caso Hamiltoniano) ou na bacia (c) da Figura 3.28.

A partir da Tabela 3.4 é possível analisar de forma geral, principalmente a partir de  $\beta = 0.01$ , que para os conjuntos  $C_{J\beta 0}$  e  $C_{J\beta 1}$  que correspondem a casos onde ainda não haviam canais de transporte abertos ou quando se iniciou a primeira abertura, no caso Hamiltoniano, conforme  $\alpha$  ou  $\delta$  cresce entre  $5^\circ$  e  $60^\circ$ , a bacia de escape por  $SL_2$ , quando existe, e a bacia colisional tendem a diminuir e a bacia limitada a aumentar. Para o conjunto  $C_{J\beta 1}$  correspondente a situações em que o canal de transporte por  $SL_2$  já estava bastante aberto e para o conjunto  $C_{J\beta 2}$  em que o segundo canal de transporte também abriu no caso Hamiltoniano, à medida que  $\alpha$  ou  $\delta$  cresce, a bacia de escape por  $SL_1$ , as bacias colisionais e limitadas tendem a aumentar, enquanto a bacia de escape em  $SL_2$  diminui.

Portanto, no caso não-Hamiltoniano, embora não haja mais nenhuma restrição para o movimento da espaçonave em relação ao nível de energia em que sua *CI* foi definida, as bacias de escape fornecem uma ilustração da dinâmica da vela solar neste sistema, a partir das quais é possível perceber que essas bacias são, em geral, bem delimitadas no plano de fase. Isso significa que à medida que  $\beta$  aumenta, tanto para o caso Hamiltoniano quanto não-Hamiltoniano, e à medida que  $\alpha$  ou  $\delta$  se tornam maiores, dentro dos intervalos analisados, menos comportamento caótico é observado entre as bacias de escape.

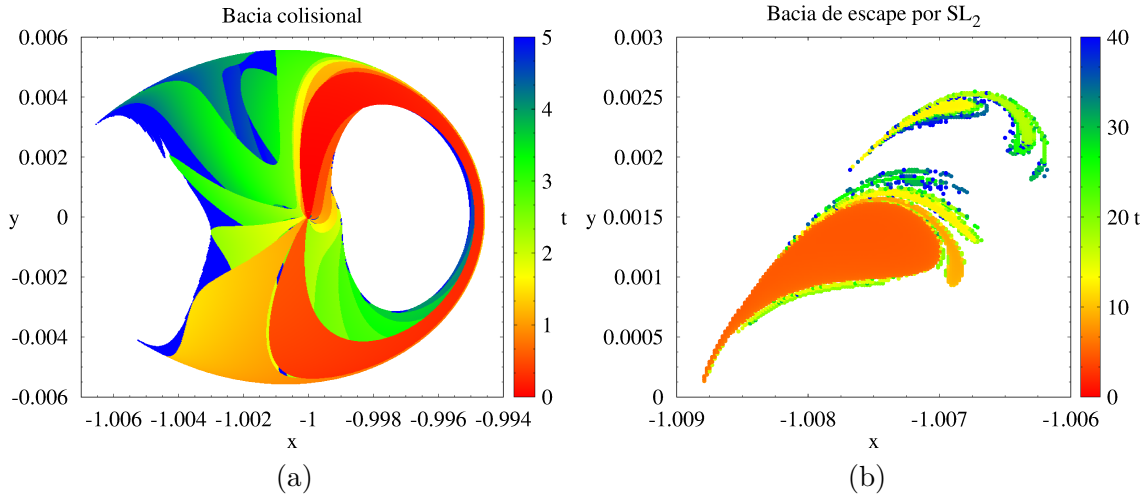
Na sequência, avaliamos também a variação do tempo de evolução das trajetórias pertencentes as diferentes bacias de escape e colisão apresentadas nas Figuras 3.28.

Figura 3.29 - Em (a), (b) e (c) tempos de colisão, escape por  $SL_2$  e escape por  $SL_1$  para a bacia da Figura 3.28 (a), para  $\beta = 1.00074 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e  $\delta = 0$ .



Para  $\beta \approx \times 10^{-4}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\delta = 0$  e um valor de  $C_{J\beta}$  que no caso Hamiltoniano correspondia a um nível de energia aproximado para o qual, ambos os canais de transporte abriam juntos, notamos que as colisões continuam a ocorrer rapidamente, em relação aos escapes e as  $CIs$  que demoram mais tempo para colidirem com os primários, estão localizadas nas regiões de fronteira da bacia.

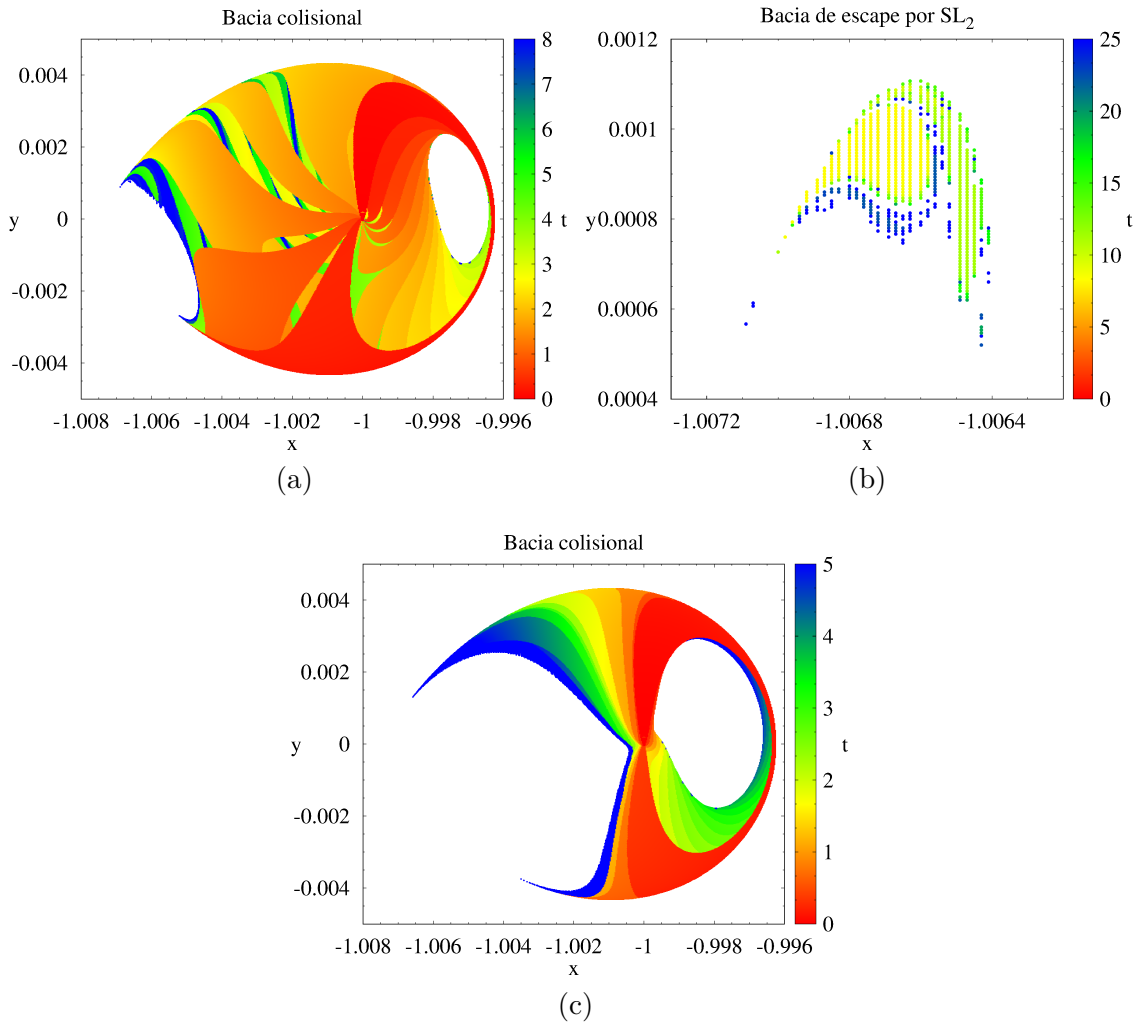
Figura 3.30 - Em (a) e (b) tempos de colisão e escape por  $SL_2$  para a bacia da Figura 3.28 (b), para  $\beta = 0.01$ ,  $\alpha = 15^\circ$  e  $\delta = 0$ .



Para  $\beta = 0.01$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\delta = 0$  e um valor de  $C_{J\beta}$  para o qual, no caso Hamiltoniano não haviam canais de transporte abertos, observamos a mesma estrutura para a bacia colisional, onde as condições iniciais que demoram mais tempo para colidir com os primários, não estão contidas apenas nos limites da bacia e o tempo de escape por  $L_2$ , é menor, em relação aos escapes observados anteriormente para  $\beta \approx \times 10^{-4}$ .

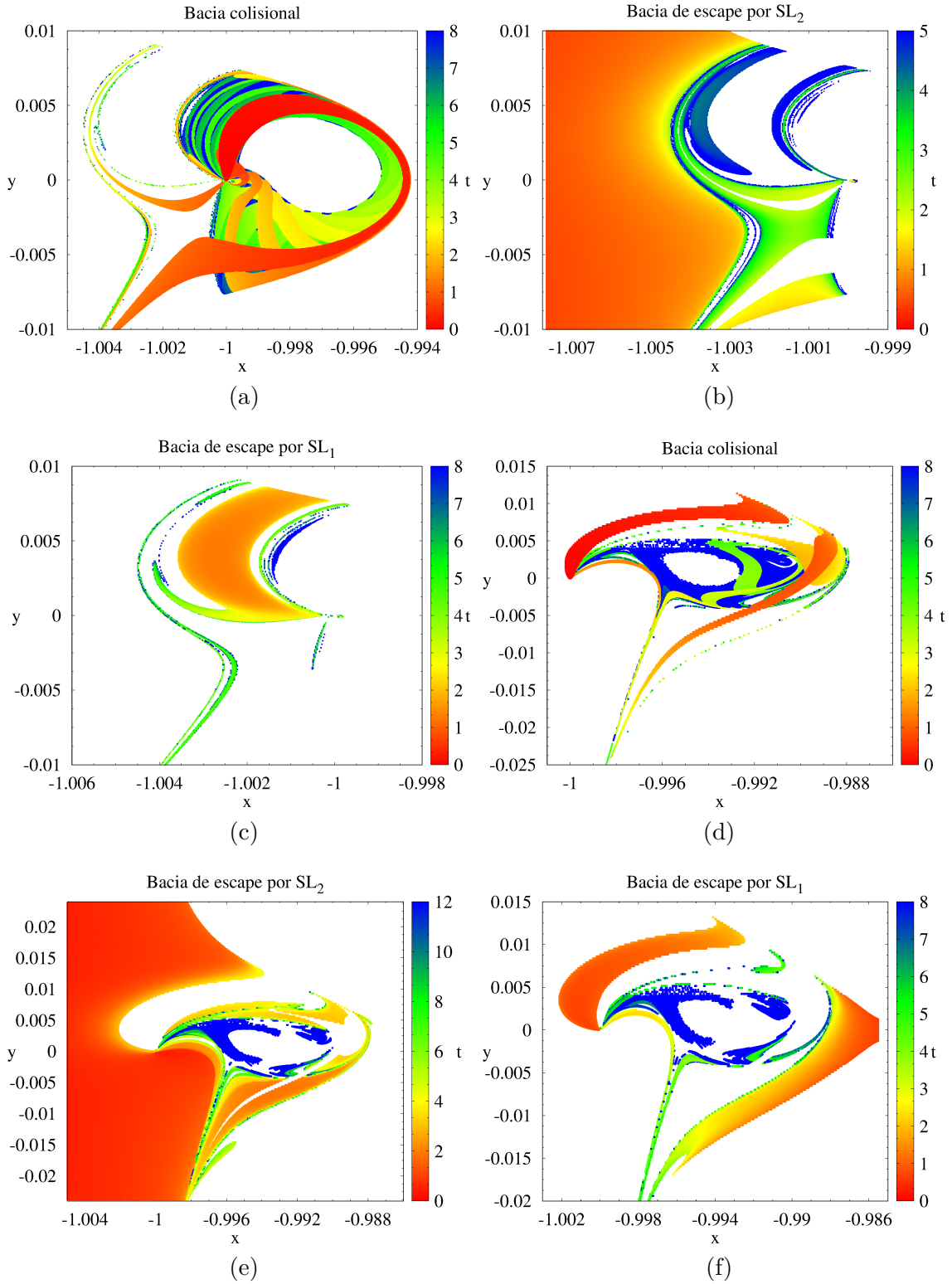
Para  $\beta = 0.03$ ,  $\delta = 0$ ,  $C_{J\beta}$  correspondente a um nível de energia em que no caso Hamiltoniano os canais de transporte estavam indisponíveis e  $\alpha = 15^\circ$ , observamos novamente um perfil de tempo de colisão semelhante ao apresentado anteriormente, na Figura 3.26 (a) para o sistema Hamiltoniano e tempo de escape menor que o observado para as bacias anteriores, com valores menores de  $\beta$ . Quando  $\alpha = 60^\circ$ , notamos uma mudança no perfil da bacia colisional, onde as condições iniciais que demoram mais tempo para colidir, voltam às regiões de fronteira da bacia.

Figura 3.31 - Em (a) e (b), tempos de colisão e escape por para a bacia da Figura 3.28 (c), para  $\beta = 0.03$ ,  $\alpha = 15^\circ$  e  $\delta = 0$ . Em (c), tempos de colisão para a bacia da Figura 3.28 (d), para  $\beta = 0.03$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e  $\delta = 0$ .



Quando  $\beta = 0.03$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\delta = 0$  e os valores de  $C_{J\beta}$  escolhidos correspondem a um valor próximo a abertura do gargalo em  $L_2$  ou quando este já abriu no sistema Hamiltoniano, observa-se que tanto os escapes quanto as colisões também ocorrem muito rapidamente no sistema não-Hamiltoniano, além disso, todas essas bacias estão próximas a Terra.

Figura 3.32 - Em (a), (b) e (c), tempos de colisão, escape por  $SL_2$  e escape por  $SL_1$  para a bacia da Figura 3.28 (e), para  $\beta = 0.03$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e  $\delta = 0$ . Em (d), (e) e (f), tempos de colisão, escape por  $SL_2$  e escape por  $SL_1$  para a bacia da Figura 3.28 (f), para  $\beta = 0.03$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e  $\delta = 0$ .

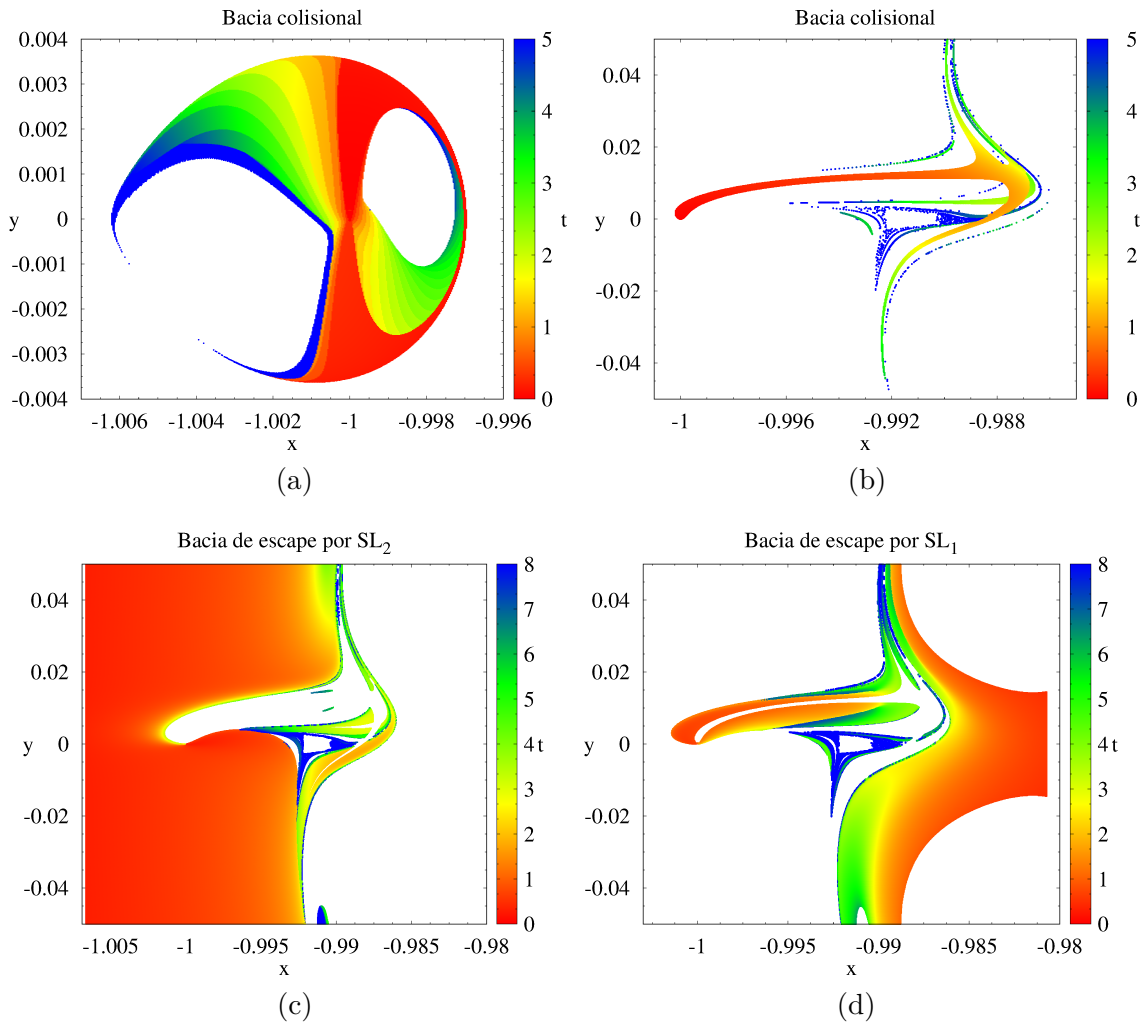




Para  $\beta = 0.05$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\delta = 0$  e  $C_{J\beta}$  para o qual os canais de transporte não estavam disponíveis no sistema Hamiltoniano, observamos novamente que as condições iniciais que demoram mais tempo para colidir, voltam a habitar as extremidades da bacia, o que não ocorria para o correspondente caso Hamiltoniano.

Quando consideramos  $\beta = 0.05$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\delta = 60^\circ$  e  $C_{J\beta}$  que apresentava ambos os canais de transporte em  $SL_1$  e  $SL_2$  disponíveis no caso Hamiltoniano, verificamos novamente, que os escapes e colisões ocorrem numa faixa de variação de tempo relativamente pequena.

Figura 3.33 - Em (a) tempos de colisão para a bacia da Figura 3.28 (g), para  $\beta = 0.05$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e  $\delta = 0$ . Em (b), (c) e (d), tempos de colisão, escape por  $SL_2$  e escape por  $SL_1$  para a bacia da Figura 3.28 (h), para  $\beta = 0.05$ ,  $\alpha = 0$  e  $\delta = 60^\circ$ .



Com a finalidade de comprovar que os critérios de escape por  $SL_1$  e  $SL_2$  continuam bem definidos mesmo quando  $\alpha$  ou  $\delta$  assumem valores diferentes de zero, algumas trajetórias foram evoluídas e são apresentadas a seguir. Lembramos que as  $CVZs$  perderam suas definições no caso não-Hamiltoniano, no entanto, nas figuras a seguir foram utilizadas as  $CVZs$  geradas para o caso Hamiltoniano apenas para auxiliar a interpretação visual no espaço bidimensional.

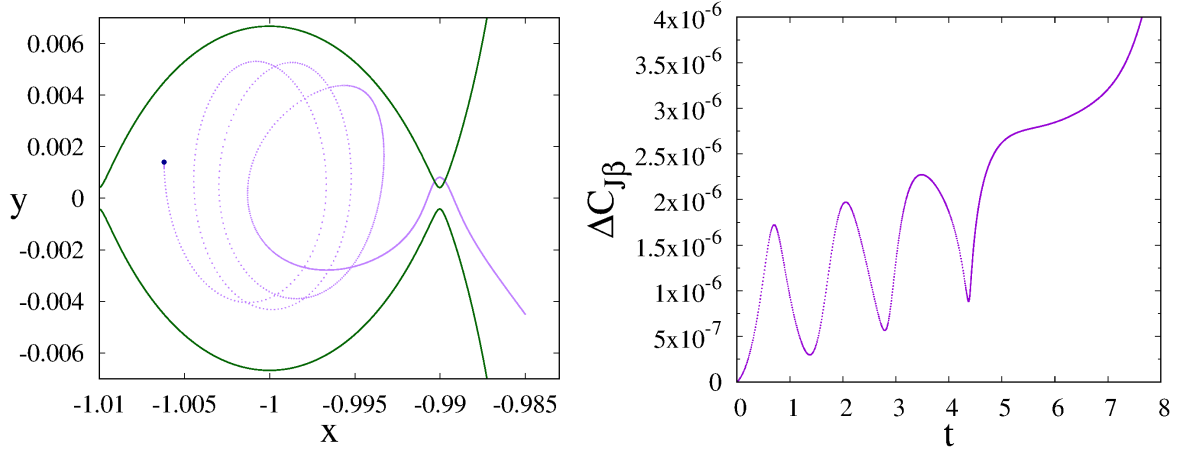
Os gráficos da Figura 3.34 (a) correspondem a situação da bacia de escape da Figura 3.28 (a), em que  $\beta \approx 10^{-4}$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e  $\delta = 0$ . A partir destas, observa-se que foi evoluída uma trajetória que escapa por  $SL_1$ , portanto, tal  $CI$  é marcada na cor azul e verifica-se variações de  $C_{J\beta}$  da ordem de  $10^{-6}$  ao longo do tempo de evolução dessa trajetória. No correspondente caso em que o sistema era Hamiltoniano, ou seja, para  $\beta \approx 10^{-4}$  e  $\alpha = \delta = 0$ , ambos os canais de transporte em  $SL_1$  e  $SL_2$  estavam abertos, o que se observa através das  $CVZs$  apresentadas, porém, como  $C_{J\beta}$  não mais se conserva ao longo da trajetória, em princípio, lembramos que esta poderia escapar da região de Hill da Terra por qualquer lado.

Nos gráficos da Figura 3.34 (b), correspondentes ao caso da bacia de escape da Figura 3.28 (b), onde  $\beta = 0.01$ ,  $\alpha = 15^\circ$  e  $\delta = 0$ , temos a evolução de uma trajetória que escapa por  $SL_2$ , cuja  $CI$  é marcada em vermelho e nota-se variações de  $C_{J\beta}$  da ordem de  $10^{-5}$  durante a integração dessa trajetória. De acordo com o sistema Hamiltoniano de referência, para o qual  $\beta = 0.01$  e  $\alpha = \delta = 0$ , de acordo com as  $CVZs$ , nessa circunstância ambos os canais de transporte em  $SL_1$  e  $SL_2$  estavam fechados. Mas apesar de verificarmos a ocorrência de escape no sistema não-Hamiltoniano, constatamos que as classificações de escapes continuam bem definidas.

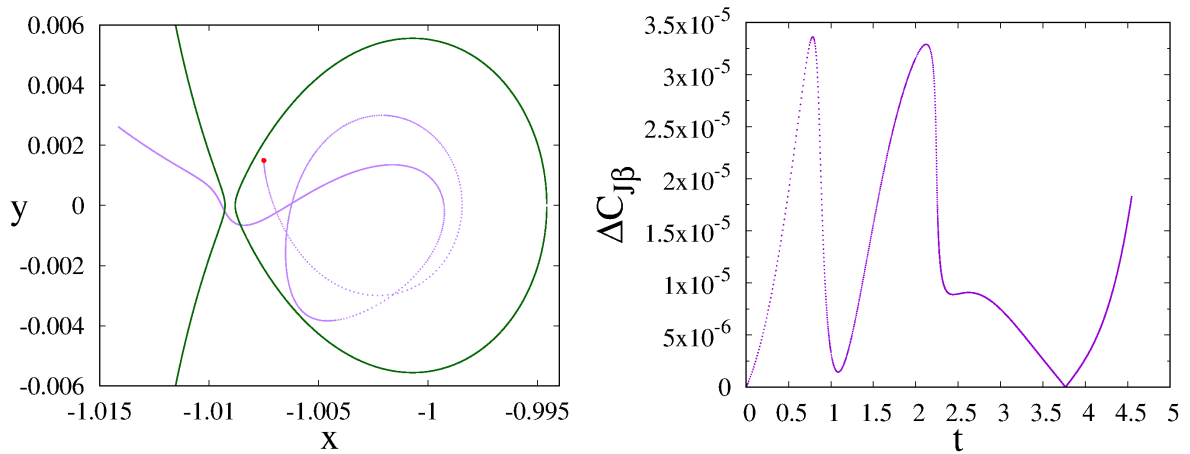
Por fim, nos gráficos da Figura 3.34 (c), referentes a situação da bacia de escape da Figura 3.28 (h), para a qual  $\beta = 0.05$ ,  $\alpha = 0$  e  $\delta = 60^\circ$ , verificamos duas diferentes trajetórias, uma que escapa através do canal de transporte em  $SL_1$  e a outra, por  $SL_2$  e variações de  $C_{J\beta}$  da ordem de  $10^{-4}$  no decorrer do tempo de evolução de cada uma das órbitas.

Dessa forma, apesar de não existir mais uma constante de movimento relacionada a energia do sistema, isto é, apesar de  $C_{J\beta}$  não mais ser preservada no sistema não-Hamiltoniano, o que implica na indefinição das  $CVZs$  e resulta ainda na possibilidade da existência de trajetórias de escape da região de Hill da Terra por qualquer lado, mantivemos uma definição de bacias de escape por  $SL_1$  e  $SL_2$  que permanece válida.

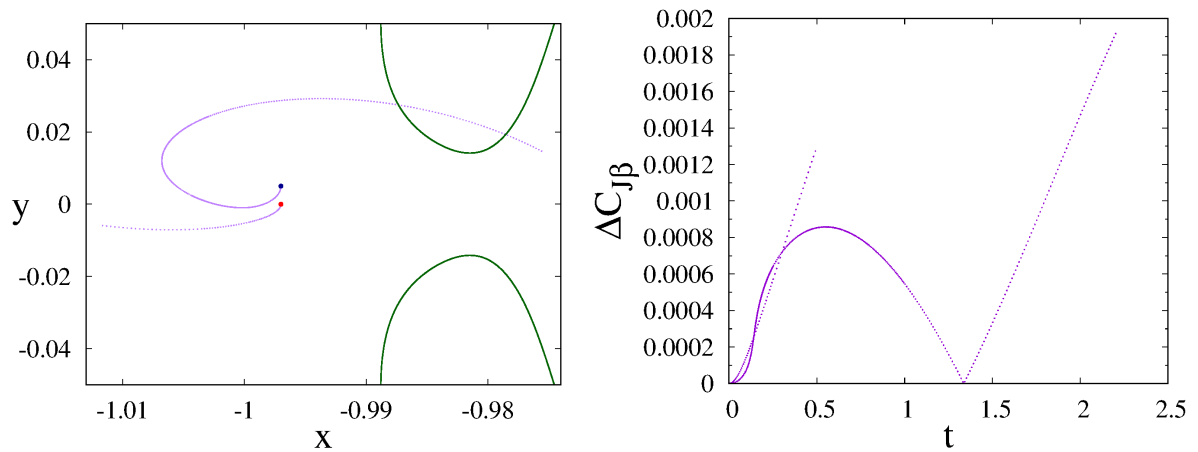
Figura 3.34 - Trajetórias evoluídas no plano  $x - y$  e correspondentes variações de  $C_{J\beta}$  ao longo do tempo de evolução de cada trajetória. As  $CIs$  são marcadas como pontos azuis ou vermelhos de acordo com a bacia a qual pertencem e as trajetórias são marcadas em roxo.



(a) Bacia da Figura 3.28 (a)



(b) Bacia da Figura 3.28 (b)



(c) Bacia da Figura 3.28 (h)



## 4 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

Nesse trabalho, as propriedades dinâmicas da vela solar no sistema Sol-Terra foram exploradas utilizando o modelo do Problema Restrito de Três Corpos Circular Espacial, incluindo um termo relativo a aceleração gerada a partir da pressão de radiação solar e assumindo o caso de uma vela solar ideal.

A fim de fornecer dados essenciais ao estudo, o comportamento dos pontos de equilíbrio do sistema e a constante de Jacobi a eles associada, além das curvas de velocidade zero, foram avaliados para diferentes valores de  $\beta$  no sistema Hamiltoniano e como parte das análises realizadas, a estabilidade dos pontos de equilíbrio  $SL_1$  e  $SL_2$  também foi verificada.

Além disso, seções de Poincaré foram construídas para o caso Hamiltoniano e bacias de escape foram geradas tanto para o sistema Hamiltoniano, como não-Hamiltoniano, para diversos valores de  $\beta$  e  $C_{J\beta}$ , com o propósito de se obter uma visão geral da dinâmica de velas solares quando seu parâmetro  $\beta$ , definido como a razão entre as acelerações devido a pressão de radiação solar e gravitacional as quais a vela está sujeita e associado a razão entre a área e a massa da vela, além de quando  $\alpha$  ou  $\delta$ , relacionados a sua orientação, assumem diferentes valores.

Assim, no sistema Hamiltoniano notou-se que os pontos de equilíbrio se movem no plano  $x - y$  de forma que todos se aproximam do primário maior, exceto o ponto de equilíbrio  $SL_2$ , que se aproxima do primário menor, a medida que o valor de  $\beta$  cresce entre 0 e 1. Embora os tipos de estabilidade dos pontos  $SL_1$  e  $SL_2$  permaneçam inalterados, em relação ao caso sem vela,  $SL_2$  aumenta sua instabilidade, enquanto  $SL_1$  torna-se menos instável à medida que  $\beta$  aumenta. Além disso, os valores de  $C_{J\beta}$  referentes a todos os pontos de equilíbrio diminuem à medida que  $\beta$  aumenta e para  $\beta \approx 10^{-4}$  ocorre uma inversão na ordem de abertura dos canais de transporte entre  $SL_1$  e  $SL_2$ . A partir da reprodução das curvas de velocidade zero observou-se também, para os valores de  $\beta > 10^{-4}$  testados, que quando o canal de transporte em  $SL_1$  começa a abrir, o gargalo em  $SL_2$  já está completamente aberto, enquanto que para os maiores valores de  $\beta$  verificados, notou-se ainda que a região acessível ao redor da Terra torna-se menor quando ainda não há nenhum canal de transporte aberto ou quando se inicia a primeira abertura.

Através das seções de Poincaré foi possível identificar a presença de diferentes estruturas dinâmicas como Toros, Ilhas de Estabilidade, regiões de mar caótico e suas evoluções para diferentes conjuntos de condições iniciais. De forma geral, foi possível

observar tanto através das seções de Poincaré, quanto das bacias de escape, que à medida que  $\beta$  aumenta, o caos no sistema diminui para os maiores valores de  $C_{J\beta}$  estipulados.

Para valores de  $\beta$  muito pequenos, da ordem de  $5 \times 10^{-6}$ , não foi possível notar diferenças qualitativas ou quantitativas significantes entre as seções de Poincaré e bacias de escape considerando ou não o efeito da pressão de radiação solar, independente da orientação da vela. Para o sistema Hamiltoniano, a partir de  $\beta > 10^{-4}$ , verificou-se que o sistema dinâmico segue um padrão comportamental para três situações distintas, relacionadas a ausência de canais de transporte abertos, ao início da primeira abertura em  $SL_2$  e da segunda abertura em  $SL_1$ , em que de modo geral, quando não há canais de transporte abertos, as bacias colisionais crescem, enquanto as bacias limitadas diminuem; quando se inicia a primeira abertura em  $SL_2$ , o escape ocorre de forma relativamente lenta, assim a bacia de escape por  $SL_2$  é pequena a princípio, mas antes mesmo que o segundo canal de transporte seja aberto, boa parte das condições iniciais já escaparam por  $SL_2$ , de forma que para os maiores valores de  $\beta$  analisados, a bacia de escape por  $SL_2$  é predominante para valores de  $C_{J\beta}$  que se aproximam  $C_{J1}$ .

No entanto, quando  $\alpha$  ou  $\delta$  crescem, além de  $\beta$ , as bacias colisionais voltam a diminuir e conseqüentemente, as bacias limitadas aumentam, quando se utiliza os mesmos conjuntos de condições iniciais que no sistema Hamiltoniano correspondiam a inexistência de canais de transporte abertos. Para conjuntos de condições iniciais definidos em um nível de energia correspondente ao início da abertura do gargalo em  $SL_2$ , no sistema não-Hamiltoniano se observa um decréscimo na bacia de escape por  $SL_2$  e para conjuntos de condições iniciais definidos com  $C_{J\beta} \cong C_{J1}$ , no sistema não-Hamiltoniano, se verifica que as bacias limitadas, colisionais e de escape por  $SL_1$  passam a apresentar um crescimento em comparação com o caso Hamiltoniano. Além disso, quando  $\alpha$  varia, uma perda de simetria no eixo  $y = 0$  foi presenciada e para situações que no sistema Hamiltoniano não haviam canais de transporte abertos, no sistema não-Hamiltoniano, observou-se a existência de bacias de escape por  $SL_2$ .

A partir deste estudo, nota-se que através do conhecimento das mudanças de comportamento das propriedades dinâmicas analisadas, torna-se possível realizar um melhor planejamento para missões espaciais. Afinal, ao escolher as condições iniciais adequadas, a dinâmica natural da vela solar pode beneficiar missões espaciais com objetivos diversos.

Mais adiante, como continuidade a esse trabalho seria interessante ampliar a exploração da dinâmica de velas solares para outros sistemas, a fim de constatar se os resultados divergem ou seguem o mesmo padrão, além disso, diferentes manobras de transporte orbital podem ser estudadas no sistema Sol-Terra entre as primários e as novas soluções obtidas para os pontos de equilíbrio Lagrangianos.





## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: an introduction to dynamical systems**. New York: Springer, 1996. 603 p. 46
- ASSIS, S. C. de; TERRA, M. O. Escape dynamics and fractal basin boundaries in the planar Earth-Moon system. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 120, n. 2, p. 105–130, 2014. 5, 71
- ASSIS, S. C. de **Fronteiras fractais e dinâmica de escape em modelos hamiltonianos de dois graus de liberdade**. 177 p. Tese (Doutorado em Ciências) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos, 2014. 5, 60, 70, 71, 84
- ASSIS, S. C. de; TERRA, M. O. **Escape dynamics in the solar system: applications to small body missions with the RTBP**. Jerusalem, Israel: 66th International Astronautical Congress (IAC 2015), IAC-15-C1.3.3, 2015. 5, 84
- ATWATER, H. A.; DAVOYAN, A. R.; ILIC, O.; JARIWALA, D.; SHERROTT, M. C.; WENT, C. M.; WHITNEY, W. S.; WONG, J. Materials challenges for the Starshot lightsail. **Nature Materials**, v. 17, n. 10, p. 861–867, 2018. 3, 4
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2015. 35
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. **Methods of celestial mechanics**. New York: Academic Press, 1961. 9
- CHERNIKOV, Y. A. The photogravitational restricted three-body problem. **Soviet Astronomy**, v. 14, n. 1, p. 176–181, 1970. 4
- CONTOPOULOS, G. Asymptotic curves and escapes in Hamiltonian systems. **Astronomy and Astrophysics**, v. 231, p. 41–55, 1990. 71
- DALRYMPLE, G B. **The age of the Earth**. California: Stanford University Press, 1991. 1
- FARRÉS, A. **Contribution to the dynamics of a solar sail in the Earth-Sun system**. 133 p. Tese (Doutorado em Matemática) — Universidade de Barcelona, Barcelona, 2009. 2, 5, 12, 17, 21, 23, 30, 36, 37
- FARRÉS, A.; JORBA, À. Dynamics of a solar sail near a halo orbit. **Acta Astronautica**, v. 67, n. 7-8, p. 979–990, 2010. 31

FARRÉS, A.; JORBA, À. **Transfer orbits to L4 with a solar sail in the Earth-Sun system solar sailing with Invariant Manifolds in the Earth-Sun system.** Jerusalem, Israel: 66th International Astronautical Congress (IAC 2015), IAC-15-C1.2.6, 2015. 5

FARRÉS, A.; JORBA, À. **Astrodynamics network AstroNet-II.** Cham: Springer International, p. 73–89, 2016. 5, 24, 92

FARRÉS, A.; HEILIGERS, J.; MIGUEL, N. Road Map to L4/L5 with a solar sail. **Aerospace Science and Technology**, v. 95, p. 105458, 2019. 49

FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C do. **Caos: uma introdução.** São Paulo: Blücher, 1994. 48

GOMES, T. F. P. **Eventos extremos e estruturas coerentes na turbulência: Estudo de caso para o vento solar.** 232 p. Tese (Doutorado em Geofísica Espacial/Ciências do Ambiente Solar-Terrestre) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, 2018. 2

HAAPALA, A. F. **Trajectory design in the spatial circular restricted three-body problem exploiting higher-dimensional Poincaré maps.** 262 p. Thesis (PhD in Philosophy) — Purdue University, West Lafayette, Indiana, 2014. 50, 55

HERBECK, L.; SICKINGER, C.; EIDEN, M.; LEIPOLD, M. **Solar sail hardware developments.** Toulouse: European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing, 2002. 2

HUBLIN, J. J. et al. New fossils from Jebel Irhoud, Morocco and the pan-African origin of Homo sapiens. **Nature**, v. 546, n. 7657, p. 289–292, 2017. 1

JAPAN AEROSPACE EXPLORATION AGENCY (JAXA). Small solar power sail demonstrator "IKAROS". 2020. Disponível em: <<https://global.jaxa.jp/projects/sat/ikaros/topics.html>>. Acesso em: nov. 2020. 2

KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, J. E.; ROSS, S. D **Dynamical Systems, the Three-Body Problem, and Space Mission Design.** [S.l.]: Marsden Books, 2022. 319 p. 11

LIMA, E. L. **Variedades diferenciáveis.** Rio de Janeiro: IMPA, 2007. 290 p. 55

MCINNES, C. R. **Solar sailing**: technology, dynamics and mission applications. Berlin: Springer, 1999. 2, 3, 5, 13, 15, 17, 20, 21, 22, 25, 46

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. New York: Cambridge University Press, 1999. 592 p. 9

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION (NASA). Planetary fact sheet - metric. 2020. Disponível em: <<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/>>. Acesso em: nov. 2020. 15, 31

OLIVEIRA FILHO, K. de S.; SARAIVA, M. de F. O. **Astronomia e astrofísica**. Porto Alegre: Livraria da Física, 2011. 15

ONIAS, H. H. dos S. **Bifurcações dinâmicas em circuitos eletrônicos**. 69 p. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2012. 48

PARKIN, K. L. G. The breakthrough starshot system model. **Acta Astronautica**, v. 152, p. 370–384, 2018. 3

PRADO, A. F. B. de A. **Trajетórias espaciais e manobras assistidas por gravidade**. São José dos Campos: INPE, 2001. 172 p. 7

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. and FLANNERY, B. P. **Numerical recipes in Fortran 77: the art of scientific computing**. Cambridge: Cambridge University Press, v. 1, 1992. 973 p. 42, 50

SANTOS, F. S. dos **Introdução a dinâmica de velas solares e seus equilíbrios no sistema Sol-Terra para baixa luminosidade**. 105 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos, 2015. 2, 3, 13, 14, 16, 17, 18, 21, 36, 46, 49

SANTOS, L. B. T. dos **Pontos Lagrangianos - aplicação para o asteroide 2001SN<sub>263</sub>**. 137 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, 2017.

SHANKARAN, S.; SHARMA, J. P.; ISHWAR, B. Equilibrium points in the generalised photogravitational non-planar restricted three body problem. **International Journal of Engineering, Science and Technology**, v. 3, n. 2, p. 63–67, 2011. 4

SAVI, M. A. **Dinâmica não-linear e caos**. Rio de Janeiro: E-Papers Serviços Editoriais, 2006. 304 p. 46

SZBEHELY, V. G. **Theory of orbits**: the restricted problem of three bodies. London: Academic Press, 1967. 668 p. 35, 36, 50

TANGE, O. **GNU parallel 2018**. Free Software Foundation, 2018. 106 p.

TODORAN, I. The photogravitational restricted three-body problem. **Astrophysics and Space Science**, v. 2015, n. 2, p. 237–243, 1994. 4

VAN DER HA, J.; MIMASU, Y.; TSUDA, Y.; MORI, O. Solar and thermal radiation models and flight evaluation for IKAROS solar sail. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 52, n. 3, p. 958–967, 2015. 3, 17, 18

WIGGINS, S. **Texts in applied mathematics**: introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York: Springer, 1990. 672 p. 55, 56

ZOTOS, E. E. Unveiling the influence of the radiation pressure in nature of orbits in the photogravitational restricted three-body problem. **Astrophysics and Space Science**, v. 360, n. 1, p. 1–20, 2015. 5