



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21d/2023/08.09.18.11-TDI

CONTROLE PREDITIVO ORBITAL PARA MANOBRAS DE RENDEZVOUS

Arthur Alex Felipe Barbosa Moreno

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Helio Koiti Kuga, e Valdemir Carrara, aprovada em 17 de maio de 2023.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/49K4JQE>>

INPE
São José dos Campos
2023

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Coordenação de Ensino, Pesquisa e Extensão (COEPE)
Divisão de Biblioteca (DIBIB)
CEP 12.227-010
São José dos Campos - SP - Brasil
Tel.:(012) 3208-6923/7348
E-mail: pubtc@inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):

Presidente:

Dra. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Coordenação-Geral de Ciências da Terra (CGCT)

Membros:

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação (CPG)
Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia, Tecnologia e Ciência Espaciais (CGCE)
Dr. Rafael Duarte Coelho dos Santos - Coordenação-Geral de Infraestrutura e Pesquisas Aplicadas (CGIP)
Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon
Clayton Martins Pereira - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)
André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Ivone Martins - Divisão de Biblioteca (DIBIB)
André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21d/2023/08.09.18.11-TDI

CONTROLE PREDITIVO ORBITAL PARA MANOBRAS DE RENDEZVOUS

Arthur Alex Felipe Barbosa Moreno

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Helio Koiti Kuga, e Valdemir Carrara, aprovada em 17 de maio de 2023.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/49K4JQE>>

INPE
São José dos Campos
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Moreno, Arthur Alex Felipe Barbosa.

M815c Controle preditivo orbital para manobras de rendezvous / Arthur Alex Felipe Barbosa Moreno. – São José dos Campos : INPE, 2023.

xxiv + 87 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21d/2023/08.09.18.11-TDI)

Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2023.

Orientadores : Drs. Helio Koiti Kuga, e Valdemir Carrara.

1. Rendezvous. 2. Controle preditivo. 3. Modelos de movimento relativo. I.Título.

CDU 629.076.66



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).



MINISTÉRIO DA
CIÊNCIA, TECNOLOGIA
E INOVAÇÃO



INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS
Serviço de Pós-Graduação - SEPGR

DEFESA FINAL DE DISSERTAÇÃO DE ARTHUR ALEX FELIPHE BARBOSA MORENO
REG. 806404/2020, BANCA Nº 092/2023

No dia 17 de maio de 2023, às 09h, na Rotunda - INPE, o(a) aluno(a) mencionado(a) acima defendeu seu trabalho final (apresentação oral seguida de arguição) perante uma Banca Examinadora, cujos membros estão listados abaixo. O(A) aluno(a) foi APROVADO(A) pela Banca Examinadora, por unanimidade, em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de Mestre em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, com a exigência de que o trabalho final a ser publicado deverá incorporar as correções sugeridas pela Banca Examinadora, com revisão pelo(s) orientador(es).

Novo Título: "CONTROLE PREDITIVO ORBITAL PARA MANOBRAS DE RENDEZVOUS"

Observações da banca: Orientadores ficam responsáveis pelas correções de texto necessárias.

Membros da banca:

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado – Presidente – INPE

Dr. Helio Koiti Kuga – Orientador – INPE

Dr. Valdemir Carrara – Orientador – INPE

Dr. Mário César Ricci – Membro Interno – INPE

Dr. Willer Gomes dos Santos – Membro Externo – ITA



Documento assinado eletronicamente por **Willer Gomes dos santos (E), Usuário Externo**, em 23/05/2023, às 10:57 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Chefe do Serviço de Pós-Graduação**, em 23/05/2023, às 14:40 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Mario Cesar Ricci, Tecnologista**, em 23/05/2023, às 15:25 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Helio Koiti Kuga (E), Usuário Externo**, em 23/05/2023, às 17:23 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Valdemir Carrara (E), Usuário Externo**, em 29/05/2023, às 12:16 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.mcti.gov.br/verifica.html>, informando o código verificador **11043643** e o código CRC **703E86AE**.

Referência: Processo nº 01340.003533/2023-50

SEI nº 11043643

Tempo

*“[...] that which we are, we are;
One equal temper of heroic hearts,
Made weak by time and fate, but strong in will
To strive, to seek, to find, and not to yield. ”*

LORD ALFRED TENNYSON
“Ulysses”, 1833

Amor

*“[...] Se um dia tiver que escolher entre o mundo e o amor lembre-se:
se escolher o mundo ficará sem o amor, mas se escolher o amor com
ele você conquistará o mundo. ”*

ALBERT EINSTEIN

Espírito

*“[...] O Senhor é o meu pastor; nada me faltará. Ele me faz repousar
em pastos verdejantes. Leva-me para junto das águas de descanso;
refrigera-me a alma. Guia-me pelas veredas da justiça por amor do
seu nome. Ainda que eu ande pelo vale da sombra da morte, não
temerei mal nenhum, porque tu estás comigo; o teu bordão e o teu
cajado me consolam.. ”*

SALMOS 23:1-4

*A meus pais **Maria** e **José**, e a minha esposa
Catharyna e filho **João***

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho não poderia ter chegado ao fim sem o precioso e misterioso apoio divino, assim eu ofereço a Ti, Senhor, o meu trabalho. A fé parece ter tomado boa parte dessa jornada que antecede o fim desta etapa. Não poderia deixar de mencionar o circuito percorrido do interior de Alagoas até aqui (sonhos de infância). Muitas madrugadas ensaiando este dia, muito suor e lágrimas foram derramadas em busca de um objetivo antigo.

Em seguida, este trabalho é para quem deu a vida pelos sonhos de uma criança do interior. Assim, aos meus pais, Maria, Josefa e José que me ensinaram sobre o amor e perseverança. A minha adorável família, em especial a minha esposa Catharyna e ao meu filho João, que me incentivaram e me reconduziram para o caminho da Ciência com amor e força. A minha sogra que cuida da minha família com carinho atentamente. As minhas irmãs Vi, Mi e Mo que me ensinaram sobre uma flor chamada esperança.

Aos meus mestres, em especial meu professor e orientador Hélio que me assistiu e me ajudou mesmo com meu trabalho silencioso. Aos professores do INPE e todos os profissionais envolvidos, em especial os professores do ETE/CMC: Antonio, Evandro, Marcelo, Mário, Valdemir, Ronan, Sérgio, Carina e tantos outros que me instruíram e me ensinaram sobre o universo e a fauna galáctica.

Aos meus amigos do INPE, em especial Pedro e Caio; e do ITA, em especial Prof. Rafael, Jorge, Thiago, Yuri e Benício, que mantiveram a chama acesa nas sombras da rotina. Aos meus amigos-irmãos de infância Túlio, Kelvyn, Beto e Dijalma que me mantiveram sorrindo nos encontros fora do lugar tão distante de casa.

Devo mencionar aqui que estou pisando sobre um chão sólido do sangue de heróis de quase 5 mil anos de história, a saber alquimistas, matemáticos, físicos, engenheiros, pensadores, artesãos, inventores, etc. Então, se vi algo a mais, parafraseando I. Newton, foi porque estava sob os ombros de gigantes.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais e as instituições de fomento do programa aeroespacial brasileiro, à CAPES pelo financiamento deste projeto de estudo.

RESUMO

Os últimos estudos sobre métodos de controle automático para as manobras de aproximação ou *rendezvous* tem focado na autonomia da espaçonave durante as manobras, garantia de segurança e execução de manobras improvisadas. A maioria das manobras de encontro orbital foi realizada em órbitas com excentricidade baixa, mas missões futuras exigirão em órbitas excêntricas, o que motiva o desenvolvimento de modelos matemáticos para a dinâmica de movimento relativo e métodos de controle automático mais versáteis. O problema de controle de satélites para a manobra *rendezvous* com a hipótese de que o satélite perseguidor está em uma órbita com baixa excentricidade foi largamente investigado, como também a solução provinda de controle preditivo com horizonte deslizante abordado aqui também já o foi. Tal solução encontra um conjunto de trajetórias subótimas da manobra, pela solução do problema de movimento relativo, ou seja, conduzir os módulos dos vetores de posição e velocidade relativa num referencial cartesiano próximo a zero. O modelo matemático da dinâmica do movimento relativo desempenha um papel fundamental nos algoritmos de controle preditivo. A grande maioria dos métodos de controle desenvolvidos utiliza modelos de movimento relativo, como as equações de Clohessy-Wiltshire (CW) para o caso de órbita circular do satélite alvo ou equações de Tschauner-Hempel (TH) para o caso de órbita elíptica. No entanto, a precisão desses modelos degrada rapidamente com o aumento da separação inicial entre os satélites, restringindo o conjunto de condições iniciais para as quais a manobra pode ser realizada com sucesso. Por esse motivo, o método de controle proposto utiliza um modelo completo, não linear e variante no tempo de movimento relativo além dos CW e TH. Assim, foi aplicado estes modelos ao controlador preditivo, possibilitando predição de saída do processo e estimar os estados. Este controlador preditivo foi construído sobre o paradigma convencional de programação quadrática para solução da manobra de *rendezvous* com restrições nas saídas e entradas, representando as saturações dos atuadores e limitações físicas de colisão. A utilização desta estrutura do MPC (*Model Predictive Control*) foi motivada pelas peculiaridades apresentadas ao problema de programação não-linear, que não garantem tempo previsível necessário para encontrar uma solução local. Assim, o algoritmo proposto considera os parâmetros constantes do modelo do movimento relativo dentro de um horizonte de predição. Ele também foi utilizado em duas órbitas alvos que foram adaptadas de duas missões bem conhecidas - a ISS (*International Space Station*) e o GPS (*Global Positioning System*), como também o satélite perseguidor foi adaptado de duas outras missões também conhecidas - *Dragon CRS* e ATV Edoardo. O controlador neste trabalho permite a manobra de *rendezvous* a partir de uma separação inicial entre satélites de mais de 2000 km, o que excede em muito a faixa de operação confiável dos modelos clássicos de movimento relativo orbital, apontando uma grande versatilidade do conjunto MPC e modelos lineares, tanto em órbitas excêntricas quanto em órbitas circulares.

Palavras-chave: *Rendezvous*. Controle Preditivo. Modelos de Movimento Relativo.

ORBITAL PREDICTIVE CONTROL FOR RENDEZVOUS MANEUVERS

ABSTRACT

The latest studies on automatic control methods for approach or rendezvous maneuvers have focused on spacecraft autonomy during the maneuvers, safety assurance, and execution of improvised maneuvers. While most orbital rendezvous maneuvers have been performed in orbits with low eccentricity, future missions will require orbits with higher eccentricity, which motivates the development of mathematical models for relative motion dynamics and more versatile automatic control methods. The control problem for satellites in rendezvous maneuvers, assuming the pursuing satellite is in an orbit with low eccentricity, has been extensively investigated, as well as the solution provided by predictive control with a sliding horizon, addressed here as well. This solution finds a set of suboptimal trajectories for the maneuver, leading the modules of the relative position and velocity vectors in a Cartesian reference frame to zero. The mathematical model of relative motion dynamics plays a fundamental role in predictive control algorithms. The majority of developed control methods utilize relative motion models, such as the Clohessy-Wiltshire (CW) equations for the case of the circular orbit of the target satellite or the Tschauner-Hempel (TH) equations for the case elliptical orbit. However, the accuracy of these models degrade rapidly as the initial separation between the satellites increases, restricting the set of initial conditions for a successful maneuver. For this reason, the proposed control method uses a complete, nonlinear, and time-variant model of relative motion, in addition to CW and TH models. This model was applied to the predictive controller, enabling the prediction of the process output and state estimation. The predictive controller was built upon the conventional paradigm of quadratic programming to solve the rendezvous maneuver with constraints on inputs and outputs, representing actuator saturations and physical collision limitations. The utilization of this MPC (Model Predictive Control) framework was motivated by the peculiarities presented in the nonlinear programming problem, which do not guarantee a predictable time required to find a local solution. Thus, the proposed algorithm considers the model parameters to be constant within a prediction horizon. It was also applied to two target orbits adapted from well-known missions - the International Space Station (ISS) and the Global Positioning System (GPS), as well as the pursuing satellite adapted from two other well-known missions - Dragon CRS and ATV Edoardo. The controller in this work allows for rendezvous maneuvers from an initial separation between satellites of over 2000 km, far exceeding the reliable operational range of classical orbital relative motion models, highlighting the great versatility of the MPC framework and linear models, both in eccentric and circular orbits.

Keywords: Rendezvous. Predictive Control. Relative Motion Models.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 Fases da manobra de <i>Rendezvous</i> orbital.	2
2.1 Leis de Kepler: Órbitas elípticas com o Sol como foco e áreas iguais em períodos iguais.	9
2.2 Elementos orbitais e geometria da órbita elíptica.	11
2.3 Sistema de coordenadas inercial.	12
2.4 Movimento orbital no plano.	13
2.5 Elipse circunscrita e anomalia excêntrica.	17
2.6 Magnitude das perturbações orbitais <i>versus</i> raio vetor do satélite.	19
2.7 Local-Vertical, Local-horizontal (LVLH).	20
2.8 Sumário dos modelos do movimento relativo.	29
3.1 Mecanismo do Controlador Preditivo.	33
4.1 Diagrama de blocos em <i>Simulink</i>	45
4.2 Fluxograma de Execução da Malha MPC.	48
4.3 Cenário I - CW: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.	53
4.4 Cenário I - CW: Vetor de sinais de controle.	54
4.5 Cenário I - CW: Módulo dos vetores de posição e velocidade relativas no referencial LVLH.	55
4.6 Cenário I - TH: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.	56
4.7 Cenário I - TH: Vetor de sinais de controle.	56
4.8 Cenário I - TH: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e velocidade relativas no referencial LVLH.	57
4.9 Cenário I - NERM: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.	58
4.10 Cenário I - NERM: Vetor de sinais de controle.	58
4.11 Cenário I - NERM: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e velocidade relativas no referencial LVLH.	59
4.12 Cenário II - CW: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.	61
4.13 Cenário II - CW: Vetor de sinais de controle.	61
4.14 Cenário II - CW: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH.	62

4.15	Cenário II - TH: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.	63
4.16	Cenário II - TH: Vetor de sinais de controle.	64
4.17	Cenário II - TH: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH.	64
4.18	Cenário II - NERM: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.	65
4.19	Cenário II - NERM: Vetor de sinais de controle.	66
4.20	Cenário II - NERM: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH.	67
4.21	Cenário III - CW: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.	68
4.22	Cenário III - CW: Vetor de sinais de controle.	69
4.23	Cenário III - CW: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH.	69
4.24	Cenário III - TH: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.	70
4.25	Cenário III - TH: Vetor de sinais de controle.	71
4.26	Cenário III - TH: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH.	72
4.27	Cenário III - NERM: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.	73
4.28	Cenário III - NERM: Vetor de sinais de controle.	73
4.29	Cenário III - NERM: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH.	74

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
4.1 Parâmetros adaptados do ATV e <i>Dragon</i>	52
4.2 Parâmetros MPC e de Simulação.	52
4.3 Cenário I - Parâmetros iniciais de <i>rendezvous</i> com a ISS $e \approx 0$	53
4.4 Cenário II - Parâmetros iniciais de <i>rendezvous</i> com o GPS $e \approx 0$	60
4.5 Cenário III - Parâmetros iniciais de <i>rendezvous</i> com o GPS $e > 0$	67
4.6 Sumário dos resultados do Cenário I.	75
4.7 Sumário dos resultados do Cenário II.	76
4.8 Sumário dos resultados do Cenário III.	77

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ATV	–	<i>Automated Transfer Vehicle</i> (Veículo de Transferência Automatizado)
CW	–	Clohessy-Wiltshire
DART	–	<i>Demonstration for Autonomous Rendezvous Technology</i> (Demonstração da Tecnologia de Encontro Autônomo)
DMC	–	<i>Dynamic Matrix Control</i> (Controle por Matriz Dinâmica)
ECI	–	<i>Earth Centered Inertial</i> (Inercial Centrado na Terra)
EDO	–	Equação Diferencial Ordinária
ESA	–	<i>European Space Agency</i> (Agência Espacial Europeia)
FIR	–	<i>Finite Impulse Response</i> (Resposta ao Impulso Finito)
GNC	–	<i>Guidance, Navigation and Control</i> (Guiamento, Navegação e Controle)
GNSS	–	<i>Global Navigation Satellite System</i> Sistema de Navegação Global por Satélite
GPS	–	<i>Global Positioning System</i> (Sistema de Posicionamento Global)
HCW	–	Hill-Clohessy-Wiltshire
IDCOM	–	<i>Identification and Command</i> (Identificação e Comando)
IPOPT	–	<i>Interior Point OPTimizer</i> (Otimizador de Ponto Interior)
ISS	–	<i>International Space Station</i> (Estação Espacial Internacional)
Lageos	–	<i>Laser Geodynamics Satellite</i> (Satélite de Geodinâmica a Laser)
LEO	–	<i>Low Earth Orbits</i> (Órbitas Terrestre Baixa)
LERM	–	<i>Linear Equations Relative Motion</i> (Equações Lineares do Movimento Relativo)
LQG	–	<i>Linear Quadratic Gaussian</i> (Linear Quadrático Gaussiano)
LQR	–	<i>Linear Quadratic Regulator</i> (Regulador Linear Quadrático)
MEO	–	<i>Medium Earth Orbits</i> (Órbitas Terrestre Média)
MIMO	–	<i>Multiple Input Multiple Output</i> (Múltiplas Entradas-Múltiplas Saídas)
MPC	–	<i>Model Predictive Control</i> - Controle Preditivo baseado em Modelo
MPHC	–	<i>Model Predictive Heuristic Control</i> (Controle Preditivo Heurístico baseado em Modelo)
NASA	–	<i>National Aeronautics and Space Administration</i> (Administração Nacional Espacial e Aeronáutica)
NERM	–	<i>Nonlinear Equations Relative Motion</i> (Equações Não-lineares do Movimento Relativo)
PCO	–	Problema de Controle Ótimo
PID	–	<i>Proportional Integral Derivative</i> (Proporcional Integral Derivativo)
PNL	–	Programação Não-Linear
PPQ	–	Problema de Programação Quadrática
PQ	–	Programação Quadrática
QDMC	–	<i>Quadratic Dynamic Matrix Control</i> (Controle Quadrático por Matriz Dinâmica)
RAAN	–	<i>Right Ascension of the Ascending Node</i> (Ascensão Reta do Nodo Ascendente)

- RVD – *Rendezvous and Docking* (Encontro e Acoplamento)
- SISO – *Single Input Single Output* (Uma Entrada Uma Saída)
- SNOPT – *Sparse Nonlinear OPTimizer* (Otimizador Não Linear Esperso)
- SP – Satélite Perseguidor
- TDRS – *Tracking and Data Relay Satellite*
(Sistema de Rastreamento e Retransmissão de Dados via Satélite)
- TH – Tschaunner-Hempel
- XSS-11 – *Experimental Satellite System-11* (Sistema Experimental de Satélite 11)
- ZOH – Zero Order Hold (Segurador de Ordem Zero)

LISTA DE SÍMBOLOS

$\ \cdot \ $	– módulo de um vetor
G	– contante gravitacional universal
μ	– constante gravitacional terrestre
m_i	– massa do corpo i
ρ	– distância relativa entre os satélites alvo e perseguidor
x_i	– $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ estados do sistema
r_a	– distância radial do alvo
r_p	– distância radial do perseguidor
a	– semi-eixo maior da órbita
e	– excentricidade da órbita
i	– inclinação da órbita
Ω	– ascensão reta do nodo ascendente da órbita
ω	– argumento do perigeu da órbita
f	– anomalia verdadeira da órbita
M	– anomalia média da órbita
E	– anomalia excêntrica da órbita
n	– movimento médio
T_i ou P	– período orbital do corpo celeste i
\vec{H}	– vetor quantidade de movimento do corpo
\vec{h}	– vetor quantidade de movimento específico do corpo
$\{\hat{i}_r, \hat{i}_\theta, \hat{i}_h\}$	– tríade de vetores ortonormais
\vec{v}	– velocidade do corpo
(\times)	– produto vetorial
\vec{e}	– vetor excentricidade
p	– <i>semilatus rectum</i>
cos, sen e tg	– funções trigonométricas cosseno, seno, tangente
arccos, arctg e arctg	– funções trigonométricas inversas do cosseno, seno e tangente
t	– tempo contínuo
\vec{r}_p	– vetor distância radial do satélite perseguidor
\vec{r}_a	– vetor distância radial do satélite alvo
$\dot{\vec{r}}_p$	– vetor velocidade radial do satélite perseguidor
$\dot{\vec{r}}_a$	– vetor velocidade radial do satélite alvo
\vec{f}_a	– vetor da primeira derivada de f do satélite alvo
$\ddot{\vec{f}}_a$	– vetor da segunda derivada de f do satélite alvo
$\{\hat{o}_r, \hat{o}_\theta, \hat{o}_h\}$	– tríade de vetores ortonormais
$\vec{\alpha}$	– aceleração angular inercial do LVLH
$\vec{\omega}$	– velocidade angular inercial do LVLH
\dot{f}_a	– primeira derivada de f do satélite alvo
\ddot{f}_a	– segunda derivada de f do satélite alvo
A e $A(t)$	– matriz de estados do movimento relativo
B e $B(t)$	– matriz de entradas do movimento relativo

A_p	– matriz de estados de variação de massa
B_p	– matriz de entradas de variação de massa
\vec{x}	– vetor de estados do movimento relativo
\vec{u}	– vetor de entradas do movimento relativo
\vec{x}_p	– vetor de estados de variação de massa
\vec{u}_p	– vetor de entradas de variação de massa
I_p	– impulso específico
F_p	– empuxo causado pelos propulsores
\dot{m}	– variação de massa do propelente
m_p ou m_e	– massa do propelente expelida
g	– aceleração da gravidade na superfície da Terra
$\dim\{\cdot\}$	– operador de dimensão de matriz
$\forall; \exists$	– para todos ou qualquer; algum ou existe
\mathbf{I}_n	– matriz identidade com dimensão n
$\mathbf{0}_n$	– matriz nula com dimensão n
\vec{x}	– vetor de estados do movimento relativo de TH
\vec{x}'	– primeira derivada do vetor de estados TH
$\mathbf{T}(f)$	– matriz de transformação TH
$\mathbf{H}(f)$	– matriz de estados no domínio transformado TH
\check{x}_i	– componentes do vetor de estados do movimento relativo TH
\check{x}'_i	– componentes da primeira derivada do vetor do modelo TH
\mathbf{C}_w	– matriz de estados do movimento relativo de CW
\vec{x}	– vetor de estados do movimento relativo de TH
\vec{x}'	– primeira derivada vetor do modelo TH
k	– instante de amostragem
$\Delta \mathbf{u}(k)$	– vetor de incrementos de controle discretizada
$\mathbf{u}(k - N_c)$	– sequência de vetores de controle discretizada
N_c	– horizonte de controle
$\mathbf{x}(k - N_p)$	– sequência de vetores de estado discretizada
N_p	– horizonte de predição
J	– função objetivo
\check{x}'_i	– componentes da primeira derivada do vetor de estados TH
\check{C}_w	– matriz de estados do movimento relativo TH
\mathbf{y}^{min} e \mathbf{y}^{max}	– restrição da saída do sistema
\mathbf{x}^{min} e \mathbf{x}^{max}	– restrição da saída do sistema
$\Delta \mathbf{u}^{min}$ e $\Delta \mathbf{u}^{max}$	– saturação de incrementos de controle do sistema
\mathbf{u}^{min} e \mathbf{u}^{max}	– saturação de controle do sistema
$\min J$	– minimização da Função Custo J

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Problemática	2
1.2 Revisão bibliográfica	3
1.3 Escopo do trabalho	4
1.4 Objetivos	5
1.5 Organização	5
2 MECÂNICA CELESTE	7
2.1 Movimento orbital	7
2.1.1 Leis de Kepler	8
2.1.2 Aspectos geométricos orbitais	8
2.1.3 O problema de dois corpos	10
2.1.4 A integral do movimento orbital	13
2.1.5 Equação de Kepler	15
2.1.6 Perturbações de órbita	18
2.2 Movimento relativo orbital	20
2.2.1 Equações não lineares do movimento relativo	20
2.2.2 Equações lineares do movimento relativo	22
2.2.3 Equações de Tschauner-Hempel	25
2.2.4 Equações de Clohessy-Wiltshire	27
2.2.5 Sumário dos modelos de movimento relativo	28
3 CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO - MPC .	31
3.1 História do controle preditivo	31
3.2 Elementos de controle preditivo	32
3.3 Formalismo do MPC	33
3.4 Características do MPC	35
3.5 Controle preditivo do movimento relativo de satélites	36
3.5.1 Modelo não-linear	37
3.5.2 Modelo linear	39
3.5.3 Modelo linear com integrador	39
3.5.4 Predição de saída	40
3.5.5 Otimização dinâmica com restrição nas entradas e saídas	42

4	MPC EM MANOBRAS DE <i>RENDEZVOUS</i>	45
4.1	Simulação e controle da manobra orbital	45
4.2	Exemplos numéricos	49
4.2.1	Cenários para o <i>Rendezvous</i>	49
4.2.1.1	ESA ATV Edoardo	50
4.2.1.2	<i>Dragon CRS Space X</i>	51
4.2.1.3	Satélite perseguidor	51
4.2.2	Cenário I - <i>rendezvous</i> com a ISS - $e \approx 0$	52
4.2.2.1	Cenário I - resultados das simulações - equações CW	53
4.2.2.2	Cenário I - resultados das simulações - equações TH	55
4.2.2.3	Cenário I - resultados das simulações - equações NERM	57
4.2.3	Cenário II: <i>rendezvous</i> com o GPS - $e \approx 0$	60
4.2.3.1	Cenário II - resultados das simulações - equações CW	60
4.2.3.2	Cenário II - resultados das simulações - equações TH	63
4.2.3.3	Cenário II - resultados das simulações - equações NERM	65
4.2.4	Cenário III: <i>rendezvous</i> com o GPS - $e = 0,3$	67
4.2.4.1	Cenário III - resultados das simulações - equações CW	68
4.2.4.2	Cenário III - resultados das simulações - equações TH	70
4.2.4.3	Cenário III - resultados das simulações - equações NERM	72
4.3	Análise das simulações de <i>Rendezvous</i>	75
4.3.1	Cenário I	75
4.3.2	Cenário II	76
4.3.3	Cenário III	77
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	79
5.1	Principais contribuições	79
5.2	Trabalhos futuros	80
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	83

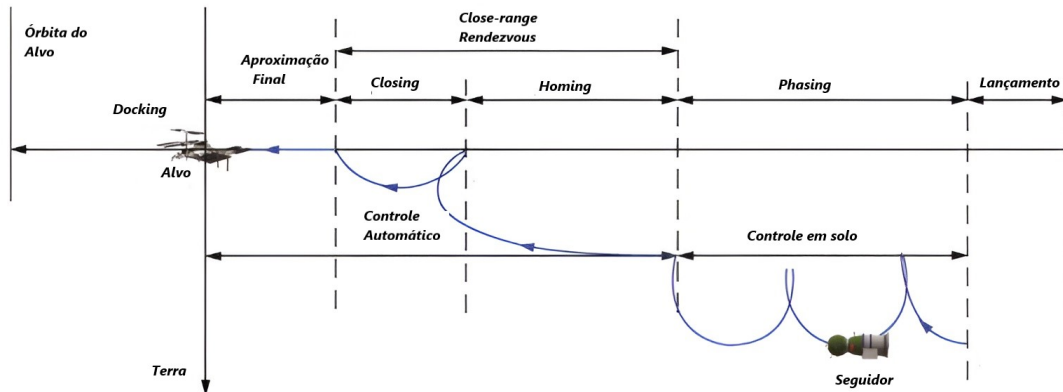
1 INTRODUÇÃO

As operações com manobras orbitais que envolvem dois satélites e culminam em um encontro orbital são comumente conhecidas como manobras de *Rendezvous* e *Docking*, também referidas pelo acrônimo RVD (XIE et al., 2018). Segundo Botelho et al. (2020), estas manobras de encontro orbital se dá quando dois satélites alcançam, ao mesmo tempo, a mesma posição e velocidade num sistema de coordenadas com referencial inercial. Esta manobra é uma tecnologia fundamental e necessária para missões espaciais como montagem em órbita de unidades maiores, reabastecimento de plataformas e estações espaciais, reparo de espaçonaves em órbita ou captura e retorno de espaçonaves à Terra (FEHSE, 2008) .

Segundo Fehse (2008), o primeiro *rendezvous* (encontro) e *docking* (acoplamento) entre duas espaçonaves ocorreu em março de 1966, o qual foi realizado por Neil Armstrong e Dave Scott manualmente dentro da espaçonave *Gemini* e acoplaram com uma espaçonave alvo não tripulada, chamada *Agena*. Contudo, a primeira manobra de *rendezvous* automática ocorreu apenas em 1967, quando as espaçonaves soviéticas Cosmos 186 e 188 se acoplaram. Assim, nas últimas cinco décadas foram realizadas centenas de missões de encontro orbital. O trabalho seminal de Fehse (2008) mostra a quantidade de espaçonaves envolvidas nessas missões de RVD e estão divididas em mais de dez séries, incluindo Gemini, Apollo, ônibus espacial, Demonstração da Tecnologia de Encontro Autônomo (DART), Operações Robóticas de Transporte Espacial Autônomo (ASTRO) dos EUA, as espaçonaves Soyuz e Progress da antiga União Soviética, Veículo de Transferência Automatizado (ATV) da Agência Espacial Europeia (ESA), espaçonave Shenzhou da China e a Estação Espacial Internacional (*International Space Station* - ISS).

As manobras RVD assumem que o movimento é gerado a partir do satélite perseguidor, comumente chamado "chaser", em relação a um satélite alvo, frequentemente referido como "target". A Figura 1.1 mostra as fases do processo de aproximação orbital: *phasing*, *homing*, *closing*, aproximação final e *docking*, como descrito por Luo e Tang (2014). Segundo Fehse (2008), após o lançamento, inicia-se o *phasing*, o qual o satélite perseguidor executa as manobras sob a orientação da estação de controle em solo, mantendo os objetivos de ajuste do ângulo de fase entre os dois satélites, aumentando a altitude orbital, reduzindo as diferenças do plano orbital e iniciando a navegação relativa. Posteriormente, na fase de *homing*, inicia-se a fase autônoma do satélite, visando a eliminação de erros de posicionamento decorrentes de atrasos na telemetria com a estação de solo. Esta fase é caracterizada pela redução de

Figura 1.1 - Fases da manobra de *Rendezvous* orbital.



Fonte: Adaptado de Luo e Tang (2014).

velocidade relativa e estabelecimento da órbita principal do satélite dado a posição final em relação ao satélite alvo. Na fase de *closing*, o perseguidor reduz ainda mais a distância relativa, e sua posição é transferida para um ponto de manutenção da órbita a centenas de metros do satélite alvo. Na fase de aproximação final, antes da atracação, o perseguidor aproxima-se do alvo, com as posições e velocidades relativas próximas a zero.

Neste trabalho, vale ressaltar que há uma pequena distinção no que concerne o planejamento de manobras orbitais. O planejamento denominado de manobras de transferência orbital é um método que busca encontrar variações tipicamente impulsivas de velocidades necessárias para que determinada espaçonave alcance órbitas desejadas, como por exemplo a manobra de transferência orbital de Hohmann, cujas trajetórias ou restrições obtidas não são tão importantes quanto as condições terminais orbitais, como descritos por Chobotov (2002). Contudo, o planejamento de manobras por intermédio de controle automático pode realizar as manobras de RVD utilizando-se de uma série de ações de controle contínua ou discretizada (em incrementos) para atingir as órbitas desejadas (alvo), como ilustrado na Figura 1.1.

1.1 Problemática

Este trabalho trata o controle da manobra de encontro orbital como um controle do movimento relativo entre o satélite perseguidor e o alvo, ou seja, controle da posição e velocidade relativas. O movimento relativo entre dois satélites é descrito por vários modelos matemáticos. O modelo matemático clássico é encontrado pelo modelo de Clohessy-Wiltshire (CW), descritos por um sistema de equações diferenciais ordi-

nárias lineares e invariantes no tempo (CLOHESSY W. H.; WILTISHIRE, 1960). Essa simplificação do modelo assume uma órbita circular para o satélite alvo, com validade apenas para pequenas separações iniciais entre os satélites de aproximadamente 1 km (FELISIAK, 2015).

Este trabalho está fundamentalmente dividido em duas partes, a saber a mecânica orbital e a teoria de controle. O primeiro é representado pela modelagem matemática do movimento relativo orbital, enquanto o último fornece ferramentas para encontrar uma solução para o problema de *rendezvous* nas fases que prevalece o controle automático, como mostra a Figura 1.1. O autor utiliza-se de uma técnica de controle como solução para o problema de *rendezvous*, cujo apresenta uma separação inicial entre os satélites perseguidor e alvo da ordem de centenas de metros.

Outro modelo clássico do movimento relativo orbital é o modelo representado pelas equações de Tschauner-Hempel (TH). Embora este modelo descreva órbitas elípticas por equações diferenciais lineares e variantes no tempo, ele também apresenta a limitação para aplicações a pequenas separações iniciais entre os satélites (TSCHAUNER; HEMPEL, 1965). Neste trabalho, a técnica de controle proposta considera o movimento relativo descrito por um modelo não linear e variante no tempo, para fins de comparação com os modelos CW e TH, sob suspeita de melhoria no comportamento em malha fechada e desprender-se das limitações iniciais de distâncias relativas entre os satélites.

1.2 Revisão bibliográfica

Na literatura de modelos de movimento relativo é possível ver que dos primeiros a encontrar uma solução em forma fechada para o movimento relativo linearizado no caso de órbitas de referência elípticas foi Lawden (1954). Yamanaka e Ankersen (2002) propuseram uma solução analítica para as equações de Tschauner-Hempel dada na forma de uma matriz de transição de estado explícita no tempo. O encontro orbital de tempo mínimo entre órbitas elípticas vizinhas foi estudado por Alfriend e Kashiwagi (1969). Kechichian (1992) descreveu uma aplicação das equações a uma trajetória de encontro com uma distância relativa inicial de 2000 km. Gim e Alfriend (2003) derivaram uma matriz de transição de estado complicada para órbitas elípticas sob perturbações. Uma alternativa à descrição usando coordenadas cartesianas é a utilização de equações diferenciais utilizando-se de elementos orbitais, denominada de Equações Variacionais de Gauss. Este modelo tem sua precisão quase indiferente ao aumento da separação inicial em comparação com os modelos que empregam coordenadas cartesianas, conforme mostrado em Okasha e Newman

(2014).

Na literatura de controle do movimento relativo orbital já foi resolvido a partir de uma grande variedade de abordagens, tais como: controle PID (Proporcional Integral Derivativo) (OKASHA; NEWMAN, 2014), Regulador linear-quadrático (FERREIRA, 2020), controlador LQG (*Linear Quadratic Gaussian*), teoria de Lyapunov (WEISS et al., 2015), Campos Potenciais Artificiais (BEVILACQUA et al., 2011), e sobretudo o controle preditivo baseado em modelo (JEWISON et al., 2015). O destaque para o controle preditivo baseado em modelo (ou *Model Predictive Control-MPC*) se dá por sua versatilidade em várias situações, como: para os sistemas lineares e não lineares; para os sistemas SISO (*Single-Input Single-Output*) e MIMO (*Multiple-Input Multiple Output*); para os sistemas de parâmetros variantes e invariantes no tempo; além disso, lida com as restrições de entradas, saídas e estados dentro de uma algoritmo de otimização, como descrito por Maciejowski (2002).

1.3 Escopo do trabalho

Por um lado, este trabalho apresenta um foco na derivação de alguns modelos matemáticos adequados, a partir do problema de dois corpos, que sistematize o conhecimento, descrevendo o movimento relativo orbital kepleriano e a variação de massa do satélite perseguidor resultante da expulsão de propelente. Por outro lado, este trabalho mostra também como solucionar o problema de *rendezvous*, utilizando-se de dois modelos clássicos (CW e TH) e um modelo não linear do movimento relativo, a partir de uma técnica de controle preditivo, a saber o MPC.

Neste trabalho, o MPC desempenha o papel essencial de mitigar os efeitos da variabilidade dos parâmetros do modelo e as limitações impostas a condições iniciais de pequenas separações entre satélites. No entanto, o algoritmo de controle preditivo apresentado é o convencional, por ter em seu núcleo uma função de custo quadrática. Além disso, a solução de encontro orbital se dá nas fases orbital que compreendem distâncias relativas da ordem de metros, como o *closing*, até distâncias comumente reservadas para estágio de *phasing*, por exemplo de milhares de quilômetros. Esta dissertação está focada no projeto do controlador preditivo e apresenta uma descrição detalhada da estrutura do controlador e da evolução dos modelos de movimento relativo orbital.

1.4 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é realizar a manobra de *rendezvous* por intermédio de modelos do movimento relativo orbital e do controle preditivo de uma forma que consigam driblar os efeitos não lineares e a variação dos parâmetros de massa do satélite e da órbita durante a manobra. Assim, uma parte do objetivo desta dissertação é modelar o movimento relativo orbital. A outra parte é implementar o controlador preditivo que possibilite a manobra de encontro orbital. É possível desmiuçar o objetivo deste trabalho nos tópicos a seguir:

- Estabelecer um conjunto de equações que represente o movimento relativo orbital, não-lineares e lineares com parâmetros variantes e invariantes no tempo;
- Compilar esse conjunto em modelos de movimento relativo em representação em espaço de estados;
- Engendrar um modelo aumentado que consiga compactar as informações da dinâmica do movimento relativo e da variação de massa do satélite durante a manobra;
- Construir uma lei de controle preditivo, com restrições baseadas na saturação das entradas e das saídas, representando a limitação na excursão de trabalho dos atuadores e das posições e velocidades relativas;
- Conduzir os estados de movimento relativo orbital para as referências dados os objetivos de desempenho do controlador;
- Realizar testes no ambiente de simulação numérica para constatação dos objetivos deste trabalho, em cenários com órbitas baseadas em satélites mundialmente conhecidos.

1.5 Organização

Este trabalho está organizado no formato a seguir:

- O Capítulo 2 apresenta os modelos matemáticos de descrição do movimento relativo não-linear, linear, e linearizados, variantes e invariantes no tempo, apresentando suas principais diferenças conceituais e matemáticas.

- O Capítulo 3 apresenta a técnica e os paradigmas de controle preditivo, com restrição de entradas e saídas.
- O Capítulo 4 apresenta o MPC aplicado ao problema de manobras de *rendezvous* e o ambiente de simulação numérica utilizando-se de missões reais para validação do que foi proposto, intermédio de comparação entre os diversos modelos internos para o MPC para solução do problema de *rendezvous*.
- Por fim, no Capítulo 5 mostra o fechamento do trabalho, os objetivos atendidos e as perspectivas futuras.

2 MECÂNICA CELESTE

As equações que governam a mecânica celeste será preparada para descrever o movimento relativo entre dois satélites. Assim, convenientemente o satélite é visto como um ponto material similarmente ao raciocínio empregado na maioria dos trabalhos, sobretudo em Sherrill (2013); Felisiak (2015); Jewison et al. (2015). A primeira parte deste capítulo se dedica as leis básicas da mecânica orbital que descrevem o movimento de um satélite em relação à Terra, desenvolvidas por dois matemáticos do século XVII: Johannes Kepler e Isaac Newton. Posteriormente, é discutido os princípios da mecânica celeste sob o problema do movimento relativo entre objetos em órbitas vizinhas.

Além disso, a notação vetorial e matricial empregada nesta seção atende o formalismo a seguir:

- Os vetores unitários são denotados por letras minúsculas com acento circunflexo, por exemplo \hat{x} ;
- Os vetores, no domínio da anomalia verdadeira f , são representadas por acento bráquia, por exemplo \check{x} ;
- Os vetores e suas derivadas, no domínio de tempo contínuo, t , apresentam setas sob letras minúsculas ou maiúsculas, por exemplo \vec{x} ou \vec{X} ;
- As derivadas dos vetores, no domínio de tempo contínuo, possuem um ponto acima do letra, por exemplo \dot{x} ; as derivadas, no domínio da anomalia verdadeira, f , são representadas por acento bráquia, por exemplo \check{x} ;
- As matrizes estão denotadas por letras maiúsculas em negrito, por exemplo **X**;
- Os escalares estão representados por letras minúsculas, por exemplo x .

2.1 Movimento orbital

Neste trabalho, o movimento orbital em relação à Terra é assumido como um movimento kepleriano, enquanto as equações de movimento são derivadas usando a Lei da Gravitação Universal de Newton. A teoria descrita nesta seção culmina no problema de dois corpos. O escopo dos problemas apresentados aqui foi limitado apenas àqueles que são relevantes para esta dissertação.

2.1.1 Leis de Kepler

O primeiro grande sucessor de Copérnico foi o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, o qual tinha observações planetárias mais precisas determinando as posições dos planetas para aproximadamente 1 minuto do arco ($1/60^\circ$) (WERTZ, 2009). Em 1601, Brahe deu a Johannes Kepler (seu assistente) suas observações do movimento planetário. Os trabalhos de Brahe, sobretudo a órbita de Marte, indicavam desvios relevantes do modelo circular de Copérnico. Assim, despertou a curiosidade de Kepler, que conseguiu explicá-las pelo modelo das cônicas, sobretudo o elíptico, vide Vallado e Wertz (2013); Chobotov (2002). Segundo o trabalho seminal de Wertz (2009), entre os anos de 1609 a 1619, Kepler publicou seu trabalho mais famoso, chamado de *Mysterium Cosmographicum* (O Mistério Cosmográfico), por intermédio das três leis, como descrito a seguir:

- a) Lei das Órbitas - A órbita de cada planeta é uma elipse com o Sol em um dos focos, como descrito na Figura 2.1.
- b) Lei das áreas - O raio vetor de cada planeta em relação ao Sol como origem varre áreas iguais dentro da elipse em intervalos de tempo iguais, como descrito na Figura 2.1.
- c) Lei dos Períodos - A relação dos quadrados dos períodos orbitais, T_i entre dois planetas é igual à relação do cubo do semi-eixo maior, a_i , de suas órbitas, como descrito pela equação abaixo.

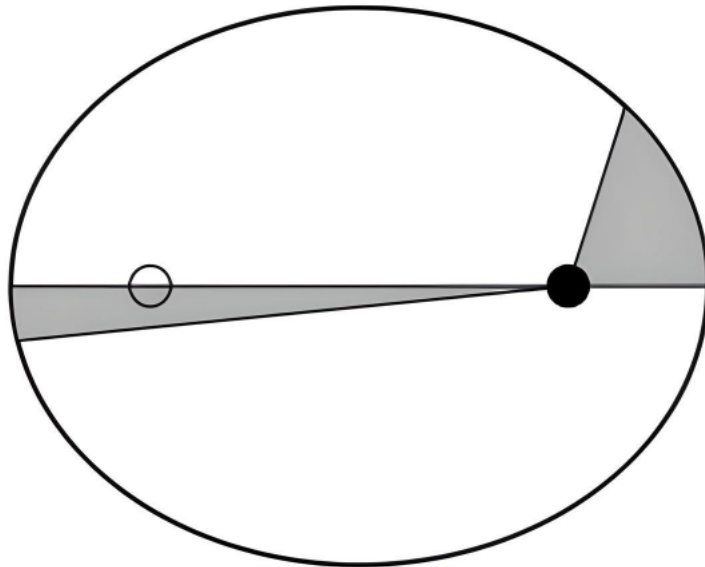
$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$$

Contudo, as Leis de Kepler eram descritivas, não uma discussão abrangente sobre o movimento planetário. Então, nos anos 1665 - 1667, entre o desenvolvimento dos fundamentos do cálculo diferencial e das famosas leis do movimento, Newton descobriu a lei da gravitação universal, e conseqüentemente a solução analítica do problema de dois corpos. No entanto, essas conquistas revolucionárias só foram publicadas 20 anos depois, em 1687, como o famoso trabalho: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, descrito em Chobotov (2002); Curtis (2010).

2.1.2 Aspectos geométricos orbitais

Um sistema de coordenadas representa um referencial, com eixos dispostos ortogonalmente. O sistema de coordenadas, utilizado aqui como referencial inercial, cha-

Figura 2.1 - Leis de Kepler: Órbitas elípticas com o Sol como foco e áreas iguais em períodos iguais.



Fonte: Sherrill (2013).

mado pelo acrônimo ECI (*Earth-Centered-Inertial*), tem sua origem no centro da Terra, onde o eixo X aponta para o ponto Vernal ou de Áries, simbolizado por Υ , o eixo Z passa pelo Polo Norte geográfico e o eixo Y encontra-se no plano equatorial e completando a tríade ortonormal. No mais, este sistema pode descrever completamente os estados de um satélite por seis parâmetros independentes: posição (x, y, z) e velocidade $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Contudo, é intuitivo avaliar a órbita de um satélite por intermédio de um conjunto de parâmetros chamados de elementos orbitais.

Assim, apenas cinco dos seis parâmetros necessários para descrever os estados do satélite são invariantes e descrevem tamanho, forma e orientação da órbita, como descrito na Figura 2.2. As definições que se seguem podem ser encontradas em uma vasta literatura, entre as quais: Kuga et al. (2012); Wertz (2009); Chobotov (2002), a saber:

- a : O semi-eixo maior descreve o tamanho da elipse;
- e : A excentricidade da órbita que descreve a forma da elipse;
- i : A inclinação, ou ângulo, do plano orbital a partir do equador;
- Ω : A ascensão reta do nodo ascendente, ou RAAN (*Right Ascension of the*

Ascending Node), é o ângulo do equinócio vernal ao ponto no equador onde o satélite faz sua travessia de sul para norte;

- ω : O argumento do perigeu é o ângulo do nodo ascendente ao perigeu;
- f : A anomalia verdadeira representa o ângulo entre a posição atual do satélite na órbita e o perigeu.

Como pode ser visto na Figura 2.2, o ponto da elipse mais próximo do foco é chamado de periápice, em oposição temos o apoápice, definido como o ponto na elipse mais distante do foco. O foco está localizado a uma distância ae do centro geométrico da elipse. A anomalia verdadeira é medida a partir do periápice, ocorrendo quando $f = 0$.

2.1.3 O problema de dois corpos

Como descrito em Wertz (2009), no trabalho de Isaac Newton, em *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, foram introduzidas as três leis fundamentais da mecânica clássica. A solução analítica do problema de dois corpos, que pode descrever o movimento de um corpo celeste em relação a outro, começa com uma representação matemática da Segunda Lei de Newton.

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (2.1)$$

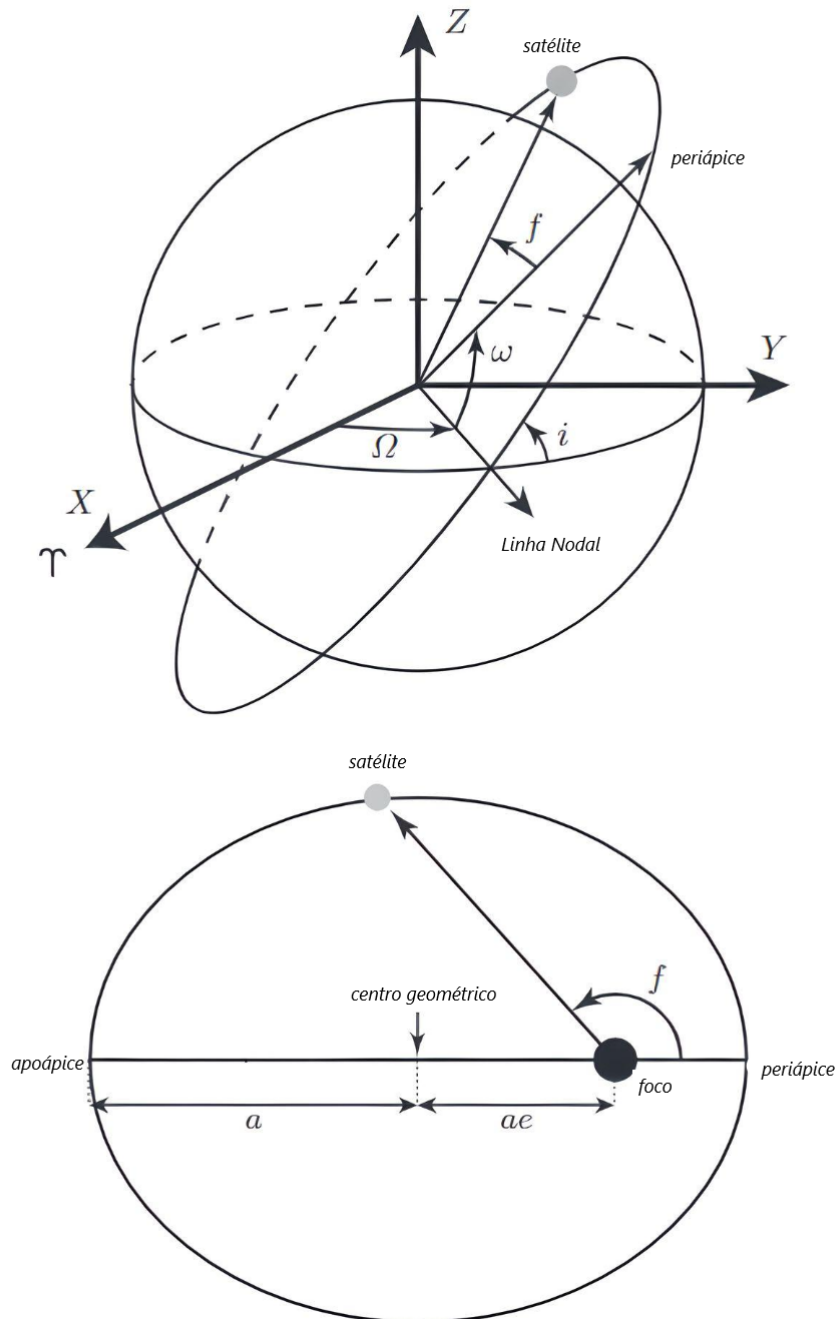
Aqui, \vec{F} representa as forças que atuam sobre um objeto de massa, m , e $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ representa a aceleração do objeto. Então, considere o movimento de duas massas puntiformes em um sistema de coordenadas inercial mostrado na Figura 2.3.

As massas pontuais são atraídas simultaneamente entre si, com uma magnitude dada pela Lei da Gravitação Universal de Newton, logo

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \frac{G m_1 m_2 \vec{r}}{r^2} \quad (2.2)$$

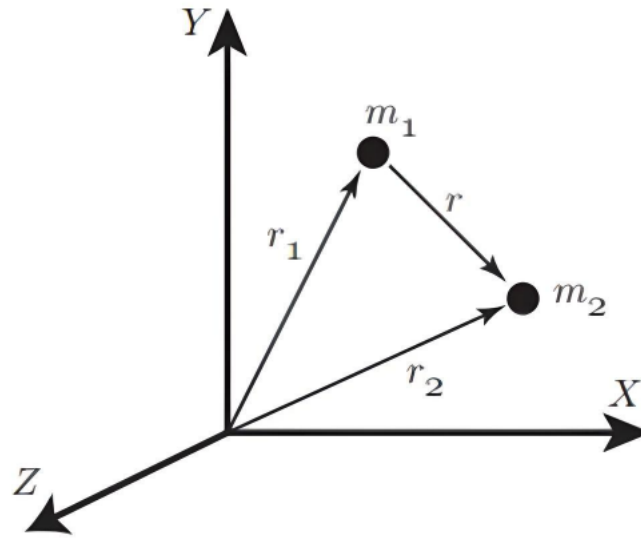
Em que $G = 6,674 \cdot 10^{11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ é a constante gravitacional, m_1 e m_2 são as massas dos corpos e r é a distância entre o centro das massas. Aplicando, a Equação 2.2 na Equação 2.1, temos:

Figura 2.2 - Elementos orbitais e geometria da órbita elíptica.



Fonte: Adaptado de Felisiak (2015).

Figura 2.3 - Sistema de coordenadas inercial.



Fonte: Sherrill (2013).

$$m_1 \vec{r}_1 = \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.3)$$

$$m_2 \vec{r}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.4)$$

Logo,

$$\vec{r}_1 = \frac{Gm_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.5)$$

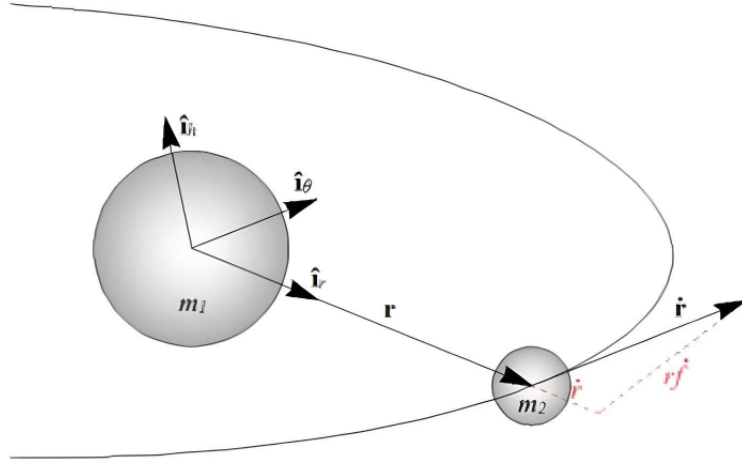
$$\vec{r}_2 = -\frac{Gm_1}{r^3} \vec{r} \quad (2.6)$$

Se $\mu = G(m_1 + m_2)$ e $m_1 \gg m_2$, então

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.7)$$

$$\vec{r} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (2.8)$$

Figura 2.4 - Movimento orbital no plano.



Fonte: Sherrill (2013).

2.1.4 A integral do movimento orbital

Considerando um sistema de coordenadas situado no centro de massa m_1 , com os vetores de orientação unitários representados pela tríade $\{\hat{i}_r, \hat{i}_\theta, \hat{i}_h\}$ centrado em m_1 , como ilustrado na Figura 2.4. A posição do corpo é dado por $\vec{r} = r\hat{i}_r$, e a velocidade é dado por $\vec{v} = \dot{r}\hat{i}_r + r\dot{f}\hat{i}_\theta$. A quantidade de movimento do corpo m_2 é dado por $\vec{H} = \vec{r} \times m_2 \vec{v}$. O raciocínio empregado nesta subseção é o mesmo empregado nos trabalhos de Kuga et al. (2012) e Chobotov (2002).

O quantidade de movimento específico pode ser extraído a partir do mesmo produto vetorial, fazendo $\vec{h} = \frac{1}{m_2}\vec{H}$, logo,

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = r^2 \dot{f} \hat{i}_h \quad (2.9)$$

Se \vec{h} é constante, então o movimento orbital é perpendicular a \vec{h} . Multiplicando ambos os lados da Equação 2.8 por \vec{h} , temos:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{h}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{h}) = \mu \frac{df}{dt} \hat{i}_\theta \quad (2.10)$$

Integrando ambos os lados da Equação 2.10, obtemos:

$$\vec{v} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \mu \vec{e} \quad (2.11)$$

Onde μe é a constante de integração e \vec{e} é vetor excentricidade. O módulo deste vetor é dado por:

$$e^2 = \vec{e} \cdot \vec{e} = \frac{1}{\mu^2} (\vec{v} \times \vec{h}) \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) - \frac{2}{\mu r} \vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{h} + 1 \quad (2.12)$$

Se $(\vec{v} \times \vec{h}) = hv$ e $\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) = \vec{r} \times (\vec{v} \cdot \vec{h})$, logo,

$$e^2 = \frac{1}{\mu^2} h^2 v^2 - \frac{2}{\mu r} h^2 + 1 \quad (2.13)$$

Se o parâmetro, $p = \frac{h^2}{\mu}$, chamado de *semilatus rectum*, e $a = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}\right)$. Assim,

$$p = \frac{h^2}{\mu} = a(1 - 2^2) \quad (2.14)$$

Isolando v^2 , chegamos na equação da integral da energia ou *vis-viva*. Logo,

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right) \quad (2.15)$$

Resolvendo a Equação 2.11, obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \vec{r} &= \frac{1}{\mu} \left(\vec{v} \times \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} \right) \cdot \vec{r} \\ er \cos f &= \frac{1}{\mu} (\vec{v} \times \vec{h} - \mu r) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$er \cos f = \frac{h^2}{\mu} - r$$

Se $p = \frac{h^2}{\mu}$, logo:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (2.17)$$

2.1.5 Equação de Kepler

Esta subseção descreve o caminho para determinar a posição angular do corpo celeste em um instante t , culminando na Equação de Kepler, analogamente aos trabalhos de Sherrill (2013) e Felisiak (2015). Usando a Equação 2.16 dentro da Equação 2.11, obtemos:

$$h = \frac{p}{(1 + e \cos f)^2} \frac{df}{dt}$$

$$\sqrt{\mu p} = \frac{p}{(1 + e \cos f)^2} \frac{df}{dt} \quad (2.18)$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt = \frac{df}{(1 + e \cos f)^2}$$

A integração da Equação 2.17 fornece a relação entre o tempo e a anomalia verdadeira, obtemos:

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t - t_p) = \int_0^f \frac{df}{(1 + e \cos f)^2} \quad (2.19)$$

Onde t_p é uma constante de integração, e é o tempo quando $f = 0$, no *periápice*. Se $e = 0$, a Equação 2.18 resulta em:

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t - t_p) = f \quad (2.20)$$

E se $p = a$ por $e = 0$, então:

$$f = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_p) \quad (2.21)$$

O movimento médio é definido como $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ ou como uma média do valor de quão rápido o satélite se propaga por sua órbita. E o período orbital, P , está relacionado com o movimento médio pela relação $P = \frac{2\pi}{n}$. Então, para órbitas circulares a Equação 2.20 pode ser escrita como

$$f = n(t - t_p) \quad (2.22)$$

Similarmente a Equação 2.18 a relação entre o tempo e a anomalia verdadeira para órbitas elíptica será

$$\int_0^f \frac{df}{(1 + e \cos f)^2} = \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}} \left(2 \arctg \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{f}{2} - \frac{e \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} f}{1 + e \cos f} \right) \quad (2.23)$$

Tem-se a anomalia média, M , como descrito a seguir:

$$M = \left(2 \arctg \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{f}{2} - \frac{e \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} f}{1 + e \cos f} \right) \quad (2.24)$$

Substituindo o resultado da Equação 2.23 e Equação 2.24 na Equação 2.19. Então,

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(t - t_p) = \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}} M \quad (2.25)$$

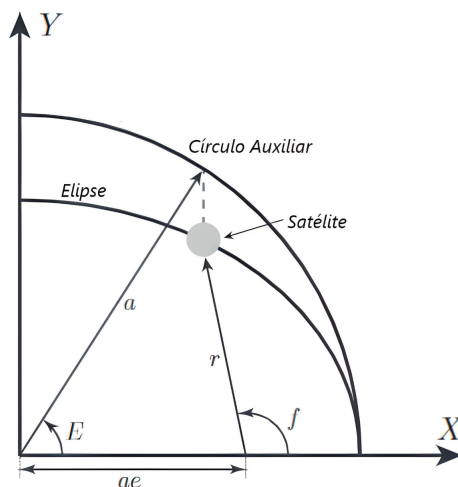
Resolvendo a Equação 2.25 para M , e substituindo $p = a(1 - e^2)$ e $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$, obtemos o mesmo resultado, como descrito em [Sherrill \(2013\)](#):

$$M = n(t - t_p) \quad (2.26)$$

É possível notar que o movimento médio é diferente da velocidade angular para órbitas elípticas, porém apresenta uma média da progressão do movimento do satélite. Contudo, por simplificação é usado um ângulo auxiliar, E , denominado de anomalia excêntrica e é medido a partir do centro geométrico, como ilustrado na Figura 2.5.

Então, a parametrização do movimento do satélite em órbita elíptica, pode ser dado

Figura 2.5 - Elipse circunscrita e anomalia excêntrica.



Fonte: Adaptado de Sherrill (2013).

por $x = a \cos E$ e $y = a \sin E = a\sqrt{1 - e^2} \sin E$, como também $x = ae + r \cos f$ e $r \sin f$, como discutido em (SHERRILL, 2013). Assim,

$$a \cos E = ae + r \cos f \quad (2.27)$$

Substituindo a Equação 2.17 na Equação 2.27. Então,

$$\cos E = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f} \quad (2.28)$$

Devido a ambiguidade da função trigonométrica da função cosseno, utilizamos uma identidade trigonométrica, $\tan^2 \frac{E}{2} = \frac{1 - \cos E}{1 + \cos E}$, logo

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{f}{2} \Rightarrow E = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{f}{2} \right) \quad (2.29)$$

Assim, a posição y do satélite em função da anomalia excêntrica, é dado por $y = a\sqrt{1 - e^2} \sin E$, enquanto que em função da anomalia verdadeira é dado por $y = r \sin f$ como ilustrado na Figura 2.5. Assim,

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin f}{1 + e \cos f} \quad (2.30)$$

Somando as Equações 2.29 e 2.30, chegamos no resultado abaixo como em (SHERILL, 2013).

$$M = n(t - tp) = E - e \sin E \quad (2.31)$$

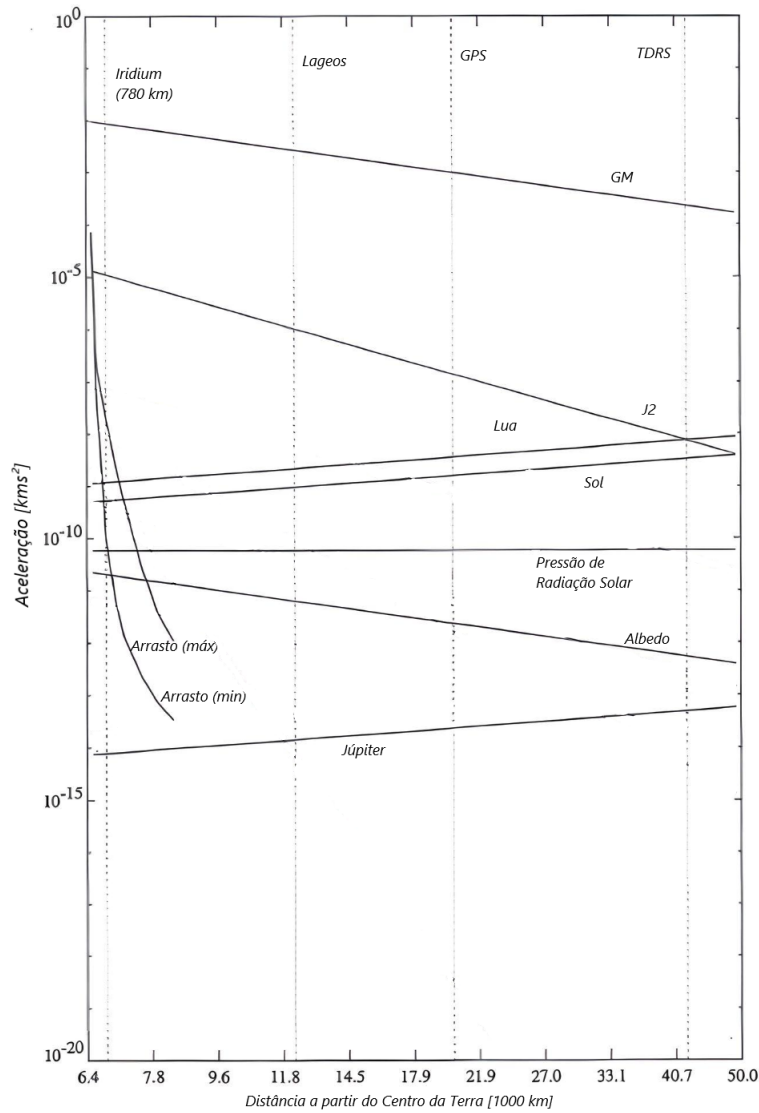
A Equação 2.31 é conhecida como a Equação de Kepler, que relaciona a anomalia excêntrica com o tempo e a solução para tal equação envolve um processo iterativo para ser encontrada, como descrito em Chobotov (2002); Wertz (2009); Vallado e Wertz (2013).

2.1.6 Perturbações de órbita

É necessário considerar a natureza e a magnitude dos distúrbios não controlados sob os satélites que orbitam a Terra, conhecidos como perturbações. Uma das principais fontes de perturbações é provindo da irregularidade ou heterogeneidade da Terra, afinal é um geóide (KUGA et al., 2011). O raciocínio empregado considera a Terra como uma massa pontual, tal modelo não é semelhante a realidade. Além disso, a massa da Terra não é centrada em um ponto, mas distribuído de forma desigual sob a superfície. Devido aos efeitos das marés, a distribuição de massa varia no tempo. Um tipo adicional de perturbação age em satélites em órbitas baixas, sendo influenciados por efeitos atmosféricos, como o arrasto atmosférico, como age num satélite da constelação Iridium, ilustrado na Figura 2.5. O movimento de um satélite em torno da Terra também é perturbado pela presença e movimento da Lua e Júpiter, bem como pela gravidade do Sol, chamado de terceiro corpo. Um outro tipo de perturbação é induzido pela pressão de radiação solar e pelo vento solar. A Figura 2.5 reproduzida de Montenbruck e Gill (2012) apresenta a magnitude relativa da aceleração causada pelas forças de perturbação em função do raio orbital. No mais, é possível notar que quanto maior o raio orbital do satélite menor a influência do terceiro corpo celeste sobre o satélite, como ilustrado na Figura 2.5.

A Figura 2.5 ilustra também o efeito de várias perturbações em função da distância geocêntrica do satélite e sua influência sobre satélites conhecidos TDRS (*Tracking and Data Relay Satellite*), GPS (*Global Positioning System*), Lageos (*Laser Geodynamics Satellite*) e Iridium. A Figura 2.5 também mostra as diferentes forças

Figura 2.6 - Magnitude das perturbações orbitais *versus* raio vetor do satélite.



Fonte: Adaptado de Montenbruck e Gill (2012).

perturbadoras de baixa intensidade, como o arrasto atmosférico, Albedo, e pressão da radiação solar, são consideradas nos cálculos, porém estas perturbações produzem acelerações em ordens de grandeza de 10^{-15} a 10^{-12} m/s^2 . Essas perturbações são relevantes para a precisão da órbita, mas seus efeitos são considerados como pequenos em comparação com os principais fatores perturbadores mencionados anteriormente, como comenta (MONTENBRUCK; GILL, 2012). Contudo, neste trabalho apenas teremos órbitas livres de perturbações para dedução dos modelos de movimento relativo, chamado de modelo kepleriano de movimento orbital.

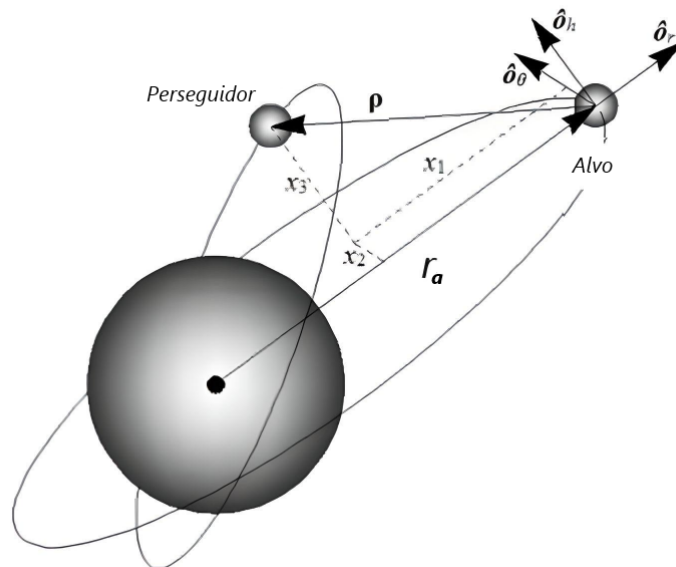
2.2 Movimento relativo orbital

Para o presente trabalho será considerado uma formação alvo-perseguidor (*target/chaser*), composta por dois satélites. O satélite perseguidor é controlado para realizar a manobra de *Rendezvous*, enquanto o satélite alvo orbite livremente a Terra. O alvo apresenta o sistema de referência do movimento relativo. A derivação do movimento relativo aqui será tomada a partir do mesmo formalismo encontrado nos trabalhos de Sherrill (2013); Felisiak (2015). Assim, a notação vetorial e matricial empregada nesta seção atende ao formalismo descrito na Seção 2.1.

2.2.1 Equações não lineares do movimento relativo

As equações de movimento relativo desenvolvidas nesta subseção utiliza um sistema de referência cartesiano, chamado local-vertical local-horizontal (LVLH), anexado no centro de massa do satélite alvo. Este sistema de referências é determinado a partir do da tríade de vetores unitários $\{\hat{o}_r, \hat{o}_\theta, \hat{o}_h\}$, como ilustrado na Figura 2.7.

Figura 2.7 - Local-Vertical, Local-horizontal (LVLH).



Fonte: Adaptado de Sherrill (2013).

Este sistema de coordenadas gira com o raio vetor do alvo, r_a , num sistema de referência conveniente para descrever o movimento relativo, chamado eventualmente de sistema de coordenadas de referência de Hill ou CW. Neste sistema de coordenadas preso ao satélite alvo, tem-se: \hat{o}_r na direção radial, \hat{o}_h na direção da quantidade de

movimento angular, e \hat{o}_θ completando a tríade ortogonal da regra da mão direita. No sistema LVLH, o perseguidor está localizado na posição $\vec{\rho} = (x_1, x_2, x_3)$, logo, a posição do perseguidor no sistema geocêntrico terrestre inercial, ECI, é dada pela seguinte equação.

$$\vec{r}_p = \vec{r}_a + \vec{\rho} = (r_a + x_1)\hat{o}_r + x_2\hat{o}_\theta + x_3\hat{o}_h \quad (2.32)$$

A velocidade angular relativa e a aceleração angular do sistema de coordenadas LVLH em relação ao sistema de coordenadas ECI, no caso de órbita kepleriana, é dado por $\vec{\omega} = \dot{f}_a\hat{o}_h = \frac{h}{r_a^2}\hat{o}_h$ e $\vec{\alpha} = \ddot{f}_a\hat{o}_h = -\frac{2\dot{r}_a\dot{f}_a}{r_a}\hat{o}_h$, respectivamente. Então, a equação do movimento do satélite perseguidor no ECI, é dado por:

$$\vec{\ddot{r}}_p = \vec{\ddot{r}}_a + \vec{\alpha} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} + \ddot{\vec{\rho}} \quad (2.33)$$

Substituindo os termos da Equação 2.32 na Equação 2.33, temos o mesmo encontrado por Felisiak (2015).

$$\begin{aligned} \vec{\ddot{r}}_p = & \ddot{r}\hat{o}_r + \ddot{f}\hat{o}_h \times (x_1\hat{o}_r + x_2\hat{o}_\theta + x_3\hat{o}_h) + \dot{f}\hat{o}_h \times (\dot{f}\hat{o}_h \times (x_1\hat{o}_r + x_2\hat{o}_\theta + x_3\hat{o}_h)) \\ & + 2\dot{f}\hat{o}_h \times (\dot{x}_1\hat{o}_r + \dot{x}_2\hat{o}_\theta + \dot{x}_3\hat{o}_h) + (\ddot{x}_1\hat{o}_r + \ddot{x}_2\hat{o}_\theta + \ddot{x}_3\hat{o}_h) \end{aligned}$$

Agrupando e simplificando a equação anterior em notação vetorial, obtemos:

$$\vec{\ddot{r}}_p = (\ddot{r} - \dot{f}x_2 - \dot{f}^2x_1 - 2\dot{x}_2\dot{f} + \ddot{x}_1)\hat{o}_r + (\dot{f}x_1 - \dot{f}^2x_2 + 2\dot{x}_1\dot{f} + \ddot{x}_2)\hat{o}_\theta + \ddot{x}_3\hat{o}_h$$

Se $\vec{\ddot{r}}_a = -\frac{\mu}{r_a^3}\vec{r}_a = -\frac{\mu}{r_a^2}\hat{o}_h$, então

$$\vec{\ddot{r}}_p = \left(-\frac{\mu}{r_a^2} - \dot{f}x_2 - \dot{f}^2x_1 - 2\dot{x}_2\dot{f} + \ddot{x}_1 \right) \hat{o}_r + (\dot{f}x_1 - \dot{f}^2x_2 + 2\dot{x}_1\dot{f} + \ddot{x}_2)\hat{o}_\theta + \ddot{x}_3\hat{o}_h$$

Rearranjando os termos num sistema de equações obtemos o formato NERM (*Non-*

linear Equations of Relative Motion), como descrito em Felisiak (2015) e Sherrill (2013), dado por:

$$\ddot{x}_1 - \ddot{f}x_2 - \dot{f}^2x_1 - 2\dot{x}_2\dot{f} - \frac{\mu}{r_a^3} = -\frac{\mu}{r_p^3}(r_a + x_1) \quad (2.34)$$

$$\ddot{x}_2 + \ddot{f}x_1 - \dot{f}^2x_2 + 2\dot{x}_1\dot{f} = -\frac{\mu}{r_p^3}x_2 \quad (2.35)$$

$$\ddot{x}_3 = -\frac{\mu}{r_p^3}x_3 \quad (2.36)$$

2.2.2 Equações lineares do movimento relativo

As equações de movimento não lineares apresentadas na subseção anterior podem ser linearizadas para pequenas separações entre o alvo e o perseguidor. O raio do perseguidor pode ser linearizado como mostrado nas equações a seguir, e truncando os termos de ordem superior, analogamente ao encontrado por Sherrill (2013).

$$r_p = \sqrt{(r_a + x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2} = r_a \sqrt{\left(1 + \frac{2x_1}{r_a} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{r_a^2}\right)}$$

$$r_p \approx r_a \sqrt{\left(1 + \frac{2x_1}{r_a}\right)} \quad (2.37)$$

Usando o teorema binomial, e expandindo o termo $\frac{\mu}{r_p^3}$, obtemos:

$$\frac{\mu}{r_p^3} \approx \frac{\mu}{r_a \sqrt{\left(1 + \frac{2x_1}{r_a}\right)^3}} \approx \frac{\mu}{r_a} \left(1 - \frac{3x_1}{r_a}\right) \quad (2.38)$$

Então, obtemos o formato LERM (*Linearized Equations of Relative Motion*) geral para órbitas elípticas, dado por:

$$\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_2\dot{f} - \left(f^2 + 2\frac{\mu}{r_a^3}\right)x_1 - \ddot{f}x_2 = 0 \quad (2.39)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\dot{x}_1\dot{f} + \ddot{f}x_1 - \left(f^2 - \frac{\mu}{r_a^3}\right)x_2 = 0 \quad (2.40)$$

$$\ddot{x}_3 + \frac{\mu}{r_a^3}x_3 = 0 \quad (2.41)$$

Seja o vetor de estados $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$. Assim, o sistema pode ser representado em espaço de estados por:

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\left(f^2 + 2\frac{\mu}{r_a^3}\right) & \ddot{f} & 0 & 0 & 2\dot{f} & 0 \\ -2\ddot{f} & \left(f^2 - \frac{\mu}{r_a^3}\right) & 0 & -2\dot{f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{r_a^3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} \quad (2.42)$$

A matriz do sistema, $\mathbf{A}(t)$, é variante no tempo, pois os termos \dot{f} , r_a e \ddot{f} , sobretudo para órbitas elípticas, são periódicos para $T = \frac{2\pi}{n}$.

Os termos restantes são agrupados numa matriz de termos não-lineares, denotadas por N . Quando esta matriz é negligenciada do formato NERM de equações tem-se o formato LERM. A matriz N é definida, como:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu \left(\frac{1}{r_a^2} - \frac{r_a}{r_p^3} \right) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

É possível expandir esta dinâmica representada pela Equação 2.42 para o caso de um sistema de controle de movimento relativo orbital, ou seja um sistema cuja a dinâmica tem a ação do vetor de controle, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, como descrito pela equação a seguir:

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \mathbf{B}\vec{u} \quad (2.44)$$

Onde a matriz de entradas é denotada por \mathbf{B} , e tem seus elementos dependente do

parâmetro de massa do satélite, m_s .

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/m_s & 0 & 0 \\ 0 & 1/m_s & 0 \\ 0 & 0 & 1/m_s \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

É possível ainda considerar o caso que a massa do satélite também é variante no tempo, pois seu combustível ou propelente é expelido para fora do corpo do satélite gerando empuxo durante as manobras. Então, é necessário definir o modelo de massa e variação de massa.

O modelo de massa tem como base a relação entre a variação de massa e os parâmetros conhecidos dos propulsores como o impulso específico, como descrito em [Chobotov \(2002\)](#) e [Sidi \(1997\)](#). Esta relação é dado por:

$$\dot{m} = \frac{F_p}{I_p g} \quad (2.46)$$

Onde \dot{m} denota a variação de massa de propelente expelido, F_p é a força ou empuxo obtido pelos propulsores, g é a aceleração na superfície terrestre e I_p denota o impulso específico.

Seja o vetor de estados \vec{x}_p , cuja a dimensão $\dim\{\vec{x}_p\} = 1 \times 1$ que denota a massa de propelente expelido, cuja a matriz de estados é $\mathbf{A}_p = \mathbf{0}_{1,1}$. Assim, a representação do sistema em espaço de estado, como descrito em [Felisiak \(2015\)](#).

$$\dot{\vec{x}}_p = \mathbf{A}_p \vec{x}_p + \mathbf{B}_p \vec{u}_p \quad (2.47)$$

Onde o vetor de controle, denotado por \vec{u}_p , cuja a matriz de entradas é \mathbf{B}_p e tem dimensão $\dim\{\vec{u}_p\} = 1 \times 3$, com os componentes correspondentes as variações de massa de acordo com a Equação 2.46 em cada direção do sistema LVLH de maneira independente, ou seja $\vec{u}_p = (u_1, u_2, u_3)$. Para o caso cuja a massa expelida de propelente for menor, em módulo, do que a massa disponível do satélite de propelente disponível, m_{p0} , temos os elementos ($i = 1, 2, 3$) de B_p definidos como a seguir.

$$\forall x_p < m_{p0} \left\{ u_i < 0 \Rightarrow \mathbf{B}_{p\ 1,i} = \frac{1}{I_p g} \right\} \quad (2.48)$$

$$\forall x_p < m_{p0} \left\{ u_i \geq 0 \Rightarrow \mathbf{B}_{p\ 1,i} = -\frac{1}{I_p g} \right\} \quad (2.49)$$

No caso onde a massa de propelente disponível foi totalmente utilizada, temos B_p definida como a seguir.

$$\exists x_p = m_{p0} \{ \mathbf{B}_p = [0\ 0\ 0] \} \quad (2.50)$$

Finalmente, a massa do satélite perseguidor, m_s , é extraída como o parâmetro da matriz \mathbf{B} da Equação 2.44. Assim, é definido como em Felisiak (2015).

$$m_s = m_{s0} + m_{p0} - x_p \quad (2.51)$$

Onde m_{s0} denota a massa do satélite sem a massa de propelente.

Assim, a matriz de entradas agora também é variante no tempo, denotada por $\mathbf{B}(t)$. Logo, o sistema variante no tempo contínuo é representado em espaço de estados, como está descrito na Equação 2.52.

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \mathbf{B}(t)\vec{u} \quad (2.52)$$

2.2.3 Equações de Tschauner-Hempel

A solução para a Equação 2.42 também é encontrada por intermédio de uma mudança de variáveis, ou seja uma substituição por uma variável independente do tempo, como o procedimento realizado por Tschauner e Hempel (1965) para a anomalia verdadeira, f . Tal mudança de base gera um novo vetor de estado, como descrito em Sherrill (2013).

$$\check{x} = [\check{x}_1 \ \check{x}_2 \ \check{x}_3 \ \check{x}'_1 \ \check{x}'_2 \ \check{x}'_3]^T$$

Todos os estados são função da anomalia verdadeira, dados por:

$$\check{x}_1 = (1 + e \cos f)x_1 \Rightarrow \check{x}'_1 = -e \operatorname{sen} f x_1 + (1 + e \cos f)x_1$$

Em que $x_1 = \frac{p^2}{h(1+e \cos f)}$. Então, podemos generalizar esta mudança de variável numa matriz de transformação de coordenadas, temos:

$$\check{\vec{x}} = \mathbf{T}(f)\vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \mathbf{T}^{-1}(f)\check{\vec{x}} \quad (2.53)$$

Onde

$$\mathbf{T}(f) = \begin{bmatrix} (1 + e \cos f)\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -e \operatorname{sen} f \mathbf{I} & \frac{p^2}{h(1+e \cos f)}\mathbf{I} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1}(f) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+e \cos f)}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ e \operatorname{sen} f \mathbf{I} & \frac{h}{p^2}(1 + e \cos f)\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Onde a dimensão da matriz identidade, denotada por \mathbf{I} , é $\dim\{\mathbf{I}\} = 3$; e a matriz de nula, denotada $\mathbf{0}$, apresenta dimensão $\dim\{\mathbf{0}\} = 3$. Aplicando a matriz de transformação $T(f)$ dadas na Equação 2.53 na Equação 2.42 resulta nas equações de Tschauner-Hempel (TH) a seguir.

$$\begin{aligned} \check{x}''_1 - 2\check{x}''_2 - \frac{3}{1 + e \cos f} \check{x}_1 &= 0 \\ \check{x}''_2 + 2\check{x}'_1 &= 0 \\ \check{x}''_3 + \check{x}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

A Equação 2.55 representada em espaço de estados, dado por:

$$\vec{\ddot{x}}' = \mathbf{H}(f)\vec{\ddot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{1+\cos f} & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{\ddot{x}} \quad (2.55)$$

Onde as aspas simples e duplas denotam a derivada de primeira ordem e segunda ordem dos componentes do vetor, $\hat{\ddot{x}}$, respectivamente. O trabalho realizado por [Tschauner e Hempel \(1965\)](#) demonstrou que a anomalia verdadeira é utilizada como uma variável independente, logo ela não é 2π (em casos de órbitas elípticas), mas aumenta monotonicamente com o tempo. Estas equações foram apresentadas pela primeira vez para o movimento relativo por DeVries, com uma solução aproximada em 1963 ([DEVRIES, 1963](#)). Contudo, já eram conhecidas e resolvidas por Lawden desde a década de 50 ([LAWDEN, 1954](#)). No mais, a solução destas equações diferenciais foram apresentadas por [Tschauner e Hempel \(1965\)](#). Esta solução perde sua independência em $e = 0$ e não está definida para $e = 1$. Para uma revisão detalhada das soluções às equações TH, vide o trabalho de [Yamanaka e Ankersen \(2002\)](#).

2.2.4 Equações de Clohessy-Wiltshire

Na década de 60, Clohessy e Wiltshire publicaram uma das equações mais usadas para manobras de proximidade de satélites. Essas equações são frequentemente chamadas de equações Clohessy-Wiltshire (HCW) ([YAMANAKA; ANKERSEN, 2002](#)). No final do século 19, Hill foi o primeiro a linearizar um conjunto de equações para descrever o movimento da Lua em relação à Terra, assumindo excentricidade igual a zero, $e = 0$ ([CLOHESSY W. H.; WILTSHIRE, 1960](#)). Assim, o resultado final converge para a Equação 2.57 na equações para órbitas circulares, dadas por:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2n\dot{x}_2 - 3n^2x_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + 2n\dot{x}_1 &= 0 \\ \ddot{x}_3 + n^2x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

A Equação 2.57 representada em espaço de estados é:

$$\vec{x} = \mathbf{C}_w \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3n^2 & 0 & 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}(t) \quad (2.57)$$

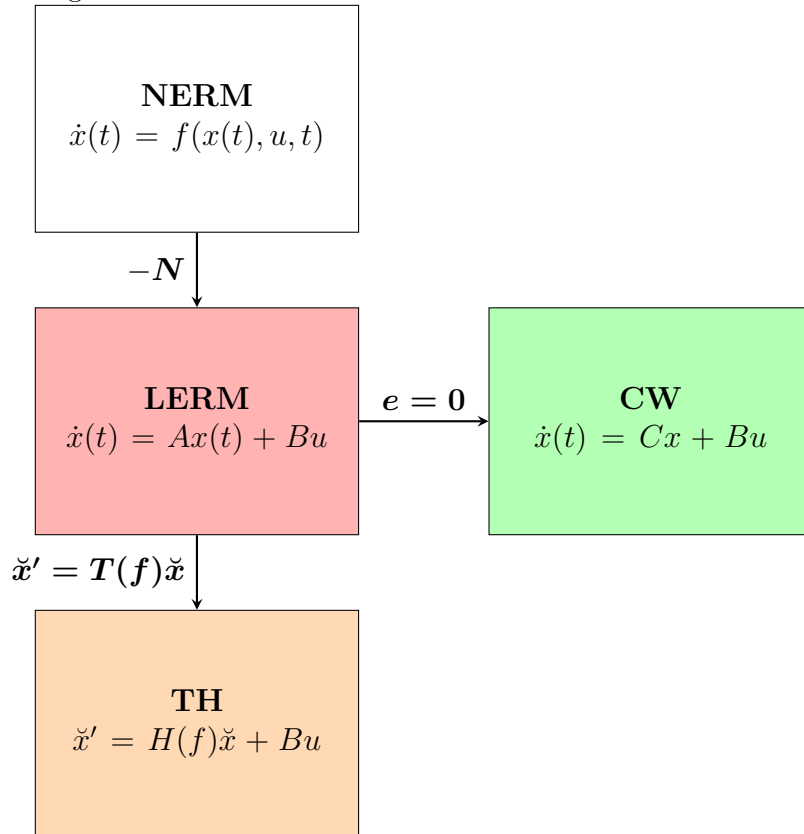
A matriz de estado, \mathbf{C}_w , neste caso é independente do tempo, e tem dois autovalores iguais a zero e dois pares de autovalores imaginários, se transformando num sistema marginalmente estável (GIM; ALFRIEND, 2003). Há várias abordagens das equações CW presentes na literatura, mesmo em órbitas elípticas e com grandes distâncias relativas, vide o trabalho de Alfriend e Kashiwagi (1969). Contudo, neste trabalho será utilizado apenas a forma tradicional das equações CW.

2.2.5 Sumário dos modelos de movimento relativo

As Subseções 2.2.2, 2.2.3 e 2.2.4 apresentaram três descrições linearizadas de modelos de movimento relativo orbital: o modelo LERM, as equações TH e as equações HCW. Em síntese, os modelos linearizados são equações lineares com parâmetros variantes no tempo que podem descrever o movimento relativo de um satélite perseguidor em relação a um satélite alvo situados em órbitas excêntricas ou não. As suposições válidas para empregar os modelos linearizados como modelo de movimento orbital para manobras de aproximação consiste em considerar o modelo de movimento kepleriano, ou seja sem considerar perturbações exógenas nas órbitas, como também é necessário considerar as curtas distâncias entre as espaçonaves que vão realizar as manobras. Se a órbita for circular, o LERM reduz-se ao caso linear invariante no tempo das Equações HCW. Como mencionado anteriormente essa simplicidade originou muitas soluções na literatura a partir das equações HCW, como demonstrado na subseção 2.2.3. A aplicação de uma escala e mudança de variável independente ao LERM resulta nas equações TH, permitindo que uma matriz de transição de estado do LERM seja construído.

É possível mostrar as relações entre as equações LERM, TH e HCW pela Figura 2.8. Vale salientar que um dos objetivos desta dissertação é contemplar essas aproximações e considerações dos modelos de movimento relativo orbital para fins de controle automático, possibilitando a realização de manobras de proximidade/*Rendezvous* entre dois satélites. Assim, no próximo capítulo será demonstrado os princípios de um controlador com paradigma de otimização de trajetória, sob um horizonte móvel de

Figura 2.8 - Sumário dos modelos do movimento relativo.



Fonte: Autor.

tempo, para gerar as manobras de encontro de satélites.

3 CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO - MPC

3.1 História do controle preditivo

O controle preditivo baseado em modelo (MPC - *Model Predictive Control*), também conhecido como controle de horizonte deslizante ou controle de horizonte retrocedente, é um método de otimização dinâmica aplicado a uma técnica de controle (CAMACHO; ALBA, 2013). Tal processo consiste em calcular a ação de controle por meio de soluções periódicas de um problema de controle ótimo dentro de uma janela de tempo (horizonte finito), possivelmente sujeito a restrições nas entradas e saídas. O problema de controle ótimo é resolvido usando a estimativa do estado atual do processo controlado como estado inicial. A otimização produz uma sequência de controle ótima, porém, apenas a primeira ação de controle nesta sequência é aplicada à planta, repetido tal procedimento reiteradas vezes sob uma dada taxa de amostragem (MACIEJOWSKI, 2002).

A primeira apresentação deste algoritmo ocorreu na década de 70, desenvolvido pela empresa Adersa, chamado de *Model Predictive Heuristic Control* (MPHC), enquanto o *software* foi comercialmente conhecido como IDCOM, sigla para Identification and Command (CAMACHO; ALBA, 2013). A aplicação era caracterizada por manter um modelo de resposta ao impulso (FIR) da planta e a função de custo quadrática sob o horizonte de predição finito. Posteriormente, na década de 80 foi desenvolvido o algoritmo chamado *Dynamic Matrix Control* (DMC) pela empresa *Shell Oil* (MACIEJOWSKI, 2002). Esta aplicação era caracterizada por incluir o modelo de resposta ao degrau da planta e função de custo quadrática sob um horizonte de predição finito.

Contudo, essas soluções forneciam heurísticas para o tratamento de restrições. Para superar este impasse, no final da década de 80, Garcia e Morshedi (1986) propuseram o algoritmo conhecido como QDMC (*Quadratic Dynamic Matrix Control*), caracterizado pelo problema de programação quadrática completa com restrições de estado e controle e modelo de resposta ao degrau da planta. No ano seguinte, o algoritmo apresentado por Clarke e Mohtadi (1989), conhecido como *Generalized Predictive Control* (GPC) foi caracterizado por considerar uma variedade de distúrbios, usava o modelo da planta em função de transferência discreta da planta, para mais detalhes Botelho et al. (2020).

O desenvolvimento de algoritmos MPC que segue até os dias atuais inclui o uso do modelo de espaço de estado da planta, estimativa de estados não medidos e

modelos não lineares. Atualmente, as principais direções de pesquisa estão focadas na robustez e estabilidade dos algoritmos de otimização dinâmica. Neste trabalho serão considerados modelos em espaço de estados não lineares e lineares discretos. Além disso, é necessário descrever a notação vetorial e matricial empregada nesta seção, como está descrito abaixo.

- As estimativas dos estados ou saídas previstas são denotados por letras minúsculas com acento circunflexo, por exemplo $\hat{\mathbf{x}}$;
- Os vetores são denotados por letras minúsculas em negrito, por exemplo \mathbf{x} , no domínio de tempo discreto k instantes de amostragem;
- As matrizes estão denotadas por letras maiúsculas em negrito, por exemplo \mathbf{X} ;
- Os vetores de sinais de controle ou de incrementos de controle ótimos estão representados respectivamente \mathbf{u} e $\Delta\mathbf{u}$.

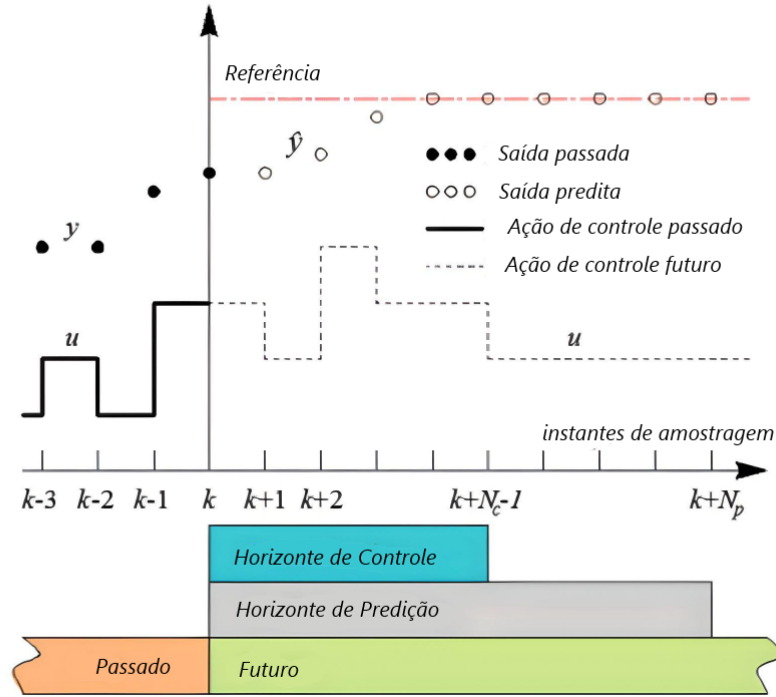
3.2 Elementos de controle preditivo

Esta seção descreve os princípios básicos do MPC e o seu mecanismo é demonstrado pela Figura 3.1. A tarefa do controlador é calcular uma sequência de controle ideal para mover a resposta prevista do processo para a referência. As saídas de processo medidas, \mathbf{y} , junto com a variável manipulada atual, \mathbf{u} , são usadas para estimar o vetor de estado. O estado estimado, $\hat{\mathbf{x}}$, calculado pelo observador de estado, serve como sinal de realimentação para o algoritmo de otimização. Usando o modelo do processo (planta) e a estimativa do estado atual $\hat{\mathbf{x}}(k)$, como condição inicial, o controlador obtém a saída futura do processo. Isso permite encontrar o vetor de controle ótimo \mathbf{u} por minimização da função de custo, sujeito às restrições, dentro da janela de otimização denominada horizonte de predição N_p (tamanho do horizonte de predição). A função de custo é normalmente expressa como uma função de erro entre o sinal de referência e o sinal de saída predito.

O algoritmo de MPC deste trabalho, baseado no trabalho de Felisiak (2015) e Jewison et al. (2015), é projetado para encontrar o incremento de controle ótimo, $\Delta\mathbf{u}(k)$, no instante atual, k , em vez de encontrar $\mathbf{u}(k)$ diretamente. Assim,

$$\Delta\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k - 1) \quad (3.1)$$

Figura 3.1 - Mecanismo do Controlador Preditivo.



Fonte: Adaptado de Felisiak (2015).

O MPC produz no cálculo de otimização, num único instante de amostragem k , uma sequência de incrementos de controle $\Delta \mathbf{u}(k)$, $\Delta \mathbf{u}(k+1)$, ..., $\Delta \mathbf{u}(k+N_c-1)$, onde N_c é o tamanho do horizonte de controle. Embora a sequência dos incrementos de controle possam ser encontradas, apenas a primeira é aplicada a planta.

A sequência de movimentos de controle calculada em um único instante de amostragem consiste em N_c elementos, no incremento de controle atual $\Delta \mathbf{u}(k)$ e em $N_c - 1$ incrementos futuros. O horizonte de controle é tipicamente mais curto que o horizonte de predição ($N_c \leq N_p$). A Figura 3.1 é um exemplo de MPC para o caso de um sistema SISO (*Single Input Single Output*), dada uma referência, os valores de $\Delta \mathbf{u}$ são calculados e assim se faz possível a reconstrução a saída predita, \hat{y} .

3.3 Formalismo do MPC

Seja um sistema representado convenientemente por um sistema MIMO (*Multiple Input Multiple Output*) linear invariante no tempo discreto, descrito por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (3.3)$$

Onde n_u , n_y e n_x denotam o número de entradas, saídas e estados. O $\mathbf{x}(k)$ é o vetor de estados no instante k , $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$; o $\mathbf{y}(k)$ é o vetor de saídas no instante k , $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$; o $\Delta\mathbf{u}(k)$ é o vetor de entradas no instante k , $\Delta\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$;

Segundo Camacho e Alba (2013), para a solução de controle ótimo no MPC, tipicamente temos o Problema de Programação Quadrática (PPQ), cujo apresenta os vetores de saídas, $\Delta\mathbf{u}(k) \in \Delta\mathcal{U}$, provindos do conjunto-espaço de soluções admissíveis de $\Delta\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$; e os vetores de estados $\mathbf{x}(k) \in \mathcal{X}$, provindos do conjunto-espaço de soluções admissíveis $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$.

O objetivo desta técnica de controle é o rastreo ou regulação, ou seja conduzir o estado/saída para o sinal de referência, com modulação da amplitude de incremento de controle impondo um comportamento agressivo ou não do controlador. Segundo o trabalho seminal de Maciejowski (2002) o MPC minimiza uma função de custo escalar Linear Quadrática (LQ), J , no instante k , encontrando a sequência de controle ótima:

$$J = \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{N_p} [r_i - \hat{y}_i(k+j|k)]^T Q_i [r_i - \hat{y}_i(k+j|k)] + \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=0}^{N_c} \Delta u_i(k+j)^T R_i \Delta u_i(k+j) \quad (3.4)$$

Onde r_i é a referência para i -ésima saída; $\hat{y}_i(k+j|k)$ é o valor predito da saída i -ésima sob j -ésimo passo do horizonte de predição; $\Delta u_i(k+j)$ é o valor do incremento de controle sob j -ésimo passo do horizonte de controle; Q_i e R_i são as matrizes de ponderação de erro de trajetória e incrementos de controle, respectivamente. E sujeitos a restrição:

$$\mathbf{M}\mathbf{z} \leq \mathbf{N} \quad (3.5)$$

Em que \mathbf{z} é o novo vetor aumentado no problema de programação quadrático, definido como $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix}$

As matrizes de restrições com coeficientes \mathbf{M} e \mathbf{N} compactam as informações sobre

os seguintes limitantes:

- Na variação do incremento de controle: $\Delta \mathbf{u}^{min} \leq \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \leq \Delta \mathbf{u}^{max}$;
- Na amplitude do controle: $\mathbf{u}^{min} \leq \mathbf{u}(k+j) \leq \mathbf{u}^{max}$;
- Na saída: $\mathbf{y}^{min} \leq \hat{\mathbf{y}}(k+j|k) \leq \mathbf{y}^{max}$;
- Nos estados: $\mathbf{x}^{min} \leq \hat{\mathbf{x}}(k+j|k) \leq \mathbf{x}^{max}$.

Contudo, neste trabalho está previsto apenas o caso com restrições de saídas e entradas como será visto na Subseção 3.5.5

3.4 Características do MPC

Segundo o Kirk (2004) os sistemas de controle cujo o projeto é visto sob a perspectiva de otimização, é comumente denominado de problemas de controle ótimo; e tradicionalmente podem ser resolvidos ora pelo princípio do máximo de Pontryagin, ora pelo método de programação dinâmica de Bellman (NAIDU, 2018). A solução baseada na equação de Hamilton-Jacobi-Bellman precisa ser resolvida uma vez, durante o projeto do controlador, sob um horizonte infinito, o que dá uma vantagem relevante sobre a abordagem do princípio máximo de Pontryagin (KIRK, 2004). No entanto, apresenta dificuldade para encontrar soluções de sistemas não-lineares apesar de ter uma abordagem muito mais conveniente para a solução dos PCO, periodicamente sob uma janela de tempo finito, usando a estimativa do estado atual como condição inicial (LONGUSKI et al., 2014).

Segundo (LONGUSKI et al., 2014)] o MPC se distingue de outros métodos de controle clássicos por ser capaz de lidar com sistemas não-lineares sujeitos a restrições de controle e estado/saída . No entanto, quando um horizonte de predição finito é usado, o controle em malha fechada real e as trajetórias de estado serão diferentes das trajetórias em malha aberta preditas, mesmo na ausência das incerteza de modelo de processo e perturbação. Segundo Camacho e Alba (2013) a causa é o fato de que as estratégias clássicas de controle, como o PID e o LGR, obtêm a lei de realimentação *a priori*, enquanto o MPC calcula a lei de realimentação *online* (de forma iterativa sob um horizonte finito de tempo).

A diferença entre a minimização no horizonte finito e a otimização no horizonte infinito aumentam junto com o encurtamento do horizonte de predição. Se for escolhido um horizonte muito pequeno, não há garantia de que o sistema em malha fechada

seja estável (MACIEJOWSKI, 2002). Assim, o ajuste básico no ajuste do horizonte de predição é escolher o comprimento (número de instantes de amostragem) que fornece estabilidade em malha fechada. O trabalho de Felisiak (2015) enaltece as características mais importantes do MPC, como estão descritas a seguir:

- a) As restrições de entradas e saídas são consideradas de maneira sistemática e explícita, num problema de programação quadrática;
- b) O MPC permite o uso de um modelo não-linear para predição;
- c) Uma função de custo especificada no MPC é otimizada em tempo real;
- d) O comportamento predito da saída é diferente do comportamento da mesma em malha fechada;
- e) O modelo de processo captura as interações dinâmicas e estáticas entre a entrada, saída e perturbação;
- f) O MPC é naturalmente capaz de controlar múltiplas entradas e saídas, incluindo o caso de números diferentes de entradas e saídas;
- g) Para realizar a predição, os estados do processo devem ser medidos ou estimados.

3.5 Controle preditivo do movimento relativo de satélites

Esta seção apresenta o projeto do controlador preditivo capaz de resolver a trajetória de uma forma sub ótima do movimento relativo entre dois satélites, analogamente aos trabalhos de Botelho et al. (2020); Felisiak (2015); Park et al. (2016); Zappulla et al. (2016); Mathavaraj e Padhi (2021). Logo, um dos principais objetivos deste trabalho é projetar um controlador preditivo relativamente simples e confiável, capaz de lidar com as não-linearidades inerentes do modelo de movimento relativo e as variações de parâmetros do modelo no tempo. Contudo, neste trabalho apesar dos modelos do movimento relativo serem não lineares ou linearizados variantes no tempo, seus parâmetros serão constantes dentro do horizonte de predição no processo de otimização.

Neste trabalho o modelo interno do controlador distingue-se conceitualmente do modelo do processo em si (neste caso, do movimento relativo orbital) por sua estrutura; o primeiro se refere a estrutura matricial em si do modelo utilizado pelo algoritmo

do controlador MPC para gerar a solução do controle ótimo, ou seja como são construídas as matrizes A , B e C que são embutidas no algoritmo de controle; o segundo se refere aos modelos da dinâmica do movimento relativo orbital representados em espaço de estados demonstrados na Seção 2.

Ainda nesta seção, está descrito três classes de modelos internos seguindo uma relação lógica de evolução no modelo utilizado dentro controlador MPC - não-linear, linear e linear com integrador, culminando no modelo interno que será a base para o trabalho, tal desenvolvimento foi empregado no trabalho de Felisiak (2015).

3.5.1 Modelo não-linear

Nesta subseção está descrito o desenvolvimento de um modelo interno do MPC a partir de um modelo de processo não linear variante no tempo, a saber o modelo NERM, demonstrado na Subseção 2.2.1. Então, primeiramente deve-se considerar o modelo do processo no domínio de tempo contínuo e incluir a variável de estado de massa do satélite a partir da Equação 2.52, e posteriormente discretizar o modelo.

Logo, deve-se considerar que a massa do satélite perseguidor, $m_s(t)$, influencia significativamente na dinâmica do sistema descrito pelo modelo do movimento relativo orbital NERM; afinal quanto maior for a massa menor será a magnitude da ação de controle por unidade de tempo, como descrito na Subseção 2.2.1. Assim, se faz necessário estimar estes parâmetros por intermédio de um modelo de movimento relativo aumentado, dado pela adição da Equação 2.52 na Equação 2.44. No mais, o estado aumentado é composto por:

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix}$$

Onde \mathbf{x} é o vetor de estado da dinâmica do movimento relativo, e o

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{6,1} \\ \mathbf{0}_{1,6} & \mathbf{A}_p \end{bmatrix} \mathbf{x}_a(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}_p \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \mathbf{N}_a \quad (3.6)$$

$$\mathbf{y}_a(t) = \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a(t) \quad (3.7)$$

Onde $\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{6,1} \\ \mathbf{0}_{1,6} & \mathbf{A}_p \end{bmatrix}$ é a matriz de dinâmica de estados, $\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}_p \end{bmatrix}$ é a matriz de entradas e $\mathbf{N}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ é a matriz das não-linearidades.

Assim, para o projeto do controlador MPC discreto é necessário discretizar o sistema, assim aplicando o modelo segurador e amostrador de ordem zero (ZOH), submetido ao período de amostragem, T , analogamente ao realizado por Felisiak (2015), temos:

$$\mathbf{x}_{a,d}(k+1) = \mathbf{A}_{a,d} \mathbf{x}_{a,d}(k) + \mathbf{B}_{a,d} \mathbf{u}(k) + \mathbf{N}_{a,d} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{y}_{a,d}(k) = \mathbf{C}_{a,d} \mathbf{x}_{a,d}(k) \quad (3.9)$$

Onde:

$\mathbf{A}_{a,d}$ é a matriz \mathbf{A}_a discretizada,

$$\mathbf{A}_{a,d} = e^{\mathbf{A}_a T} \quad (3.10)$$

$\mathbf{B}_{a,d}$ é a matriz \mathbf{B}_a discretizada,

$$\mathbf{B}_{a,d} = \int_0^T e^{\mathbf{A}_a \tau} \mathbf{B}_a d\tau \quad (3.11)$$

$\mathbf{N}_{a,d}$ é a matriz \mathbf{N}_a discretizada,

$$\mathbf{N}_{a,d} = \mathbf{N}_a T \quad (3.12)$$

E $\mathbf{C}_{a,d}$ é a matriz \mathbf{C}_a discretizada,

$$\mathbf{C}_{a,d} = \mathbf{C}_a \quad (3.13)$$

3.5.2 Modelo linear

O MPC linear utiliza um algoritmo de otimização e suas garantias de convexidade são de programação quadrática (PQ), ou seja a função de custo é construída com base em um modelo interno linear local, uma vez que o algoritmo trabalha em janelas de tempo. Logo, o modelo linear é obtido pela linearização do modelo dado pelas Equações 3.8 e 3.9. Assim, a matriz de termos não lineares $\mathbf{N}_{a,d}$ é omitida e tratada posteriormente como distúrbio para a dinâmica de processo. Os parâmetros do modelo, ou seja os elementos de matrizes A e B são calculados para os pontos de operação atuais ou preditos (sob uma janela ou horizonte de tempo), formando modelos lineares locais. Assim, o modelo linear é representado em espaço de estados analogamente ao trabalho de Felisiak (2015).

$$\mathbf{x}_{a,d}(k+1) = \mathbf{A}_{a,d} \mathbf{x}_{a,d}(k) + \mathbf{B}_{a,d} \mathbf{u}(k) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{y}_{a,d}(k) = \mathbf{C}_{a,d} \mathbf{x}_{a,d}(k) \quad (3.15)$$

3.5.3 Modelo linear com integrador

Nesta subseção é desenvolvido o modelo interno do sistema aumentado com a inclusão de um integrador, de maneira análoga ao desenvolvimento do modelo da Subseção 3.5.2. Contudo, a utilidade desta abordagem com um integrador embutido é a possibilidade de rejeição de distúrbios constantes, como descrito por Felisiak (2015). Fazendo a diferença dos dois termos da Equação 3.14 para instantes distintos, obtemos para a dinâmica dos estados a equação abaixo:

$$\mathbf{x}_{a,d}(k+1) - \mathbf{x}_{a,d}(k) = \mathbf{A}_{a,d}(\mathbf{x}_{a,d}(k) - \mathbf{x}_{a,d}(k-1)) + \mathbf{B}_{a,d}(\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1))$$

Se $\Delta \mathbf{x}_{a,d}(k) = \mathbf{x}_{a,d}(k) - \mathbf{x}_{a,d}(k-1)$ e $\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$. Então,

$$\Delta \mathbf{x}_{a,d}(k+1) = \mathbf{A}_{a,d} \Delta \mathbf{x}_{a,d}(k) + \mathbf{B}_{a,d} \Delta \mathbf{u}(k) \quad (3.16)$$

Um processo análogo é desenvolvido para a Equação 3.15. Assim, a partir da diferença entre as equações de saída, em instantes distintos de k , é possível encontrar a

equação mostrada abaixo.

$$\mathbf{y}_{a,d}(k) - \mathbf{y}_{a,d}(k-1) = \mathbf{C}_{a,d}\mathbf{A}_{a,d} \Delta\mathbf{x}_{a,d}(k) + \mathbf{C}_{a,d}\mathbf{B}_{a,d} \Delta\mathbf{u}(k) \quad (3.17)$$

Agora o estado está definido como:

$$\mathbf{x}_{aum} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}_{a,d}(k) \\ \mathbf{y}_{a,d}(k) \end{bmatrix}$$

É possível obter o sistema com integrador, como descrito em Felisiak (2015).

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}_{a,d}(k+1) \\ \mathbf{y}_{a,d}(k+1) \end{bmatrix}}^{x_{aum}(k+1)} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{a,d} & \mathbf{0}_{7,7} \\ \mathbf{C}_{a,d}\mathbf{A}_{a,d} & \mathbf{I}_7 \end{bmatrix}}^{A_{aum}} \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}_{a,d}(k) \\ \mathbf{y}_{a,d}(k) \end{bmatrix}}^{x_{aum}(k)} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{a,d} \\ \mathbf{C}_{a,d}\mathbf{B}_{a,d} \end{bmatrix}}^{B_{aum}} \Delta\mathbf{u}(k) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{y}_a(k) = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{7,7} & \mathbf{I}_7 \end{bmatrix}}^{C_{aum}} \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}_{a,d}(k) \\ \mathbf{y}_{a,d}(k) \end{bmatrix}}^{x_{aum}(k)} \quad (3.19)$$

3.5.4 Predição de saída

Esta subseção descreve uma das peças-chaves do controlador MPC, denominada de Equação de Predição de Saída, como em Camacho e Alba (2013). Esse mecanismo calcula as trajetórias das saídas previstas do sistema, denotada por $\hat{\mathbf{y}}_k(k+i)$ no i -ésimo passo do horizonte de predição N_p , avaliadas no instante atual de tempo k ; analogamente aos incrementos ótimos de controle $\mathbf{u}(k)$ que são computados no instante k como ilustrado na Figura 3.1.

Seja $\Delta\mathbf{U}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$ o vetor bloco de incrementos de controle e saída prevista, respectivamente, definidos como:

$$\Delta\mathbf{U} = \left[\Delta\mathbf{u}(k) \quad \Delta\mathbf{u}(k+1) \quad \Delta\mathbf{u}(k+2) \quad \dots \quad \Delta\mathbf{u}(k+N_c-1) \right]^T$$

e

$$\hat{\mathbf{Y}} = [\hat{\mathbf{y}}_k(k+1) \quad \hat{\mathbf{y}}_k(k+2) \quad \hat{\mathbf{y}}_k(k+3) \quad \dots \quad \hat{\mathbf{y}}_k(k+N_p)]^T$$

e

Segundo [Maciejowski \(2002\)](#), a equação de predição de saída do sistema é definida como:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{\Phi}\Delta\mathbf{U} \quad (3.20)$$

Note que há uma dependência das predições da saída com os estados estimados no instante atual k , $\hat{\mathbf{x}}(k)$. A predição de saída, assumindo invariância dos parâmetros dentro do horizonte de predição, nos remete a apenas um modelo linear local com parâmetros invariantes, semelhante ao mesmo encontrado por [Felisiak \(2015\)](#). Então,

$$\hat{\mathbf{x}}_k(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k) \quad (3.21)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k(k+2) = \mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k+1) \quad (3.22)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k(k+3) = \mathbf{A}^3\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k+1) + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k+2) \quad (3.23)$$

⋮

$$\hat{\mathbf{x}}_k(k+N_p) = \mathbf{A}^{N_p}\hat{\mathbf{x}}(k) + \dots + \mathbf{A}^{N_p-N_c}\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k+N_c-1) \quad (3.24)$$

A expressão $\hat{\mathbf{x}}_k(k+i)$ denota o estados estimados no i -ésimo passo do horizonte de predição N_p calculados no instante atual k , assim as seguintes sequências das saídas preditas são definidas como:

$$\hat{\mathbf{y}}_k(k+1) = \mathbf{C}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k) \quad (3.25)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k(k+2) = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k+1) \quad (3.26)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k(k+3) = \mathbf{C}\mathbf{A}^3\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k+1) + \mathbf{C}\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k+2) \quad (3.27)$$

⋮

$$\hat{\mathbf{y}}_k(k + N_p) = \mathbf{CA}^{N_p} \hat{\mathbf{x}}(k) + \dots + \mathbf{CA}^{N_p - N_c} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(k + N_c - 1) \quad (3.28)$$

As equações acima são utilizadas para construir a Equação de Predição de Saída, como está definido pela Equação 3.20. Assim, agrupando os termos das equações acima em blocos é possível reduzi-las em duas matrizes, \mathbf{F} e Φ , como está descrito a seguir.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{N_p} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

e

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA}^2 & \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA}^3 & \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{N_p-1} \mathbf{B} & \mathbf{CA}^{N_p-2} \mathbf{B} & \mathbf{CA}^{N_p-3} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{N_p-N_c} \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

3.5.5 Otimização dinâmica com restrição nas entradas e saídas

Nas aplicações industriais, a abordagem mais amplamente utilizada para MPC, é baseado em modelos lineares invariantes no tempo ou linearizados e executados sob pontos de operação. Por essa razão, neste trabalho, apesar de o modelo do movimento relativo ser não-linear e variante no tempo, os modelos serão considerados lineares e invariantes dentro do horizonte de predição N_p , em oposição ao trabalho de Felisiak (2015), que gera um para cada instante de amostragem.

Neste trabalho a função custo, J permanece um problema quadrático e convexo, mesmo com a adição das restrições. Assim,

$$J = (\mathbf{R}_s - \hat{\mathbf{Y}})^T (\mathbf{R}_s - \hat{\mathbf{Y}}) + \Delta \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{R}} \Delta \mathbf{U} \quad (3.31)$$

Onde

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_y} & \mathbf{I}_{n_y} & \mathbf{I}_{n_y} & \dots & \mathbf{I}_{n_y} \end{bmatrix}_{N_p}^T \Xi_{n_y,1}(k) = \bar{\mathbf{R}} \Xi_{n_y,1}(k)$$

Em que

$$\bar{\mathbf{R}}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_y} & \mathbf{I}_{n_y} & \mathbf{I}_{n_y} & \dots & \mathbf{I}_{n_y} \end{bmatrix}_{N_p}^T$$

A dimensão $\dim\{\bar{\mathbf{R}}_s\} = n_y \cdots N_p \times n_y$; $\Xi_{7,1}(k)$ é o vetor de referências para a saída, com dimensão $\dim\{\Xi\} = n_y \times 1$; e $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k)$ é o vetor de saídas previstas com dimensão.

Reescrevendo a Equação 3.31, temos:

$$J = (\mathbf{R}_s - \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k))^T (\mathbf{R}_s - \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k)) - 2\Delta \mathbf{U}^T \Phi^T (\mathbf{R}_s - \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k)) + \Delta \mathbf{U}^T (\Phi^T \Phi + \bar{\mathbf{R}}) \Delta \mathbf{U} \quad (3.32)$$

Derivando a Equação 3.32 e igualando ao espaço nulo, encontramos o mínimo da função escalar J , logo obtemos na forma compacta a solução para o problema quadrático do MPC com restrição de saídas e de entradas:

$$\min_{\Delta \mathbf{U}} = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{U}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{U}) - c^T \Delta \mathbf{U} \quad (3.33)$$

Onde $\mathbf{H} = (\Phi^T \Phi + \bar{\mathbf{R}})$ é a matriz Hessiana, e a matriz c é dada por:

$$c = \Phi^T (\mathbf{R}_s - \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k))$$

Sujeitos as restrições de entradas e saídas na forma matricial abaixo:

$$\mathbf{M} \Delta \mathbf{U} \leq \mathbf{N} \quad (3.34)$$

Onde \mathbf{M} e \mathbf{N} são matrizes com dimensão $\dim\{M\} = \dim\{N\} = 2(N_c - 1)$.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \Phi \\ -\Phi \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

e

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{min} + \mathbf{Z}_1 \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{U}_{max} - \mathbf{Z}_1 \mathbf{u}(k-1) \\ \hat{\mathbf{Y}}_{max} - \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}(k) - \hat{\mathbf{Y}}_{min} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Onde $\mathbf{Z}_1 = [\mathbf{I}_3 \ \mathbf{I}_3 \ \mathbf{I}_3 \ \dots \ \mathbf{I}_3]_{N_c-1}^T$ e $\mathbf{Z}_2 = [\mathbf{I}_3]_{N_c-1}^{toeplitz}$

O problema de controle ótimo (PCO) está associado ao modelo usado para predição de saída, uma vez que o MPC convencional gera um problema de programação quadrática (PQ), ou seja, é um problema de otimização convexo (MACIEJOWSKI, 2002). Este tipo de PCO apresenta solucionadores numéricos bem sucedidos de prateleira, como por exemplo *quadprog* do *software Matlab*.

$$\Delta U = \text{quadprog}(H, \text{phi}, M, N)$$

No entanto, a função custo nem sempre é linear. Então, para este caso faz-se o uso de outras soluções numéricas para resolver o problema de programação não linear (PNL), como por exemplo o *software* licenciado GPOPS II, como mostrado nos trabalhos de Zappulla (2017); Park et al. (2016); Munoz (2011).

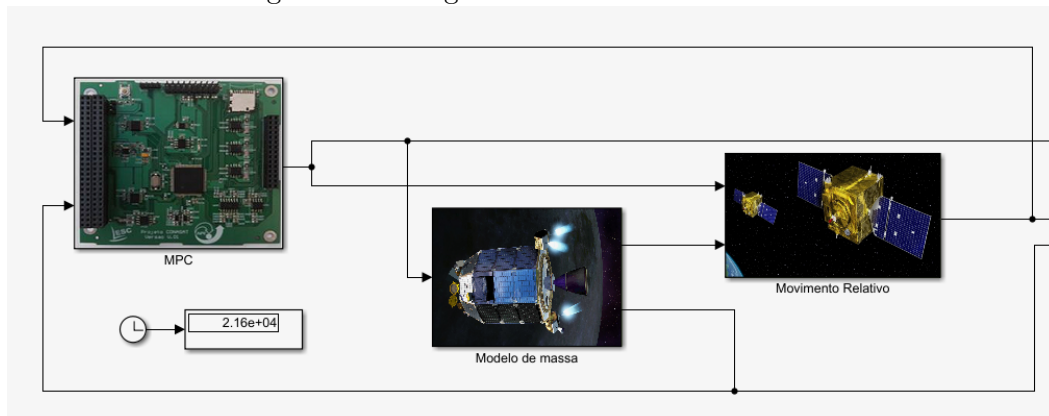
4 MPC EM MANOBRAS DE *RENDEZVOUS*

Diversas estratégias de Teoria de Controle já foram utilizadas para resolver problemas de RVD, como mencionado na Introdução (Capítulo 1). Este trabalho, sobretudo neste capítulo aborda a utilização da técnica de Controle Preditivo, MPC, para resolver a manobra de *rendezvous* por intermédio de simulação numérica, semelhante ao que foi realizado pelos trabalhos de Felisiak (2015); Munoz (2011); Zagaris (2018).

4.1 Simulação e controle da manobra orbital

A simulação foi implementada usando um diagrama de blocos da extensão *Simulink*, do *software Matlab*, como ilustra na Figura 4.1. Os principais blocos da implementação da malha de controle são: MPC discreto invariante no tempo; modelo contínuo da massa do satélite (o sétimo estado), realimentando o controlador; dinâmica do modelo discreto do movimento relativo (os primeiros seis estados), descrito no capítulo anterior.

Figura 4.1 - Diagrama de blocos em *Simulink*.



Fonte: Autor.

A implementação da simulação foi decomposta no modelo de movimento relativo principal e no modelo de massa. Devido à complexidade dos modelos de processos, eles foram implementados via programação orientada a objetos. O fluxo de programa é descrito usando o passo a passo abaixo:

- a) Usando os elementos orbitais do satélite alvo, dados nas condições iniciais, calcule o movimento angular médio do alvo, n_a ; em seguida, dado um t , calcule a anomalia média do satélite alvo, M_a , usando a Equação 2.31;

- b) Usando a anomalia excêntrica do satélite alvo, E_a , encontre a anomalia verdadeira, f_a , usando a Equação 2.28;
- c) Calcule o valor do *semilatus rectum*, p_a , a partir da Equação 2.17, em seguida, encontre a distância radial do satélite alvo, r_a ;
- d) A partir do valor r_a e encontre \dot{f}_a do satélite alvo;
- e) Calcule a distância radial do satélite perseguidor, r_p , e posteriormente extrair a posição relativa, $\vec{\rho} = (x_1, x_2, x_3)$;
- f) Obtenha o momento angular, h_a , da órbita do alvo, e então calcule a velocidade radial do alvo, \dot{r}_a , no referencial inercial;
- g) Para um determinado vetor de controle, \vec{u} , impulso específico I_e e considerando a relação entre a massa expelida x_p e a massa inicial do propelente m_{p0} construa o modelo dada pela Equação 2.51;
- h) Integre a equação de estado aumentado da Equação 3.52, e encontre a massa m_s , $\vec{x}_p(t)$, do satélite perseguidor em t ;
- i) Aplicando os parâmetros \dot{f}_a , f_a , r_a , \dot{r}_a , r_p , μ e m_s na Equação 3.6 no tempo t , e posteriormente integre a mesma Equação 3.6, sendo assim é possível extrair o vetor do movimento relativo aumentado, \mathbf{x}_a ;
- j) Em seguida calcule o vetor de saída atual, \mathbf{y}_a , do processo, assumindo o vetor de estado do processo aumentado \mathbf{x}_a ;
- k) Por fim, vá para o fluxograma a seguir, responsável pelo cálculo dos incrementos de controle.

Para a implementação da lei de controle preditivo do movimento relativo de encontro orbital são necessárias algumas informações sobre o modelo a ser controlado, como:

- Matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$,
- Limitantes sobre a excursão dos controles: $u_{min}, u_{max} \in \mathbb{R}^p$,
- Limitantes sobre a excursão das saídas: $y_{min}, y_{max} \in \mathbb{R}^q$,
- Horizonte de Predição N_p ,
- Horizonte de Controle N_c ,

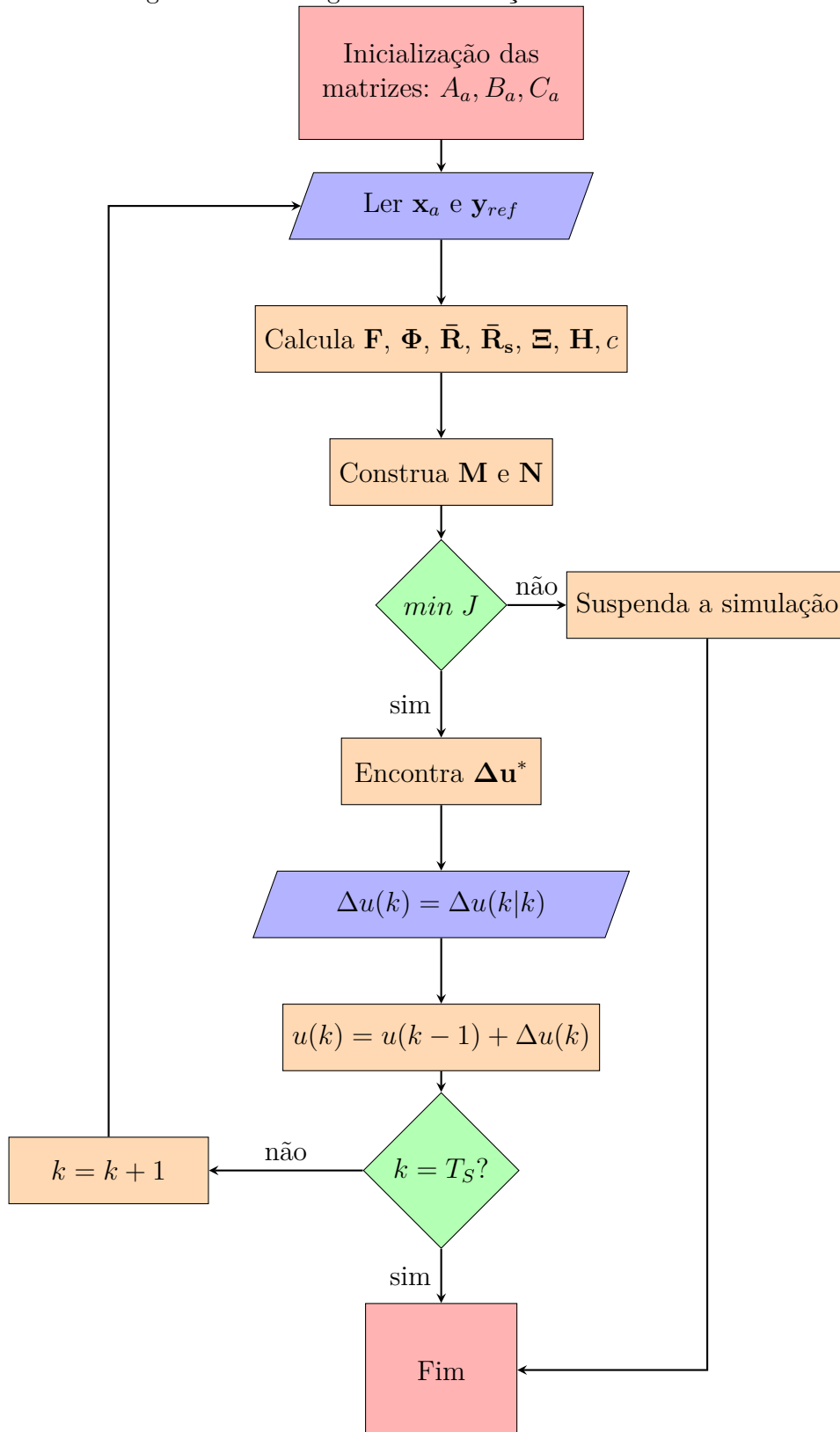
- Pesos de controle h_1, h_2, \dots, h_p .

A partir das informações acima é possível gerar a sequência ótima de incrementos de controles $\Delta \mathbf{u}$ e, conseqüentemente, a sequência ótima controles ótimos \mathbf{u} . Seguindo o passo a passo da implementação do *loop* de controle preditivo descrito abaixo.

- Inicializando a sequência de controle $\hat{\mathbf{u}}(k+j)$, $j = 1, 2, \dots, N_c$; e o vetor de estimativas do estado aumentado no instante atual k , $\hat{\mathbf{x}}_k$, calcule a sequência de estados futuros; $\mathbf{x}_k(k+i)$, $i = 1, 2, \dots, N_p$ a partir da Equação 3.14;
- Calcule as matrizes $\mathbf{A}_{a,d}(\mathbf{x}_k(k+i), k+i)$ a partir da sequência $\mathbf{x}_k(k+i)$, como descrito na Equação 3.14;
- A partir da sequência $\mathbf{x}_k(k+i)$, $i = 1, 2, \dots, N_p$ e $\hat{\mathbf{u}}(k+j)$, $j = 1, 2, \dots, N_c$, calcule $\mathbf{B}_{a,d}(\mathbf{x}_k(k+j), k+j)$, de acordo com a Equação 3.14; Construa a matriz $\mathbf{C}_{a,d}$, de acordo com a Equação 3.15;
- Calculados as matrizes $\mathbf{A}_{a,d}(\mathbf{x}_k(k+i), k+i)$, $\mathbf{B}_{a,d}(\mathbf{x}_k(k+j), k+j)$ e $\mathbf{C}_{a,d}$, agora calcule as matrizes da Equação 3.18 e Equação 3.19, a saber $\mathbf{A}_{aum}(\mathbf{x}_k(k+i), k+i)$, $\mathbf{B}_{aum}(\mathbf{x}_k(k+j), k+j)$ e \mathbf{C}_{aum} ;
- Calcule \mathbf{F} e Φ a partir das Equações 3.29 e Equação 3.30;
- Monte a matriz $\bar{\mathbf{R}}$ e a matriz \mathbf{R} ;
- Calcule o estado aumentado $\mathbf{x}_{aum}(k+i)$;
- A partir de \mathbf{F} , Φ , $\bar{\mathbf{R}}$, \mathbf{R} , $\mathbf{x}_{a,k}(k+i)$ e a matriz de referências $\Xi(k)$, construa a matriz hessiana \mathbf{H} e a matriz \mathbf{c} ;
- Construa a matriz de restrições \mathbf{M} e \mathbf{N} de acordo com a Equação 3.35 e Equação 3.36, respectivamente;
- Use o solucionador numérico para encontrar a sequência de incrementos de controles, $\Delta \hat{\mathbf{u}}(k+j)$, $j = 1, 2, \dots, N_c$, a partir de \mathbf{M} , \mathbf{N} , \mathbf{H} e \mathbf{c} ;
- Por fim, calcule o controle ótimo $\hat{\mathbf{u}}(k)$ a partir do $\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)$.

O fluxograma a seguir da Figura 4.2 apresenta o passo a passo de como funciona o algoritmo do MPC deste trabalho de uma forma mais intuitiva.

Figura 4.2 - Fluxograma de Execução da Malha MPC.



Fonte: Autor.

4.2 Exemplos numéricos

Esta seção apresenta os resultados das simulações numéricas que visam atingir os objetivos deste trabalho. As simulações foram realizadas por intermédio do diagrama de blocos em *Simulink/Matlab*, mostrado na Subseção 4.1, a partir de condições iniciais e parâmetros aproximados da Constelação GPS (*Global Positioning System*) e da ISS. Para estas simulações são utilizados os pacotes de integração numérica e o de otimização numérica, respectivamente um integrador numérico Runge-Kutta de 8ª ordem de passo fixo, denominado de *ode8*, e um solucionador numérico de programação quadrática, chamado de *quadprog*.

A sintonia dos parâmetros do controlador (ou seja, o ajuste de N_p , N_c e T_s) não busca a eficiência para a manobra em si, ou seja são escolhidos de uma forma a fornecer um erro de rastreamento em regime permanente próximos a zero e com alguma semelhança com a realidade destas missões para fins de comparação. Além disso, são construídos três cenários com dados adaptados de missões famosas, a saber a ISS e a GPS, como satélites alvos; e o Edoardo ATV e a *Dragon CRS* como satélites perseguidores dos satélites alvos. Estes cenários são gerados a partir das simulações numéricas que simulam algumas possibilidades de manobras de manutenção em órbita não perturbada a partir do arcabouço teórico demonstrado no Capítulo 2 e 3, vide a Tabela 4.2 usada nos cenários.

4.2.1 Cenários para o *Rendezvous*

Neste trabalho, as condições para a realização bem sucedida da manobra de *Rendezvous* orbital estão compreendidas entre as fases de *Closing*, com centenas de metros, até Aproximação Final, com escala centimétrica. Assim, a manobra de *rendezvous* é considerada bem sucedida quando os módulos de distância relativa, $||\rho||$, e de velocidade relativas, $||\dot{\rho}||$ forem menores ou igual a 10 m e menores do que 0,5 m/s, respectivamente.

As órbitas das missões utilizadas como cenários deste capítulo, a saber a ISS e a GPS, são fornecidas na forma de elementos orbitais clássicos para facilitar sua interpretação. Além disso, a escolha dessas missões visa demonstrar a versatilidade do MPC frente a órbitas com elementos orbitais distintos; embora apresentem uma baixa excentricidade, elas possuem outros elementos bastante diferentes. Afinal a ISS está numa órbita baixa, ou LEO (*Low Earth Orbits*), e a constelação GPS se encontra numa órbita média, ou MEO (*Medium Earth Orbits*).

Os elementos keplerianos das órbitas dos satélites alvos escolhidas para as simulações apresentam semelhanças com os dados da literatura, por exemplo os valores do semieixo maior a e a inclinação i foram extraídos do trabalho seminal de [Fehse \(2008\)](#), no caso da órbita da ISS, enquanto os dados da órbita do GPS foram extraídos da plataforma de [Kelso \(2023\)](#); os outros elementos keplerianos restantes foram integralmente extraídos de [Kelso \(2023\)](#) para ambos os satélites alvos.

No entanto, é necessário fazer uma introdução aos satélites perseguidores Edoardo ATV e a *Dragon* CRS, demonstrando suas características, e posteriormente compilar estas informações e adaptá-las para gerar as condições iniciais de *rendezvous* sob a perspectiva do satélite perseguidor. No mais, para cada cenário é testado não apenas o desempenho do controlador MPC discutido no Capítulo 3, como também os formatos dos modelos NERM, CW e TH. Assim, abaixo está enumerado os cenários e suas características.

- O Cenário I - testa o desempenho do controlador MPC com satélites alvos em órbita de baixa excentricidade ($e \approx 0$) e distância relativa dentro do limite de 1 km;
- O Cenário II - testa o desempenho do controlador MPC com satélites alvos em órbita de baixa excentricidade ($e \approx 0$) e distância relativa superior ao limite de 1 km;
- O Cenário III - testa o desempenho do controlador MPC com satélites alvos em órbita excêntrica ($e > 0$) e distância relativa superior ao limite de 1 km.

4.2.1.1 ESA ATV Edoardo

A necessidade de manter os sistemas e transportar cargas da ISS, fez-se o projeto de um veículo autônomo, o ATV (*Automated Transfer Vehicle*) para a ISS para manutenção e transporte de mantimentos, chamado com nomes de importantes figuras em ciência e engenharia: Júlio Verne, Johannes Kepler, Edoardo Amaldi, Albert Einstein e Georges Lemaître. Lançados com êxito e acoplaram na ISS autonomamente, especialmente, o ATV-003 Edoardo Amaldi (ESA), que participou de missões de reabastecimento, em 23 de março de 2012 com 7667 kg de carga útil (5560 kg de propelente para impulsionar e controlar a atitude da ISS, 860 kg de propelente para reabastecer a ISS, 100 kg de oxigênio, 840kg kg de água e 2200 kg de carga seca, segundo [European Space Agency\(ESA\) \(2022\)](#).

O conjunto de manobras orbitais executadas pelo Centro de Controle leva o ATV a uma distância de 39 km pela retaguarda e 5 km abaixo da ISS. Terminada essa etapa, o ATV, autônomo, utilizando tecnologia GPS, se aproxima da ISS até 250 m, como descrito em [European Space Agency\(ESA\) \(2012\)](#). O ATV Edoardo Amaldi é equipado com 28 propulsores de baixa pressão e 8 propulsores de alta pressão. Cada propulsor de baixa pressão tem um impulso específico de cerca de 314 segundos e uma força de empuxo de aproximadamente 220 newtons, enquanto que cada propulsor de alta pressão tem um impulso específico de cerca de 240 segundos e uma força de empuxo de aproximadamente 1000 N, vide [European Space Agency\(ESA\) \(2012\)](#).

4.2.1.2 *Dragon CRS Space X*

A *Dragon CRS*, ou *Dragon Cargo Resupply Services*, é uma nave espacial desenvolvida pela *SpaceX* para realizar missões de reabastecimento da Estação Espacial Internacional (ISS) em nome da NASA. A nave é capaz de transportar alimentos, água, equipamentos científicos e suprimentos para os astronautas que estão a bordo da ISS, vide [Seito \(2015\)](#). Em relação aos parâmetros de massa da *Dragon CRS* sua massa total é de cerca de 12000 kg, dos quais aproximadamente 6000 kg são de carga útil. Além disso, a nave possui um tanque de combustível com capacidade para 4900 kg de propelente, que é utilizado para manobras e para o controle de órbita .

A *Dragon CRS* é equipada com 18 propulsores *Draco*, que são motores de baixa pressão projetados para manobras orbitais e ajustes finos de atitude. Cada um destes propulsores tem um impulso específico de cerca de 300 segundos e é capaz de gerar uma força de empuxo de até 90 N. Durante uma manobra de *rendezvous* com a ISS, a força exata gerada pelos propulsores da *Dragon CRS* pode variar dependendo das condições específicas de voo, como a massa da nave, a altitude da órbita, a orientação e velocidade relativas da nave em relação à ISS, entre outros fatores ([SPACEX, 2023](#)).

4.2.1.3 *Satélite perseguidor*

Assim, o satélite perseguidor das simulações numéricas abaixo leva em consideração as duas missões acima mencionadas: ATV e *Dragon*, adaptando os parâmetros de massa dos satélites supracitados e das órbitas dos alvos, ISS e GPS, para realizar a manobra de *rendezvous*, sendo assim possível gerar o Perseguidor, descrito na Tabela 4.1:

A Tabela 4.1 apresenta os parâmetros de massa do SP adotados para as simulações de manobra de *rendezvous* sob os cenários que serão apresentados posteriormente.

Tabela 4.1 - Parâmetros adaptados do ATV e *Dragon*.

Parâmetros do Satélite	ATV Edoardo	<i>Dragon CRS</i>	Perseguidor
$m_{c,i}$	3150 kg	3150 kg	500 kg
m_s	≈ 15000 kg	≈ 12000 kg	5000 kg
I_{esp}	314 s	300 s	300 s

Fonte: Autor.

Os parâmetros do controlador preditivo escolhidos visam a estabilidade em malha fechada para os cenários cujo modelo era linear (CW). Assim, está estabelecido o conjunto de parâmetros de sintonia dos controladores dos outros modelos a partir do modelo CW, e posteriormente aplicados no mesmo cenário para comparar os desempenhos dos controladores para os outros modelos, a saber NERM e TH, como descrito na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Parâmetros MPC e de Simulação.

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Referência para o <i>rendezvous</i>	Ξ	$\mathbf{0}_{7,1}$	m, m/s, kg
Horizonte de predição	N_p	70	-
Horizonte de controle	N_c	20	-
Pesos nos incrementos de controle	g_c	$5 \cdot 10^8 \cdot [1 \ 1 \ 1]^T$	-
Saturação dos atuadores	$u_{min} = -u_{max}$	$4 \cdot 10^2 \cdot [1 \ 1 \ 1]^T$	N
Saturação das saídas	$y_{min} = -y_{max}$	$10^{10} \cdot [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$	m, m/s, kg
Período de amostragem	T_s	200	s
Período de simulação	P	70000	s

Fonte: Autor.

4.2.2 Cenário I - *rendezvous* com a ISS - $e \approx 0$

A Tabela 4.3 apresenta os parâmetros assumidos na simulação numérica do Cenário I que foram comentados no cabeçalho da Seção 4. Neste caso, a órbita do satélite alvo está no limite de separação entre satélites imposto pelas aproximações das equações CW e TH para órbitas com baixa excentricidade, a saber $\|\rho\|_0 = 1000,28$ m e $e = 0,01661$.

Tabela 4.3 - Cenário I - Parâmetros iniciais de *rendezvous* com a ISS $e \approx 0$.

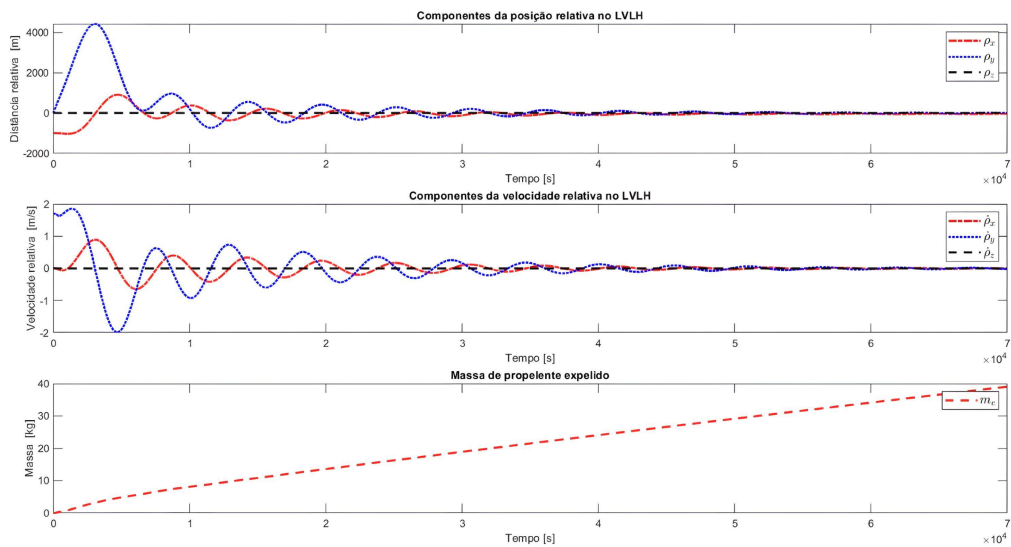
Elementos Keplerianos	Alvo (ISS)	Satélite Perseguidor
a	6788 km	6777 km
e	0,01661	0,01661
i	$51,6^\circ$	$51,6^\circ$
Ω	$247,38^\circ$	$247,38^\circ$
ω	$258,4^\circ$	$258,4^\circ$
M_0	90°	90°

Fonte: Autor.

4.2.2.1 Cenário I - resultados das simulações - equações CW

A Figura 4.3 apresenta os estados de posição relativa no referencial LVLH, denotados por $\rho_x = x_1$ em vermelho, $\rho_y = x_2$ em azul e $\rho_z = x_3$ em preto; de velocidade relativa no referencial LVLH, denotados por $\dot{\rho}_x = x_4$ em vermelho, $\dot{\rho}_y = x_5$ em azul e $\dot{\rho}_z = x_6$ em preto; e a variação de massa, denotado por $m_e = x_7$ em vermelho, como está ilustrado na Figura 4.3.

Figura 4.3 - Cenário I - CW: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.

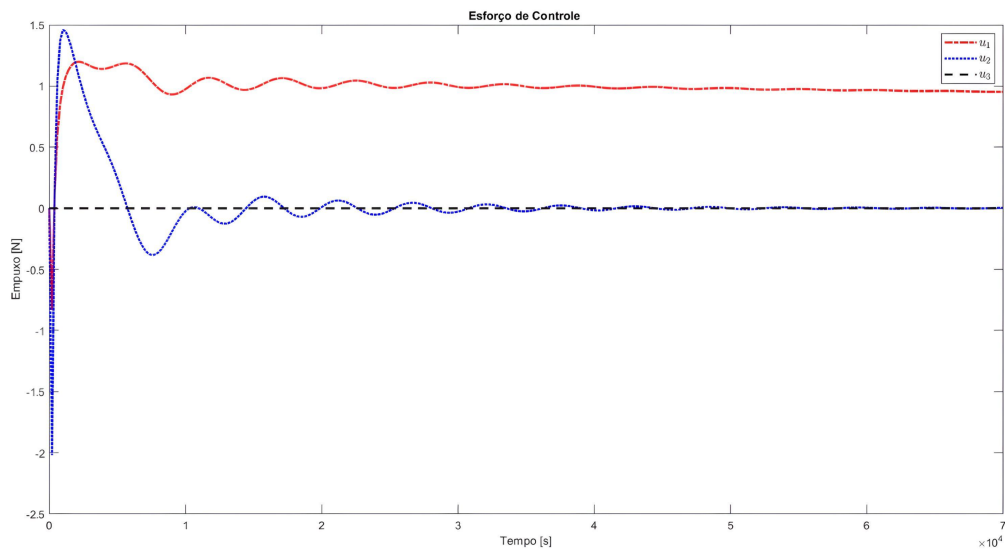


Fonte: Autor.

É possível notar que, na Figura 4.3, os componentes dos vetores de posição, ρ_x e ρ_y , e velocidade relativas, $\dot{\rho}_x$ e $\dot{\rho}_y$, apresentaram uma alta magnitude e um comporta-

mento oscilatório descendente estável, desde o início da simulação, em comparação com a componente ρ_z , uma vez que esta última apresentou uma dinâmica de baixa intensidade, como ilustra a Figura 4.4. Assim, é possível ver também que o perseguidor precisou ultrapassar o satélite alvo para alcançar a altitude necessária, e assim realizar a manobra de *rendezvous*, pois houve uma mudança de sinal da componente $\dot{\rho}_y$, como ilustrado na Figura 4.3. Além disso, é possível ver que o perseguidor consumiu apenas 25 kg de propelente.

Figura 4.4 - Cenário I - CW: Vetor de sinais de controle.

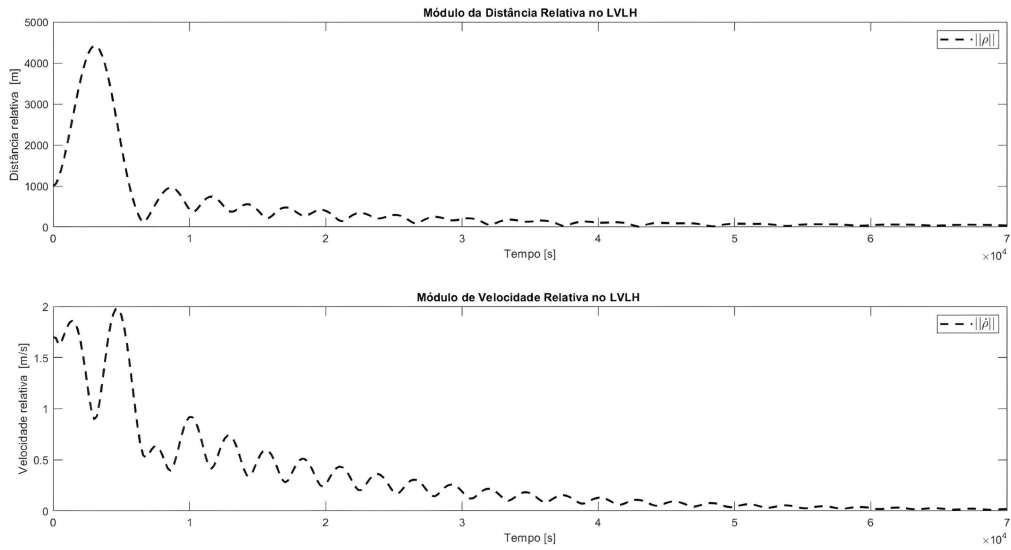


Fonte: Autor.

Na Figura 4.7, os sinais de controle não saturaram, sobretudo no canal u_1 e u_2 , tendo seu pico num valor acima de 1,5 N. O canal u_1 quase não teve dinâmica. Embora nesta simulação o controlador tenha gerado um pico menor na entrada dos propulsores, ele atingiu os requisitos da manobra consumindo mais propelente, como ilustrado na Figura 4.4.

De acordo com a Figura 4.5, é possível assumir que o perseguidor realizou a manobra de *rendezvous* com a ISS, próximo aos 43000 s, atendendo aos requisitos de *closing* deste trabalho, onde alcançou um $\|\rho\| = 6,95$ m e um $\|\dot{\rho}\| = 0,10$ m/s e apresentou menor atividade do controle, como demonstra as Figura 4.4 e Figura 4.5. Além disso, é possível assumir que o *rendezvous* foi realizado mesmo sob condições sob os limites de separação teórico, devendo-se atribuir tal resultado positivo ao controlador MPC.

Figura 4.5 - Cenário I - CW: Módulo dos vetores de posição e velocidade relativas no referencial LVLH.



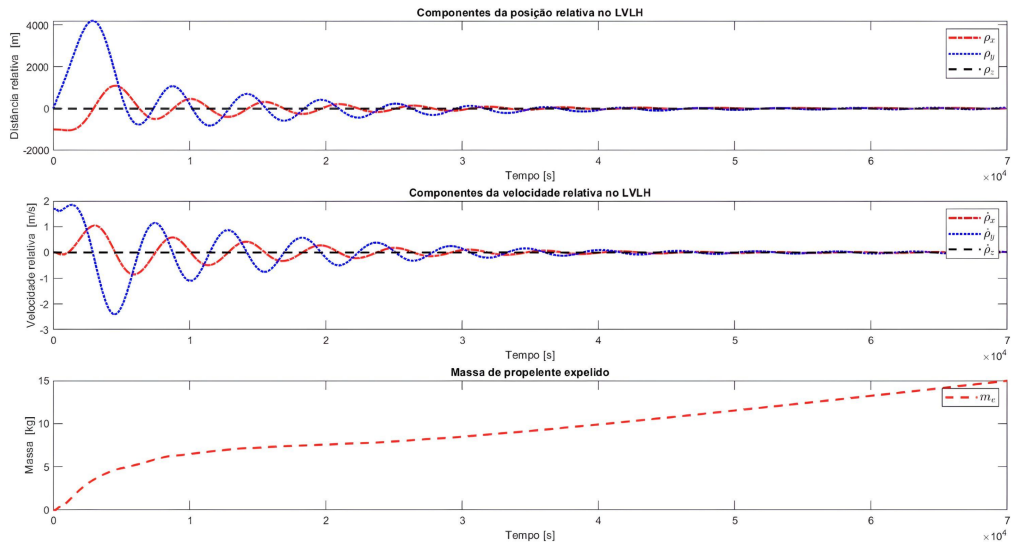
Fonte: Autor.

4.2.2.2 Cenário I - resultados das simulações - equações TH

A Figura 4.6 apresenta os estados de posição relativa no referencial LVLH, denotados por $\rho_x = x_1$ em vermelho, $\rho_y = x_2$ em azul e $\rho_z = x_3$ em preto; de velocidade relativa no referencial LVLH, denotados por $\dot{\rho}_x = x_4$ em vermelho, $\dot{\rho}_y = x_5$ em azul e $\dot{\rho}_z = x_6$ em preto; e a variação de massa, denotado por $m_e = x_7$ em vermelho, como está ilustrado na Figura 4.6.

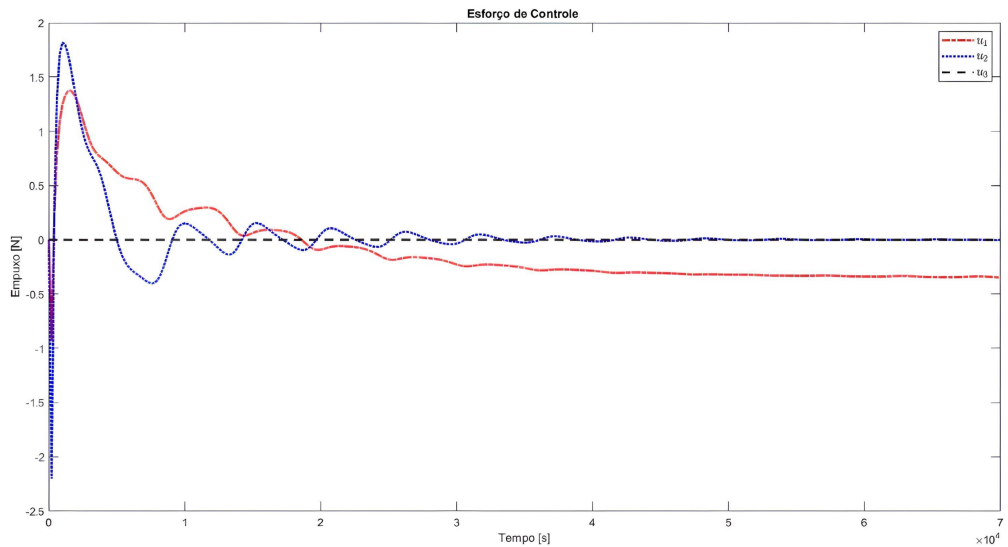
É possível também notar uma dinâmica semelhante nos componentes dos vetores de posição e velocidade relativas em relação ao Subseção 4.2.3.1, apresentando um comportamento oscilatório descendente, desde o início da simulação, como corrobora a Figura 4.4. Contudo, é fácil notar que o perseguidor consumiu ainda menos para executar a manobra apenas 11 kg de propelente.

Figura 4.6 - Cenário I - TH: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.



Fonte: Autor.

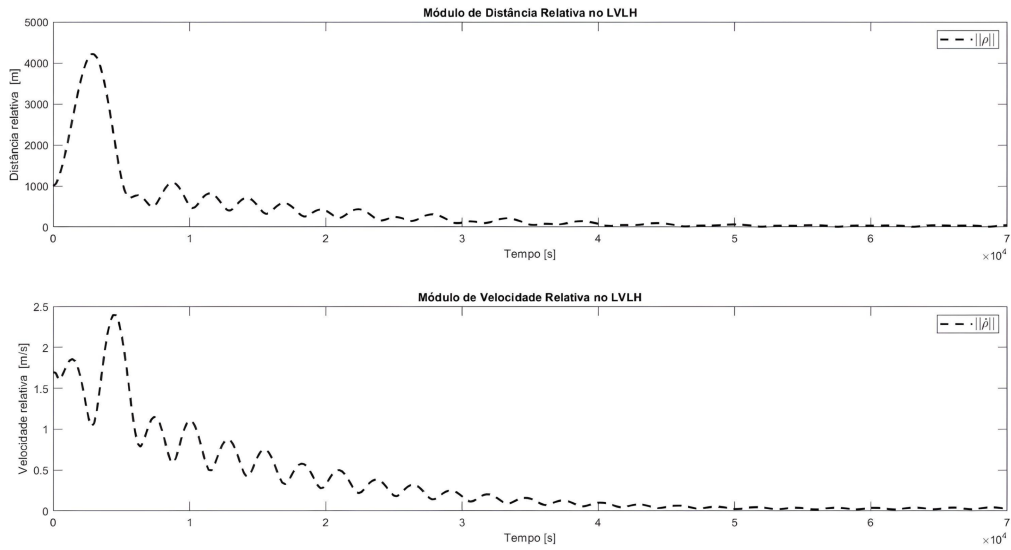
Figura 4.7 - Cenário I - TH: Vetor de sinais de controle.



Fonte: Autor.

Na Figura 4.7, os sinais de controle não saturam, sobretudo no canal u_1 e u_2 , tendo seu pico num valor acima de 1,5 N. Embora nesta simulação o controlador tenha gerado um pico maior na entrada dos propulsores, ele atingiu os requisitos da manobra consumindo menos propelente, como ilustrado na Figura 4.7.

Figura 4.8 - Cenário I - TH: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e velocidade relativas no referencial LVLH.



Fonte: Autor.

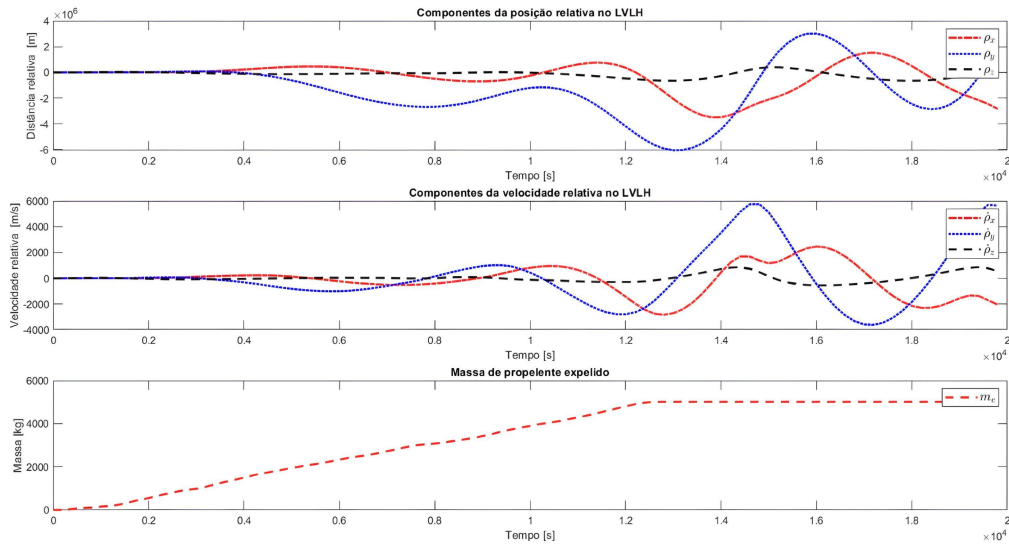
Assim, de acordo com a Figura 4.8 o satélite perseguidor realizou a manobra de *rendezvous* com a ISS, próximo aos 46400 s, superior ao Cenário I CW, atendendo aos requisitos de *closing* deste trabalho. No mais, é possível assumir também que o MPC possibilitou a manobra de *rendezvous* foi realizado no limite máximo de separação teórico, 1 km, chegando em resultados como $\rho = 10,58$ m e $\dot{\rho} = 0,05$ m/s.

4.2.2.3 Cenário I - resultados das simulações - equações NERM

A Figura 4.9 apresenta os estados de posição relativa no referencial LVLH, denotados por $\rho_x = x_1$, $\rho_y = x_2$ e $\rho_z = x_3$; de velocidade relativa no referencial LVLH, denotados por $\dot{\rho}_x = x_4$, $\dot{\rho}_y = x_5$ e $\dot{\rho}_z = x_6$; e a variação de massa, denotado por $m_e = x_7$, como está ilustrado na Figura 4.9.

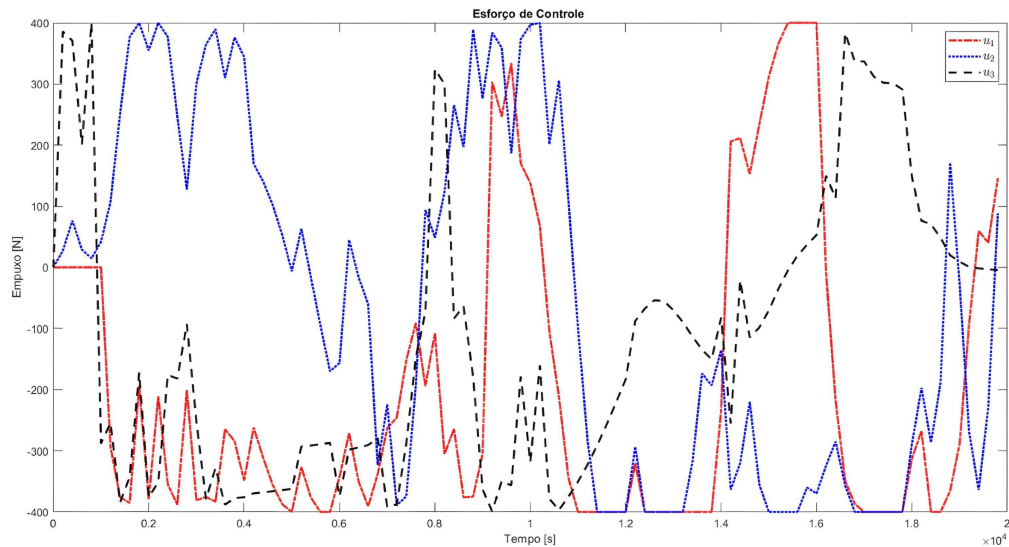
É possível notar que o perseguidor tentou realizar a manobra, mas não conseguiu. Os componentes dos vetores de posição e velocidade relativas entraram em oscilações sustentadas e crescentes aos 12000 s após consumir todos os 5000 kg de propelente, como ilustra Figura 4.9.

Figura 4.9 - Cenário I - NERM: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.



Fonte: Autor.

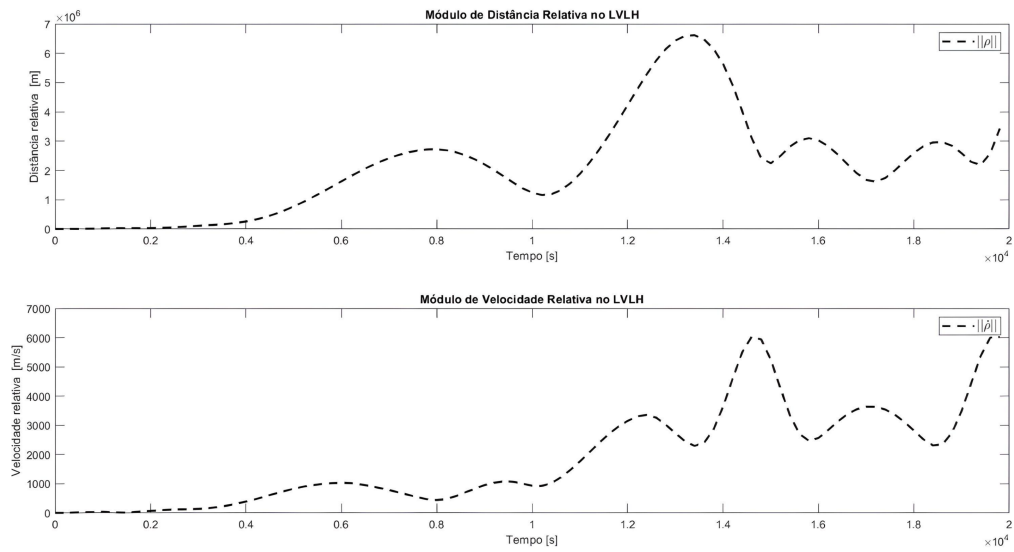
Figura 4.10 - Cenário I - NERM: Vetor de sinais de controle.



Fonte: Autor.

Na Figura 4.10, os sinais de controle atingiram a saturação dos atuadores em 400 N, após os primeiros segundos. Vale salientar que essa atividade intensa nos canais do atuador gera o consumo total do combustível antes de completar quatro horas de missão (ou 12000s).

Figura 4.11 - Cenário I - NERM: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e velocidade relativas no referencial LVLH.



Fonte: Autor.

Assim, de acordo com a Figura 4.11 e os requisitos da manobra de *closing* deste trabalho, o satélite perseguidor não conseguiu realizar a manobra de *rendezvous* com a ISS, chegando em resultados piores do que os demonstrados na Subseção 4.2.3.1. e 4.2.3.2.

4.2.3 Cenário II: *rendezvous* com o GPS - $e \approx 0$

A Tabela 4.4 apresenta os parâmetros assumidos na simulação numérica do Cenário II que foram comentados no cabeçalho da Seção 4. Neste caso, a órbita do satélite alvo está muito acima do limite de separação entre satélites imposto pelas aproximações das equações CW e TH para órbitas com baixa excentricidade, a saber $\|\rho\|_0 = 2400$ km e $e = 0,000804$.

Tabela 4.4 - Cenário II - Parâmetros iniciais de *rendezvous* com o GPS $e \approx 0$.

Elementos Keplerianos	Alvo	Satélite Perseguidor
a	$\approx 20404,5$ km	18000,5 km
e	0,000804	0,000804
i	$63,5^\circ$	$63,5^\circ$
Ω	$86,6^\circ$	$80,6^\circ$
ω	$213,6^\circ$	$213,6^\circ$
M_0	90°	90°

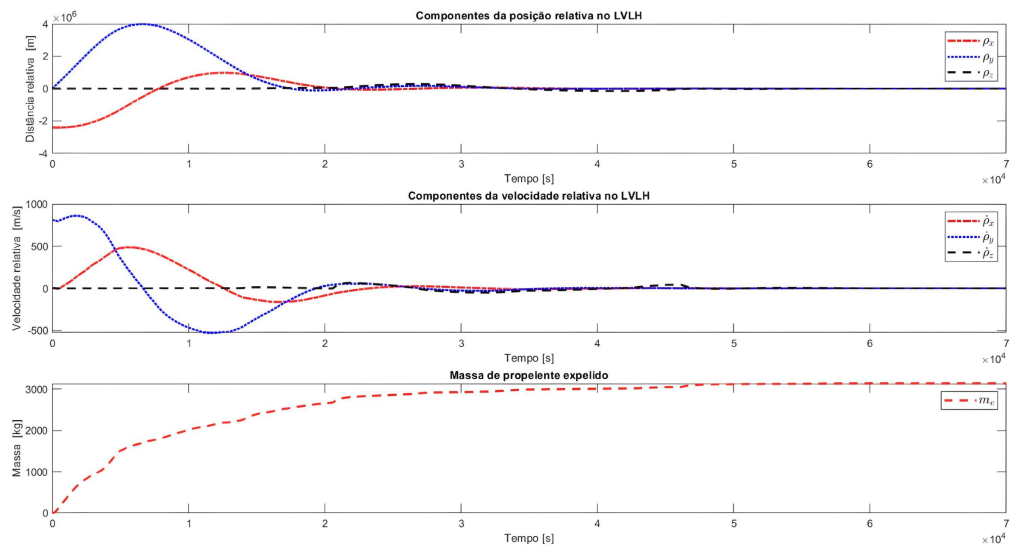
Fonte: Autor.

4.2.3.1 Cenário II - resultados das simulações - equações CW

A Figura 4.12 apresenta os estados de posição relativa no referencial LVLH, denotados por $\rho_x = x_1$ em vermelho, $\rho_y = x_2$ em azul e $\rho_z = x_3$ em preto; de velocidade relativa no referencial LVLH, denotados por $\dot{\rho}_x = x_4$ em vermelho, $\dot{\rho}_y = x_5$ em azul e $\dot{\rho}_z = x_6$ em preto; e a variação de massa, denotado por $m_e = x_7$ em vermelho, como está ilustrado na Figura 4.12.

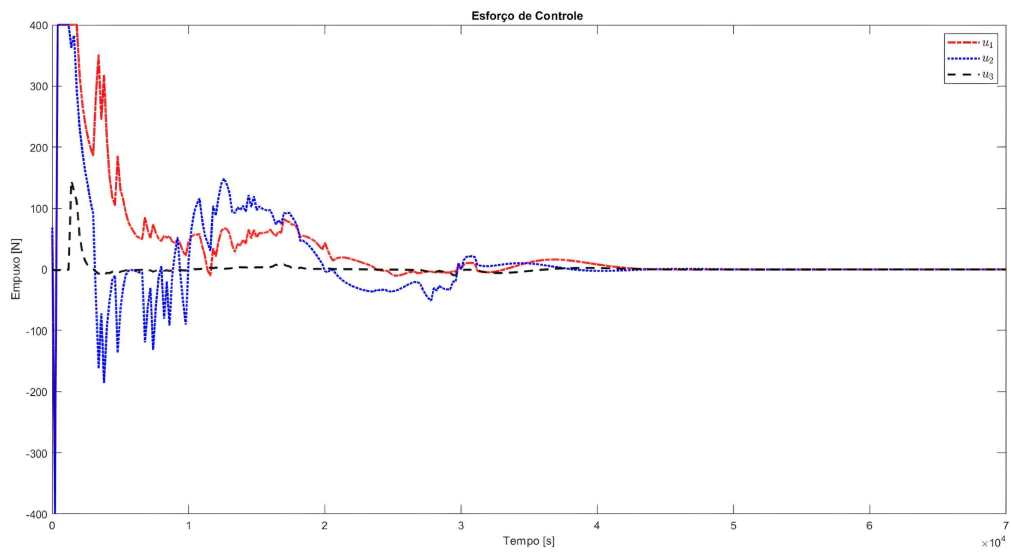
Na Figura 4.12 os componentes dos vetores de posição e velocidade relativas apresentaram uma dinâmica muito semelhante aos resultados do Cenário I (CW), porém a resposta transitória apresentou menos oscilações, como ilustra a Figura 4.13. É possível notar que o componente z da posição e da velocidade relativa apresentou uma dinâmica quase imutável em comparação com os outros componentes (x e y de ρ e $\dot{\rho}$). Além disso, é possível notar na Figura 4.12, o perseguidor consumindo aproximadamente 2570 kg de propelente (quase 60 % do tanque de combustível) para realizar a manobra.

Figura 4.12 - Cenário II - CW: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.



Fonte: Autor.

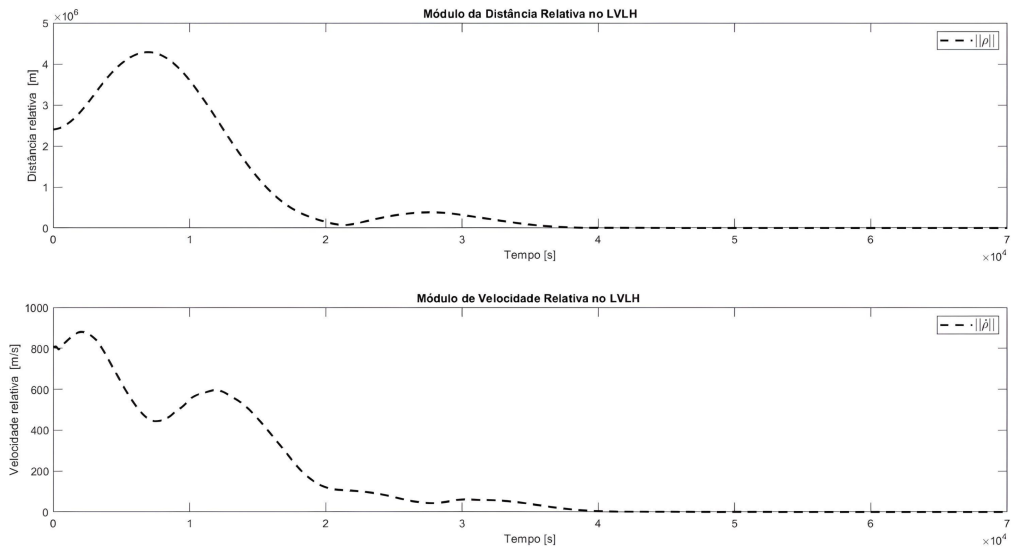
Figura 4.13 - Cenário II - CW: Vetor de sinais de controle.



Fonte: Autor.

Na Figura 4.13, os sinais de controle saturaram os atuadores, em 400 N, sobretudo no canal u_1 (em vermelho) e u_2 (em azul). O canal u_3 (em preto) quase não trabalhou comparado aos outros sinais de controle. É possível notar que até os 10800 s (ou 3 h) houve uma atividade intensa; e de 10800 s até os 36000 s (ou 10 h) a ação de controle sobre os atuadores foi menos agressiva.

Figura 4.14 - Cenário II - CW: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH.



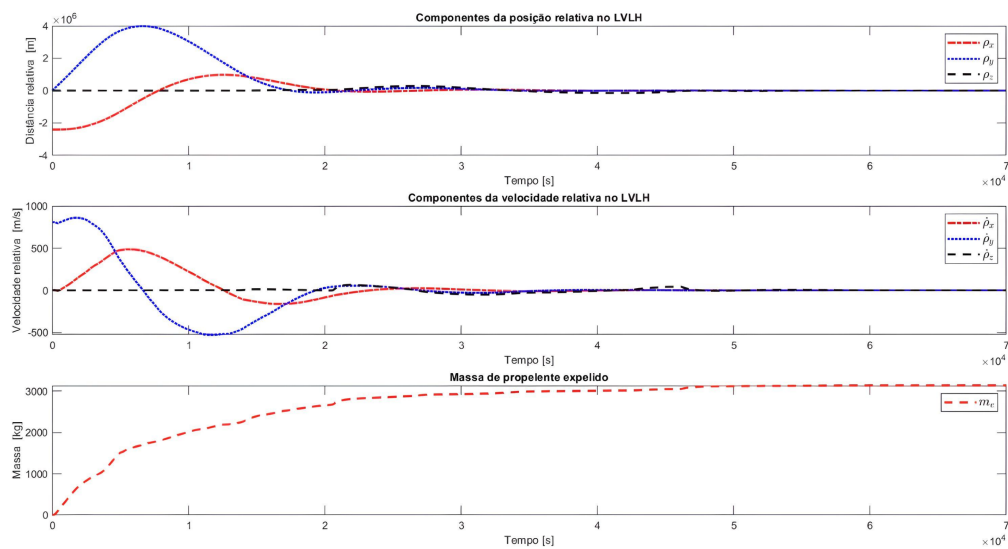
Fonte: Autor.

No mais, o valor de consumo de propelente foi expressivo, porém foi proporcional a longa trajetória de 2400000 m entre os satélites, durando menos de um dia, como ilustra a Figura 4.14. Assim, é possível assumir que o perseguidor realizou a manobra de *rendezvous* com um satélite na órbita do GPS, em menos de um dia (ou 62400 s), atendendo aos requisitos de *closing* deste trabalho, onde alcançou um $\rho = 10,54$ m e $\dot{\rho} = 0,005$ m/s, como ilustra a Figura 4.14. Além disso, é possível assumir que o *rendezvous* foi realizado mesmo sob condições muito acima dos limites de separação teórico, devendo-se atribuir tal resultado positivo ao controlador MPC.

4.2.3.2 Cenário II - resultados das simulações - equações TH

A Figura 4.15 apresenta os estados de posição relativa no referencial LVLH, denotados por $\rho_x = x_1$ em vermelho, $\rho_y = x_2$ em azul e $\rho_z = x_3$ em preto; de velocidade relativa no referencial LVLH, denotados por $\dot{\rho}_x = x_4$ em vermelho, $\dot{\rho}_y = x_5$ em azul e $\dot{\rho}_z = x_6$ em preto; e a variação de massa, denotado por $m_e = x_7$ em vermelho, como está ilustrado na Figura 4.15.

Figura 4.15 - Cenário II - TH: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.

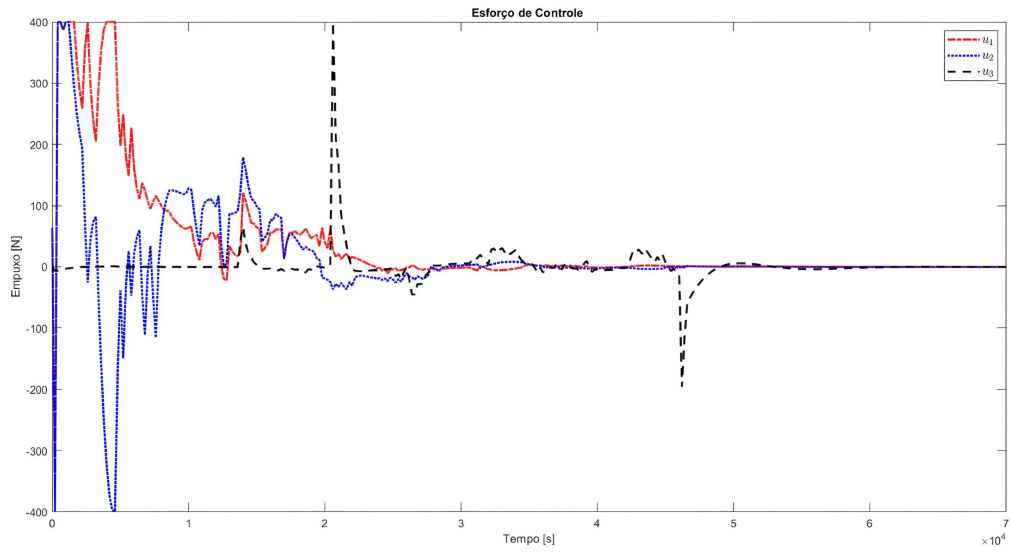


Fonte: Autor.

Na Figura 4.15 os componentes dos vetores de posição e velocidade relativas apresentaram uma dinâmica muito semelhante aos resultados do Cenário I (CW), porém a resposta transitória apresentou menos oscilações, como ilustra a Figura 4.16. É possível notar que o componente z da posição e da velocidade relativa apresentou uma dinâmica quase imutável em comparação com os outros componentes (x e y de ρ e $\dot{\rho}$). Além disso, é possível ver que o perseguidor consumiu aproximadamente 3100 kg de propelente (60 % do tanque de combustível) para realizar a manobra.

Na Figura 4.16, os sinais de controle saturaram os atuadores, em 400 N, sobretudo no canal u_1 (em vermelho) e u_2 (em azul). O canal u_3 (em preto) quase não trabalhou comparado aos outros sinais de controle. É possível notar que até os 10800 s (ou 3 h) houve uma atividade intensa; e de 10800 s até os 36000 s (ou 10 h) a ação de

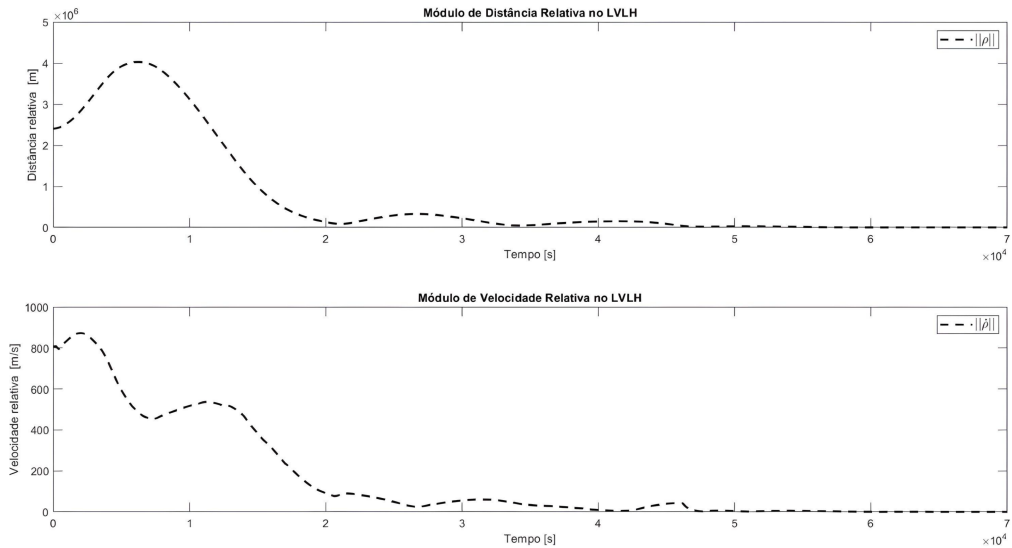
Figura 4.16 - Cenário II - TH: Vetor de sinais de controle.



Fonte: Autor.

controle sobre os atuadores foi menos agressiva.

Figura 4.17 - Cenário II - TH: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH.



Fonte: Autor.

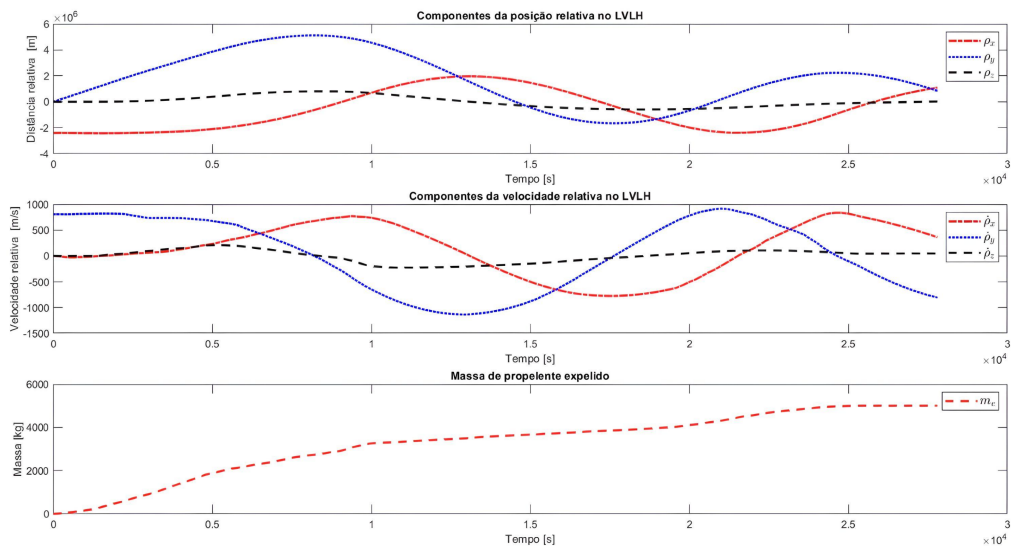
No mais, o valor de consumo de propelente foi bem maior do que no Cenário I, uma

vez que havia um módulo da distância relativa de 2400000 m, como ilustra a Figura 4.17. Assim, é possível assumir que o perseguidor realizou a manobra de *rendezvous* com um satélite na órbita do GPS, em menos de um dia (ou 65000 s), atendendo aos requisitos de *closing* deste trabalho, onde alcançou um $\rho = 10,18$ m e $\dot{\rho} = 0,005$ m/s, como ilustra a Figura 4.17. Além disso, é possível assumir que o *rendezvous* foi realizado mesmo sob condições muito acima dos limites de separação teórico, atribuindo tal resultado positivo ao controlador MPC.

4.2.3.3 Cenário II - resultados das simulações - equações NERM

A Figura 4.18 apresenta os estados de posição relativa no referencial LVLH, denotados por $\rho_x = x_1$ em vermelho, $\rho_y = x_2$ em azul e $\rho_z = x_3$ em preto; de velocidade relativa no referencial LVLH, denotados por $\dot{\rho}_x = x_4$ em vermelho, $\dot{\rho}_y = x_5$ em azul e $\dot{\rho}_z = x_6$ em preto; e a variação de massa, denotado por $m_e = x_7$ em vermelho, como está ilustrado na Figura 4.18.

Figura 4.18 - Cenário II - NERM: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.

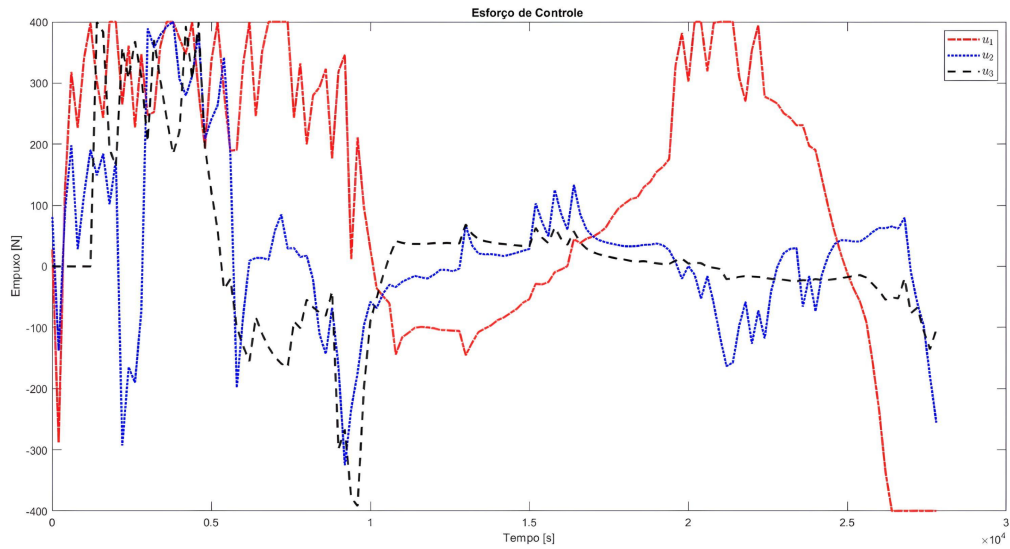


Fonte: Autor.

É possível notar que o perseguidor tentou realizar a manobra, mas não conseguiu. Os componentes dos vetores de posição e velocidade relativas entraram em oscilações sustentadas, com máximo sobressinal da ordem de 10^6 m para a posição relativa e 10^3 para a velocidade relativa, como ilustra a Figura 4.18. No mais, é possível

perceber que houve o consumo total de propelente aos 25000 s, como ilustra Figura 4.18.

Figura 4.19 - Cenário II - NERM: Vetor de sinais de controle.

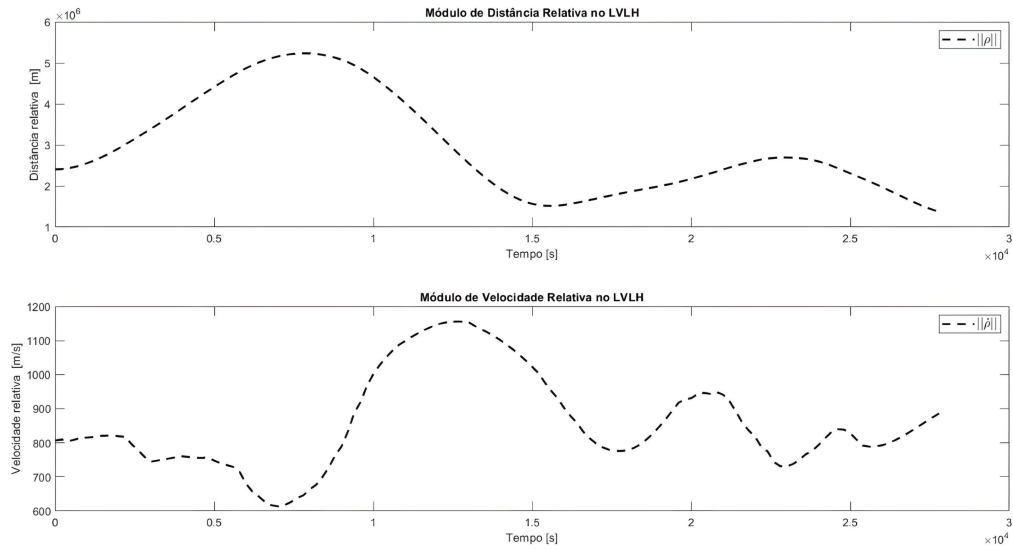


Fonte: Autor.

Na Figura 4.19, os sinais de controle atingiram a saturação dos atuadores em 400 N, após os primeiros segundos semelhante ao Cenário I. Vale salientar que essa atividade intensa nos canais do atuador gera o consumo total do combustível antes de completar 7 horas de missão (ou 25000s).

Assim, de acordo com a Figura 4.20 e os requisitos da manobra de *closing* deste trabalho, o satélite perseguidor não conseguiu realizar a manobra de *rendezvous* com o GPS, chegando em resultados piores do que os demonstrados na Subseção 4.2.4.1. e 4.2.4.2.

Figura 4.20 - Cenário II - NERM: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH.



Fonte: Autor.

4.2.4 Cenário III: *rendezvous* com o GPS - $e = 0,3$

A Tabela 4.5 apresenta os parâmetros assumidos na simulação numérica do Cenário III que foram comentados no cabeçalho da Seção 4. Neste caso, a órbita do satélite alvo está muito acima do limite de separação entre satélites imposto pelas aproximações das equações CW e TH para órbitas excêntricas, a saber $||\rho||_0 = 2400 \text{ km}$ e $e = 0,3$, m.

Tabela 4.5 - Cenário III - Parâmetros iniciais de *rendezvous* com o GPS $e > 0$.

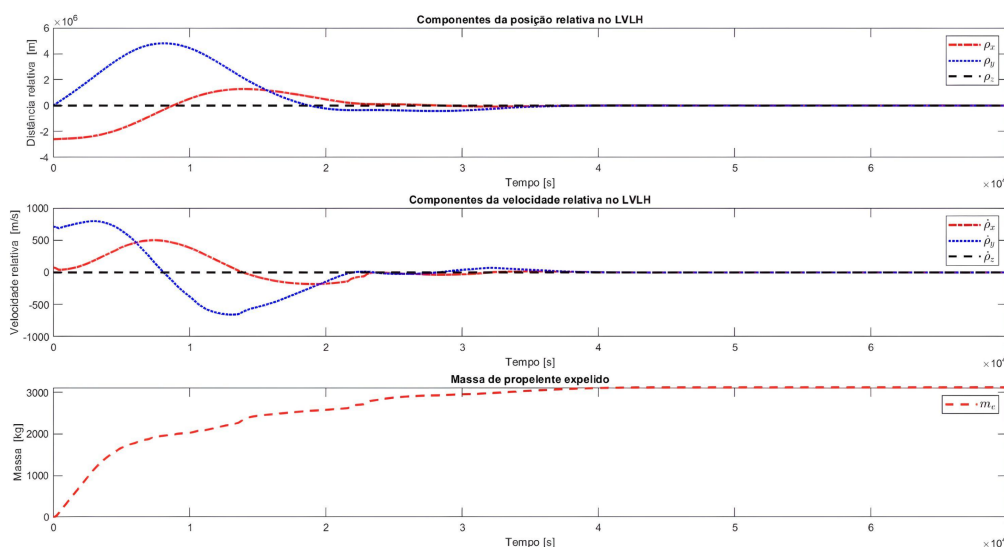
Elementos Keplerianos	Alvo	Satélite perseguidor
a	$\approx 20404,5 \text{ km}$	$18000,5 \text{ km};$
e	$0,3$	$0,3$
i	$63,5^\circ$	$63,5^\circ$
Ω	$86,6^\circ$	$86,6^\circ$
ω	$213,6^\circ$	$213,6^\circ$
M_0	90°	90°

Fonte: Autor.

4.2.4.1 Cenário III - resultados das simulações - equações CW

A Figura 4.21 apresenta os estados de posição relativa no referencial LVLH, denotados por $\rho_x = x_1$ em vermelho, $\rho_y = x_2$ em azul e $\rho_z = x_3$ em preto; de velocidade relativa no referencial LVLH, denotados por $\dot{\rho}_x = x_4$ em vermelho, $\dot{\rho}_y = x_5$ em azul e $\dot{\rho}_z = x_6$ em preto; e a variação de massa, denotado por $m_e = x_7$ em vermelho, como está ilustrado na Figura 4.21.

Figura 4.21 - Cenário III - CW: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.

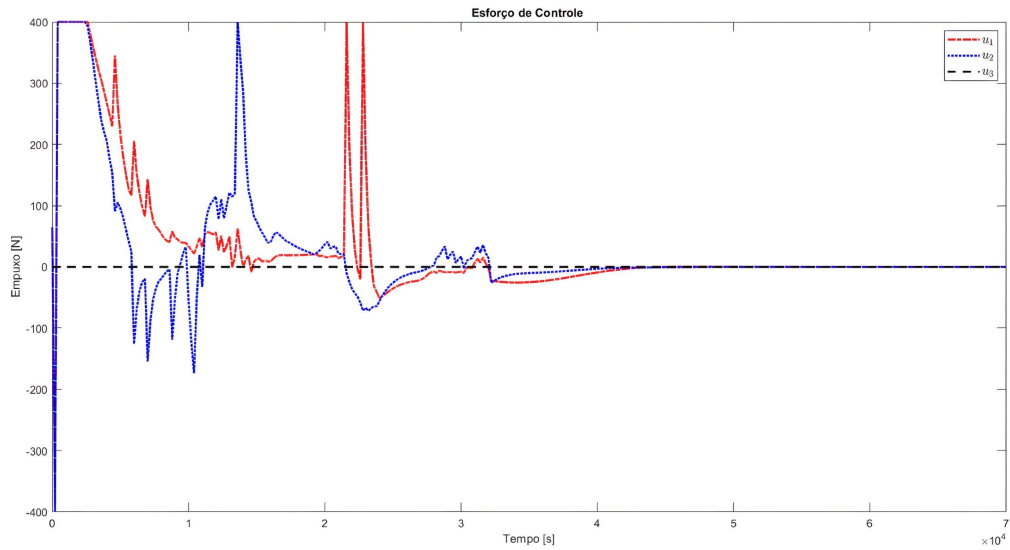


Fonte: Autor.

Na Figura 4.21 os componentes dos vetores de posição e velocidade relativas apresentaram uma dinâmica muito semelhante aos resultados do Cenário II (CW), porém as respostas transitórias apresentaram maiores amplitudes das oscilações em comparação com as do Cenário II. Além disso, é possível ver que o perseguidor consumiu aproximadamente 3117 kg de propelente (60 % do tanque de combustível) para realizar a manobra semelhante ao Cenário II.

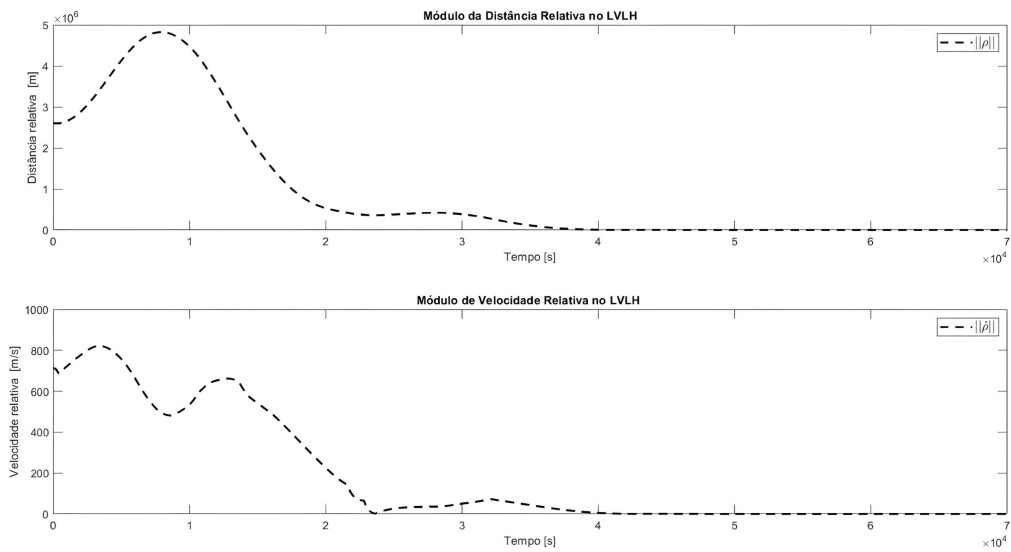
Na Figura 4.13, os sinais de controle saturaram os atuadores, em 400 N, sobretudo no canal u_1 (em vermelho) e u_2 (em azul). O canal u_3 (em preto) quase não trabalhou comparado aos outros sinais de controle. É possível notar que até os 25000 s (ou 7 h) houve uma atividade intensa; e de 25000 s até os 40000 s (ou 10 h) a ação de controle sobre os atuadores foi menos agressiva.

Figura 4.22 - Cenário III - CW: Vetor de sinais de controle.



Fonte: Autor.

Figura 4.23 - Cenário III - CW: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e de velocidade relativa no referencial LVLH.



Fonte: Autor.

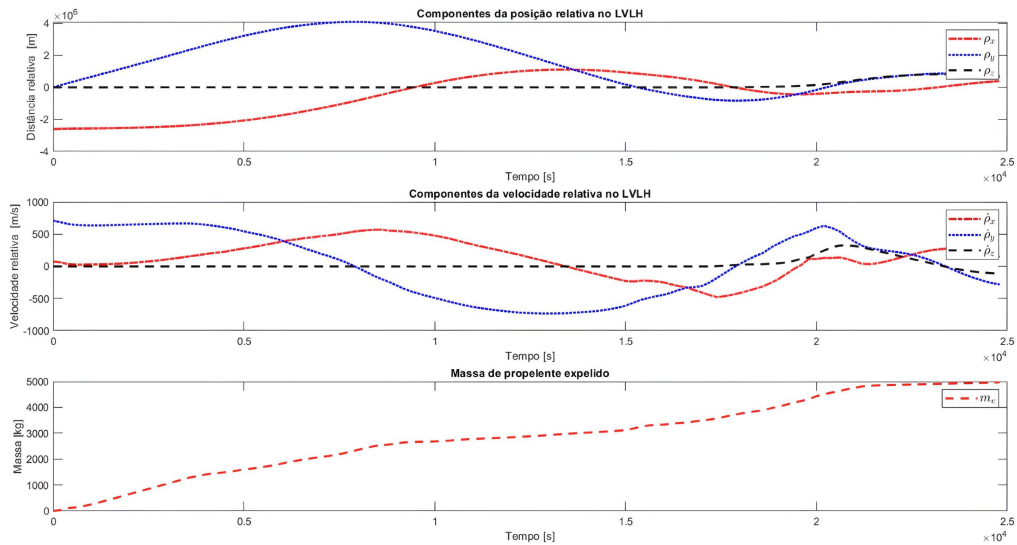
No mais, o valor de consumo de propelente foi expressivo foi proporcional a longa trajetória de 2400000 m entre os satélites, durando menos de um dia, como ilustra a Figura 4.23. Assim, é possível assumir que o perseguidor realizou a manobra de *rendezvous* com um satélite na órbita do GPS, em menos de um dia (ou 59800 s)

atendendo aos requisitos de *closing* deste trabalho, onde alcançou um $\rho = 10,86$ m e $\dot{\rho} = 0,001$ m/s, como ilustra a Figura 4.23. Além disso, é possível assumir que o *rendezvous* foi realizado mesmo sob severas condições, dados os limites de separação teóricos sem contar a excentricidade que estava aproximadamente 370 vezes maior do que no Cenário II, devendo-se atribuir também tal resultado positivo ao controlador MPC.

4.2.4.2 Cenário III - resultados das simulações - equações TH

A Figura 4.24 apresenta os estados de posição relativa no referencial LVLH, denotados por $\rho_x = x_1$ em vermelho, $\rho_y = x_2$ em azul e $\rho_z = x_3$ em preto; de velocidade relativa no referencial LVLH, denotados por $\dot{\rho}_x = x_4$ em vermelho, $\dot{\rho}_y = x_5$ em azul e $\dot{\rho}_z = x_6$ em preto; e a variação de massa, denotado por $m_e = x_7$ em vermelho, como está ilustrado na Figura 4.24.

Figura 4.24 - Cenário III - TH: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.

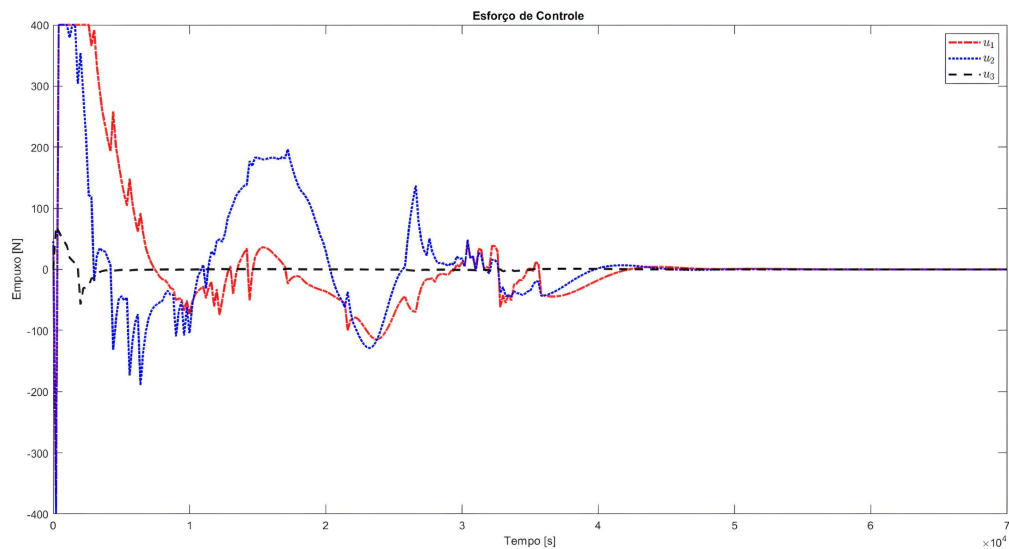


Fonte: Autor.

É possível notar que o perseguidor tentou realizar a manobra, mas também não conseguiu semelhantemente ao Cenário II (NERM). Os componentes dos vetores de posição e velocidade relativas entraram em oscilações sustentadas, com máximo sobressinal da ordem de 10⁶ m para a posição relativa e 10³ para a velocidade relativa, como ilustra a Figura 4.27. No mais, é possível perceber que houve o consumo total

de propelente aos 25000 s, como ilustra Figura 4.27.

Figura 4.25 - Cenário III - TH: Vetor de sinais de controle.

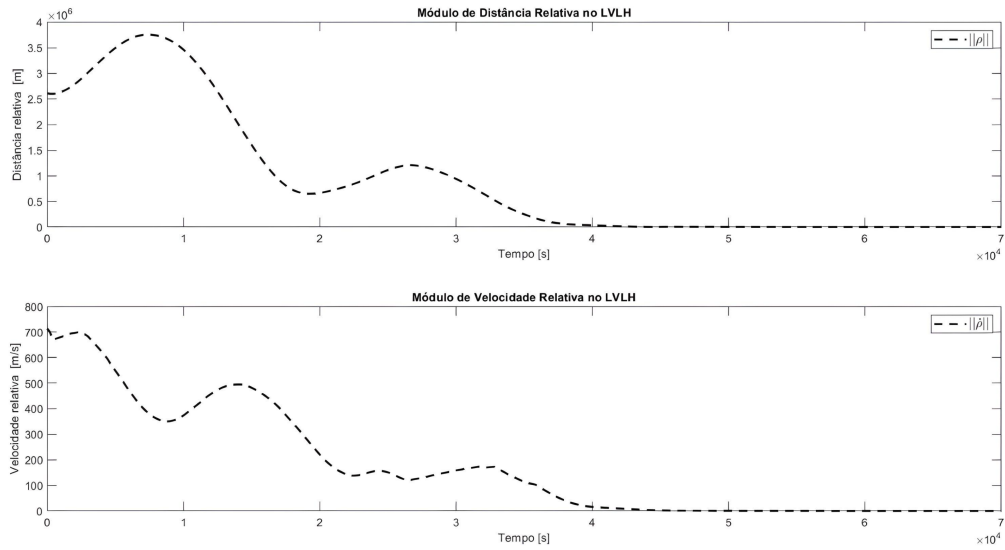


Fonte: Autor.

Na Figura 4.25, os sinais de controle saturaram os atuadores, em 400 N, sobretudo no canal u_1 (em vermelho) e u_2 (em azul). O canal u_3 (em preto) quase não trabalhou comparado aos outros sinais de controle. É possível notar que até os 10800 s (ou 3 h) houve uma atividade intensa; e de 10800 s até os 36000 s (ou 10 h) a ação de controle sobre os atuadores foi menos agressiva.

No mais, o valor de consumo de propelente foi expressivo, porém foi proporcional a longa trajetória de 2400000 m entre os satélites, durando menos de um dia, como ilustra a Figura 4.26. Assim, é possível assumir que o perseguidor realizou a manobra de *rendezvous* com um satélite na órbita do GPS, em menos de um dia (ou 65600 s), onde alcançou um $\rho = 10,18$ m e $\dot{\rho} = 0,005$ m/s, como ilustra a Figura 4.26. Além disso, é possível assumir que o *rendezvous* foi realizado mesmo sob condições muito acima dos limites de separação teórico, devendo-se atribuir tal resultado positivo ao controlador MPC.

Figura 4.26 - Cenário III - TH: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH.



Fonte: Autor.

4.2.4.3 Cenário III - resultados das simulações - equações NERM

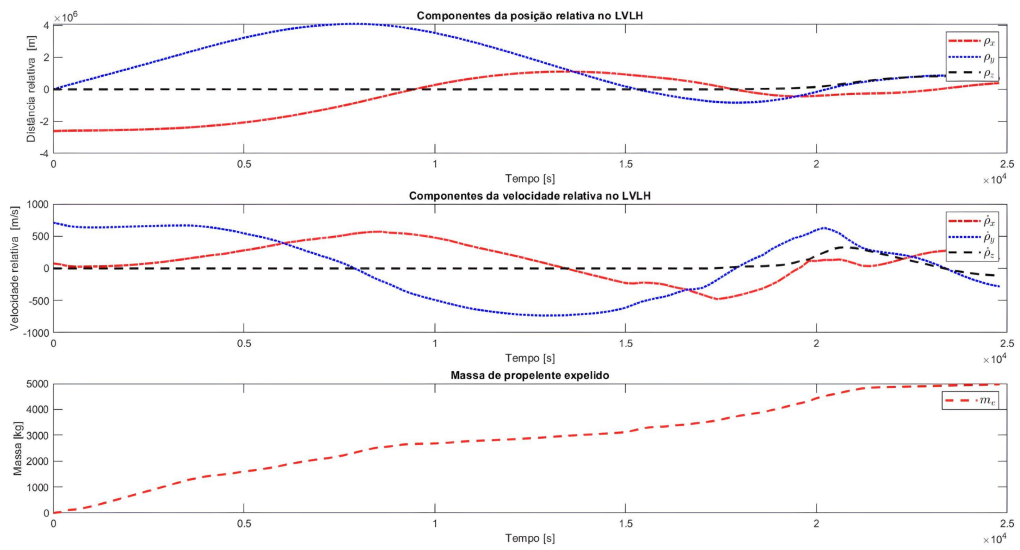
A Figura 4.27 apresenta os estados de posição relativa no referencial LVLH, denotados por $\rho_x = x_1$ em vermelho, $\rho_y = x_2$ em azul e $\rho_z = x_3$ em preto; de velocidade relativa no referencial LVLH, denotados por $\dot{\rho}_x = x_4$ em vermelho, $\dot{\rho}_y = x_5$ em azul e $\dot{\rho}_z = x_6$ em preto; e a variação de massa, denotado por $m_e = x_7$ em vermelho, como está ilustrado na Figura 4.27.

É possível notar que o perseguidor tentou realizar a manobra, mas não conseguiu. Os componentes dos vetores de posição e velocidade relativas entraram em oscilações sustentadas, com máximo sobressinal da ordem de 10^6 m para a posição relativa e 10^3 para a velocidade relativa, como ilustra a Figura 4.27. No mais, é possível perceber que houve o consumo total de propelente aos 25000 s, como ilustra Figura 4.27.

Na Figura 4.28, os sinais de controle atingiram a saturação dos atuadores em 400 N, após os primeiros segundos semelhantemente ao Cenário I. Vale salientar que essa atividade intensa nos canais do atuador gera o consumo total do combustível antes de completar 7 horas de missão (ou 25000s).

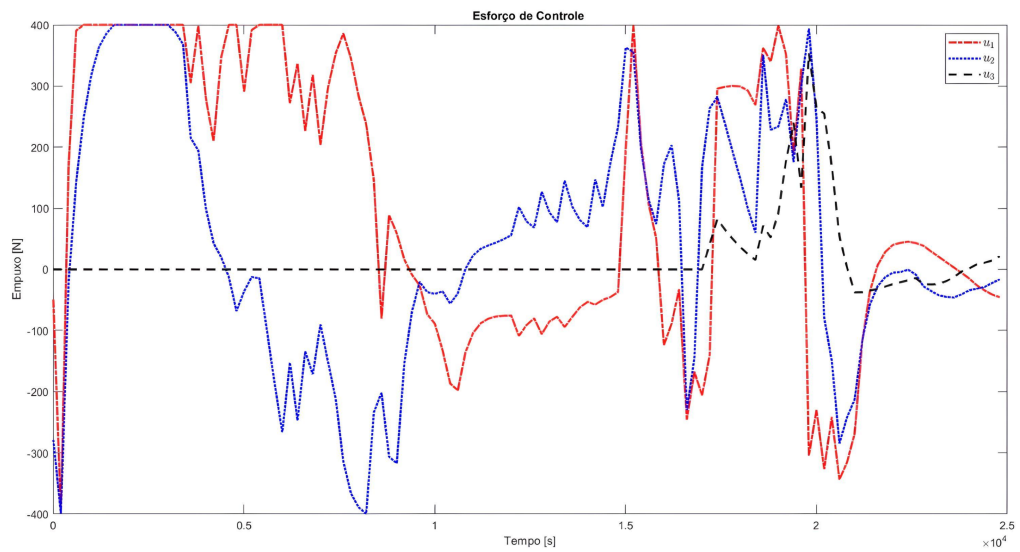
Assim, de acordo com a Figura 4.20 e os requisitos da manobra de *closing* deste

Figura 4.27 - Cenário III - NERM: Dinâmica dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH e de variação de massa.



Fonte: Autor.

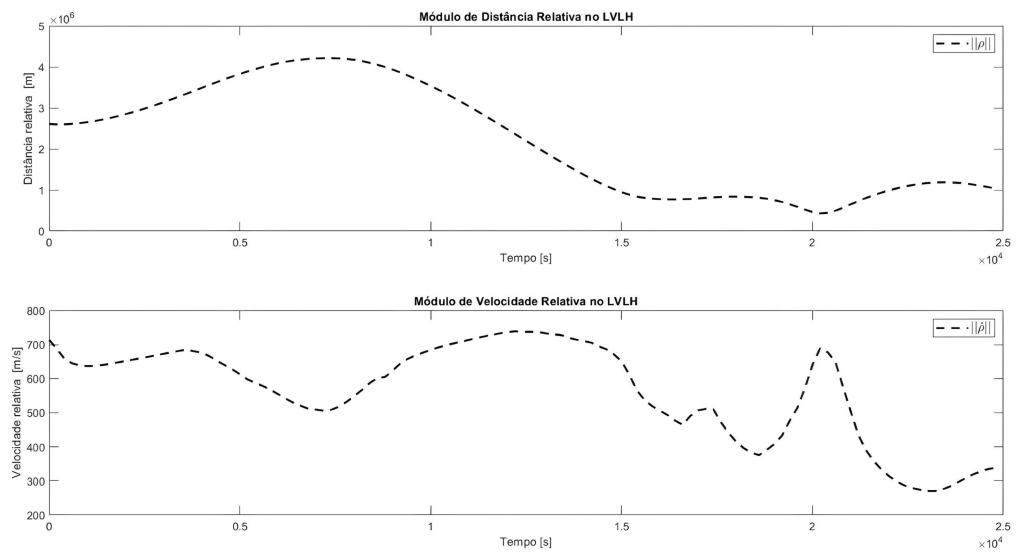
Figura 4.28 - Cenário III - NERM: Vetor de sinais de controle.



Fonte: Autor.

trabalho, o satélite perseguidor não conseguiu realizar a manobra de *rendezvous* com o GPS, chegando em resultados piores do que os demonstrados na Subseção 4.2.5.1. e 4.2.5.2.

Figura 4.29 - Cenário III - NERM: Dinâmica dos módulos dos vetores de posição e de velocidade relativas no referencial LVLH.



Fonte: Autor.

4.3 Análise das simulações de *Rendezvous*

Nesta seção, os resultados das simulações numéricas das missões expressas nos cenários construídos na Seção 4.2 estão sumarizados para melhor entendimento do desempenho de cada um dos modelos. Além disso, esta seção compactou em tabelas os desempenhos dos controladores preditivos conjuntamente com três tipos de modelos matemáticos de movimento relativo, por intermédio de simulações numéricas com alguma proximidade com a realidade de algumas missões famosas. Os resultados das simulações numéricas estão dispostos abaixo.

4.3.1 Cenário I

A formulação deste cenário buscou testar o desempenho do controlador preditivo numa órbita alvo de baixa altitude e baixa excentricidade. Contudo, com separações iniciais entre satélites dentro das limitações impostas pela literatura, como demonstra a Tabela 4.3. Os resultados do conjunto controlador e modelos estão resumidos na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 - Sumário dos resultados do Cenário I.

Parâmetros de desempenho	CW	TH	NERM
Tempo para o <i>rendezvous</i>	43000 s	46400 s	-
Máximo sobressinal (ρ)	4416 m	4213 m	-
Máximo sobressinal ($\dot{\rho}$)	1,98 m/s	2,39 m/s	-
Saturação de sinais de controle (u_i)	Não	Não	Sim
Consumo de combustível (m_e)	25 kg	11kg	5000 kg

Fonte: Autor.

É possível ver que, na Tabela 4.6, os modelos lineares apresentaram os sinais de controle suaves apesar de mostrarem também um elevado máximo sobressinal, tanto para ρ quanto para $\dot{\rho}$. Além disso, os modelos lineares executaram a manobra chegando nos requisitos de manobra da etapa de *closing*, em oposição ao NERM. Assim, os resultados do Cenário I mostraram que dois dos três modelos se tornaram viáveis para a manobra de *rendezvous* quando aliados ao controlador projetado, a saber CW e TH. Contudo, o modelo não linear (NERM) não atingiu tais requisitos e consumiu todo o combustível, entrando em instabilidade.

Portanto, é possível mostrar que o MPC conjuntamente com os modelos lineares tiveram melhores resultados, devido a natureza linear e invariante dentro do horizonte de predição, em oposição ao NERM que negligenciava a matriz não linear a cada

passo do horizonte de predição. Dentro do conjunto dos modelos lineares não é fácil de escolher o melhor avaliando apenas por um ou dois parâmetros de desempenho. Assim, escolhendo pelo menor consumo, o TH se sobressaiu e realizou a manobra com duas vezes menos propelente mesmo com maior tempo de duração da manobra.

4.3.2 Cenário II

A formulação deste cenário buscou testar o desempenho do controlador preditivo numa órbita alvo de grande altitude e baixa excentricidade. Contudo, com separações iniciais entre satélites muito superiores às limitações impostas pela literatura, como demonstra a Tabela 4.4. Os resultados do conjunto controlador e modelos estão resumidos na Tabela 4.7.

Tabela 4.7 - Sumário dos resultados do Cenário II.

Parâmetros de desempenho	CW	TH	NERM
Tempo para o <i>rendezvous</i>	62400 s	68000 s	-
Máximo sobressinal (ρ)	4286300 m	4026400 m	-
Máximo sobressinal ($\dot{\rho}$)	880,5 m/s	872,79 m/s	
Saturação de sinais de controle (u_i)	Sim (400 N)	Sim (400 N)	Sim (400 N)
Consumo de combustível (m_e)	2571 kg	3133 kg	5000 kg

Fonte: Autor.

É possível ver que, na Tabela 4.7, os modelos lineares apresentaram os sinais de controle saturados, pois demonstraram um elevado máximo sobressinal, tanto para ρ quanto para $\dot{\rho}$, e uma dinâmica bastante intensa. Além disso, os modelos lineares executaram a manobra chegando nos requisitos de manobra da etapa de *closing*, em oposição ao NERM. Assim, os resultados do Cenário II mostraram que dois dos três modelos se tornaram viáveis para a manobra de *rendezvous* quando aliados ao controlador projetado, a saber CW e TH. Contudo, o modelo não linear (NERM) não atingiu tais requisitos e consumiu todo o combustível, entrando em instabilidade.

Portanto, é possível mostrar que o MPC conjuntamente com os modelos lineares tiveram melhores resultados, devido a natureza linear e invariante dentro do horizonte de predição, em oposição ao NERM que negligenciava a matriz não linear a cada passo do horizonte de predição. Além disso, os modelos lineares do Cenário II exigiram mais combustível do que os modelos lineares do Cenário I, uma vez que sua órbita tinha um semieixo três vezes maior e, conseqüentemente, custou mais tempo para realizar a manobra.

4.3.3 Cenário III

A formulação deste cenário buscou testar o desempenho do controlador preditivo numa órbita excêntrica de grande altitude, com separações iniciais entre satélites muito superiores as limitações impostas pela literatura, como mostra a Tabela 4.5. Os resultados do conjunto controlador e modelo estão resumidos na Tabela 4.8.

Tabela 4.8 - Sumário dos resultados do Cenário III.

Parâmetros de desempenho	CW	TH	NERM
Tempo para o <i>rendezvous</i>	59800 s	65600 s	-
Máximo sobressinal (ρ)	4822010 m	3750680 m	-
Máximo sobressinal ($\dot{\rho}$)	816,56 m/s	713,2 m/s	-
Saturação de sinais de controle (u_i)	Sim (400 N)	Sim (400 N)	Sim (400 N)
Consumo de combustível (m_e)	3117 kg	3329,33 kg	5000 kg

Fonte: Autor.

É possível ver que, na Tabela 4.8, os modelos lineares apresentaram os sinais de controle saturados, pois demonstraram também um elevado máximo sobressinal, tanto para ρ quanto para $\dot{\rho}$, como no Cenário II. Além disso, os modelos lineares executaram a manobra chegando nos requisitos de manobra da etapa de *closing*, em oposição ao NERM. Assim, os resultados do Cenário III mostraram que dois dos três modelos se tornaram viáveis para a manobra de *rendezvous* quando aliados ao controlador projetado, a saber CW e TH. Contudo, o modelo não linear (NERM) não atingiu tais requisitos e consumiu todo o combustível, entrando em instabilidade.

Portanto, é possível mostrar que o MPC conjuntamente com os modelos lineares tiveram melhores resultados, devido a natureza linear e invariante dentro do horizonte de predição, em oposição ao NERM. Além disso, os modelos lineares do Cenário III exigiram mais combustível do que os modelos lineares do Cenário II, uma vez que sua órbita era excêntrica, sendo assim custou mais tempo para realizar da manobra.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, o problema de controle do movimento relativo orbital foi analisado e resolvido sob a visão de controle do movimento relativo. Esta perspectiva foi extraída a partir da derivação detalhada do modelo matemático não linear da dinâmica relativa, a saber NERM, onde dois modelos consagrados foram colocadas as suas limitações em testes, a saber CW e TH. Então, estes modelos foram aplicados ao algoritmo de controle preditivo, MPC, com restrições de entradas, u , e saídas, ρ e $\dot{\rho}$, considerando-os invariantes dentro do horizonte de predição.

Os objetivos secundários do trabalho foi atendidos, como a construção de um modelo aumentado que compactaram as informações de variação de massa junto ao problema do movimento relativo; a construção de uma lei de controle preditivo com as restrições de entradas e saídas; a condução dos estados para os sinais de referência fornecidos os requisitos da manobra de *closing*; e tudo isso foi ensejado pelos testes numéricos em ambiente computacional.

Neste trabalho, as simulações numéricas levaram em consideração dados orbitais de missões famosas, a saber a Dragon CRS e ATV Edoardo como satélites perseguidores, e a ISS e GPS como satélites alvos. Assim, os resultados dos testes numéricos apresentaram, majoritariamente, viabilidade na utilização de modelos lineares (CW e TH) associados ao MPC, mesmo em condições fora dos limites impostos pela literatura, a saber em órbitas excêntricas e grandes separações iniciais entre satélites, como estabelecido pelos trabalhos seminais de Clohessy W. H.; Wiltshire (1960); (TSCHAUNER; HEMPEL, 1965).

Portanto, o objetivo principal proposto desta dissertação foi atendido, ou seja, a manobra de *rendezvous* foi realizada com sucesso por intermédio da união entre os modelos do movimento relativo linear e a técnica de controle preditivo baseado em modelo. No mais, está técnica foi versátil em situações inviáveis pela literatura.

5.1 Principais contribuições

As principais contribuições desta dissertação estão no campo do controle preditivo baseado em modelo. No entanto, também foi realizado uma derivação detalhada da dinâmica orbital relativa a partir do problema de dois corpos culminando em três modelos consagrados na literatura, a saber: um não linear (NERM) e dois lineares (TH e CW).

Além disso um modelo de queima de combustível foi integrado ao modelo aumentado

do movimento relativo, considerando a massa variável do satélite na dinâmica global do processo. Esse modelo aumentado foi testado em ambiente de simulação numérica sob alguns cenários desafiadores a partir de dados sintéticos de missões famosas (ISS e GPS).

Este modelo aumentado conjuntamente com o MPC apresentaram, nas simulações numéricas, um desempenho acima do esperado por contornar as limitações teóricas descritas na literatura de encontro orbital chegando, majoritariamente nos cenários, a realizar a manobra de maneira bem-sucedida na etapa de *closing*.

5.2 Trabalhos futuros

O método empregado no MPC precisa ser testado sob outras condições iniciais para ser sintonizado, e assim ser viável sob o contexto de modelos não lineares e variantes no tempo (NERM). Além disso, os tempos de duração da manobra e consumo de combustível nos modelos lineares devem ser minimizados, mesmo que as manobras não tenham durado um dia inteiro e o consumo de combustível não tenha chegado ao máximo.

Os modelos utilizados não consideraram os efeitos de achatamento da Terra (J_2 por exemplo), que desempenha um papel relevante na dinâmica do movimento relativo, bem como a influência do terceiro corpo ou arrasto aerodinâmico (em órbitas baixas) e arrasto solar. Para capturar os requisitos práticos de manobras RVD de satélites, é interessante utilizar um conjunto completo de restrições, incluindo restrições suaves no vetor de estado e restrições relacionadas a sensores, por exemplo, restrições na linha de visada cônica ou piramidal.

A solução do movimento relativo para controlador preditivo é fundamentalmente um problema de regulação, assim é necessário colocá-los sob restrições terminais envolvendo problema de controle geométrico para encontrar conjunto terminais. Por outro lado, é interessante abordar tais conjuntos (como invariantes) com restrições de estado, para representar um ambiente com obstáculos (detritos) e livre deles, sem contar as garantias exigidas para a estabilidade global e factibilidade recursiva.

Outra direção é abordar esse controlador de um ponto de vista de otimização dinâmica não linear, para verificar desempenhos dos solucionadores IPOPT e SNOPT, libertando-se das restrições de entradas, saídas e de estados lineares. Há também uma visão de robustez que exigiria do projeto do controlador preditivo (sintonia dos horizontes e pesos) a capacidade de rejeitar imperfeições de modelo e perturbações

por intermédio de desigualdades matriciais lineares.

Por fim, alguns controladores preditivos poderiam encarar o problema num ambiente estocástico (com sensores ruidosos) da saída, e assim uma inclusão de um observador de estados conjuntamente com um controlador preditivo, motivando a utilização do filtro de Kalman, e estabelecendo um LQG de horizonte deslizante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALFRIEND, K. T.; KASHIWAGI, Y. Minimum-time orbital rendezvous between neighboring elliptic orbits. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 4, n. 4, p. 260–276, 1969. 3, 28

BEVILACQUA, R.; LEHMANN, T.; ROMANO, M. Development and experimentation of lqr/apf guidance and control for autonomous proximity maneuvers of multiple spacecraft. **Acta Astronautica**, v. 68, p. 1260–1275, 4 2011. ISSN 00945765. 4

BOTELHO, A.; PARREIRA, B.; ROSA, J. P. N.; LEMOS, M. **Predictive control for spacecraft rendezvous**. Suíça: Springer, 2020. ISSN 2191-5318. ISBN 978-3-030-75696-3. 1, 31, 36

CAMACHO, E.; ALBA, C. **Model predictive control**. London, UK: Springer London, 2013. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing). ISBN 9780857293985. 31, 34, 35, 40

CHOBOTOV, V. A. **Orbital mechanics**. Ohio, USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002. 460 p. ISBN 1563475375. 2, 8, 9, 13, 18, 24

CLARKE, D.; MOHTADI, C. Properties of generalized predictive control. **Automatica**, v. 25, n. 6, p. 859–875, 1989. ISSN 0005-1098. 31

CLOHESSY W. H.; WILTSHIRE, R. S. Terminal guidance system for satellite rendezvous. **Journal of the Aerospace Sciences**, v. 27, p. p. 653–658, 1960. 3, 27, 79

CURTIS, H. **Orbital mechanics for engineering students**. 2. ed. Burlington: Elsevier, 2010. ISSN 978-0-12-374778-5. 8

DEVRIES, J. P. Elliptic elements in terms of small increments of position and velocity components. **AIAA Journal**, v. 1, n. 11, p. p. 2626–2629, 1963. 27

EUROPEAN SPACE AGENCY(ESA). Nave europeia de reabastecimento rumo à estação espacial internacional. 2012. Disponível em:

<https://www.esa.int/Space_in_Member_States/Portugal/Nave_europeia_de_reabastecimento_ruma_a_Estacao_Espacial_Internacional>. Acesso em: 02 fev. 2023. 51

_____. Automated transfer vehicle. 2022. Disponível em:
<https://www.esa.int/Science_Exploration/Human_and_Robotic_Exploration/ATV/Automated_Transfer_Vehicle>. Acesso em: 03 fev. 2023. 50

FEHSE, W. **Automated Rendezvous and Docking of spacecraft**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008. (Cambridge Aerospace Series). ISBN 9780521089869. 1, 50

FELISIAK, P. **Control of spacecraft for Rendezvous maneuver in an elliptical orbit**. Tese (Doutorado) — Wrocław University of Technology, 2015. 3, 7, 11, 15, 20, 21, 22, 24, 25, 32, 33, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 45

FERREIRA, Y. da C. **Estudo da dinâmica orbital em manobra de rendezvous com aplicação de controlador LQR**. 99 p. Monografia (Graduação em Engenharia Aeroespacia) — Universidade de Brasília, Brasília, 2020. 4

GARCIA, C. E.; MORSHEDI, A. Quadratic programming solution of dynamic matrix control (qdmc). **Chemical Engineering Communications**, v. 46, n. 1-3, p. 73–87, 1986. 31

GIM, D. W.; ALFRIEND, K. T. State transition matrix of relative motion for the perturbed noncircular reference orbit. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 26, p. 956–971, 2003. ISSN 15333884. 3, 28

JEWISON, C.; ERWIN, R. S.; SAENZ-OTERO, A. Model predictive control with ellipsoid obstacle constraints for spacecraft rendezvous. **IFAC-PapersOnLine**, v. 28, p. 257–262, 7 2015. ISSN 24058963. 4, 7, 32

KECHICHIAN, J. A. Techniques of accurate analytic terminal rendezvous in nearcircular orbit. **Acta Astronautica**, v. 26, n. 6, p. 377–394, 1992. 3

KELSO, T. S. 2023. Satellite Catalog (SATCAT). Disponível em:
<<https://celestrak.org/satcat/search.php>>. Acesso em: 08 fev. 2023. 50

KIRK, D. **Optimal control theory: an introduction**. Mineola, New York, USA: Dover Publications, 2004. (Dover Books on Electrical Engineering Series). ISBN 9780486434841. 35

KUGA, H. K.; CARRARA, V.; RAO, K. **Satélites artificiais - movimento orbital**. São José dos Campos - SP - Brasil: INPE, 2011. 103 p p. 18

KUGA, H. K.; CARRARA, V.; RAO, K. R. **Introdução a mecânica orbital**. 2. ed. São José dos Campos, SP, Brasil: INPE, 2012. 68 p p. 9, 13

LAWDEN, D. Fundamentals of space navigation. **British Interplanetary Science Journal**, v. 13, p. p. 87–101, 1954. 3, 27

LONGUSKI, J. M.; GUZMAN, J. J.; PRUSSING, J. E. **Optimal control with aerospace applications**. Microcosm Press, 2014. Disponível em: <<http://www.springer.com/series/6575>>. 35

LUO, J. Z. Y.; TANG, G. Survey of orbital dynamics and control of space rendezvous. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 27, n. 1, p. 1–11, 2014. 1, 2

MACIEJOWSKI, J. **Predictive control: with constraints**. Harlow, UK: Prentice Hall, 2002. ISBN 9780201398236. 4, 31, 34, 36, 41, 44

MATHAVARAJ, S.; PADHI, R. **Satellite formation flying**. Singapore: Springer Singapore, 2021. 36

MONTENBRUCK, O.; GILL, E. **Satellite orbits: models, methods and applications**. Berlin: Springer, 2012. ISBN 9783642583513. 18, 19

MUNOZ, J. D. **Rapid path-planning algorithms for autonomous proximity operations of satellites**. Tese (Doutorado) — University of Florida, 2011. 44, 45

NAIDU, D. **Optimal control systems**. Idaho, USA: CRC Press, 2018. (Electrical Engineering Series). ISBN 9781482292299. 35

OKASHA, M.; NEWMAN, B. Relative motion guidance, navigation and control for autonomous orbital rendezvous. **Journal of Aerospace Technology and Management**, v. 6, p. 301–318, 2014. ISSN 21759146. 4

PARK, H.; ZAGARIS, C.; VIRGILI-LLOP, J.; ZAPPULLA, R.; KOLMANOVSKY, I.; ROMANO, M. Analysis and experimentation of model predictive control for spacecraft rendezvous and proximity operations with multiple obstacle avoidance. In: . Monterey , CA: AIAA/AAS, 2016. ISBN 9781624104459. 36, 44

SEITO, N. **Modelagem a simulação de “Rendezvous and Docking/Berthing”**. 140 p. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, São José dos Campos, 2015. 51

SHERRILL, R. E. **Dynamics and control of satellite relative motion in elliptic orbits using Lyapunov-Floquet theory**. 168 p. Tese (Doutorado) — Faculty of Auburn University, 2013. 7, 9, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 25

SIDI, M. **Spacecraft dynamics and control: a practical engineering approach**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1997. (Cambridge Aerospace Series). ISBN 9780521787802. 24

SPACEX. Dragon: Sending humans and cargo into space. 2023. Disponível em: <<https://www.spacex.com/vehicles/dragon/>>. Acesso em: 05 fev. 2023. 51

TSCHAUNER, J.; HEMPEL, P. Rendezvous zu einem in elliptischer bahn umlaufenden ziel. **Astronautica Acta**, v. 11, n. 2, p. 104–109, 1965. 3, 25, 27, 79

VALLADO, D. A.; WERTZ, J. **Fundamentals of astrodynamics and applications**. 4. ed. Hawthorne, CA, USA: Space Technology Library - Microcosm, 2013. 8, 18

WEISS, A.; PETERSEN, C.; BALDWIN, M.; ERWIN, R. S.; KOLMANOVSKY, I. Safe positively invariant sets for spacecraft obstacle avoidance. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 38, p. 720–732, 4 2015. ISSN 15333884. 4

WERTZ, J. R. **Orbit and constellation design and management**. Hawthorne, CA: Microcosm Press, 2009. 8, 9, 10, 18

XIE, Y.; CHEN, C.; LIU, T.; WANG, M. **Guidance, navigation, and control for spacecraft rendezvous and docking: theory and methods**. Singapore: Springer Nature, 2018. ISBN 978-981-15-6989-0. 1

YAMANAKA, K.; ANKERSEN, F. New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 25, p. 60–66, 2002. ISSN 07315090. 3, 27

ZAGARIS, C. **Autonomous spacecraft rendezvous with a tumbling object: applied reachability analysis and guidance and control strategies**. Tese (Doutorado) — Naval Postgraduate School, 2018. 45

ZAPPULLA, R.; II, .; PARK, H. .; VIRGILI-LLOP, J. .; ROMANO, M.; PARK, H.; VIRGILI-LLOP, J. **Experiments on autonomous spacecraft rendezvous and docking using an adaptive artificial potential field approach**. 2016. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10945/50864>>. 36

ZAPPULLA, R. S. **Experimental evaluation methodology for spacecraft proximity maneuvers in a dynamic environment.** Tese (Doutorado) — Naval Postgraduate School, 2017. [44](#)