



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÕES  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m21d/2022/09.28.14.06-TDI

## **ANÁLISE COMPARATIVA DE CONTROLADORES ADAPTATIVOS CONTÍNUOS E DISCRETOS POR MODELO DE REFERÊNCIA EM MALHA FECHADA**

Júlia de Albuquerque Guimarães

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Ronan Arraes Jardim Chagas, e Waldemar de Castro Leite Filho, aprovada em 01 de agosto de 2022.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/47MR6B2>>

INPE  
São José dos Campos  
2022

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE  
Coordenação de Ensino, Pesquisa e Extensão (COEPE)  
Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
CEP 12.227-010  
São José dos Campos - SP - Brasil  
Tel.:(012) 3208-6923/7348  
E-mail: pubtc@inpe.br

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):**

**Presidente:**

Dra. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Coordenação-Geral de Ciências da Terra (CGCT)

**Membros:**

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação (CPG)  
Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia, Tecnologia e Ciência Espaciais (CGCE)  
Dr. Rafael Duarte Coelho dos Santos - Coordenação-Geral de Infraestrutura e Pesquisas Aplicadas (CGIP)  
Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon  
Clayton Martins Pereira - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Ivone Martins - Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÕES  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m21d/2022/09.28.14.06-TDI

## **ANÁLISE COMPARATIVA DE CONTROLADORES ADAPTATIVOS CONTÍNUOS E DISCRETOS POR MODELO DE REFERÊNCIA EM MALHA FECHADA**

Júlia de Albuquerque Guimarães

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Ronan Arraes Jardim Chagas, e Waldemar de Castro Leite Filho, aprovada em 01 de agosto de 2022.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/47MR6B2>>

INPE  
São José dos Campos  
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Guimarães, Júlia de Albuquerque.

G947a Análise comparativa de controladores adaptativos contínuos e discretos por modelo de referência em malha fechada / Júlia de Albuquerque Guimarães. – São José dos Campos : INPE, 2022.  
xx + 138 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21d/2022/09.28.14.06-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2022.

Orientadores : Drs. Ronan Arraes Jardim Chagas, e Waldemar de Castro Leite Filho.

1. Controle adaptativo por modelo de referência. 2. Controle discreto. 3. Estabilidade. I.Título.

CDU 681.513.6

---



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÕES

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**  
Serviço de Pós-Graduação - SEPGR

**DEFESA FINAL DE TESE JÚLIA DE ALBUQUERQUE GUIMARÃES**  
**BANCA Nº 180/2022, REG.132039/2017.**

No dia 01 de agosto de 2022, às 09h00min, na Prédio da Rotunda, o(a) aluno(a) mencionado(a) acima defendeu seu trabalho final (apresentação oral seguida de arguição) perante uma Banca Examinadora, cujos membros estão listados abaixo. O(A) aluno(a) foi APROVADO(A) pela Banca Examinadora, por unanimidade, em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de Doutora em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle. O trabalho precisa da incorporação das correções sugeridas pela Banca e revisão final pelo(s) orientador(es).

**Título: "Análise Comparativa de Controladores Adaptativos Contínuos e Discretos por Modelo de Referência em Malha Fechada".**

**Membros da Banca:**

Dr. Mario César Ricci – Presidente - INPE  
Dr. Ronan Arraes Jardim Chagas - Orientador-INPE  
Dr. Waldemar de Castro Leite Filho - Orientador-CLC  
Dr. Domingos Sálvio Carrijo - Membro Externo – IAE  
Dr. Roberto Kawakami Harrop Galvão - Membro Externo - ITA



Documento assinado eletronicamente por **Domingos Sálvio carrijo (E), Usuário Externo**, em 03/08/2022, às 11:15 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Waldemar de Castro Leite Filho (E), Usuário Externo**, em 03/08/2022, às 12:21 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Roberto kawakami harrop galvão (E), Usuário Externo**, em 03/08/2022, às 12:39 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ronan Arraes Jardim Chagas, Tecnologista**, em 03/08/2022, às 14:43 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Mario Cesar Ricci, Tecnologista**, em 03/08/2022, às 16:49 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.mcti.gov.br/verifica.html>, informando o código verificador **10005405** e o código CRC **1FD507A7**.

---

---

**Referência:** Processo nº 01340.004538/2022-19

SEI nº 10005405

## **AGRADECIMENTOS**

À minha mãe, Mariângela, pelos incontáveis sacrifícios para que este momento fosse possível e ao meu pai, Armando, por me iluminar onde quer que esteja.

À minha família, por todo o apoio em todos os momentos e aos meus amigos pelas noites de consolo.

À Dani, Edith e Palmira, pela paciência, e à Carol, Liv, Lu, Mayra e Mariana, por me estabilizarem nas horas mais difíceis e sempre me fazerem rir, mesmo quando portas parecem se fechar.

Ao Professor Waldemar, pela compreensão, apoio e confiança.

À SIATT, pelos muitos aprendizados e, em especial, ao Calberto, pela paciência e apoio incondicional.

À CAPES pela oportunidade e apoio para a conclusão deste estudo.





## **RESUMO**

Este trabalho estuda uma arquitetura de controle adaptativo por modelo de referência chamada modelo de referência em malha fechada. As análises aqui apresentadas estabelecem métricas qualitativas para o tempo de transiente do erro no regime contínuo e demonstram as propriedades de robustez da estrutura em presença de perturbações externas limitadas. Além disso, estuda-se o efeito desta arquitetura em um controlador discreto, demonstrando-se a viabilidade do seu uso em controladores reais e apresentando propriedades de estabilidade e robustez para o regime discreto.

Palavras-chave: Controle adaptativo por modelo de referência. Controle discreto. Estabilidade.



# **COMPARATIVE ANALYSIS OF CONTINUOUS AND DISCRETE CLOSED LOOP MODEL REFERENCE ADAPTIVE CONTROLLERS**

## **ABSTRACT**

This work studies a model reference adaptive control architecture called closed-loop reference model. The analysis shown here present quantitative metrics for the error transient time in the continuous model and proves its robustness for a class of bounded external disturbances. The properties of such structure are them analyzed for a discrete controller, demonstrating its viability in real systems and presenting stability and robustness properties for the discrete realm.

Keywords: Model reference adaptive control. Discrete control. Stability.



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Controle Adaptativo por Modelo de Referência. . . . .	6
2.2 Linha do Tempo de pesquisas em Controle Adaptativo. . . . .	7
2.3 Diagrama esquemático para implementação de controle adaptativo por modelo de referência. . . . .	8
2.4 Diagrama esquemático para implementação de controle adaptativo por modelo de referência com realimentação do erro (CRM). . . . .	10
3.1 Representação gráfica do significado de UUB. . . . .	21
4.1 Diagrama esquemático para implementação de controle adaptativo por modelo de referência. . . . .	23
4.2 Diagrama esquemático para implementação do controle adaptativo por modelo de referência tradicional. . . . .	26
4.3 Diagrama esquemático para implementação de controle adaptativo por modelo de referência com realimentação do erro (CRM). . . . .	27
4.4 Diagrama esquemático para implementação de controle adaptativo por modelo de referência com realimentação do erro (CRM). . . . .	29
4.5 Diagrama esquemático para implementação de controle adaptativo por modelo de referência com realimentação do erro (CRM) - caso escalar. . . . .	30
4.6 Comparação qualitativa do transiente para o modelo de referência tradicional (ORM) e em malha fechada (CRM) para o caso escalar. . . . .	37
4.7 Resposta de um sistema ORM, com $\gamma = 1$ e entrada degrau. . . . .	41
4.8 Resposta de um sistema ORM, com $\gamma = 10$ e entrada degrau. . . . .	42
4.9 Resposta de um sistema ORM, com $\gamma = 100$ e entrada degrau. . . . .	43
4.10 Resposta de um sistema CRM, com $k_e = 10$ e entrada degrau. . . . .	44
4.11 Resposta de um sistema CRM, com $k_e = 100$ e entrada degrau. . . . .	45
4.12 Resposta de um sistema CRM, com $k_e = 1000$ e entrada degrau. . . . .	46
4.13 Resposta de um sistema CRM, com $k_e = 100$ e entrada senoidal. . . . .	47
5.1 Diagrama esquemático para controle adaptativo por discreto modelo de referência tradicional (ORM). . . . .	52
5.2 Diagrama esquemático para controle adaptativo por discreto modelo de referência em malha fechada (CRM). . . . .	56
5.3 Resposta de um sistema ORM, com $\gamma = 0.4$ e entrada degrau. . . . .	65
5.4 Resposta de um sistema CRM, com $\gamma = 0.4$ , $k_e = 0.05$ e entrada degrau. . . . .	66

5.5	Resposta de um sistema CRM, com $\gamma = 0.4$ , $k_e = 0.1$ e entrada degrau.	67
5.6	Resposta de um sistema CRM, com $\gamma = 0.4$ , $k_e = 0.2$ e entrada degrau.	68
5.7	Resposta de um sistema CRM, com $\gamma = 0.4$ , $k_e = 0.1$ e entrada senoidal $r = 2\sin(3t)$ .	69
6.1	Esquema adaptativo CRM em presença de perturbação.	72
6.2	Esquema adaptativo CRM com modificação de robustez em presença de perturbação limitada.	76
6.3	Representação esquemática do algoritmo de projeção.	79
6.4	Resposta do erro.	85
6.5	Resposta de um sistema CRM, com $k_e = 10$ e entrada degrau.	88
6.6	Resposta de um sistema CRM, com $k_e = 100$ e entrada degrau.	89
6.7	Resposta de um sistema CRM, com $k_e = 1000$ e entrada degrau.	90
6.8	Resposta de um sistema CRM, com $k_e = 100$ e entrada senoidal.	91
6.9	Resposta de um sistema CRM, com $\gamma = 0.4$ , $k_e = 0.05$ e entrada degrau, com perturbação limitada.	102
6.10	Resposta de um sistema CRM, com $\gamma = 0.4$ , $k_e = 0.1$ e entrada degrau, com perturbação limitada.	103
6.11	Resposta de um sistema CRM, com $\gamma = 0.4$ , $k_e = 0.2$ e entrada degrau, com perturbação limitada.	104
6.12	Resposta de um sistema CRM, com $\gamma = 0.4$ , $k_e = 0.1$ e entrada senoidal $r = 2\sin(3t)$ , com perturbação limitada.	105
7.1	Implementação do Sistema Controlado por Controlador Discreto.	108
7.2	Saída da planta representada pela Equação (7.1) a uma entrada degrau.	110
7.3	Erro $e_1$ perante uma entrada degrau.	110
7.4	Variação no ganho $\hat{K}_{x_1}$ perante uma entrada degrau.	111
7.5	Variação no ganho $\hat{K}_{x_2}$ perante uma entrada degrau.	111
7.6	Variação no ganho $\hat{K}_r$ perante uma entrada degrau.	112
7.7	Erro $e_1$ perante uma entrada $r = \text{sen}(0, 15T_s k) + 3, 5\text{sen}(1, 6T_s k) + 7\text{sen}(10, 85T_s k)$ .	114
7.8	Variação no parâmetro $K_x(1)$ perante uma entrada $r = \text{sen}(0, 15T_s k) + 3, 5\text{sen}(1, 6T_s k) + 7\text{sen}(10, 85T_s k)$ .	114
7.9	Variação no parâmetro $K_x(2)$ perante uma entrada $r = \text{sen}(0, 15T_s k) + 3, 5\text{sen}(1, 6T_s k) + 7\text{sen}(10, 85T_s k)$ .	115
7.10	Variação no parâmetro $K_r$ perante uma entrada $r = \text{sen}(0, 15T_s k) + 3, 5\text{sen}(1, 6T_s k) + 7\text{sen}(10, 85T_s k)$ .	115
7.11	Modelo de um atuador.	116
7.12	Saída controlada do atuador perante entrada degrau.	118
7.13	Erro de rastreamento $e_1$ perante entrada degrau.	119

7.14	Variação no ganho $\hat{K}_{x_1}$ perante uma entrada degrau. . . . .	119
7.15	Variação no ganho $\hat{K}_{x_2}$ perante uma entrada degrau. . . . .	120
7.16	Variação no ganho $\hat{K}_r$ perante uma entrada degrau. . . . .	120
7.17	Saída controlada do atuador perante entrada degrau e perturbação limitada. . . . .	121
7.18	Saída controlada do atuador perante entrada degrau e perturbação limitada (detalhe). . . . .	122
7.19	Erro de rastreio $e_1$ perante entrada degrau e perturbação limitada. . .	122
7.20	Variação no ganho $\hat{K}_{x_1}$ perante uma entrada degrau e perturbação limitada. . . . .	123
7.21	Variação no ganho $\hat{K}_{x_2}$ perante uma entrada degrau e perturbação limitada. . . . .	123
7.22	Variação no ganho $\hat{K}_r$ perante uma entrada degrau e perturbação limitada. . . . .	124
7.23	Saída controlada do atuador com backlash perante entrada degrau. .	126
7.24	Erro de rastreio $e_1$ para um atuador com backlash perante entrada degrau. . . . .	127
7.25	Variação no ganho $\hat{K}_{x_1}$ para um atuador com backlash perante uma entrada degrau. . . . .	127
7.26	Variação no ganho $\hat{K}_{x_2}$ para um atuador com backlash perante uma entrada degrau. . . . .	128
7.27	Variação no ganho $\hat{K}_r$ para um atuador com backlash perante uma entrada degrau. . . . .	128





## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CRM	–	Closed-loop Reference Model
MIMO	–	Multi Input Multi Output
MRAC	–	Model Reference Adaptive Control
ORM	–	Open-loop Reference Model
SISO	–	Single Input Single Output



## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Considerações . . . . .	2
1.2 Objetivos . . . . .	2
1.3 Justificativa . . . . .	3
1.4 Estrutura do Trabalho . . . . .	3
<b>2 REVISÃO DA LITERATURA</b> . . . . .	<b>5</b>
2.1 Controle adaptativo . . . . .	5
2.2 Controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada . . . . .	8
2.3 Validação e verificação de sistemas adaptativos . . . . .	9
<b>3 DEFINIÇÕES</b> . . . . .	<b>13</b>
3.1 Normas . . . . .	13
3.2 Estabilidade segundo Lyapunov . . . . .	15
3.2.1 Definições . . . . .	15
3.2.2 Método direto de Lyapunov . . . . .	16
3.3 Estabilidade segundo Lyapunov no regime discreto . . . . .	17
3.3.1 Definições . . . . .	18
3.3.2 Método direto de Lyapunov . . . . .	19
3.3.3 Teoremas úteis . . . . .	19
3.4 Estabilidade por meio de Fronteira Última Uniforme (UUB) . . . . .	20
<b>4 CONTROLE ADAPTATIVO CONTÍNUO POR MODELO DE REFERÊNCIA</b> . . . . .	<b>23</b>
4.1 Controle adaptativo por modelo de referência em malha aberta - ORM . . . . .	23
4.2 Controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada - CRM . . . . .	27
4.3 Análise do desempenho no transiente . . . . .	29
4.3.1 Caso escalar . . . . .	29
4.3.1.1 Norma $l_\infty$ do erro - $\ e\ _{l_\infty}^2$ . . . . .	31
4.3.1.2 Norma $l_2$ do erro - $\ e\ _{l_2}^2$ . . . . .	31
4.3.1.3 Norma $l_\infty$ do estado do modelo de referência - $\ \Delta x_m\ _{l_\infty}$ . . . . .	32
4.3.1.4 Normas $l_2$ das derivadas dos parâmetros - $\ \hat{k}_r\ _{l_2}, \ \hat{k}_x\ _{l_2}$ . . . . .	33
4.3.1.5 Tempo de transiente . . . . .	35

4.3.2	Caso vetorial . . . . .	36
4.3.2.1	Norma $\ell_2$ do erro - $\ e\ _{\ell_2}$ . . . . .	37
4.3.2.2	Limite para a função de Lyapunov V . . . . .	38
4.3.2.3	Tempo de transiente . . . . .	38
4.4	Estudos de simulação . . . . .	40
4.4.1	$r(t) = 1$ . . . . .	40
4.4.2	$r(t) = \sin(2t)$ . . . . .	47
<b>5</b>	<b>CONTROLE ADAPTATIVO DISCRETO POR MODELO DE REFERÊN-</b>	
	<b>CIA</b> . . . . .	<b>49</b>
5.1	Controle adaptativo por modelo de referência em malha aberta - ORM	50
5.2	Controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada - CRM	51
5.2.1	Lei de controle . . . . .	53
5.2.2	Equação do erro de rastreo . . . . .	53
5.2.3	Equação do erro do mecanismo de adaptação . . . . .	55
5.3	Análise de estabilidade . . . . .	56
5.4	Tempo de transiente . . . . .	59
5.4.1	Caso escalar . . . . .	59
5.4.2	Caso vetorial . . . . .	61
5.5	Estudos de simulação . . . . .	63
5.5.1	$r(t) = 1$ . . . . .	64
5.5.2	$r(t) = 2\sin(3t)$ . . . . .	69
<b>6</b>	<b>ANÁLISE DE ROBUSTEZ EM PRESENÇA DE PERTURBAÇÃO EX-</b>	
	<b>TERNA</b> . . . . .	<b>71</b>
6.1	Caso contínuo - modelo de referência em malha fechada . . . . .	71
6.1.1	Modificações de robustez . . . . .	74
6.1.1.1	Modificação $\epsilon$ . . . . .	75
6.1.1.2	Algoritmo de projeção . . . . .	78
6.1.2	Influência da estrutura CRM na robustez . . . . .	82
6.1.3	Tempo de transiente . . . . .	83
6.1.3.1	Caso escalar . . . . .	83
6.1.3.2	Caso vetorial . . . . .	85
6.1.4	Estudos de simulação . . . . .	87
6.1.4.1	$r(t) = 1$ . . . . .	87
6.1.4.2	$r(t) = \sin(2t)$ . . . . .	91
6.2	Caso discreto - modelo de referência em malha fechada . . . . .	91
6.2.1	Análise de robustez . . . . .	94

6.2.2	Tempo de transiente . . . . .	97
6.2.2.1	Caso escalar . . . . .	97
6.2.2.2	Caso vetorial . . . . .	99
6.2.3	Estudos de simulação . . . . .	100
6.2.4	$r(t) = 1$ . . . . .	102
6.2.5	$r(t) = 2\sin(3t)$ . . . . .	105
<b>7</b>	<b>APLICAÇÃO PRÁTICA DO CONTROLE ADAPTATIVO POR MODELO DE REFERÊNCIA EM MALHA FECHADA NO REGIME DISCRETO . .</b>	<b>107</b>
7.1	Controle adaptativo discreto por modelo de referência em malha fechada de uma planta de segunda ordem . . . . .	107
7.1.1	Resposta ao degrau . . . . .	109
7.1.2	Resposta a uma entrada rica . . . . .	113
7.2	Controle adaptativo discreto por modelo de referência em malha fechada de um atuador . . . . .	116
7.2.1	Resposta ao degrau . . . . .	117
7.2.2	Resposta ao degrau em presença de perturbações limitadas . . . . .	121
7.2.3	Resposta ao degrau em presença de <i>backlash</i> . . . . .	125
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>129</b>
8.1	Trabalhos futuros . . . . .	129
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>131</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Segundo [Narendra e Annaswamy \(2005\)](#), o termo *sistema adaptativo* faz referência a sistemas de controle que monitoram seu próprio desempenho, ajustando seus parâmetros a fim de melhorar o mesmo por meio de retroalimentação. Mais que isso, sistemas de controle adaptativo são úteis em problemas onde não exista informação suficiente sobre os parâmetros do sistema, de modo que seja necessário utilizar técnicas de aprendizado online ([IOANNOU; FIDAN, 2006](#)), como frequentemente acontece na indústria espacial. Entretanto, processos de validação e verificação deste tipo de controlador são complexos e, por consequência, a aplicação de controladores adaptativos em sistemas críticos ainda é desaconselhada.

Um dos grandes desafios do estudo de estratégias de controle adaptativo envolvem a análise de seu regime transitório. Mesmo em situações onde é possível mostrar a estabilidade do controlador proposto, o desempenho da planta pode ser amplamente diferente do desempenho do modelo de referência durante seu transitório ([YUCELEN et al., 2013](#)).

[Rohrs et al. \(1985\)](#) mostraram evidências de que simplesmente aumentar indiscriminadamente a taxa de aprendizado da lei de controle pode levar à excitação de frequências não modeladas na dinâmica do sistema e, desde então, diversos autores estudam estratégias capazes de melhorar o desempenho do controle adaptativo na fase transitória sem prejudicar a robustez do sistema.

Recentemente, uma classe de controle adaptativo por modelo de referência proposta originalmente por [Lee e Huh \(1997\)](#), chamada modelo de referência em malha fechada, ou CRM, tem apresentado resultados promissores com respeito à melhoria do comportamento de sistemas adaptativos no regime transitório. Mais especificamente, este tipo de arquitetura é capaz de garantir uma redução considerável na quantidade de oscilações observáveis mesmo em casos onde o ganho adaptativo cresce, como detalhado por [Gibson \(2014\)](#).

Ao mesmo tempo, observa-se uma *solução de compromisso* entre a taxa de adaptação do sistema e o sincronismo apresentado. Como mencionado pelo autor, a medida que o ganho aumenta, é possível que o modelo de referência passe a atuar mais como um observador que como uma trajetória de referência. Isso faz com que a planta e o modelo de referência se tornem sincronizados, de modo que o comportamento do sistema com modelo de referência em malha fechada

aproxime-se do sistema com modelo de referência em malha aberta, sem benefício da alteração na arquitetura.

A pesquisa deste tipo de estrutura até hoje foi, segundo conhecimento da autora, realizada considerando apenas modelos contínuos tanto no que diz respeito à planta quanto no que diz respeito à estrutura de controle. Na prática, porém, sabe-se que um sistema de controle deve ser sempre implementado computacionalmente, fazendo-se necessário estudar também a influência da frequência de amostragem e outros fenômenos de discretização no comportamento do sistema, não só durante o caso ideal mas também em presença de perturbações externas e de modelo.

Desta forma, busca-se estudar um conjunto de leis adaptativas que, no regime discreto com frequências de amostragem aceitáveis para aplicações espaciais, tenham um comportamento desejado e caracterizável, de forma que eventualmente, seja possível validar seu uso em casos reais.

### **1.1 Considerações**

[Gibson \(2014\)](#) não fez considerações sobre a robustez da arquitetura proposta, apesar de cogitar que seja possível desenvolver uma análise comparativa entre as propriedades de robustez deste sistema em relação a modelos tradicionais, ou em malha aberta (ORM).

Assume-se também que seja possível implementar o modelo CRM em arquiteturas discretas e, mais que isso, que seja possível analisar qualitativamente os efeitos em relação ao transiente do erro para a arquitetura no regime discreto.

### **1.2 Objetivos**

Este trabalho visa partir da arquitetura contínua de modelo de referência em malha fechada apresentada em [Gibson \(2014\)](#) a fim de realizar uma investigação detalhada de suas propriedades de estabilidade e robustez quando em regime discreto.

Além disso, busca-se estudar as propriedades do controle adaptativo por modelo de referência no regime contínuo no que diz respeito à robustez em relação a perturbações externas limitadas.



### **1.3 Justificativa**

O comportamento de sistemas adaptativos em seu período transitório é frequentemente citado como justificativa para a reticência de seu uso em aplicações críticas, como o caso de sistemas espaciais.

Mais que isso, a implementação das leis de controle é feita, na prática, no regime discreto. Considerando-se que, dada sua natureza não linear, não é possível aplicar diretamente as propriedades de estabilidade de uma lei de controle adaptativo contínua em sua discretização direta, é necessário verificar se as melhorias encontradas na literatura de fato se repetem em regime discreto.

Finalmente, é também importante tentar quantificar o efeito que a modificação proposta tem na robustez do sistema, dado que em aplicações reais, os sistemas estarão sujeitos a condições externas.

### **1.4 Estrutura do Trabalho**

Este trabalho é dividido em oito capítulos. O primeiro capítulo introduz o problema e apresenta a justificativa para o desenvolvimento deste trabalho. O Capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura na área de controle adaptativo em geral e na área de controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada, além do foco recente em validação e verificação de sistemas adaptativos. O Capítulo 3 traz uma série de definições e teoremas importantes para o desenvolvimento do trabalho.

O Capítulo 4 apresenta o controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada no regime contínuo, detalhando a análise de estabilidade e desempenho para uma planta com todos os estados acessíveis. O Capítulo 5 apresenta o controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada no regime discreto, detalhando a análise de estabilidade e desempenho para uma planta do tipo SISO com todos os estados acessíveis. O Capítulo 6 apresenta a análise de robustez para os dois tipos de controlador detalhados nos capítulos anteriores, incluindo um estudo sobre a influência da estrutura de modelo de referência em malha fechada na robustez dos sistemas perturbados. O Capítulo 7 apresenta um exemplo numérico detalhado para o caso discreto, com aplicação direta no controle de atuadores para um míssil anti-tanque e, finalmente, o Capítulo 8 apresenta as conclusões do trabalho e propostas de estudos futuros.



## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Nesta seção apresenta-se um resumo da revisão da literatura realizada até então para o trabalho proposto.

### 2.1 Controle adaptativo

A história do controle adaptativo data da década de 1950, onde buscava-se o estudo deste tipo de sistema aplicado à aeronaves hipersônicas (GIBSON, 2014).

Um importante tipo de sistemas de controle adaptativo é o chamado controle adaptativo por modelo de referência (MRAC). Neste tipo de controle, a resposta do sistema é comparada com a resposta de um modelo de referência, assumido linear e invariante no tempo. A lei de controle é então desenvolvida de modo que a resposta em malha fechada da planta siga a resposta do modelo de referência (IOANNOU; FIDAN, 2006).

Desenvolvido inicialmente por um grupo do laboratório de instrumentação do MIT, o controle adaptativo por modelo de referência sofreu com a falta de métodos rígidos para provas de estabilidade e entendimento de suas propriedades (NGUYEN, 2018). Assim, em 1967, uma escolha incorreta de parâmetros adaptativos levou à queda fatal de uma das aeronaves experimentais X-15 (NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION (NASA), 1971; JENKINS, 2000).

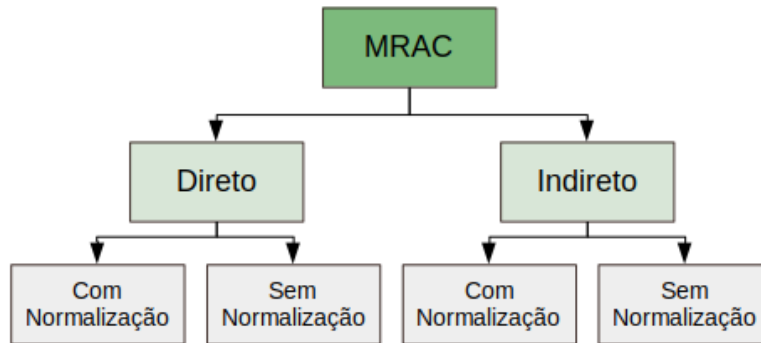
A partir deste acidente, uma formalização da análise de estabilidade na área foi necessária. Parks (1966) foi o primeiro autor a estudar a estabilidade de sistemas adaptativos por modelo de referência a partir do método de Lyapunov e, mais tarde, esta análise foi aprofundada por diversos pesquisadores.

Rohrs et al. (1985) mostrou como a excitação de frequências não modeladas na dinâmica do sistema pode instabilizar o sistema e, desde então, diversos autores estudam estratégias capazes de melhorar o desempenho do controle adaptativo na fase transitória sem prejudicar a robustez do sistema ou depender de propriedades de riqueza de sinal.

Com base nesta constatação, uma série de modificações foram propostas a fim de melhorar o desempenho de controladores adaptativos à robustez, como por exemplo, a modificação de zona morta (NARENDRA; PETERSON, 1980), a modificação  $\sigma$  (IOANNOU; KOKOTOVIC, 1983), a modificação  $\varepsilon$  (NARENDRA; ANNASWAMY, 1987) e o algoritmo de projeção (POMET; PRALY, 1992).

De um modo geral, os controladores MRAC podem ser divididos em quatro classes distintas, como indicado na Figura 2.1.

Figura 2.1 - Controle Adaptativo por Modelo de Referência.



Classificação de diferentes tipos de estruturas utilizadas no Controle Adaptativo por Modelo de Referência (MRAC, na sigla em inglês).

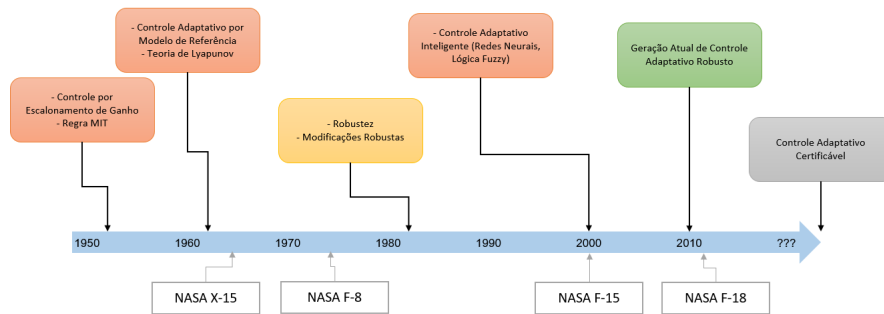
Fonte: Adaptada de [Ioannou e Fidan \(2006\)](#).

Segundo [Ioannou e Sun \(2012\)](#), a abordagem direta (ou explícita), é aquela onde o modelo da planta é parametrizado em termos de parâmetros do controlador, que são calculados diretamente sem estimativas intermediárias da planta. A abordagem indireta (ou implícita), por sua vez, diz respeito a estratégias onde os parâmetros do controlador são calculados por meio de uma estimativa online dos parâmetros da planta. O termo normalização, presente nas classificações apresentadas por [Ioannou e Fidan \(2006\)](#) dizem respeito ao uso de um sinal normalizador, responsável por limitar o erro de modelo paramétrico do sistema.

Segundo [Nguyen \(2018\)](#), o interesse na área do controle adaptativo foi retomado na última década, coincidindo com um aumento na verba de pesquisa disponibilizada pela NASA e outras instituições governamentais americanas, como ilustrado na Figura 2.2.

Dentre as pesquisas desenvolvidas neste período, pode-se encontrar vários trabalhos relacionadas a modificações no método do modelo de referência, como a pesquisa de [Stepanyan e Krishnakumar \(2010\)](#), controle adaptativo por modelo de referência combinado ([LAVRETSKY, 2009](#)), controle adaptativo por modelo de referência sem derivada ([YUCELEN; CALISE, 2010](#)), controle adaptativo híbrido ([NGUYEN, 2011](#)), controle adaptativo por modelo de referência multivariá-

Figura 2.2 - Linha do Tempo de pesquisas em Controle Adaptativo.



Fonte: Adaptado de [Nguyen \(2018\)](#).

vel ([GUO et al., 2011](#)), controle adaptativo direto e indireto para sistemas afins por parte ([KERSTING; BUSS, 2017](#)) e modificações com taxas de convergência definidas pelo usuário ([ANDERSON et al., 2021](#)).

Além disso, encontram-se estudos recentes relacionados à implementação destas modificações em diferentes sistemas ([KUMAR et al., 2015](#); [RADAC et al., 2018](#); [ZHEN et al., 2019](#); [AJEL et al., 2021](#); [TRAVIESO-TORRES; DUARTE-MERMOUD, 2022](#)). Em particular, segundo [Zhang e Wei \(2017\)](#), o controle adaptativo por modelo de referência tem se mostrado particularmente promissor em aplicações relacionadas a manipuladores robóticos.

No que diz respeito às versões discretas dos algoritmos de controle, [Landau e Lozano \(1981\)](#) unificaram pela primeira vez as estratégias de projeto de sistemas MRAC discretos e [Ortega e Kreisselmeier \(1990\)](#) demonstraram o uso de funções de *hold* para amostragem de sistemas contínuos em MRAC discretos. Desde então, vários trabalhos foram desenvolvidos utilizando-se este tipo de abordagem.

Dentre os trabalhos realizados nos últimos 15 anos, pode-se mencionar o trabalho de [Carrijo \(2008\)](#), focado no desenvolvimento de um controlador digital robusto mediante determinadas condições de excitação persistente ([CARRIJO; LEITE FILHO, 2010](#); [CARRIJO; LEITE FILHO, 2012](#)). Na mesma época, [Santos e Vieira \(2008\)](#) demonstraram como utilizar uma abordagem adaptativa para sistemas discretos com *backlash* na entrada.

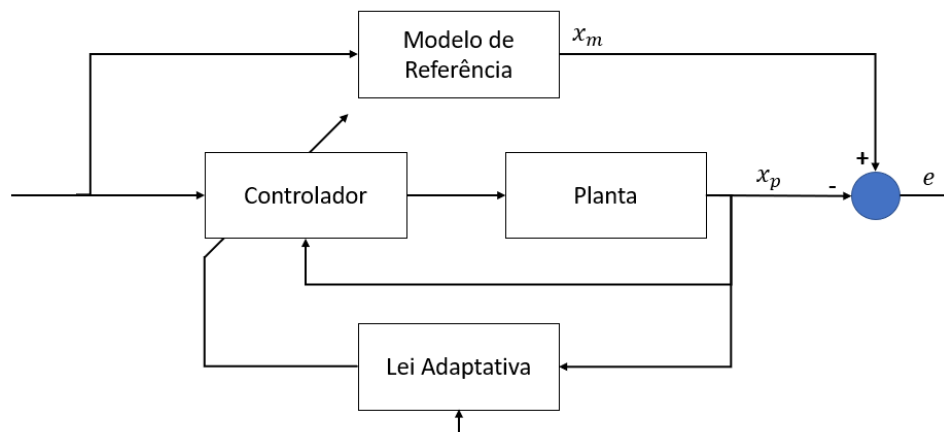
[Bernardo et al. \(2013\)](#) estudaram o controle adaptativo por modelo de referência

em sistemas discretos contínuos por partes. Montanaro et al. (2014) se preocuparam com a análise de robustez para um determinado sistema de controle MRAC discreto. Recentemente, Song et al. (2018) desenvolveram um esquema unificado para MRAC discreto, Deng et al. (2019) sugeriram um modelo de referência discreto aplicável a uma plataforma inercial de alta precisão, e Dogan et al. (2020) apresentaram possíveis arquiteturas com melhoria no desempenho durante o transiente para modelos discretos.

## 2.2 Controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada

A Figura 2.3 apresenta uma diagrama da implementação tradicional normalmente observada em controladores adaptativos por modelo de referência.

Figura 2.3 - Diagrama esquemático para implementação de controle adaptativo por modelo de referência.



Fonte: Produção da autora.

O modelo de referência utilizado aqui é chamado em malha aberta (ORM), já que não recebe nenhuma alimentação por parte dos resultados da planta, tendo sua trajetória de referência derivada de um modelo linear. Este tipo de estrutura, porém, mesmo que convergente, sofre com comportamento oscilatório dependente do ganho de adaptação (GIBSON, 2014).

Em busca de um melhor comportamento durante a fase transitória do sistema, um grande esforço de pesquisa foi feito a fim de tentar quantificar o desempenho de sistemas adaptativos neste sentido, com métricas advindas de *supremum* ( $l_\infty$ ) ou de normas  $l_2$  de sinais de erro (DATTA; IOANNOU, 1994; ZANG; BITMEAD, 1994;

KRSTIC et al., 1993).

Uma possível alternativa para melhora do comportamento nesta fase é o uso de um modelo de referência em malha fechada (CRM), onde o erro passa a fazer parte do modelo de referência, como ilustrado na Figura 2.4.

Este tipo de estrutura foi proposta inicialmente por Lee e Huh (1997). Mais tarde, a mesma estrutura pode ser encontrada em outros trabalhos, como na pesquisa de Lavretsky (2012), Stepanyan e Krishnakumar (2010), Stepanyan e Krishnakumar (2012) e, com um maior foco no comportamento transiente do sistema, nos trabalhos de Lavretsky e Wise (2013), Gibson et al. (2013) e Gibson (2014). Posteriormente, Gibson et al. (2015) apresentaram a análise desta estrutura para sistemas lineares do tipo MIMO (*Multi Input Multi Output*) e Qu e Annaswamy (2016) estudaram um modelo de referência em malha fechada para sistemas com um número maior de saídas que entradas, como é o caso de uma aeronave muito flexível.

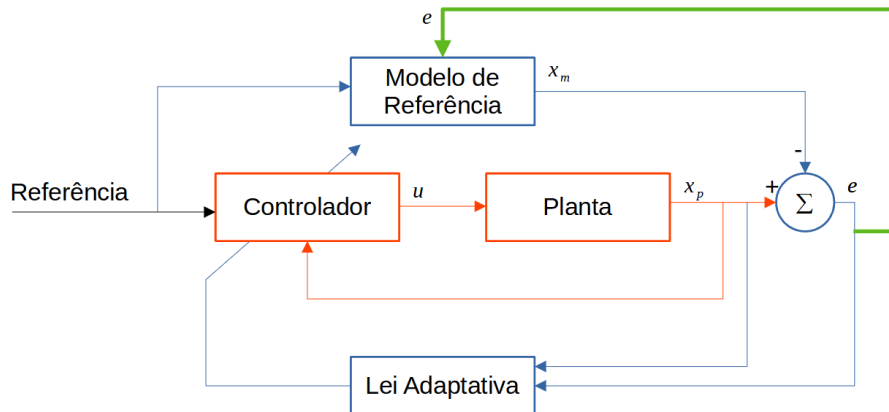
Recentemente, Xiao e Dong (2020) introduziram um controle adaptativo com tolerância a falhas baseados no modelo adaptativo em malha fechada e Yuksek e Inalhan (2021) estudaram um algoritmo de aprendizado de reforço para um controlador de voo com modelo CRM. Pode-se também citar o trabalho de Goel e Roy (2021), que apresentaram um modelo de controle adaptativo distribuído para sistemas multi-agentes com modelo de referência realimentado e Ohrem e Holden (2021), que estudaram uma arquitetura que combina estruturas ORM e CRM em um mesmo controlador.

### **2.3 Validação e verificação de sistemas adaptativos**

Apesar da longa história de estudos na área de controle adaptativo e de casos de validação de emprego em voo, até hoje nenhum controlador deste tipo foi utilizado em sistemas críticos. Assim, o desenvolvimento de técnicas de projeto nesta área a fim de permitir o eventual desenvolvimento de sistemas de controle certificáveis é alvo de grande pesquisa na comunidade científica (NGUYEN, 2018).

Nos últimos quinze anos, vários trabalhos se dedicaram a identificar possíveis métricas aplicáveis à validação e verificação de sistemas adaptativos. Jacklin et al. (2005) apresentou técnicas e ferramentas disponíveis na época para a análise de sistemas de aprendizagem em relação à garantia de taxas de convergência rápida e estabilidade de algoritmos. Posteriormente, o mesmo autor realizou um

Figura 2.4 - Diagrama esquemático para implementação de controle adaptativo por modelo de referência com realimentação do erro (CRM).



Fonte: Produção da autora.

estudo visando identificar separação entre métodos tradicionais aceitados por órgãos de certificação da indústria aeronáutica e técnicas aplicáveis em estruturas adaptativas, a fim de identificar elementos necessários para o uso deste tipo de controle em aplicações críticas (JACKLIN, 2008). Mais recentemente, Jacklin (2015) realizou uma pesquisa equivalente voltada para métodos de V&V aplicáveis ao desenvolvimento de *software* para pequenos satélites. Apesar de não ser uma pesquisa voltada somente à área adaptativa, apresenta informações relevantes no que diz respeito ao *framework* necessário para a verificação de algoritmos nesta área.

Schumann e Liu (2007) descreve diferentes métodos propostos para validação e verificação destes sistemas, incluindo análise de Lyapunov, inferência estatística e comparação com filtros de Kalman, além de apresentar ferramentas de monitoramento utilizadas em aplicações adaptativas na aeronave F-15 da NASA.

Hodel et al. (2008) apresenta um *roadmap* para o desenvolvimento de métricas de estabilidade para sistemas não lineares variáveis no tempo, métricas essas comparáveis às margens de fase e ganho em sistemas lineares invariantes no tempo.

Nesta mesma linha de pesquisa, observa-se também o desenvolvimento de métricas relacionadas a uma margem de atraso de tempo presente em sistemas adaptativos. Nguyen e Boskovic (2008) apresentaram uma análise da margem



de estabilidade linear para sistemas de controle adaptativo híbrido e, mais tarde, apresentou métodos para estimar a margem de atraso no tempo para sistemas adaptativos com entrada degrau, computando o atraso temporal com três métodos distintos: aproximação de Padé, método de Lyapunov-Krasovskii com otimização de soma dos quadrados e método de medida matricial (NGUYEN; SUMMERS, 2011).

Rajagopal et al. (2013) apresenta um modelo com um observador de estado modificado em presença de atraso de tempo, comparando-o com modelos de referência tradicionais, enquanto Matsutani (2013) apresenta uma prova da existência de margens de atraso de tempo em sistemas de controle adaptativos controlados por um algoritmo de projeção em presença de todos os estados observáveis.



### 3 DEFINIÇÕES

Este capítulo apresenta em detalhe conceitos e definições importantes para o estudo de estabilidade e robustez de controladores adaptativos.

A Seção 3.1 inclui a definição de normas no espaço  $\ell^P$  e teoremas aplicáveis. A Seção 3.2 apresenta o conceito de estabilidade segundo Lyapunov no regime contínuo, enquanto a Seção 3.3 apresenta resultados necessários para análise de estabilidade no regime discreto. A Seção 3.4 apresenta a estabilidade por meio de fronteira última uniforme, necessária para análise de estabilidade em sistemas perturbados quando não é possível garantir a condição de excitação persistente.

#### 3.1 Normas

**Definição** (Norma de um vetor, (IOANNOU; SUN, 2012)). *A norma  $|x|$  de um vetor é uma função real com as seguintes propriedades:*

- $|x| \geq 0$ , com  $|x| = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ .
- $|\alpha x| = |\alpha||x|$  para qualquer escalar  $\alpha$ .
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ , também conhecida como desigualdade triangular.

**Definição** (Norma induzida de uma matriz, (IOANNOU; SUN, 2012)). *Seja  $|\cdot|$  uma dada norma vetorial. Então, para cada matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , define-se  $\|A\|$  como*

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x| \leq 1} |Ax| = \sup_{|x|=1} |Ax|.$$

*As seguintes propriedades são aplicáveis à  $\|A\|$ :*

- $|Ax| \leq \|A\||x|, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ .
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .

**Definição** (Norma  $\ell^p$ , (IOANNOU; SUN, 2012)). *Para funções do tempo, sejam elas escalares ou vetoriais, define-se a norma  $\ell^L^p$  como*

$$\|x\|_p \equiv \left( \int_0^\infty |x(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}},$$

para  $p \in [1, \infty)$ .

No caso de seqüências discretas, a norma  $\ell^p$  torna-se

$$\|x\|_p \equiv \left( \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para  $1 \leq p < \infty$ .

**Definição** (Norma  $\ell^\infty$ , (IOANNOU; SUN, 2012)). Para funções variantes no tempo, sejam elas escalares ou vetoriais, define-se a norma  $\ell^\infty$  como

$$\|x\|_\infty \equiv \sup_{t \geq 0} |x(t)|.$$

No caso de seqüências discretas, a norma  $\ell^\infty$  torna-se

$$\|x\|_\infty \equiv \sup_{i \geq 1} |x_i|.$$

Os seguintes teoremas são aplicáveis a normas  $\ell^p$ .

**Teorema 1** (Desigualdade de Hölder, (IOANNOU; SUN, 2012)). Se  $p, q \in [1, \infty]$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  então  $f \in \ell^p, g \in \ell^q$  implica que  $fg \in \ell^1$  e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Teorema 2** (Desigualdade de Minkowski, (IOANNOU; SUN, 2012)). Para  $p \in [1, \infty]$ ,  $f, g \in \ell^p$  implica que  $f + g \in \ell^p$  e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Finalmente, também define-se a norma de Frobenius.

**Definição** (Norma de Frobenius, (LAVRETSKY; WISE, 2013)). Para uma matriz  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , a norma de Frobenius é definida como

$$\|A\|_F \equiv \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2},$$

em que  $tr(\cdot)$  indica o traço de uma matriz.

Observa-se que a norma de Frobenius não é a norma induzida de uma matriz, mas pode-se afirmar que (LAVRETSKY; WISE, 2013),

$$|tr(A^T B)| \leq \|A\|_F \|B\|_F.$$

### 3.2 Estabilidade segundo Lyapunov

Para a análise de estabilidade por Lyapunov, considera-se um sistema descrito por um sistema de equações diferenciais da forma apresentada na Equação (3.1).

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

Em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathcal{T} \times \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{T} = [t_0, \infty)$  e  $\mathcal{B}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$ . Supõe-se que  $f$  é tal que, para cada  $x_0 \in \mathcal{B}$  e cada  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , o problema de valor inicial =9(3.1) possui apenas uma solução  $x(t; t_0, x_0)$  (IOANNOU; SUN, 2012).

#### 3.2.1 Definições

Algumas definições são necessárias para a análise de estabilidade no regime contínuo. Todas as definições apresentadas nesta seção são retiradas diretamente do trabalho de Ioannou e Sun (2012).

**Definição** (Classe  $\mathcal{K}$ ). Uma função contínua  $\varphi : [0, r] \mapsto \mathbb{R}^+$  pertence à classe  $\mathcal{K}$  se:

- *i)*  $\varphi(0) = 0$ ;
- *ii)*  $\varphi$  é estritamente crescente em  $[0, r]$ .

**Definição** (Classe  $\mathcal{KR}$ ). Uma função contínua  $\varphi : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^+$  pertence à classe  $\mathcal{KR}$  se:

- *i)*  $\varphi(0) = 0$ ;
- *ii)*  $\varphi$  é estritamente crescente em  $[0, \infty)$ .
- *iii)*  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = \infty$ .

**Definição** (Funções com mesma ordem de magnitude). Duas funções  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{K}$  definidas em  $[0, r]$  tem mesma ordem de magnitude se existem constantes positivas  $k_1, k_2$  tal que

$$k_1\varphi_1(r_1) \leq \varphi_2(r_1) \leq k_2\varphi_1(r_1), \quad \forall r_1 \in [0, r].$$

**Definição** (Função Definida Positiva). *Uma função  $V(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $V(t, 0) = 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$  é definida positiva se existe uma função contínua  $\varphi \in \mathcal{K}$  tal que  $V(t, x) \geq \varphi(|x|) \forall t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathcal{B}(r)$  e algum  $r > 0$ .*

**Definição** (Função Definida Negativa). *Uma função  $V(t, x)$  é definida negativa se  $-V(t, x)$  for definida positiva.*

**Definição** (Função Semidefinida Positiva). *Uma função  $V(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $V(t, 0) = 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$  é semidefinida positiva se  $V(t, x) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathcal{B}(r)$  para algum  $r > 0$ .*

**Definição** (Função Semidefinida Negativa). *Uma função  $V(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $V(t, 0) = 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$  é semidefinida negativa se  $V(t, x) \leq 0 \forall t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathcal{B}(r)$  para algum  $r > 0$ .*

**Definição** (Função Decrescente). *Uma função  $V(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $V(t, 0) = 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$  é dita decrescente se existe uma função contínua  $\varphi \in \mathcal{K}$  tal que  $|V(t, x)| \geq \varphi(|x|) \forall t \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathcal{B}(r)$  e algum  $r > 0$ .*

**Definição** (Função Ilimitada Radialmente (Radially Unbounded)). *Uma função  $V(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com  $V(t, 0) = 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$  é dita ilimitada radialmente se existe uma função contínua  $\varphi \in \mathcal{KR}$  tal que  $V(t, x) \geq \varphi(|x|) \forall t \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}^n$ .*

### 3.2.2 Método direto de Lyapunov

O método direto de Lyapunov, também conhecido por segundo método de Lyapunov, busca encontrar informações sobre a estabilidade do sistema com base na forma de  $f(t, x)$ , sem o conhecimento explícito de suas soluções (IOANNOU; SUN, 2012).

**Teorema 3** (Método Direto de Lyapunov). *Suponha que exista uma função  $V(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathbb{R}$  para algum  $r > 0$  com primeiras derivadas parciais contínuas com respeito a  $x$  e  $t$  e com  $V(t, 0) = 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$ .*

*Define-se  $\dot{V}$  como a derivada temporal da função  $V(t, x)$  ao longo da solução do sistema não linear, ou seja:*

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla V)^T f(t, x), \quad \text{onde } \nabla V = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]^T$$

Assumindo-se, sem perda de generalidade, que  $x_e = 0$  seja um ponto de equilíbrio do sistema  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , pode-se afirmar que:

- Se  $\dot{V} \leq 0$ , então  $x_e = 0$  é estável.
- Se  $V$  é decrescente e  $\dot{V} \leq 0$ , então  $x_e = 0$  é uniformemente estável.
- Se  $V$  é decrescente e  $\dot{V} < 0$ , então  $x_e = 0$  é uniformemente assintoticamente estável.
- Se  $V$  é decrescente e existe  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{K}$  da mesma ordem de magnitude tal que

$$\varphi_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \varphi_2(|x|), \quad \dot{V}(t, x) \leq -\varphi_3(|x|)$$

para todo  $x \in \mathcal{B}(r)$  e  $t \in \mathbb{R}^+$ , então  $x_e = 0$  é exponencialmente estável.

Observa-se que, como estes resultados estão relacionados à vizinhança  $\mathcal{B}(r)$ , estes resultados são locais. O teorema 4 indica condições para que conclusões globais possam ser tiradas. (IOANNOU; SUN, 2012)

**Teorema 4.** Assuma que o sistema de equações diferenciais possua soluções únicas para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Suponha que exista uma função  $V$  positiva definida, decrescente e radialmente ilimitada  $V(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathbb{R}$  com derivadas parciais de primeira ordem contínuas com respeito a  $t, x$  e  $V(t, 0) = 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$ . Pode-se afirmar que:

- Se  $\dot{V} < 0$ , então  $x_e = 0$  será globalmente uniformemente assintoticamente estável.
- Se existe  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{KR}$  da mesma ordem de magnitude tal que

$$\varphi_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \varphi_2(|x|), \quad \dot{V}(t, x) \leq -\varphi_3(|x|)$$

então  $x_e = 0$  é globalmente exponencialmente estável.

### 3.3 Estabilidade segundo Lyapunov no regime discreto

Para a análise de estabilidade por Lyapunov no regime discreto, considera-se um sistema descrito por uma equação de diferença da forma apresentada na Equação (3.2).

$$x(k+1) = f(k, x(k)), \quad x(k_0) = k_0 \quad (3.2)$$

Em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$  e  $f : \mathcal{Z}^+ \times \mathcal{B}(r) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de valor único contínua em  $x$ , com  $\mathbb{Z}^+$  representando o conjunto de todos os inteiros não negativos.  $\mathcal{B}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$ . Assim, para cada  $x_0 \in \mathcal{B}(r)$  e cada  $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ ,  $f$  possui apenas uma solução  $x(k; k_0, x_0)$  (IOANNOU; FIDAN, 2006).

### 3.3.1 Definições

Por uma questão de brevidade, as definições apresentadas na Seção 3.2.1 não serão rerepresentadas aqui para o caso discreto. O leitor é convidado a consultar Ioannou e Fidan (2006) se necessário.

Além destas, o conceito de funções reais positivas (PR) e funções estritamente reais positivas (SPR) é necessário para a aplicação de lemas importantes na análise de estabilidade de um sistema adaptativo. Novamente, as definições apresentadas nesta seção são retiradas de Ioannou e Fidan (2006).

**Definição** (Matriz Hermitiana). *Uma função matricial  $\tilde{H}(z)$  em que  $z$  é uma variável complexa é uma matriz Hermitiana se  $\tilde{H}(z) = \tilde{H}^T(z^*)$ , em que  $z^*$  é o complexo conjugado de  $z$ .*

**Definição** (Função PR). *Uma matriz de transferência discreta  $n \times n$  cujos elementos são funções racionais de  $z$  é dita PR se*

- *todos os elementos de  $\tilde{H}(z)$  são analíticos fora do círculo unitário,*
- *os eventuais polos (restantes após cancelamento de polos e zeros) de qualquer elemento de  $\tilde{H}(z)$  no círculo unitário  $|z| = 1$  são simples e a matriz de resíduos associada for uma matriz Hermitiana semidefinida positiva,*
- *a matriz  $\tilde{H}(e^{j\omega}) + \tilde{H}^T(e^{-j\omega})$  for uma matriz Hermitiana semidefinida positiva para todos os valores reais de  $\omega$  para os quais  $z = e^{-j\omega}$  não são polos de nenhum dos elementos de  $\tilde{H}(z)$ .*

**Definição** (Função SPR). *Uma matriz de transferência discreta  $n \times n$  cujos elementos são funções racionais de  $z$  é dita SPR se*

- *todos os elementos de  $\tilde{H}(z)$  são analíticos em  $|z| \geq 1$ ,*
- *a matriz  $\tilde{H}(e^{j\omega}) + \tilde{H}^T(e^{-j\omega})$  for uma matriz Hermitiana definida positiva para todos os valores reais de  $\omega$ .*



### 3.3.2 Método direto de Lyapunov

O método de análise de estabilidade por Lyapunov para o caso discreto é apresentado no teorema a seguir (IOANNOU; FIDAN, 2006)

**Teorema 5.** *Suponha que exista uma função discreta  $V(k, x) : \mathbb{Z}^+ \times \mathcal{B}(r) \rightarrow [0, \infty]$  para algum  $r > 0$  e  $V(k, 0) = 0 \forall k \in \mathbb{Z}^+$ .*

*Define-se  $\Delta V$  como a variação de  $V(k, x)$  ao longo da solução do sistema dado pela Equação (3.2), ou seja:*

$$\Delta V(k, x(k)) \equiv V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)) = V(k+1, f(k, x(k))) - V(k, x(k))$$

*Assumindo-se, sem perda de generalidade, que  $x_e = 0$  seja um ponto de equilíbrio do sistema, pode-se afirmar que:*

- *Se  $\Delta V \leq 0$ , então  $x_e = 0$  é estável.*
- *Se  $V(k, x)$  é decrescente e  $\Delta V \leq 0$ , então  $x_e = 0$  é uniformemente estável.*
- *Se  $V(k, x)$  é decrescente e  $\Delta V < 0$ , então  $x_e = 0$  é uniformemente assintoticamente estável.*
- *Se existe  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 > 0$  da mesma ordem de magnitude tal que*

$$\varphi_1|x|^2 \leq V(k, x) \leq \varphi_2|x|^2, \quad \Delta V \leq -\varphi_3|x|^2$$

*para  $\varphi_2 > \varphi_3$ , então  $x_e = 0$  é exponencialmente estável.*

### 3.3.3 Teoremas úteis

Considera-se um sistema de controle discreto dado pela Equação (3.3), em que  $\tilde{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ,  $\tilde{C} \in \mathbf{R}^{n \times m}$  e  $\tilde{D} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ .

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) &= \tilde{C}^T x(k) + \tilde{D}u(k) \end{aligned} \tag{3.3}$$

A função de transferência deste sistema será dada pela Equação (3.4).

$$\tilde{H}(z) = \tilde{C}^T (zI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} + \tilde{D} \tag{3.4}$$

Pode-se então considerar os seguintes teoremas (IOANNOU; FIDAN, 2006).

**Teorema 6.** *As seguintes afirmações são equivalentes entre si.*

- a)  $\tilde{H}(z)$  dada pela Equação (3.4) é uma função de transferência discreta positiva real.
- b) Existe uma matriz simétrica positiva  $P$ , uma matriz simétrica semidefinida  $Q$ , e matrizes  $S$  e  $R$  de dimensões apropriadas tal que

$$\begin{aligned} \tilde{A}^T P \tilde{A} - P &= -Q \\ \tilde{B}^T P \tilde{A} + S^T &= \tilde{C}^T \\ \tilde{D} + \tilde{D}^T - \tilde{B}^T P \tilde{B} &= R \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \geq 0.$$

- c) **Lema de Kalman-Szogo-Popov:** Existe uma matriz simétrica positiva  $P$  e matrizes  $M, L$  tal que

$$\begin{aligned} \tilde{A}^T P \tilde{A} - P &= -LL^T \\ \tilde{B}^T P \tilde{A} + M^T L^T &= \tilde{C}^T \\ \tilde{D} + \tilde{D}^T - \tilde{B}^T P \tilde{B} &= M^T M. \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Teorema 7.** *A matriz de transferência discreta dada pela Equação (3.4) é SPR se existe uma matriz simétrica positiva  $P$ , uma matriz simétrica positiva  $Q$  e matrizes  $K$  e  $L$  tal que*

$$\begin{aligned} \tilde{A}^T P \tilde{A} - P &= -LL^T - Q \\ \tilde{B}^T P \tilde{A} + M^T L^T &= \tilde{C}^T \\ \tilde{D} + \tilde{D}^T - \tilde{B}^T P \tilde{B} &= M^T M. \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.4 Estabilidade por meio de Fronteira Última Uniforme (UUB)

Segundo Lavretsky e Wise (2013), a análise de estabilidade por meio de fronteira última uniforme (*Ultimate Uniform Boundedness* - UUB) pode ser considerada uma forma mais branda de estabilidade que a estabilidade segundo Lyapunov. Enquanto a estabilidade por Lyapunov diz respeito a uma trajetória nominal, o conceito de UUB lida com sistemas em presença de perturbação.

Considera-se um sistema não autônomo dado pela Equação (3.8).

$$\dot{x} = f(x, t) + \xi(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.8)$$

Em que  $\xi$  é uma perturbação limitada com  $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$  e  $\|\xi(t)\| \leq \xi_{max}$ , em que  $\xi_{max}$  é um limite superior escalar constante. Suponha que a origem seja um ponto de equilíbrio do sistema não perturbado. Intuitivamente, sabe-se que não importa quão pequeno seja o limite  $\xi_{max}$ , a origem não mais será um ponto de equilíbrio no sistema perturbado.

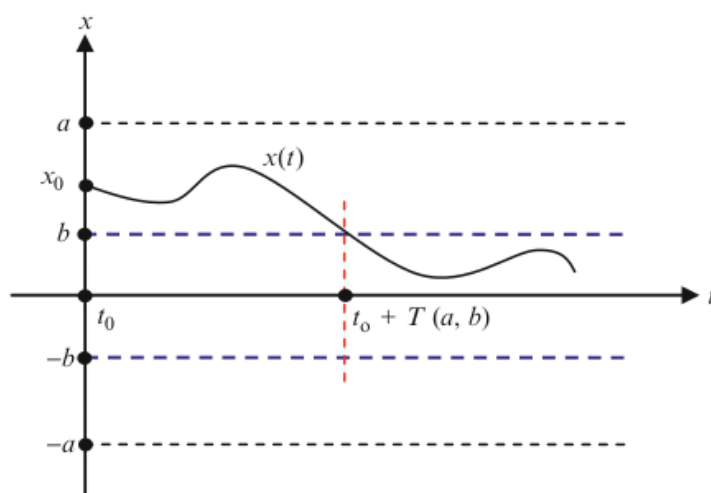
Segundo [Lavretsky e Wise \(2013\)](#), a principal ideia por trás do conceito de UUB é encontrar uma função  $V(x)$  tipo Lyapunov que seja válida para todo  $x$  fora de uma determinada esfera  $B_r \supset B_{\xi_{max}}$  e mostrar que, em um tempo finito  $T$ , todas as trajetórias do sistema entram em  $B_r$  e lá permanecem para todo  $t \geq T$ .

**Definição (UUB).** *As soluções do sistema da Equação (3.8) serão considerados UUB com fronteira última  $b$  se existem constantes positivas  $b$  e  $c$ , independentes de  $t_0 \geq 0$  e, para cada  $a \in (0, c)$ , existe  $T = T(a, b)$ , independente de  $t_0$ , tal que*

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T.$$

A Figura 3.1 apresenta uma interpretação gráfica do conceito de UUB.

Figura 3.1 - Representação gráfica do significado de UUB.



Fonte: [Lavretsky e Wise \(2013\)](#).



## 4 CONTROLE ADAPTATIVO CONTÍNUO POR MODELO DE REFERÊNCIA

Este capítulo apresenta a estrutura tradicional para o controle adaptativo por modelo de referência, aqui chamado de Controle Adaptativo por Modelo de Referência em Malha Aberta, ou ORM na sigla em inglês.

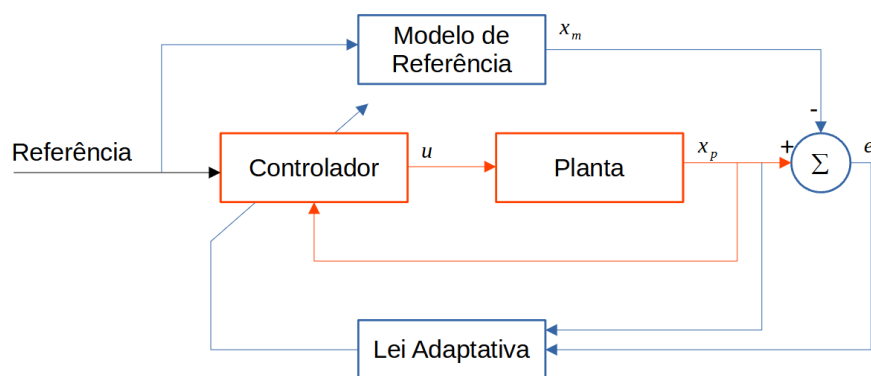
A seguir, explora-se ainda em regime contínuo uma modificação recente proposta na literatura visando uma melhora no comportamento do transiente do sistema, aqui chamada de Controle Adaptativo por Modelo de Referência em Malha Fechada, ou CRM em inglês. É importante ressaltar que o termo "Malha Fechada" nesta definição diz respeito à estrutura do modelo de referência, e não ao controle em si, que por definição é implementado em malha fechada.

Finalmente, considerações são feitas sobre as métricas do transitório do modelo CRM em relação ao modelo ORM, assim como apresenta-se resultados de simulação demonstrando as melhorias observadas.

### 4.1 Controle adaptativo por modelo de referência em malha aberta - ORM

A Figura 4.1 apresenta o conceito por trás do controle adaptativo por modelo de referência (MRAC).

Figura 4.1 - Diagrama esquemático para implementação de controle adaptativo por modelo de referência.



Fonte: Produção da autora.

Conforme ressaltam Sastry e Bodson (1989), esta configuração em paralelo pode ser interpretada como dois loops: um loop interno, em vermelho, repre-

senta um controle em malha fechada tradicional, com controlador e planta. O loop externo, por sua vez, é um loop de adaptação que busca levar o erro entre o modelo de referência e a planta a zero.

Caso a planta fosse totalmente conhecida, a obtenção dos parâmetros do controlador que igualariam o comportamento da planta ao modelo de referência poderiam ser encontrados algebricamente em muitos casos. Entretanto, como normalmente a planta apresenta parâmetros incertos, busca-se estimar os parâmetros do controlador de maneira que o comportamento do sistema tenda ao desejado à medida que o erro diminua.

Considera-se um sistema cuja planta possa ser modelada pela Equação (4.1). Assume-se que todos os estados estão disponíveis.

$$\dot{x}_p = Ax_p + B\Lambda u \quad (4.1)$$

Em que  $x_p \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de controle,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz constante desconhecida,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de controle, constante e conhecida. A matriz  $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , diagonal e definida positiva, modela falhas de controle ou erros de modelo, como por exemplo, nos ganhos de controle, e supõe-se que o par  $(A, B\Lambda)$  é controlável.

Deseja-se que o comportamento desta planta siga aquele definido por um modelo de referência, escolhido de modo a representar a resposta desejada em presença de comandos limitados  $r(t)$ .

Assim, considera-se o modelo de referência apresentado na Equação (4.2), em que  $A_{ref}$  deve ser uma matriz Hurwitz a fim de garantir que o sistema seja estável.

$$\dot{x}_m = A_{ref}x_m + B_{ref}r(t) \quad (4.2)$$

Escolhe-se um controle do tipo *feedback-feedforward*. Caso as matrizes  $A$  e  $\Lambda$  fossem conhecidas, seria possível calcular, assumindo que estas existam, os parâmetros  $K_x$  e  $K_r$  tal que, com a lei

$$u(t) = K_x^T x_p + K_r^T r, \quad (4.3)$$

a planta seguisse o modelo de referência. Ressalta-se que os parâmetros  $K_x$  e  $K_r$  são vetores, apesar da notação aqui escolhida utilizar letras maiúsculas. Esta escolha foi feita de maneira a evitar confusão com a variável  $k$ , normalmente

utilizada na literatura para representar o instante discreto.

A dinâmica deste sistema ideal seria dada por

$$\dot{x}_{ideal} = Ax_{ideal} + B\Lambda(K_x^T x_{ideal} + K_r^T r). \quad (4.4)$$

Assim, caso exista um controlador adaptativo com a forma descrita na Equação (4.3), os ganhos ideais desconhecidos devem satisfazer as condições descritas por

$$\begin{aligned} A_{ref} &= A + B\Lambda K_x^T \\ B_{ref} &= B\Lambda K_r^T \end{aligned} \quad (4.5)$$

Lavretsky e Wise (2013) enfatizam que, dados  $(A, B, \Lambda, A_{ref}, B_{ref})$ , não é possível garantir que os ganhos ideais  $K_r$  e  $K_x$  que satisfazem a Equação (4.5) sempre existam. Entretanto, dado uma estrutura conhecida para  $A$ , é possível calcular  $A_{ref}$  e  $B_{ref}$  tal que ao menos uma solução ideal de ganhos exista, mesmo que não seja possível implementar diretamente dado que os valores exatos de  $A$  são desconhecidos.

Supondo-se, porém, que existam ganhos que tornem este controle possível, o problema de controle passa a ser encontrar uma lei de adaptação dos ganhos que leve o erro de rastreo do estado  $e(t) = x_p(t) - x_m(t)$  tender a zero de maneira globalmente uniformemente assintoticamente estável.

Escolhe-se, portanto, a lei de controle descrita na Equação (4.6), onde as variáveis com chapéu indicam estimativas dos ganhos ideais, que são desconhecidos.

$$u(t) = \hat{K}_x^T x_p + \hat{K}_r^T r \quad (4.6)$$

A derivada do erro de rastreo do estado pode ser calculada por meio da Equação (4.7).

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x}_p - \dot{x}_m + A_{ref}x_p - A_{ref}x_p \\ \dot{e} &= Ax_p + B\Lambda[\hat{K}_x^T x_p + \hat{K}_r^T r] \\ &\quad - A_{ref}x_m - B_{ref}r + A_{ref}x_p - A_{ref}x_p \\ \dot{e} &= [A + B\Lambda\hat{K}_x^T - A_{ref}]x_p + B\Lambda[\hat{K}_r^T - B_{ref}]r + A_{ref}[x_p - x_m] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Definindo-se  $\Delta K_x^T \equiv \hat{K}_x^T - K_x^T$  e  $\Delta K_r^T \equiv \hat{K}_r^T - K_r^T$  e levando em consideração as condições apresentadas na Equação (4.5), a taxa de variação do erro pode ser expressa pela Equação (4.8).

$$\dot{e} = A_{ref}e + B\Lambda[\Delta K_x^T x_p + \Delta K_r^T r] \quad (4.8)$$

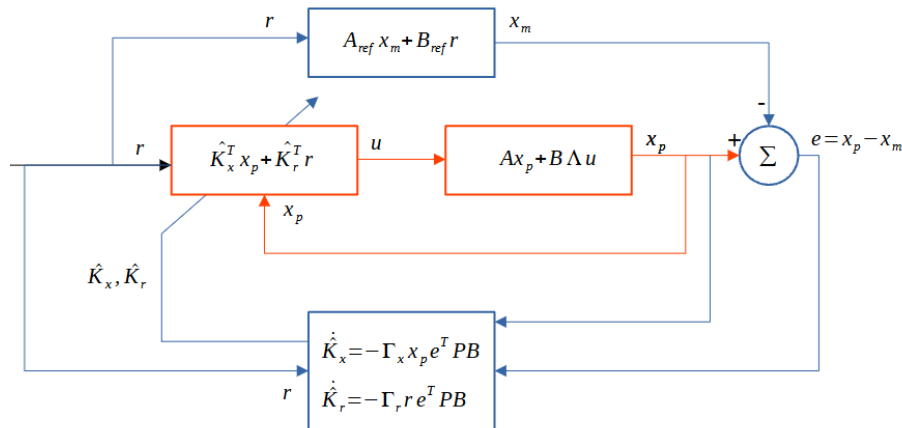
Dado a dinâmica do erro calculada na Equação 4.8, é possível mostrar que este sistema será estável com todos os sinais limitados para a lei de adaptação dos parâmetros dada por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{K}}_x &= -\Gamma_x x_p e^T P B \\ \dot{\hat{K}}_r &= -\Gamma_r r e^T P B \end{aligned} \quad (4.9)$$

em que  $P = P^T > 0$  é a solução da equação algébrica  $PA_m + A_m^T P = -Q$ , para algum  $Q = Q^T > 0$  e  $\Gamma_x = \Gamma_x^T > 0, \Gamma_r = \Gamma_r^T > 0$ , são os ganhos de adaptação de dimensões apropriadas. (LAVRETSKY; WISE, 2013).

A Figura 4.2 apresenta a implementação desta arquitetura segundo o esquema da Figura 4.1.

Figura 4.2 - Diagrama esquemático para implementação do controle adaptativo por modelo de referência tradicional.



Fonte: Produção da autora.



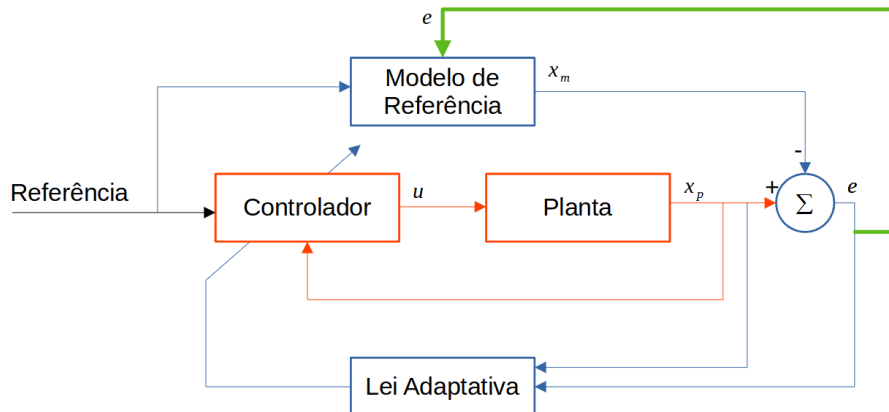
## 4.2 Controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada - CRM

A modificação no modelo de referência estudada neste trabalho foi proposta inicialmente por Lee e Huh (1997), e visa uma melhora na dinâmica do transitório dos sistemas adaptativos.

Mais recentemente, esta modificação foi explorada em diferentes estruturas de controle no regime contínuo por Gibson (2014).

A Figura 2.4 apresenta um diagrama esquemático do novo modelo, onde uma realimentação do erro (destacada em verde) é inserida diretamente no modelo de referência, levando ao nome Modelo de Referência de Malha Fechada (CRM, em inglês).

Figura 4.3 - Diagrama esquemático para implementação de controle adaptativo por modelo de referência com realimentação do erro (CRM).



Fonte: Produção da autora.

O novo modelo de referência inclui um termo de retroalimentação do erro de estado com ganho  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Observa-se que este modelo, como aqui implementado, assume que todos os estados estão disponíveis.

$$\dot{x}_m = A_{ref}x_m + Br - L(x_p - x_m) \quad (4.10)$$

O controle é dado pela Equação (4.11).

$$u(t) = \hat{K}_x^T x + \hat{K}_r^T r \quad (4.11)$$

Assume-se que existam  $\hat{K}_x$  e  $\hat{K}_r$  ideais tal que  $A + B\Lambda K_x^T = A_{ref}$  e  $\Lambda K_r^T = I$ , atendendo a condição de *matching* desde que a matriz de controle do modelo de referência seja idêntica à matriz de controle da planta, o que é possível já que assume-se B conhecido.

A dinâmica do erro  $e = x_p - x_m$  para um controlador CRM será dada por

$$\dot{e} = (A_{ref} + L)e + B\Lambda[\Delta K_x^T x_p + \Delta K_r^T r]. \quad (4.12)$$

Gibson (2014) considerou durante sua análise do modelo de referência em malha fechada para plantas com todos os estados acessíveis somente o algoritmo de projeção, uma estratégia de modelo de referência detalhada na Seção 6.1.1.2.

Nesta seção, vamos avaliar esta estrutura assumindo inicialmente as mesmas leis de adaptação de parâmetro consideradas para o modelo ORM na Seção 4.1.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{K}}_x &= -\Gamma_x x_p e^T P B \\ \dot{\hat{K}}_r &= -\Gamma_r r e^T P B \end{aligned} \quad (4.13)$$

Em que  $P = P^T > 0$  é a solução de  $(A_{ref} + L)^T P + P(A_{ref} + L) + Q = 0$ , para um  $Q = Q^T > 0$ .

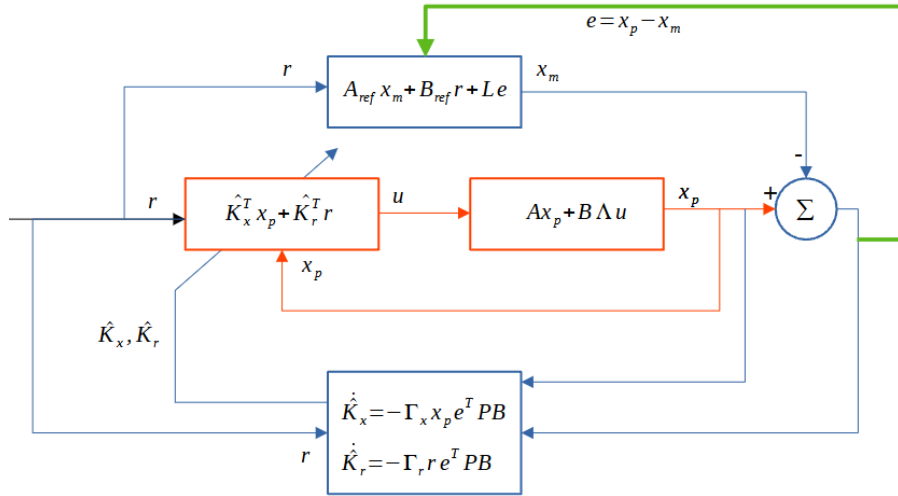
É possível mostrar que este sistema é estável utilizando-se a equação de Lyapunov apresentada na Equação (4.14), desde que  $P = P^T > 0$  seja escolhido de maneira a atender a equação  $P(A_m + L) + (A_m + L)^T P = -Q$ , para um  $Q = Q^T > 0$ .

$$V(t) = e^T P e + tr(\Lambda \Delta K_x^T \Gamma_x^{-1} \Delta K_x) + tr(\Lambda \Delta K_r^T \Gamma_r^{-1} \Delta K_r) \quad (4.14)$$

Em que  $\Delta K_x = \hat{K}_x - K_x$  e  $\Delta K_r = \hat{K}_r - K_r$ .

A Figura 4.4 apresenta a implementação desta arquitetura.

Figura 4.4 - Diagrama esquemático para implementação de controle adaptativo por modelo de referência com realimentação do erro (CRM).



Fonte: Produção da autora.

### 4.3 Análise do desempenho no transiente

Esta seção apresenta algumas métricas de desempenho que visam avaliar o comportamento do sistema de controle proposto. Assim, calcula-se a norma  $\ell_\infty$  e  $\ell_2$  do erro, assim como a norma  $\ell_\infty$  do estado do modelo de referência e as normas  $\ell_2$  das derivadas dos parâmetros.

Estas métricas são equivalentes às aquelas apresentadas por Gibson (2014), com exceção da derivada do parâmetro  $\hat{k}$ , que apresenta uma expressão distinta em função da abordagem escolhida. Além disso, calcula-se um limite superior para o comportamento do erro no tempo, que está diretamente relacionado ao tempo de resposta do sistema.

#### 4.3.1 Caso escalar

Inicialmente, considera-se uma planta escalar onde apenas o sinal de  $b$  é assumido conhecido.

$$\dot{x}_p = ax_p + bu \quad (4.15)$$

O modelo de referência de malha fechada no caso escalar será

$$\dot{x}_m = a_{ref}x_m + b_{ref}r + k_e(x_p - x_m), \quad (4.16)$$

com  $a_{ref} < 0, k_e > 0$ .

Dados os sistemas descritos nas Equações (4.15) e (4.16), as condições de matching serão tais que

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{a_{ref} - a}{b} \\ k_r &= \frac{b_{ref}}{b} \end{aligned} \quad (4.17)$$

A lei de controle é dada por

$$u = \hat{k}_x x_p + \hat{k}_r r, \quad (4.18)$$

onde  $\hat{k}_x$  e  $\hat{k}_r$  são as estimativas dos parâmetros do controlador.

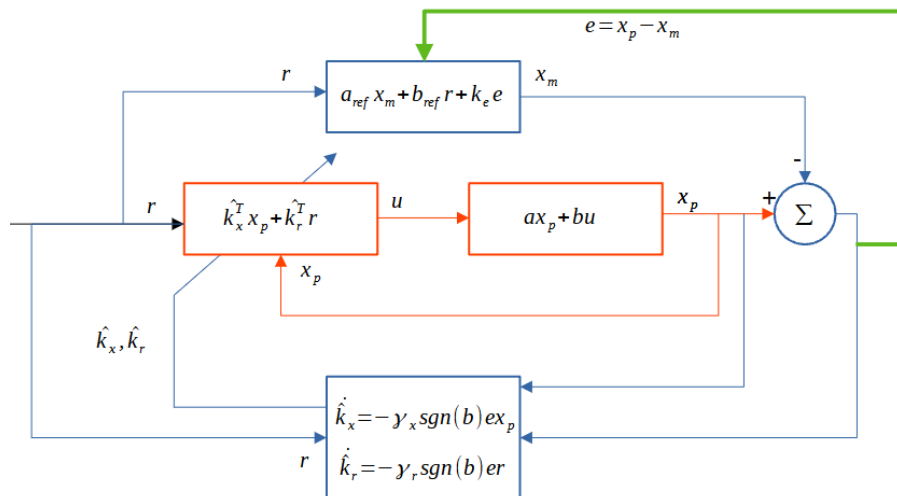
Dado um erro de estado  $e = x_p - x_{ref}$ , toma-se a lei de adaptação

$$\dot{\hat{k}}_x = -\gamma_x \text{sgn}(b) e x_p \quad (4.19a)$$

$$\dot{\hat{k}}_r = -\gamma_r \text{sgn}(b) e r. \quad (4.19b)$$

A Figura 4.5 apresenta a implementação desta arquitetura para o caso escalar proposto.

Figura 4.5 - Diagrama esquemático para implementação de controle adaptativo por modelo de referência com realimentação do erro (CRM) - caso escalar.



Fonte: Produção da autora.

Esta lei de adaptação representa uma versão escalar da lei apresentadas na Equação (4.13).

A dinâmica do erro deste sistema será

$$\dot{e} = (a_{ref} - k_e)e + b(\Delta k_x x + \Delta k_r r). \quad (4.20)$$

Escolhe-se uma função de Lyapunov apropriada, dada por

$$V(e, \Delta k_x(t), \Delta k_r(t)) = e^2 + |b| \left[ \frac{\Delta k_x^2}{\gamma_x} + \frac{\Delta k_r^2}{\gamma_r} \right], \quad (4.21)$$

Com  $\Delta k_x \equiv \hat{k}_x - k_x$  e  $\Delta k_r \equiv \hat{k}_r - k_r$ .

Dada esta função de Lyapunov, é possível demonstrar que

$$\dot{V} = 2(a_{ref} - k_e)e^2 \leq 0. \quad (4.22)$$

#### 4.3.1.1 Norma $\ell_\infty$ do erro - $\|e\|_{\ell_\infty}^2$

Dado a Equação (4.22), tem-se  $V(e(t), \Delta k_x(t), \Delta k_r(t)) \leq V(e(0), \Delta k_x(0), \Delta k_r(0)) < \infty$ .

$$e^2 + |b| \left[ \frac{\Delta k_x^2}{\gamma_x} + \frac{\Delta k_r^2}{\gamma_r} \right] \leq V(0) \quad (4.23)$$

Como  $|b| \left[ \frac{\Delta k_x^2}{\gamma_x} + \frac{\Delta k_r^2}{\gamma_r} \right] \geq 0$ , pode-se escrever (GIBSON, 2014)

$$\|e\|_{\ell_\infty}^2 \leq V(0) \quad (4.24)$$

#### 4.3.1.2 Norma $\ell_2$ do erro - $\|e\|_{\ell_2}^2$

Da definição de integral, pode-se escrever

$$- \int_0^t \dot{V} d\tau = V(0) - V(t) \leq V(0). \quad (4.25)$$

Considerando-se a Equação (4.22), tem-se (GIBSON, 2014):

$$- \int_0^t 2(a_{ref} - k_e)e^2 d\tau \leq V(0) \quad (4.26)$$

$$2|a_{ref} - k_e| \int_0^t e^2 d\tau \leq V(0) \quad (4.27)$$

$$\|e\|_{\ell_2}^2 \leq \frac{V(0)}{2|a_{ref} - k_e|} \quad (4.28)$$

#### 4.3.1.3 Norma $\ell_\infty$ do estado do modelo de referência - $\|\Delta x_m\|_{\ell_\infty}$

A solução da Equação (4.16) é:

$$x_m(t) = \underbrace{e^{a_{ref}t}x_m(0) + \int_0^t e^{a_{ref}(t-\tau)}r(\tau)d\tau}_{x_m^*(t)} + k_e \int_0^t e^{a_{ref}(t-\tau)}e(\tau)d\tau \quad (4.29)$$

Seja  $\dot{x}_m^* = a_{ref}x_m^* + b_{ref}r$  o modelo de referência não realimentado ( $k_e = 0$ ), pode-se escrever a diferença na resposta dos dois sistemas como:

$$\Delta x_m \equiv x_m(t) - x_m^*(t) = k_e \int_0^t e^{a_{ref}(t-\tau)}e(\tau)d\tau \quad (4.30)$$

$$(\Delta x_m)^2 = k_e^2 \left[ \int_0^t e^{a_{ref}(t-\tau)}e(\tau)d\tau \right]^2 \quad (4.31)$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$\|\Delta x_m\|_{\ell_\infty}^2 \leq k_e^2 \int_0^t \|e^{a_{ref}(t-\tau)}\|_{\ell_\infty}^2 d\tau \int_0^t \|e(\tau)\|_{\ell_\infty}^2 d\tau \quad (4.32)$$

$$|\Delta x_m|^2 \leq k_e^2 \frac{1}{|2a_{ref}|} \|e\|_{\ell_2}^2 \quad (4.33)$$

Pode-se então tomar este valor como um limite superior para  $\Delta x_m$ . Utilizando a norma  $\ell_2$  do erro dada pela Equação (4.28), tem-se:

$$\|\Delta x_m\|_{\ell_\infty} \leq \frac{k_e}{\sqrt{|2a_{ref}|}} \sqrt{\frac{V(0)}{2|a_{ref} - k_e|}} \quad (4.34)$$

Considerando que as normas  $\ell_p$ , com  $p > 0$ , obedecem a desigualdade triangular, tem-se  $\|\Delta x_m\|_{\ell_\infty} \leq \|x_m\|_{\ell_\infty} - \|x_m^*\|_{\ell_\infty}$ . Assim, (GIBSON, 2014)

$$\|x_m\|_{\ell_\infty} \leq \|x_m^*\|_{\ell_\infty} + \frac{k_e}{\sqrt{|2a_{ref}|}} \sqrt{\frac{V(0)}{2|a_{ref} - k_e|}} \quad (4.35)$$

#### 4.3.1.4 Normas $\ell_2$ das derivadas dos parâmetros - $\|\dot{\hat{k}}_r\|_{\ell_2}$ , $\|\dot{\hat{k}}_x\|_{\ell_2}$

Para o ganho  $k_r$ , elevando a Equação (4.19b) ao quadrado e integrando os dois lados, temos:

$$\underbrace{\int_0^t \dot{\hat{k}}_r^2 d\tau}_{\equiv \|\dot{\hat{k}}_r\|_{\ell_2}^2 \text{ para } t \rightarrow \infty} = \int_0^t \gamma_r^2 e^2 r^2 d\tau \quad (4.36)$$

$$\|\dot{\hat{k}}_r\|_{\ell_2}^2 \leq \gamma_r^2 \|r\|_{\ell_\infty}^2 \underbrace{\int_0^t e^2 d\tau}_{\equiv \|e\|_{\ell_2}^2 \text{ para } t \rightarrow \infty} \quad (4.37)$$

$$\|\dot{\hat{k}}_r\|_{\ell_2}^2 \leq \gamma_r^2 \|r\|_{\ell_\infty}^2 \frac{V(0)}{2|a_{ref} - k_e|} \quad (4.38)$$

Observa-se que aqui, como  $k_e > 0$  e  $a_{ref} < 0$  para uma mesma condição inicial, o modelo realimentado apresenta um menor limitante para a norma  $\ell_2$  e, portanto, menor energia na derivada do parâmetro  $\hat{k}_r$ , indicando um possível melhor comportamento em frequências durante o transitório.

Para o ganho  $k_x$ , temos

$$\underbrace{\int_0^t \dot{\hat{k}}_x^2 d\tau}_{\equiv \|\dot{\hat{k}}_x\|_{\ell_2}^2 \text{ para } t \rightarrow \infty} = \int_0^t \gamma_x^2 e^2 x^2 d\tau \quad (4.39)$$

Tomando-se o supremo do estado  $x$ , temos

$$\|\dot{\hat{k}}_x\|_{\ell_2}^2 \leq \gamma_x^2 \|x\|_{\ell_\infty}^2 \|e\|_{\ell_2}^2 \quad (4.40)$$

Como

$$\|x\|_{\ell_\infty} \leq \|e\|_{\ell_\infty} + \|x_m\|_{\ell_\infty} \quad (4.41)$$

$$\|x\|_{\ell_\infty} \leq \sqrt{V(0)} + \|x_{ref}^*\|_{\ell_\infty} + \frac{k_e}{\sqrt{|2a_{ref}|}} \sqrt{\frac{V(0)}{2|a_{ref} - k_e|}} \quad (4.42)$$

Temos

$$\|\dot{\hat{k}}_x\|_{\ell_2}^2 \leq \frac{\gamma_x^2 V(0)}{2|a_{ref} - k_e|} \left[ \|x_m^*\| + \sqrt{V(0)} \left( 1 + \frac{|k_e|}{\sqrt{4|a_{ref}||a_{ref} - k_e|}} \right) \right]^2 \quad (4.43)$$

Ao contrário do que acontece com a derivada do parâmetro  $k_r$ , a constante  $k_e$  aparece tanto no numerador quanto no denominador na fração dentro do parêntese, de maneira que a análise de sua influência não é trivial.

Como ilustração, calculam-se os limites para o limite superior da norma  $\ell_2$  nas condições em que  $k_e \rightarrow 0$  e  $k_e \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{k_e \rightarrow 0} \frac{\gamma_x^2 V(0)}{2|a_{ref} - k_e|} \left[ \|x_m^*\| + \sqrt{V(0)} \left( 1 + \frac{|k_e|}{\sqrt{4|a_{ref}||a_{ref} - k_e|}} \right) \right]^2 = \frac{\gamma_x V(0) (\sqrt{V(0)} + \|x_m^*\|)^2}{2|a_{ref}|} \quad (4.44)$$

$$\lim_{k_e \rightarrow \infty} \frac{\gamma_x^2 V(0)}{2|a_{ref} - k_e|} \left[ \|x_m^*\| + \sqrt{V(0)} \left( 1 + \frac{|k_e|}{\sqrt{4|a_{ref}||a_{ref} - k_e|}} \right) \right]^2 = \frac{\gamma_x V(0)^2}{8|a_{ref}|} \quad (4.45)$$

Este resultado é diferente daquele apresentado por [Gibson \(2014\)](#) e reproduzido



na Equação (4.46), mas permite considerações similares.

$$\|\dot{k}_x\|_{\ell_2}^2 \leq 4\gamma_x^2 \frac{V(0)\|x_m^*(t)\|_{\ell_\infty}^2}{|a_{ref} + k_e|} + 4\gamma^2 \frac{V^2(0)}{|a_{ref} + k_e|} + 2\gamma^2 \frac{|k_e|^2}{|a_{ref}|} \frac{V(0)^2}{|a_{ref} + k_e|^2} \quad (4.46)$$

#### 4.3.1.5 Tempo de transiente

Gibson (2014) calcula um limitante exponencial para o erro ao longo do tempo partindo da equação de Lyapunov e o lema de Gronwall-Bellman. Este trabalho sugere uma abordagem distinta, partindo da solução da equação diferencial do erro, visando obter uma evolução da trajetória do erro ao longo do tempo.

A dinâmica do erro é dada por

$$\dot{e} = (a_{ref} - k_e)e + \underbrace{b(\Delta k_x x + \Delta k_r r)}_{\equiv \psi(t)}. \quad (4.47)$$

Como todos os sinais no sistema em malha fechada são limitados para uma referência limitada, pode-se dizer que existe uma constante estritamente positiva  $0 < \psi_{max} < \infty$  tal que  $|\psi(t)| \leq \psi_{max}$  para qualquer instante de tempo.

Partindo de uma condição inicial  $e(0) = e_0$ , o erro ao longo do tempo é dado por:

$$e(t) = e^{(a_{ref}-k_e)t} e_0 + \int_0^t e^{(a_{ref}-k_e)(t-\tau)} \psi(\tau) d\tau \quad (4.48)$$

Como a integral é uma integral de convolução do tipo  $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$  válida para  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ , pode-se usar a propriedade comutativa tal que

$$e(t) = e^{(a_{ref}-k_e)t} e_0 + \int_0^t e^{(a_{ref}-k_e)\tau} \psi(t-\tau) d\tau \quad (4.49)$$

Considerando-se o teorema de desigualdade de um triângulo e o valor absoluto de um produto, pode-se escrever que

$$e(t) \leq |e^{(a_{ref}-k_e)t}| |e_0| + \left| \int_0^t e^{(a_{ref}-k_e)(t-\tau)} \psi(\tau) d\tau \right| \quad (4.50)$$

Pode-se então calcular um limite superior para o erro, considerando-se que  $\psi(t - \tau) \leq \psi_{max}$  para todo tempo  $t$ .

$$|e(t)| \leq |e^{(a_{ref}-k_e)t}| |e_0| + \left| \psi_{max} \int_0^t e^{(a_{ref}-k_e)(\tau)} d\tau \right| \quad (4.51)$$

Como, por construção,  $a_{ref} < 0$  e  $k_e > 0$ ,  $a_{ref} - k_e < 0$ . Assim,

$$|e(t)| \leq |e^{-|a_{ref}-k_e|t}| |e_0| + \psi_{max} \left| \frac{1 - e^{-|a_{ref}-k_e|t}}{|a_{ref} - k_e|} \right| \quad (4.52)$$

Como  $|a - b| \leq |a| + |b|$  para  $a$  e  $b$  reais, pode-se escrever

$$|e(t)| \leq |e^{-|a_{ref}-k_e|t}| |e_0| + \frac{\psi_{max}}{|a_{ref} - k_e|} + \psi_{max} \left| \frac{e^{-|a_{ref}-k_e|t}}{|a_{ref} - k_e|} \right| \quad (4.53)$$

$$|e(t)| \leq \left( |e_0| + \frac{\psi_{max}}{|a_{ref} - k_e|} \right) |e^{-|a_{ref}-k_e|t}| + \frac{\psi_{max}}{|a_{ref} - k_e|} \quad (4.54)$$

Podemos portanto considerar os limites em  $t = 0$  e  $t \rightarrow \infty$ . Em  $t = 0$ , o limite superior será o erro inicial  $e_0 + 2 \frac{\psi_{max}}{|a_{ref}-k_e|}$ . No infinito, por sua vez, pode-se afirmar que o limite superior será o termo  $\frac{\psi_{max}}{|a_{ref}-k_e|}$ .

Este resultado apresenta uma métrica mais restritiva do que aquela demonstrada por Gibson (2014), uma vez que o termo  $\frac{\psi_{max}}{|a_{ref}-k_e|}$  aparece também no ganho do termo exponencial.

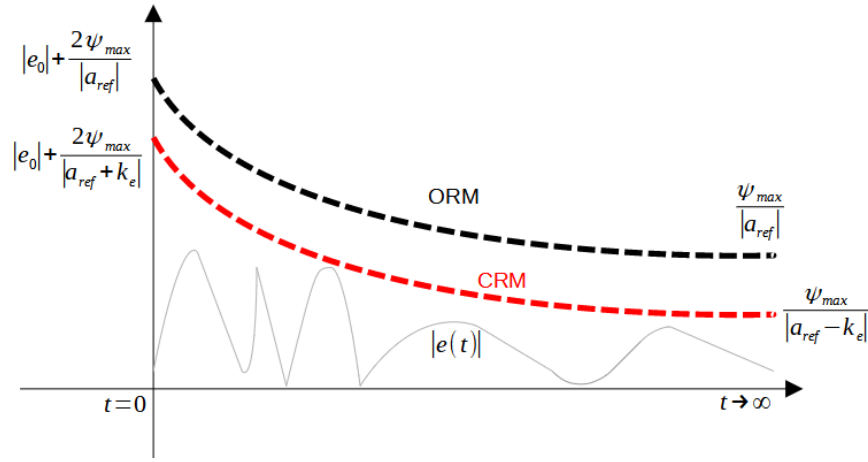
A Figura 4.6 apresenta uma ilustração qualitativa deste resultado.

Conclui-se, portanto, que o algoritmo com um modelo de referência em malha fechada tem um transitório mais rápido do que o algoritmo em malha aberta, dada uma mesma condição inicial.

### 4.3.2 Caso vetorial

O equacionamento do caso no qual a planta seja descrita por um modelo linear de ordem  $n$  com todos os estados acessíveis foi apresentado na Seção 4.2. As Equações (4.1), (4.10), (4.11) e (4.13) caracterizam o sistema controlado.

Figura 4.6 - Comparação qualitativa do transiente para o modelo de referência tradicional (ORM) e em malha fechada (CRM) para o caso escalar.



Fonte: Produção da autora.

Dada a função candidata de Lyapunov

$$V(t) = e^T P e + tr(\Lambda \Delta K_x^T \Gamma_x^{-1} \Delta K_x) + tr(\Lambda \Delta K_r^T \Gamma_r^{-1} \Delta K_r), \quad (4.55)$$

é possível calcular sua derivada temporal. Assim,

$$\dot{V}(t) = -e^T Q e \leq 0, \quad (4.56)$$

onde  $Q = Q^T > 0$  é solução de  $(A_{ref} + L)^T P + P(A_{ref} + L) + Q = 0$ , para  $P = P^T > 0$ .

#### 4.3.2.1 Norma $\ell_2$ do erro - $\|e\|_{\ell_2}$

Até o momento, nenhuma afirmação foi feita sobre a estrutura da matriz  $L$ . Para o cálculo da norma  $\ell_2$  do erro, escolhe-se  $(A_{ref} + L) = gI_{n \times n}$ , com  $g < 0$ . Esta escolha não é necessária para a prova de estabilidade, mas é sugerida por Gibson (2014) de maneira a simplificar a análise do transitório.

$$(gI_{n \times n})^T P + P(gI_{n \times n}) + Q = 0 \quad (4.57)$$

$$Q = 2|g|P \quad (4.58)$$

Tomando-se  $P = pI_{n \times n}$ , com  $p > 0$ , tem-se que

$$\dot{V}(t) = -2|g|pe^2 \leq 0, \quad (4.59)$$

$$-\int_0^t \dot{V}(t) \leq V(0), \quad (4.60)$$

$$\|e\|_{\ell_2}^2 \leq \frac{V(0)}{2p|g|} \quad (4.61)$$

#### 4.3.2.2 Limite para a função de Lyapunov V

Pode-se reescrever  $\dot{V}$  em função de V.

$$\dot{V}(t) = -2|g|e^T P e = -2|g|V + 2|g|[tr(\Lambda \Delta K_x^T \Gamma^{-1} \Delta K_x) + tr(\Lambda \Delta K_r^T \Gamma^{-1} \Delta K_r)] \quad (4.62)$$

Sejam  $\Delta K_{x_{max}}$  e  $\Delta K_{r_{max}}$  como os supremos dos valores permissíveis para  $\|\Delta K_x\|_F$  e  $\|\Delta K_r\|_F$  respectivamente, em que  $\|\cdot\|_F$  representa a norma de Frobenius para os respectivos vetores. Além disso, assume-se que um limitante superior seja conhecido a priori para  $\Lambda$ , tal que  $\bar{\lambda} = \max_i \lambda_t(\Lambda)$  como um limitante conhecido. Assim, tem-se

$$\dot{V}(t) \leq -2|g| \left[ V - \frac{\bar{\lambda}}{\gamma} (K_{x_{max}}^2 + K_{r_{max}}^2) \right] \quad (4.63)$$

Considerando-se o teorema de Gronwell-Bellman, chega-se à mesma expressão apresentada por [Gibson \(2014\)](#).

$$V(t) \leq \left[ V(0) - \frac{\bar{\lambda}}{\gamma} (K_{x_{max}}^2 + K_{r_{max}}^2) \right] e^{-2|g|t} + \frac{\bar{\lambda}}{\gamma} (K_{x_{max}}^2 + K_{r_{max}}^2) \quad (4.64)$$

#### 4.3.2.3 Tempo de transiente

Novamente, este trabalho opta por buscar um limite superior para o erro por meio da análise da resposta do erro no tempo dada sua equação diferencial.

A dinâmica do erro é dada por

$$\dot{e} = (A_{ref} + L)e + \underbrace{B\Lambda(\Delta K_x x + \Delta K_r r)}_{\equiv \Psi(t)}. \quad (4.65)$$

Partindo de uma condição inicial  $e(0) = e_0$ , o erro ao longo do tempo é dado por:

$$e(t) = e^{(A_{ref}+L)t}e_0 + \int_0^t e^{(A_{ref}+L)(t-\tau)}\Psi(\tau)d\tau \quad (4.66)$$

Como a integral é uma integral de convolução do tipo  $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$  válida para  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \Re$ , pode-se usar a propriedade comutativa tal que

$$e(t) = e^{(A_{ref}+L)t}e_0 + \int_0^t e^{(A_{ref}+L)\tau}\Psi(t-\tau)d\tau \quad (4.67)$$

Pode-se então calcular um limitante superior para o erro.

$$|e(t)| \leq \left| e^{(A_{ref}+L)t}e_0 + \int_0^t e^{(A_{ref}+L)\tau}\Psi(t-\tau)d\tau \right| \quad (4.68)$$

A análise desta expressão para o caso vetorial depende da matriz de transição de estados,  $e^{(A_{ref}+L)t}$ .

Por exemplo, se L for escolhida de maneira que  $(A_{ref} + L)$  seja uma matriz diagonal Hurwitz, com autovalores reais e distintos dados por  $\lambda_i \leq 0$  pode-se afirmar que, para cada elemento  $i$  do vetor erro, tem-se

$$|e_i(t)| \leq \left| e^{\lambda_i t} e_i(0) \right| + \left| \int_0^t e^{\lambda_i(\tau)} \psi_i(t-\tau) d\tau \right| \quad (4.69)$$

Como todos os sinais no sistema em malha fechada são limitados, pode-se dizer que existe uma constante estritamente positiva  $0 < \psi_{max} < \infty$  tal que  $|\psi_i(t-\tau)| \leq \psi_{max}$ .

$$|e_i(t)| \leq \left| e^{\lambda_i t} e_i(0) \right| + \psi_{max} \left| \frac{1 - e^{\lambda_i t}}{|\lambda_i|} \right| \quad (4.70)$$

Esta expressão é equivalente àquela encontrada para o caso escalar, e indica que a resposta do sistema será mais rápida quão mais afastado o autovalor escolhido esteja do zero.

#### 4.4 Estudos de simulação

Esta seção apresenta resultados ilustrativos do efeito da estrutura realimentada no modelo de referência para diferentes entradas.

Seja uma planta de primeira ordem, dada por

$$\dot{x}_p = x_p + 4u, \quad x_p(0) = 0. \quad (4.71)$$

Consideram-se, portanto, dois modelos de referência. O modelo de dinâmica  $\dot{x}_{m0}$  será o modelo de referência tradicional, enquanto o modelo de dinâmica  $\dot{x}_m$  é o modelo de referência realimentado. Ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{m0} &= -4x_{m0} + 4r & x_{m0}(0) &= 0 \\ \dot{x}_m &= -4x_m + 4r + k_e(x_p - x_m) & x_m(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Para os dois casos, toma-se um controlador do tipo *feed-forward* dado por

$$u = \hat{k}_x x_p + \hat{k}_r r, \quad (4.73)$$

e leis de adaptação de parâmetros dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{k}}_x &= -\gamma e x_p & \hat{k}_x(0) &= 0 \\ \dot{\hat{k}}_r &= -\gamma e r & \hat{k}_r(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.74)$$

A fim de simular o regime contínuo, considerou-se um integrador de Runge-Kutta de quarta ordem de passo fixo, com frequência de amostragem igual a 1000 Hz.

##### 4.4.1 $r(t) = 1$

Inicialmente, consideremos uma entrada do tipo degrau.

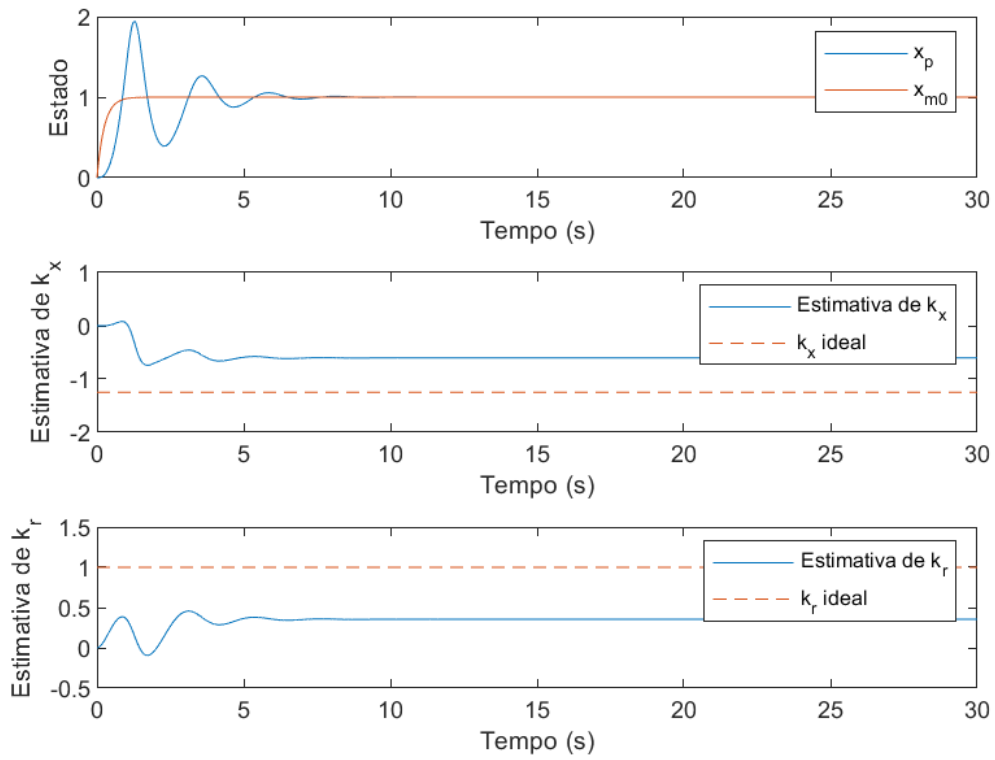
As Figuras 4.7, 4.8 e 4.9 representam a resposta de um sistema ORM com diferentes valores de  $\gamma$  ( $\gamma = 1$ ,  $\gamma = 10$  e  $\gamma = 100$ , respectivamente).

Observa-se que, a medida que  $\gamma$  aumenta, o controle mostra-se mais rápido. Entretanto, o aumento de  $\gamma$  também aumenta visivelmente as oscilações de alta frequência na estimativa dos parâmetros.

Além disso, dada a baixa riqueza de um sinal degrau, o erro na estimativa dos

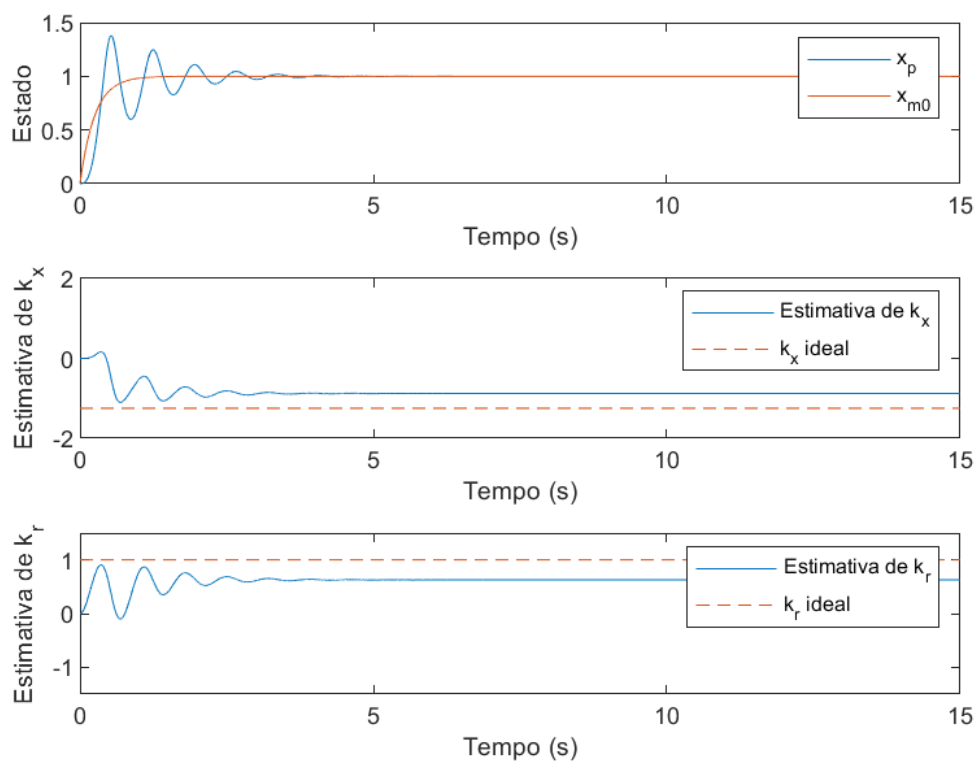
parâmetros não converge a zero, mesmo com o erro nulo.

Figura 4.7 - Resposta de um sistema ORM, com  $\gamma = 1$  e entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.

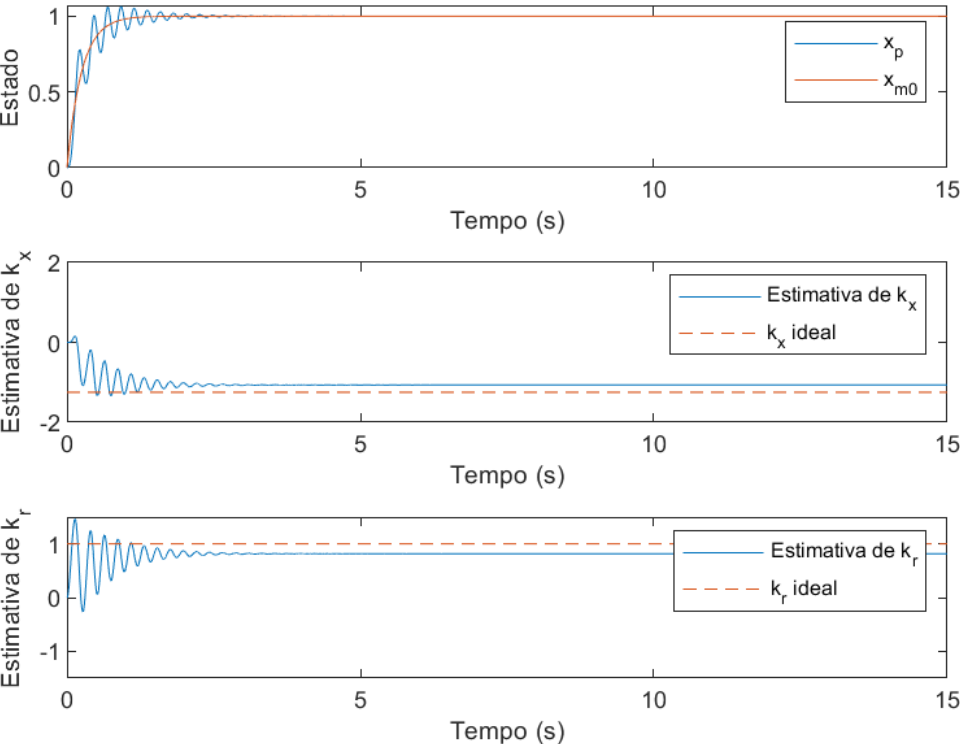
Figura 4.8 - Resposta de um sistema ORM, com  $\gamma = 10$  e entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.



Figura 4.9 - Resposta de um sistema ORM, com  $\gamma = 100$  e entrada degrau.



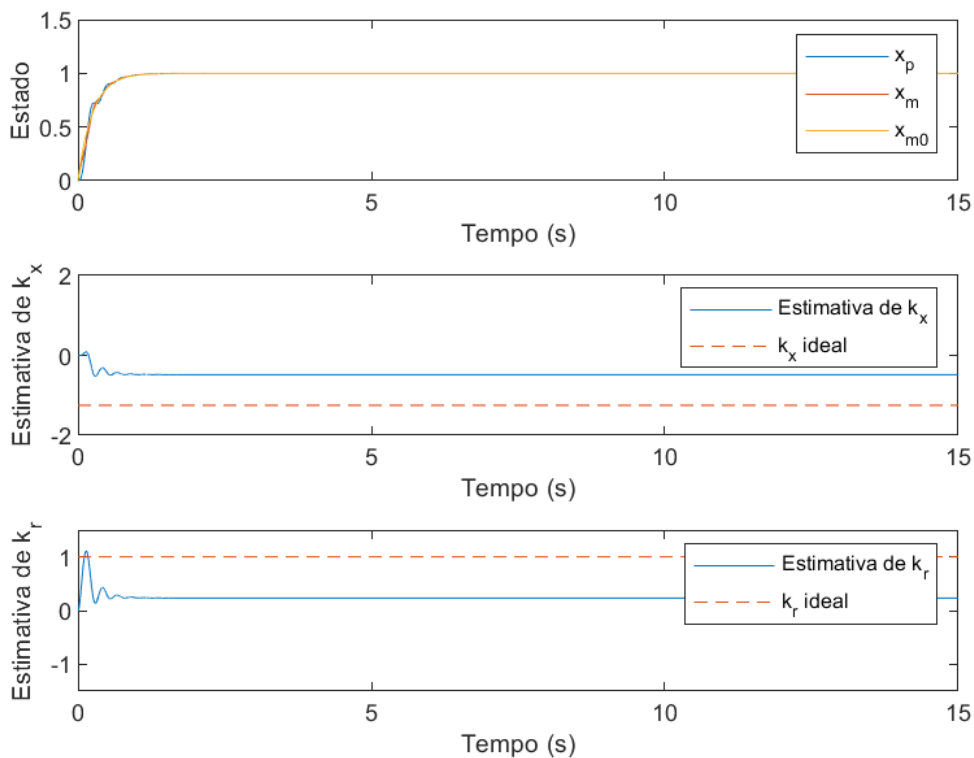
Fonte: Produção da autora.

A seguir, tomando-se  $\gamma = 100$ , apresenta-se as respostas de um sistema com modelo de referência em malha fechada (CRM). As Figuras 4.10, 4.11 e 4.12 apresentam os modelos com  $k_e = 10$ ,  $k_e = 100$  e  $k_e = 1000$ , respectivamente.

Observa-se que a inclusão do ganho  $k_e$  reduz consideravelmente as altas frequências aparentes no transitório. Entretanto, como pode ser visto especialmente no caso  $k_e = 1000$ , existe uma relação de troca entre o ganho de realimentação e a velocidade de resposta da planta.

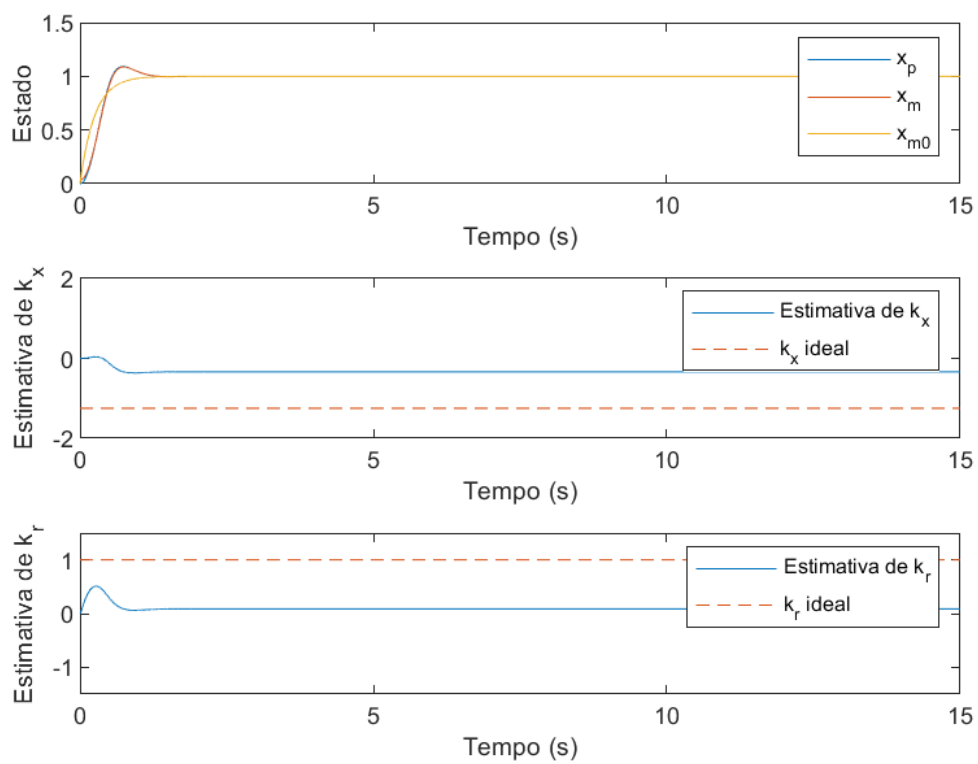
Apesar do erro convergir rapidamente para zero, a distorção provocada no modelo de referência faz com que o estado demore a convergir para o valor de referência, indicando uma relação de custo-benefício clara para este modelo.

Figura 4.10 - Resposta de um sistema CRM, com  $k_e = 10$  e entrada degrau.



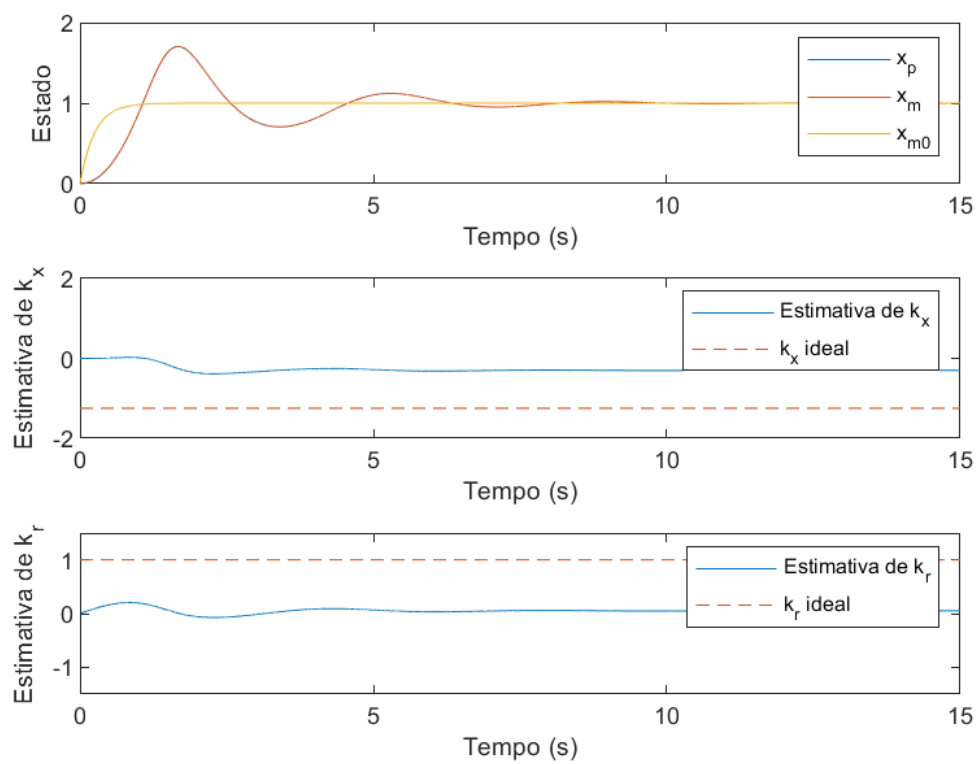
Fonte: Produção da autora.

Figura 4.11 - Resposta de um sistema CRM, com  $k_e = 100$  e entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.

Figura 4.12 - Resposta de um sistema CRM, com  $k_e = 1000$  e entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.

#### 4.4.2 $r(t) = \sin(2t)$

Como visto na Seção 4.4.1, mesmo com o erro tendendo a zero, não é possível afirmar que os parâmetros do controlador tenderão a seu valor de matching.

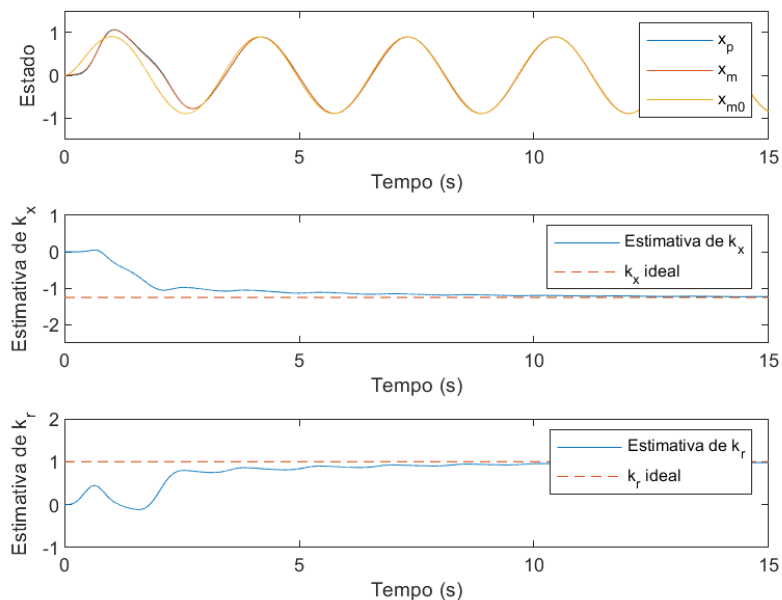
De fato, sabe-se que uma condição suficiente para que isto ocorra é se o vetor  $\omega = [x \ r]^T$  atender as condições de persistência de excitação, ou seja, se para um  $\alpha_0 > 0$  existirem constantes  $\alpha_1, T_0 > 0$  tal que (IOANNOU; SUN, 2012)

$$\alpha_1 \geq \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau \geq \alpha_0 I, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.75)$$

De fato, para um sistema linear, é possível demonstrar que a convergência de  $2m$  parâmetros pode ser garantida com um sinal de entrada gerado pela soma de  $m$  senoides (NARENDRA; ANNASWAMY, 2005).

A Figura 4.13 ilustra este fenômeno, apresentando a resposta da mesma planta a uma entrada senoidal dada por  $r(t) = \sin(2t)$ .

Figura 4.13 - Resposta de um sistema CRM, com  $k_e = 100$  e entrada senoidal.



Fonte: Produção da autora.



## 5 CONTROLE ADAPTATIVO DISCRETO POR MODELO DE REFERÊNCIA

O capítulo anterior apresentou a análise do controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada no sistema contínuo. Na realidade, porém, como ressalta Ogata (1995), apesar da planta a ser controlada ser um sistema contínuo, o uso de controladores digitais exige a presença de conversores no sistema real.

Além disso, em função de problemas com a realização física dos sistemas no regime discreto, não é possível garantir que as estruturas comprovadamente estáveis no regime contínuo são válidas no regime discreto, exigindo modificações na estrutura de controle de maneira a garantir a estabilidade do sistema. (DOGAN et al., 2020)

Assim sendo, este capítulo desenvolve a prova de estabilidade para um sistema de controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada, demonstrando a viabilidade do uso deste tipo de estrutura de controle também no regime discreto.

Observa-se que o objetivo deste capítulo não é apresentar uma comparação direta com o modelo contínuo apresentado no Capítulo 4, mas sim verificar se, dada uma estrutura adaptativa discreta, a modificação do modelo de referência em malha fechada traria algum benefício. Assim, a planta apresentada aqui não é equivalente à planta do caso discreto, sendo esta escolhida a fim de permitir a comparação com o trabalho com modelo de referência em malha aberta feito por Carrijo (2008).

Seja uma planta linear de ordem  $n$  descrita pelo espaço de estados

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}_p x(t) + \mathbf{B}_p u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T x(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado totalmente mensurável,  $u(t)$  é o sinal de controle e  $\mathbf{A}_p$  e  $\mathbf{B}_p$  são matrizes de dimensões apropriadas. Considera-se que a matriz  $\mathbf{c}^T$  é conhecida.

Esta planta pode ser descrita como

$$y(s) = G(s)u(s) = \frac{Z(s)}{P(s)}u(s) = k_p \frac{(s + z_1) \dots (s + z_m)}{(s + p_1) \dots (s + p_n)}u(s) \quad (5.2)$$

onde  $k_p$  é o ganho escalar de alta frequência, e  $Z(s)$  e  $P(s)$  são polinômios mônicos, tal que  $m < n$ .

O sinal  $u(t)$  será, na realidade, gerado por um controlador digital e aplicado na planta por meio de um conversor modelado como um *Zero-Order Hold* com um tempo de amostragem  $T_s$  (OGATA, 1995). Assim, a planta terá uma representação no espaço discreto dada por

$$\begin{aligned} x_p(k+1) &= \mathbf{A}x_p(k) + \mathbf{B}u(k) \\ y_p(k) &= \mathbf{c}^T x_p(k) \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde  $\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_p T_s}$  e  $\mathbf{B} = [\int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_p \alpha} d\alpha] \mathbf{B}_p$  (CHEN, 2006).

As seguintes hipóteses são feitas:

**Hipótese 5.1.** A tripla  $(\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p, \mathbf{c})$  é estabilizável e detectável.

**Hipótese 5.2.**  $Z(s)$  é um polinômio Hurwitz.

**Hipótese 5.3.** O grau  $m$  de  $Z(s)$  é conhecido.

**Hipótese 5.4.** O sinal do ganho  $k_p$  é conhecido.

## 5.1 Controle adaptativo por modelo de referência em malha aberta - ORM

A modelagem do sistema adaptativo com modelo de referência em malha aberta segue aquele desenvolvido por Carrijo (2008), desconsiderando-se o congelamento de parâmetros apresentado naquele trabalho.

No caso do modelo de referência tradicional, tem-se

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= \mathbf{A}_m x_m(k) + \mathbf{B}_m r(k) \\ y_m(k) &= \mathbf{c}^T x_m(k), \end{aligned} \quad (5.4)$$

em que o vetor  $\mathbf{c}^T$  é o mesmo da planta, considerado conhecido.

Assim, escolhe-se um modelo de referência



$$y_m(k) = \mathbf{G}_m(z)r(k), \quad (5.5)$$

onde  $G_m(s) = k_m(1/P_m(s))$ , e  $G_m(z)$  é sua representação discreta.

A lei de controle considerada é uma lei de controle por realimentação de estados, descrita por

$$u(k) = \hat{K}_x^T x_p(k) + \hat{K}_r(k)r(k) \quad (5.6)$$

onde  $\hat{K}_r(k) \in \mathbb{R}$  e  $\hat{K}_x(k) \in \mathbb{R}^n$  são as estimativas dos ganhos do controlador, que assumem os valores  $K_r$  e  $K_x$  na condição de matching.

A lei de adaptação dos parâmetros é obtida utilizando-se o erro aumentado (NARENDRA; ANNASWAMY, 2005), tal que

$$\begin{aligned} \Delta K(k+1) &= \Delta K(k) - \text{sgn}(k_p)\gamma \frac{\omega_f(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \\ \Delta \varphi(k+1) &= \Delta \varphi(k) - \sigma \frac{e_2(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \\ G_m(z) &\triangleq \mathbf{c}^T [zI - (\mathbf{A}_m)]^{-1} \mathbf{B}_m \\ \varepsilon_1(k) &= e_1(k) + \hat{\varphi}(k)e_2(k) \\ e_2(k) &= \hat{K}(k)^T G_m(z)\omega(k) - G_m(z)\hat{K}(k)^T \omega(k). \end{aligned} \quad (5.7)$$

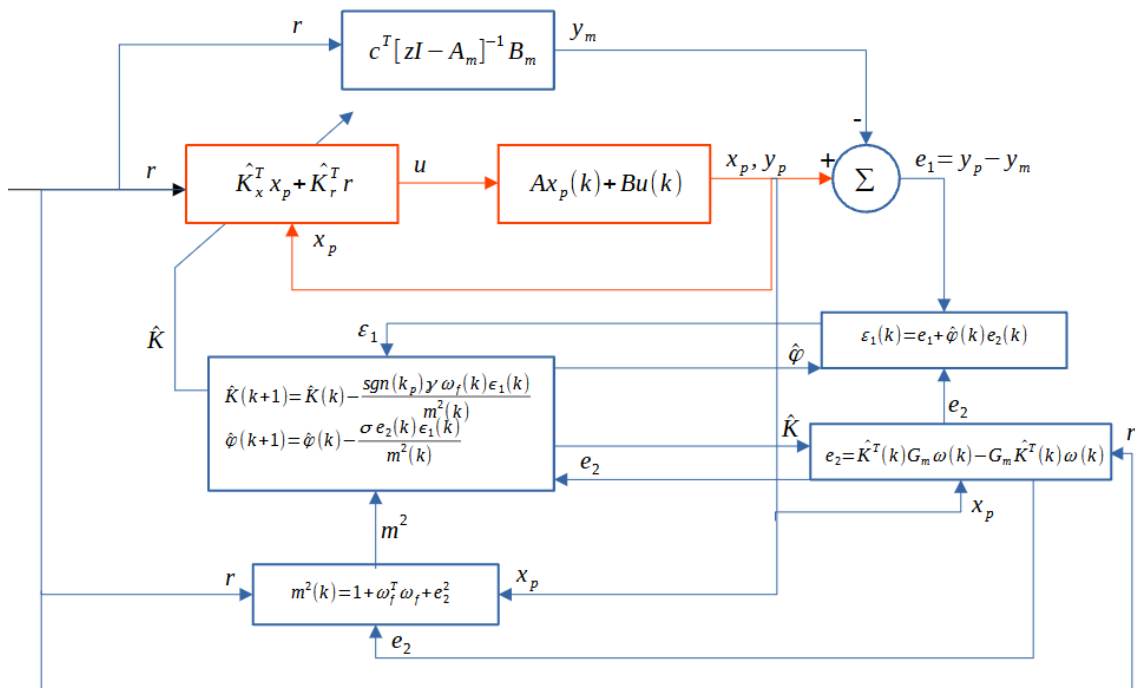
onde  $\omega_f(k) = G_m(z) [x_p(k) \ r(k)]^T$ ,  $\Delta K(k) = [\Delta K_x^T(k) \ \Delta K_r^T(k)]^T$  e  $m(k)^2 = 1 + \omega_f^T(k)\omega_f(k) + e_2^2$  é o fator de normalização. As variáveis  $e_1$ ,  $\varepsilon_1$  e  $e_2$  são, respectivamente, o erro de saída, o erro auxiliar e o erro aumentado, definidos em seções posteriores deste documento.

A Figura 5.1 apresenta o diagrama de implementação desta lei de controle, já considerando uma planta discreta. A estabilidade deste sistema é demonstrada em Carrijo e Leite Filho (2010).

## 5.2 Controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada - CRM

No caso do modelo de referência com realimentação, chamado também de modelo de referência de malha fechada, em sua representação discreta, será dado

Figura 5.1 - Diagrama esquemático para controle adaptativo por discreto modelo de referência tradicional (ORM).



Fonte: Produção da autora.

por

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= \mathbf{A}_m x_m(k) + \mathbf{B}_m r(k) - L(y_p(k) - y_m(k)) \\ y_m(k) &= \mathbf{c}^T x_m(k), \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde  $L$  é um ganho de realimentação de Luenberger e a matriz  $\mathbf{c}^T$  é a mesma da planta. Observa-se que os estados no modelo de referência também são considerados totalmente mensuráveis. Além disso, observa-se que dada a planta analisada no caso discreto, trabalha-se com o erro de saída, e não mais o erro do estado como ocorreu no caso contínuo.

Este sistema pode ser escrito como

$$y_m(k) = \mathbf{G}_m r(k) + \mathbf{G}_L(k)(y_p(k) - y_m(k)), \quad (5.9)$$

em que  $\mathbf{G}_L = \mathbf{c}^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_m)^{-1}L$ .

### 5.2.1 Lei de controle

Novamente, a lei de controle considerada é uma lei de controle por realimentação de estados, descrita por

$$u(k) = \hat{K}_x^T x_p(k) + \hat{K}_r(k)r(k) \quad (5.10)$$

onde  $\hat{K}_r(k) \in \mathbb{R}$  e  $\hat{K}_x(k) \in \mathbb{R}^n$  são as estimativas dos ganhos do controlador, que assumem os valores  $K_r$  e  $K_x$  na condição de matching.

Define-se a condição de *matching* como aquela na qual  $\mathbf{A}_m = \mathbf{A} + \mathbf{B}K_x^T$  e  $\mathbf{B}_m = \mathbf{B}K_r$ , da mesma maneira que o observado no caso sem realimentação.

Como no trabalho de Carrijo (2008), opta-se por escolher os pólos do sistema controlado tal que tal que  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p K_x^T) = K_r Z(s) P_m(s)$ , com  $K_r = k_m/k_p$ . Assim, os pólos da planta serão modificados por  $K_x$  para chegar aos zeros do modelo de referência, enquanto os zeros de  $Z(s)$  são cancelados adaptativamente. Segundo o autor, esta escolha garante que as raízes do  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p K_x^T)$  sejam Hurwitz e que o cancelamento de pólos e zeros seja viável.

Neste desenvolvimento, opta-se por manter a mesma filosofia para a escolha dos pólos, de maneira a comparar a estrutura obtida com aquela do modelo de referência em malha aberta.

Na condição de matching, tem-se um modelo de referência equivalente ao modelo de referência em malha aberta, ou seja,

$$\mathbf{G}_m = k_m \frac{1}{P_m}. \quad (5.11)$$

### 5.2.2 Equação do erro de rastreo

Com a Equação (5.10), pode-se reescrever a equação da planta como sendo

$$x_p(k+1) = \mathbf{A}x_p(k) + \mathbf{B}[\hat{K}_x^T x_p(k) + \hat{K}_r(k)r(k)]. \quad (5.12)$$

Tomando-se o erro de estimativa dos parâmetros como sendo  $\Delta K_x = \hat{K}_x - K_x$  e  $\Delta K_r = \hat{K}_r - K_r$ , pode-se escrever o erro de estado  $e = x_p - x_m$  como:

$$\begin{aligned}
 e(k+1) &= x_p(k+1) - x_m(k+1) \\
 x_p(k+1) &= \mathbf{A}x_p(k) + \mathbf{B}[(K_x + \Delta K_x(k))^T x_p(k) + (K_r + \Delta K_r(k))r(k)] \\
 x_m(k+1) &= \mathbf{A}_m x_m(k) + \mathbf{B}_m r(k) + L\mathbf{c}^T(x_p(k) - x_m(k))
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Considerando a condição de matching, tem-se que o erro de estado é dado por

$$e(k+1) = (\mathbf{A}_m + L\mathbf{c}^T)e(k) + \mathbf{B}\Delta K(k)^T \omega(k) \tag{5.14}$$

onde  $\Delta K^T(k) = [\Delta K_x^T(k) \quad \Delta K_r^T(k)]$  e  $\omega^T(k) = [x_p^T(k) \quad r(k)]$ .

Seja o erro de rastreo  $e_1(k) = y_p(k) - y_m(k) = \mathbf{c}^T e$ , pode-se considerar o seguinte sistema dinâmico

$$\begin{aligned}
 e(k+1) &= (\mathbf{A}_m + L\mathbf{c}^T)e(k) + \mathbf{B}\Delta K^T \omega(k) \\
 e_1(k) &= \mathbf{c}^T e
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Este sistema tem como solução

$$e_1(k) = \mathbf{c}^T [zI - (\mathbf{A}_m + L\mathbf{c}^T)]^{-1} \mathbf{B}\Delta K(k)^T \omega(k) \tag{5.16}$$

Definindo-se então a função de transferência expandida  $G_{m_L}(z) \triangleq \mathbf{c}^T [zI - (\mathbf{A}_m + L\mathbf{c}^T)]^{-1} \mathbf{B}_m$ , e considerando que as hipóteses 5.1 e 5.2 fazem com que o matching seja viável sem conhecimento a priori dos pólos e zeros da planta (CARRIJO; LEITE FILHO, 2010), pode-se escrever  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_m k_p / k_m$ . Logo, o erro de rastreo será

$$e_1(k) = \frac{k_p}{k_m} G_{m_L}(z) \Delta K(k)^T \omega(k). \tag{5.17}$$

### 5.2.3 Equação do erro do mecanismo de adaptação

O erro do mecanismo de adaptação é aquele do erro aumentado, apresentado por Narendra e Annaswamy (2005). Inicialmente, calcula-se o erro auxiliar  $e_2$ , definido como

$$e_2 \triangleq \hat{K}(k)^T G_{m_L}(z) \omega(k) - G_{m_L}(z) \hat{K}(k)^T \omega(k). \quad (5.18)$$

Observa-se que esta expressão traz uma mistura de notações no tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência, o que é comum na literatura de controle adaptativo (NARENDRA; ANNASWAMY, 1987; SLOTINE; COETSEE, 1986).

Segundo Narendra e Annaswamy (2005), o erro  $e_2$  tende a zero exponencialmente quando o vetor  $\hat{K}$  assume o valor de matching  $K$  desde que  $G_{m_L}(z)$  seja uma função de transferência assintoticamente estável.

Substituindo-se  $\hat{K}(k) = K + \Delta K(k)$ , tem-se

$$e_2(k) = \underbrace{K^T G_{m_L}(z) \omega(k) - G_{m_L}(z) K^T \omega(k)}_{\beta(k)} + \Delta K(k)^T G_{m_L}(z) \omega(k) - G_{m_L}(z) \Delta K(k)^T \omega(k). \quad (5.19)$$

Uma vez que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta(k) = 0$ , pode-se ignorar o termo  $\beta(k)$  e considerar o erro auxiliar como

$$e_2(k) = \Delta K(k)^T G_{m_L}(z) \omega(k) - G_{m_L}(z) \Delta K(k)^T \omega(k). \quad (5.20)$$

Finalmente, define-se o erro aumentado  $\varepsilon_1$  como sendo uma combinação do erro de rastreamento com o erro auxiliar.

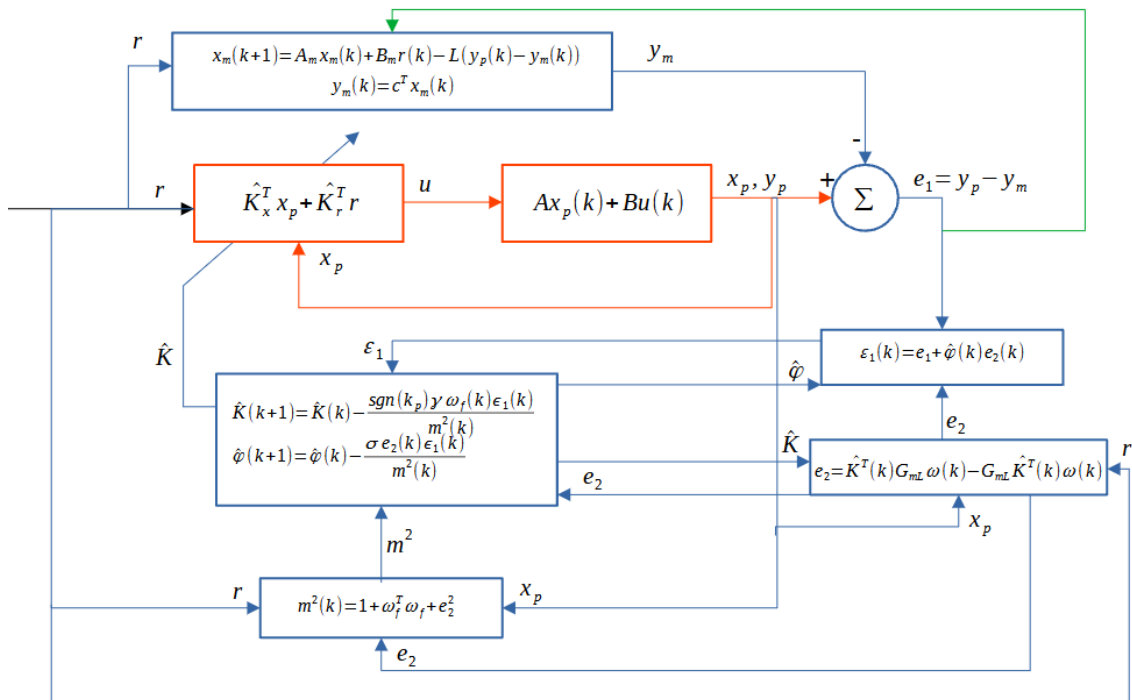
$$\begin{aligned} \varepsilon_1(k) &= e_1(k) + \hat{\varphi}(k) e_2(k) \\ &= \frac{k_p}{k_m} G_{m_L}(z) \Delta K(k)^T \omega(k) + \hat{\varphi}(k) [\Delta K(k)^T G_{m_L}(z) \omega(k) - G_{m_L}(z) \Delta K(k)^T \omega(k)] \end{aligned} \quad (5.21)$$

em que  $\hat{\varphi}(k) = k_p/k_m + \Delta\varphi(k)$ . Logo

$$\varepsilon_1(k) = \frac{k_p}{k_m} \Delta K(k)^T G_{mL}(z) \omega(k) + \Delta\varphi(k) e_2(k) \quad (5.22)$$

A Figura 5.2 apresenta o diagrama de implementação desta lei de controle, já considerando uma planta discreta.

Figura 5.2 - Diagrama esquemático para controle adaptativo por discreto modelo de referência em malha fechada (CRM).



Fonte: Produção da autora.

### 5.3 Análise de estabilidade

Seja uma função candidata de Lyapunov dada por

$$V_k(\Delta K, \Delta\varphi) = \gamma^{-1} \frac{|k_p|}{k_m} \Delta K^T(k) \Delta K(k) + \sigma^{-1} \Delta\varphi^2(k) \quad (5.23)$$

com  $\gamma, \sigma > 0$ .

A equação de diferenças de Lyapunov será

$$\Delta V(\Delta K, \Delta \varphi) = \gamma^{-1} \frac{|k_p|}{k_m} [\Delta K^T(k+1)\Delta K(k+1) - \Delta K^T(k)\Delta K(k)] + \sigma^{-1} [\Delta \varphi^2(k+1) - \Delta \varphi^2(k)] \quad (5.24)$$

Considerando-se a lei de adaptação baseada naquela proposta por Carrijo (2008), tem-se

$$\begin{aligned} \Delta K(k+1) &= \Delta K(k) - \text{sgn}(k_p) \gamma \frac{\omega_f(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \\ \Delta \varphi(k+1) &= \Delta \varphi(k) - \sigma \frac{e_2(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \end{aligned} \quad (5.25)$$

onde  $\omega_f(k) = G_{m_L}(z)\omega(k)$  e  $m(k)^2 = 1 + \omega_f^T(k)\omega_f(k) + e_2^2$  é o fator de normalização.

Assim

$$\begin{aligned} \Delta V(\Delta K, \Delta \varphi) &= \gamma^{-1} \frac{|k_p|}{k_m} \left\{ \left[ \Delta K(k) - \text{sgn}(k_p) \gamma \frac{\omega_f(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \right]^T \left[ \Delta K(k) - \text{sgn}(k_p) \gamma \frac{\omega_f(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \right] \right\} \\ &\quad - \gamma^{-1} \frac{|k_p|}{k_m} \Delta K^T(k) \Delta K(k) + \sigma^{-1} \left[ \left( \Delta \varphi(k) - \sigma \frac{e_2(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \right)^2 - \Delta \varphi(k)^2 \right] \\ &= \gamma^{-1} \frac{|k_p|}{k_m} \left\{ -2 \text{sgn}(k_p) \gamma \Delta K^T(k) \frac{\omega_f(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2} + \gamma^2 \omega_f^T(k) \omega_f(k) \frac{\varepsilon_1(k)^2}{m(k)^4} \right\} \\ &\quad + \sigma^{-1} \left[ -2 \Delta \varphi(k) \sigma \frac{e_2(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2} + \sigma^2 \frac{e_2^2(k) \varepsilon_1^2(k)}{m(k)^4} \right] \\ &= -2 \frac{k_p}{k_m} \Delta K^T(k) \frac{\omega_f(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2} + \gamma \frac{|k_p|}{k_m} \omega_f^T(k) \omega_f(k) \frac{\varepsilon_1(k)^2}{m(k)^4} \\ &\quad - 2 \Delta \varphi(k) \frac{e_2(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2} + \sigma \frac{e_2^2(k) \varepsilon_1^2(k)}{m(k)^4} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Definindo-se  $k_{max}$  como o valor limite para o ganho de alta frequência  $k_p$ , tal que  $|k_p| < k_{max}$ , pode-se escolher o ganho de adaptação  $\gamma = k_m k_{max}^{-1}$  e  $\sigma = 1$ , de modo que

$$\Delta V(\Delta K, \Delta \varphi) \leq -2 \left[ \frac{k_p}{k_m} \Delta K^T(k) \frac{\omega_f(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2} + \Delta \varphi(k) \frac{e_2(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \right] + [\omega_f^T(k) \omega_f(k) + e_2(k)^2] \frac{\varepsilon_1(k)^2}{m(k)^4} \quad (5.27)$$

Pela definição do fator de normalização  $m(k)^2 = 1 + \omega_f^T(k) \omega_f(k) + e_2^2$ , pode-se afirmar que

$$\frac{\omega_f^T(k) \omega_f(k) + e_2^2}{1 + \omega_f^T(k) \omega_f(k) + e_2^2} < 1. \quad (5.28)$$

Logo,

$$\Delta V(\Delta K, \Delta \varphi) \leq -2 \left[ \frac{k_p}{k_m} \Delta K^T(k) \frac{\omega_f(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2} + \Delta \varphi(k) \frac{e_2(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \right] + \frac{\varepsilon_1(k)^2}{m(k)^2} \quad (5.29)$$

Como  $\varepsilon_1(k) = \frac{k_p}{k_m} \Delta K(k)^T \omega_f(k) + \Delta \varphi(k) e_2(k)$ ,

$$\Delta V(\Delta K, \Delta \varphi) \leq -\frac{\varepsilon_1(k)^2}{m(k)^2} \leq 0. \quad (5.30)$$

A função  $V_k(\Delta K, \Delta \varphi)$  é definida positiva e a inequação de diferenças (5.30) indica que  $\Delta V(\Delta K, \Delta \varphi)$  é semidefinida negativa. Assim, pode-se concluir que os erros paramétricos são limitados, ou seja  $\Delta K, \Delta \varphi \in \ell^\infty$ .

Além disso, pode-se afirmar que  $V_k(\Delta K, \Delta \varphi) \in \ell^\infty$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} V(k) = V_\infty$ . Logo, tem-se, segundo Balas (1995),

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_1(k)^2}{m(k)^2} \leq V(0) - V_\infty < \infty. \quad (5.31)$$

A Equação (5.31) implica que  $\varepsilon_1/m(k) \in \ell^2$  e, conseqüentemente,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_1(k)/m(k) = 0$ . Como  $m^2(k) > 0$ , pode-se concluir que  $\varepsilon(k) \in \ell^2$  e, conseqüentemente,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_1(k) = 0$  (IOANNOU; FIDAN, 2006; BALAS, 1995).

Considerando-se a lei de adaptação dos parâmetros apresentada na Equação (5.25), pode-se concluir que, se  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_1(k) = 0$ , em  $k \rightarrow \infty$ , a atualização dos



parâmetros é interrompida e eles se tornam constantes.

Não se pode afirmar que os erros paramétricos tendam a zero, mas a Equação (5.25) permite afirmar que, em  $k \rightarrow \infty$ ,  $\Delta K(k+1) - \Delta K(k) = 0$  e  $\Delta\varphi(k+1) - \Delta\varphi(k) = 0$ .

A fim de analisar o erro auxiliar  $e_2$ , pode-se utilizar o seguinte lema.

**Lema 1.** (*Lema de Swapping para Tempo Discreto (IOANNOU; FIDAN, 2006)*) Seja  $W(z) = G_{mL}(z) = \mathbf{c}^T [zI - (\mathbf{A}_m + L\mathbf{c}^T)]^{-1} \mathbf{B}_m$  uma função de transferência escalar racional própria estável com uma realização mínima  $(A_m, B_m, c, 0)$  e vetores  $\Delta K$  e  $\omega$ .

Então,

$$G_{mL}(z)[\bar{\Delta}K^T \omega]_k = \bar{\Delta}K^T G_{mL}(z)[\omega]_k - W_c(z)[(W_b(z)[\omega^T])\bar{\Delta}K]_k,$$

onde  $\bar{\Delta}K \equiv \Delta K(k+1) - \Delta K(k)$ ,  $W_c = \mathbf{c}^T [zI - (\mathbf{A}_m + L\mathbf{c}^T)]^{-1} \mathbf{e}$  e  $W_b(z) = z[zI - (\mathbf{A}_m + L\mathbf{c}^T)]^{-1} \mathbf{B}_m$ .

Assim, a Equação (5.20) pode ser escrita como

$$e_2 = W_c(z)[(W_b(z)[\omega^T])\bar{\Delta}K]_k. \quad (5.32)$$

Como  $\bar{\Delta}K = \Delta K(k+1) - \Delta K(k)$ , pode-se afirmar que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\Delta}K = 0$  e, consequentemente,  $\lim_{k \rightarrow \infty} e_2 = 0$ .

## 5.4 Tempo de transiente

Da mesma maneira que foi feito no caso contínuo, busca-se encontrar envoltórias capazes de descrever o comportamento do transitório mediante a modificação do modelo de referência, tanto para sistemas de ordem 1 quanto para sistemas de ordem  $n$ .

### 5.4.1 Caso escalar

Considera-se uma planta, já em representação discreta, dada por

$$\begin{aligned}x_p(k) &= a_p x(k) + bu(k) \\y_p(k) &= x_p(k).\end{aligned}\tag{5.33}$$

O modelo de referência de malha fechada será

$$\begin{aligned}x_m(k+1) &= a_m x_m(k) + b_m r(k) + k_e (y_p(k) - y_m(k)) \\y_m(k) &= x_m(k)\end{aligned}\tag{5.34}$$

Dado um controlador do tipo  $u = \hat{k}^T \omega$ , com  $\hat{k} = [\hat{k}_x(k) \ \hat{k}_r(k)]^T$  e  $\omega(k) = [x_p(k) \ r(k)]$ , encontra-se que a dinâmica do erro será dada por

$$e(k+1) = (a_{ref} - k_e)e(k) + \underbrace{b\Delta k^T \omega}_{\alpha(k)},\tag{5.35}$$

onde  $\Delta k = \hat{k} - k$  é o erro de convergência dos parâmetros do controlador.

Conforme demonstrado na Seção 5.2, o sistema será estável e os sinais do sistema são limitados, assim, existe  $\alpha_{max} > 0$  tal que  $|\alpha(k)| \leq \alpha_{max}$  para todo k.

Com base na Equação (5.35), a resposta do erro será dada por (OGATA, 1995)

$$e(k) = (a_{ref} - k_e)^k e_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (a_{ref} - k_e)^i \alpha(k-1-i),\tag{5.36}$$

onde  $e_0$  é a condição inicial do erro.

Assim, considerando-se a propriedade de desigualdade triangular no caso da soma, pode-se escrever um limite superior para esta expressão, tal que

$$|e(k)| \leq |(a_{ref} - k_e)^k e_0| + \sum_{i=0}^{k-1} |(a_{ref} - k_e)^i| |\alpha(k-1-i)|,\tag{5.37}$$

$$|e(k)| \leq |(a_{ref} - k_e)^k e_0| + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{max} |(a_{ref} - k_e)^i|,\tag{5.38}$$

A somatória na expressão é uma progressão geométrica. Assim,

$$|e(k)| \leq |(a_{ref} - k_e)^k e_0| + \alpha_{max} \frac{(|a_{ref} - k_e|)^k - 1}{|a_{ref} - k_e| - 1}. \quad (5.39)$$

Como já foi provado que o sistema é estável, sabe-se que  $|a_{ref} - k_e| < 1$ . Assim, a medida que  $k \rightarrow \infty$ , os elementos de expoente  $k$  tendem a zero quanto maior o valor de  $|a_{ref} - k_e|$ . Isso permite a conclusão de que a velocidade de convergência do sistema com modelo de referência realimentado ( $k_e \neq 0$ ) é maior.

Além disso, ressalta-se que, ao contrário do que ocorre no caso contínuo, existe um limite na aplicação desta modificação para uma planta de primeira ordem, já que a relação  $|a_{ref} - k_e| \leq 1$  deve ser mantida.

#### 5.4.2 Caso vetorial

Expandimos agora o resultado da seção anterior para sistemas de ordem  $n$  descritos em sua forma discreta por:

$$\begin{aligned} x_p(k) &= \mathbf{A}x_p(k) + \mathbf{B}u(k) \\ y_p(k) &= \mathbf{c}^T x_p(k). \end{aligned} \quad (5.40)$$

O modelo de referência de malha fechada será

$$\begin{aligned} x_{ref}(k+1) &= \mathbf{A}_{ref}x_m + \mathbf{b}_{ref}r - \mathbf{L}(y_p - y_m) \\ y_{ref}(k) &= \mathbf{c}^T x(k) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Dado um controlador do tipo  $u = \hat{K}^T \omega$ , com  $\hat{K} = [\hat{K}_x(k) \ \hat{K}_r(k)]^T$  e  $\omega(k) = [x_p(k) \ r(k)]$ , encontra-se que a dinâmica do erro de estado será dada por

$$e(k+1) = (\mathbf{A}_{ref} + \mathbf{L}\mathbf{c}^T)e(k) + \underbrace{B\Delta K^T}_{\Phi(k)}\omega, \quad (5.42)$$

onde  $\Delta K = \hat{K} - K$  é o erro de convergência dos parâmetros do controlador.

Com base na Equação (5.42), a resposta do erro será dada por (OGATA, 1995)

$$e(k) = (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Lc}^T)^k e_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Lc}^T)^i \Phi(k-1-i) \quad (5.43)$$

Pode-se calcular então um limitante superior para o erro,

$$|e(k)|_{\ell_\infty} = \left| (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Lc}^T)^k e_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Lc}^T)^i \Phi(k-1-i) \right|_{\ell_\infty} \quad (5.44)$$

Considerando-se a desigualdade triangular,

$$|e(k)|_{\ell_\infty} \leq |(\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Lc}^T)^k e_0|_{\ell_\infty} + \left| \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Lc}^T)^i \Phi(k-1-i) \right|_{\ell_\infty} \quad (5.45)$$

Conforme demonstrado na Seção 5.2, o sistema será estável e os sinais do sistema são limitados, assim, existe  $\Phi_{\max} > 0$  tal que  $|\Phi(k)|_{\ell_\infty} \leq \Phi_{\max}$  para todo  $k$ .

$$|e(k)|_{\ell_\infty} \leq |(\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Lc}^T)^k e_0|_{\ell_\infty} + \Phi_{\max} \left| \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Lc}^T)^i \right|_{\ell_\infty} \quad (5.46)$$

A somatória é uma progressão geométrica matricial, e sua soma até o elemento  $(k-1)$  tem expressão conhecida, desde que a matriz  $[I - (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Lc}^T)]$  seja inversível. Assim,

$$|e(k)|_{\ell_\infty} \leq |(\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Lc}^T)^k e_0|_{\ell_\infty} + \Phi_{\max} |[I - (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Lc}^T)]^{-1} [I - (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Lc}^T)^k]|_{\ell_\infty} \quad (5.47)$$

Em sistemas discretos, a estabilidade de um sistema no seu espaço de estados é relacionada à magnitude dos autovalores em relação ao ciclo unitário, e não apenas ao sinal de sua parte real, como no caso contínuo.

Assim, para que a série geométrica gerada por  $(\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Lc}^T)$  convirja e para que este sistema seja estável segundo Lyapunov como já demonstrado, é necessário ainda que a magnitude dos autovalores da matriz composta  $(\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Lc}^T)$  seja menor ou igual a 1.

Mais que isso, este equacionamento demonstra que, no caso do sistema discreto, a escolha de  $L$  deve ser feita de maneira a reduzir a magnitude dos autovalores da matriz composta  $(A_{\text{ref}} + Lc^T)$ , o que garantira uma resposta mais rápida na convergência do erro.

## 5.5 Estudos de simulação

Esta seção apresenta resultados ilustrativos do efeito da estrutura realimentada no modelo de referência discreto, para diferentes entradas.

Seja uma planta de primeira ordem, dada por

$$\dot{x}_p = x_p + 4u + \xi, \quad x_p(0) = 0, \quad (5.48)$$

Considera-se, portanto, dois modelos de referência discretos com frequência de amostragem  $F_s = 50Hz$ . O modelo de dinâmica  $x_{m0}(k+1)$  será o modelo de referência tradicional, enquanto o modelo de dinâmica  $x_m(k+1)$  é o modelo de referência realimentado. Ou seja,

$$\begin{aligned} x_{m0}(k+1) &= 0.9802x_{m0} + 0.0198r(k) & x_{m0}(0) &= 0 \\ x_m(k+1) &= 0.9802x_m + 0.0198r(k) + k_e(x_p(k) - x_m(k)) & x_m(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Para os dois casos, toma-se um controlador do tipo *feed-forward* dado por

$$u(k) = \hat{k}_x(k)x_p(k) + \hat{k}_r(k)r(k) = \hat{K}^T \omega_f, \quad (5.50)$$

e leis de adaptação de parâmetros dadas por

$$\begin{aligned} \hat{K}(k+1) &= \hat{K}(k) - \gamma \frac{\omega_f(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \\ \hat{\varphi}(k+1) &= \hat{\varphi}(k) - \frac{e_2(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \\ G_{mL}(z) &\triangleq [z - 0.9808 + k_e]^{-1} \\ \varepsilon_1(k) &= e_1(k) + \hat{\varphi}(k)e_2(k) \\ e_2(k) &= \hat{K}(k)^T G_{mL}(z)\omega(k) - G_{mL}(z)\hat{K}(k)^T \omega(k). \end{aligned} \quad (5.51)$$

onde  $\omega_f(k) = G_m(z) [x_p(k) \ r(k)]^T$ ,  $\Delta K(k) = [\Delta K_x(k) \ \Delta K_r(k)]$  e  $m(k)^2 = 1 + \omega_f^T(k)\omega_f(k) + e_2^2$  é o fator de normalização.

A fim de simular a planta, em regime contínuo, considerou-se um integrador de Runge-Kutta de quarta ordem de passo fixo, com frequência de amostragem igual a 1000 Hz. O sistema de controle, por sua vez, foi simulado com frequência de amostragem igual a 50 Hz, com blocos de transição apropriados.

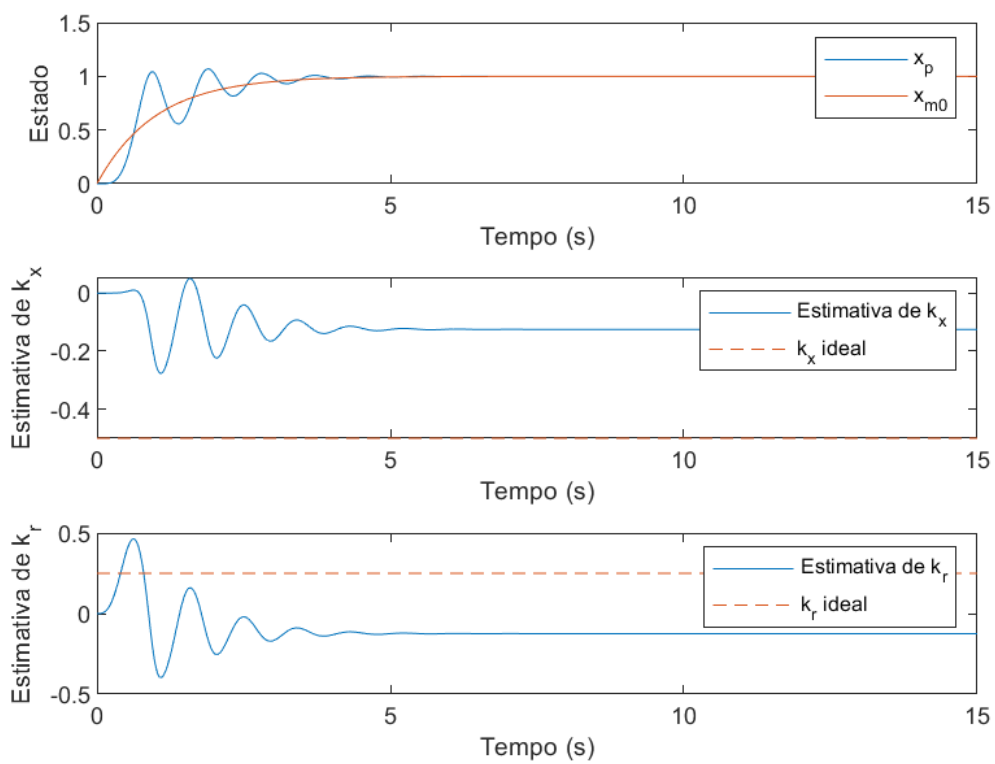
### 5.5.1 $r(t) = 1$

Inicialmente, considera-se como entrada de referência um degrau unitário discretizado em  $F_s = 50Hz$ . A Figura 5.3 mostra a resposta de um sistema com modelo de referência sem realimentação (ORM). Observa-se que o sistema apresenta oscilações representativas dada a escolha de  $\gamma = 0.4$ , um valor relativamente alto. Este comportamento poderia ser melhorado em detrimento do tempo de resposta do controlador com um valor menor no parâmetro de projeto.

As Figuras 5.4, 5.5 e 5.6 mostram a resposta deste controlador com  $\gamma = 0.4$  e  $k_e = 0.05$ ,  $k_e = 0.1$  e  $k_e = 0.2$ , respectivamente.

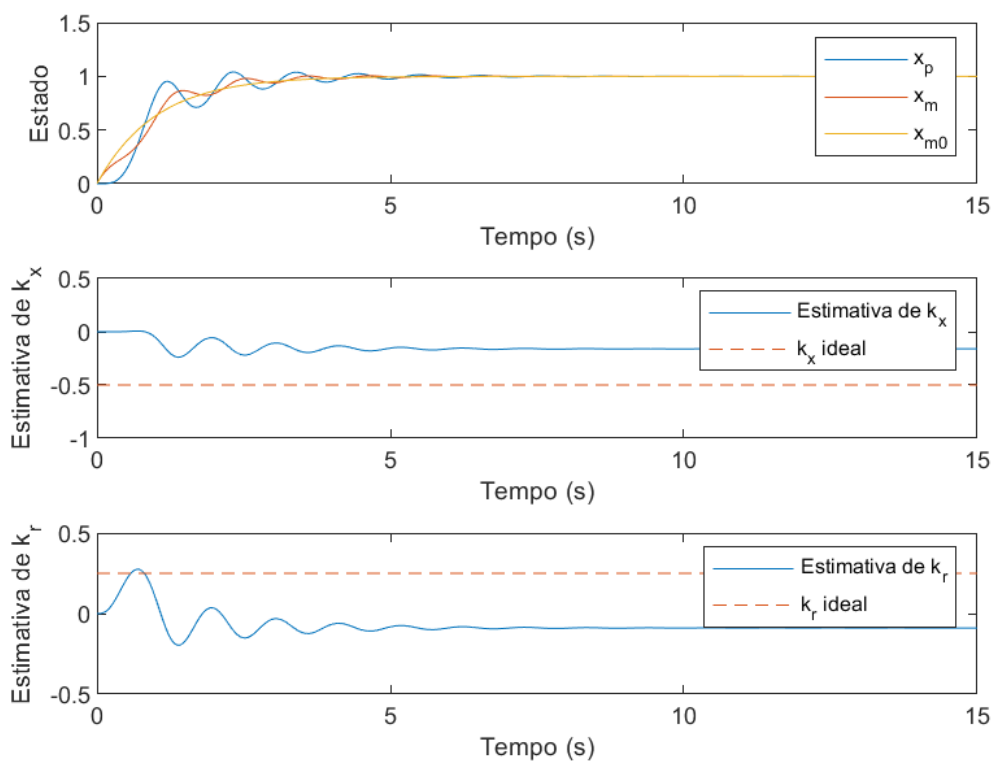
Observa-se que uma escolha apropriada de  $k_e$  leva a uma melhora da amplitude das oscilações no transitório, mas valores muito elevados alteram demasiadamente o modelo de referência, atrasando a resposta do sistema. Este fenômeno é similar ao fenômeno relatado por Gibson (2014) para o caso contínuo. Além disso, dada a baixa riqueza de sinal da entrada escolhida, não há convergência dos parâmetros do controlador para o valor de referência.

Figura 5.3 - Resposta de um sistema ORM, com  $\gamma = 0.4$  e entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.

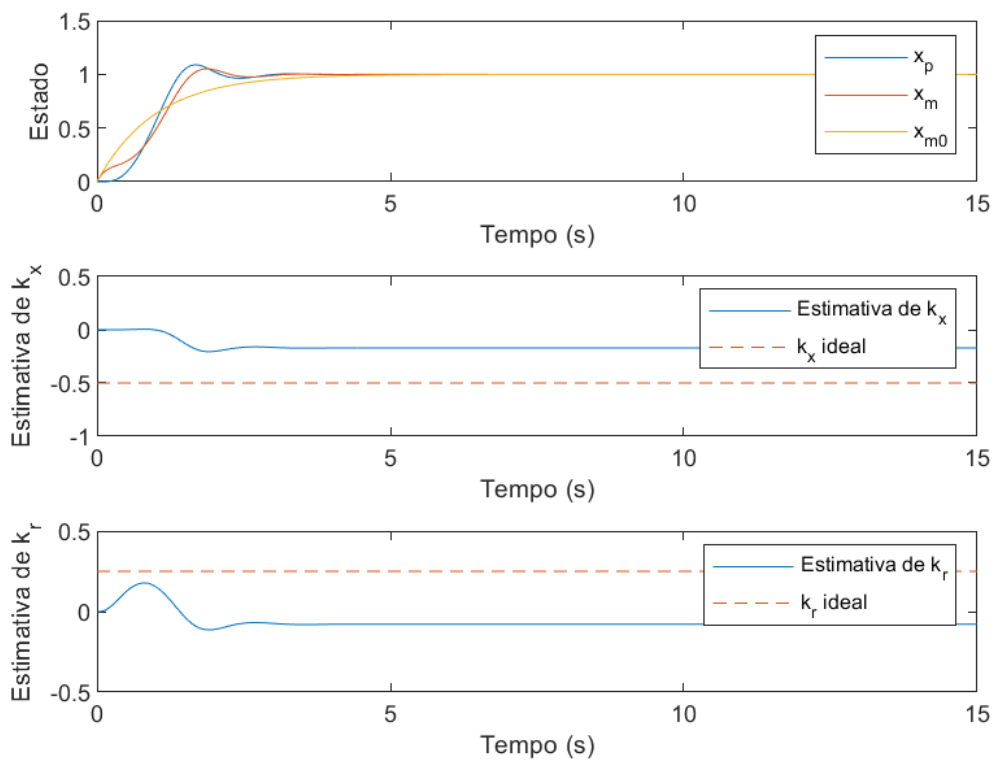
Figura 5.4 - Resposta de um sistema CRM, com  $\gamma = 0.4$ ,  $k_e = 0.05$  e entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.

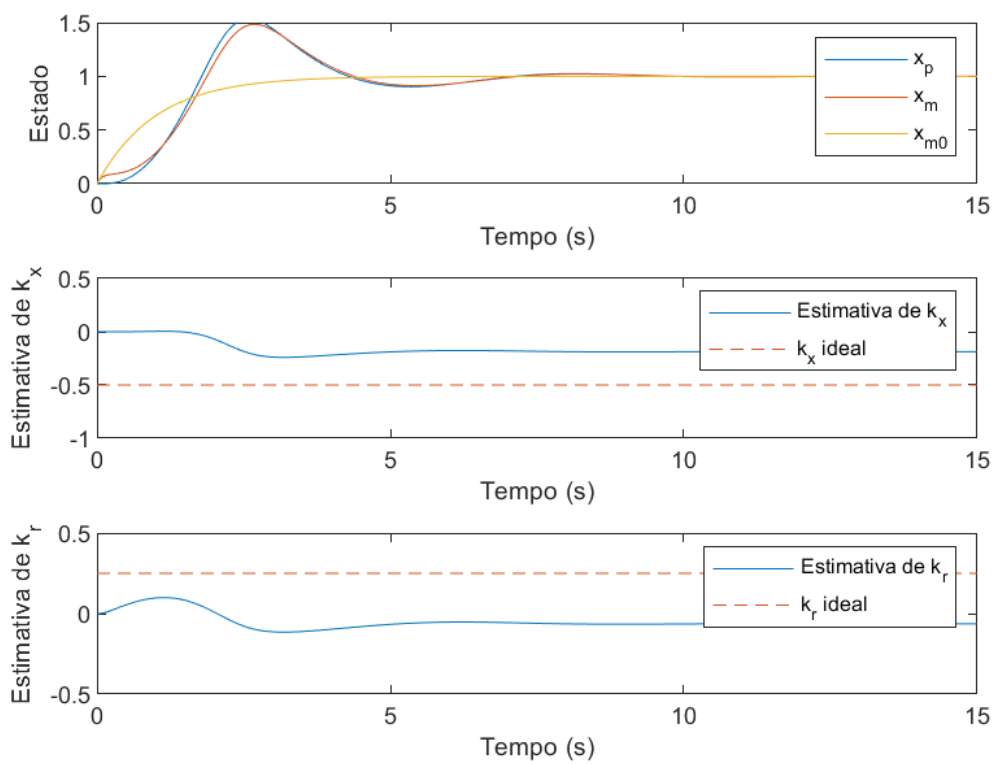


Figura 5.5 - Resposta de um sistema CRM, com  $\gamma = 0.4$ ,  $k_e = 0.1$  e entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.

Figura 5.6 - Resposta de um sistema CRM, com  $\gamma = 0.4$ ,  $k_e = 0.2$  e entrada degrau.



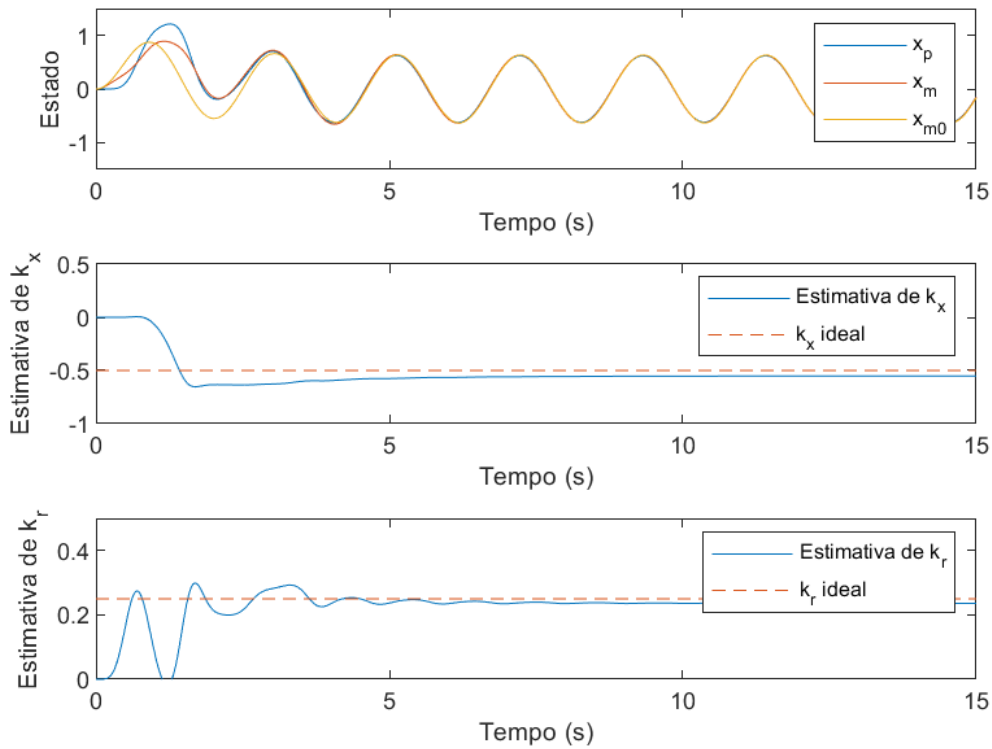
Fonte: Produção da autora.

### 5.5.2 $r(t) = 2\sin(3t)$

A Figura 5.7 apresenta a resposta do controlador adaptativo por modelo de referência em malha fechada em presença de uma entrada senoidal  $r(t) = 2\sin(3t)$ , discretizada em  $F_s = 50Hz$ .

Observa-se que, em presença de uma entrada rica, existe convergência dos parâmetros para seus valores ideais.

Figura 5.7 - Resposta de um sistema CRM, com  $\gamma = 0.4$ ,  $k_e = 0.1$  e entrada senoidal  $r = 2\sin(3t)$ .



Fonte: Produção da autora.



## 6 ANÁLISE DE ROBUSTEZ EM PRESENÇA DE PERTURBAÇÃO EXTERNA

A condição de estabilidade de um sistema adaptativo quando em presença de perturbações é fortemente vinculada à persistência de excitação dos sinais da malha. Essencialmente, caso seja possível garantir que os sinais de referência ou mesmo as perturbações presentes sejam suficientemente ricos, é possível provar que os parâmetros estimados convergirão para seu valor ideal.

Segundo [Ioannou e Fidan \(2006\)](#), entretanto, a natureza retroalimentada do sistema de controle faz com que seja difícil garantir esta condição para casos reais. Assim, busca-se garantir que a planta siga uma determinada trajetória de referência sem demandar que os parâmetros estimados convirjam para seus valores ideais.

### 6.1 Caso contínuo - modelo de referência em malha fechada

[Gibson \(2014\)](#) não apresentou análise de robustez para a arquitetura CRM, indicando apenas que este tema deveria ser tópico de trabalhos futuros. Assim, esta seção busca analisar o comportamento de um sistema adaptativo com modelo de referência em malha fechada em presença de perturbação externa limitada.

Seja um sistema cuja planta apresenta uma perturbação externa limitada, dada pela Equação (6.1), em que os índices de tempo foram suprimidos.

$$\dot{x}_p = Ax_p + B\Lambda u + \xi \quad (6.1)$$

Na Equação (6.1),  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado da planta,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de controle,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de controle conhecida,  $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma matriz diagonal desconhecida, com elementos estritamente positivos,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz desconhecida e  $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$  é uma perturbação externa limitada, tal que  $\|\xi(t)\|_{\ell_\infty} \leq \xi_{max} \geq 0$ .

Inicialmente, consideraremos a mesma lei de adaptação estudada na Seção 4.2, conforme ilustrado na Figura 6.1.

Considerando-se a equação do modelo de referência em malha fechada apresentada na Equação (4.10), pode-se mostrar que o erro de estado, dado por  $e = x_p - x_{ref}$  tem como dinâmica a Equação (6.2).

Figura 6.1 - Esquema adaptativo CRM em presença de perturbação.

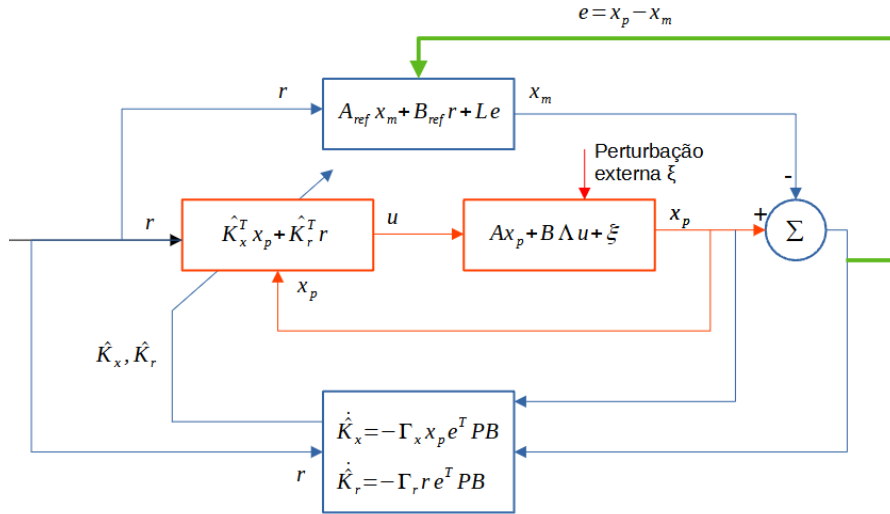


Diagrama esquemático para implementação de controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada em presença de perturbação externa, sem modificação na lei de adaptação.

Fonte: Produção da autora.

$$\dot{e} = (A_{ref} + L)e + B\Lambda[\Delta K_x^T x_p + \Delta K_r^T r] + \xi \quad (6.2)$$

Em que  $\Delta K_x = \hat{K}_x - K_x$  e  $\Delta K_r = \hat{K}_r - K_r$ .

Escolhe-se então a função de Lyapunov candidata quadrática globalmente radialmente ilimitada como sugerido por Lavretsky e Wise (2013), com taxas de adaptação  $\Gamma_x = \Gamma_x^T > 0$  e  $\Gamma_r = \Gamma_r^T > 0$ , de dimensões apropriadas.

$$V(e, \Delta K_x, \Delta K_r) = e^T P e + tr(\Lambda \Delta K_x^T \Gamma_x^{-1} \Delta K_x) + tr(\Lambda \Delta K_r^T \Gamma_r^{-1} \Delta K_r) \quad (6.3)$$

Na Equação (6.3),  $P = P^T > 0$  satisfaz a equação  $(A_{ref} + L)^T P + P(A_{ref} + L) + Q = 0$  para algum  $Q = Q^T > 0$ .

A derivada temporal desta função pode então ser calculada.

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial V}{\partial \Delta K_x} \Delta \dot{K}_x + \frac{\partial V}{\partial \Delta K_r} \Delta \dot{K}_r. \quad (6.4)$$

Em que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial e} \dot{e} &= 2e^T P \dot{e} \\ \frac{\partial V}{\partial \Delta K_x} \Delta \dot{K}_x &= 2tr(\Lambda \Delta K_x \Gamma_x^{-1} \dot{K}_x) \\ \frac{\partial V}{\partial \Delta K_r} \Delta \dot{K}_r &= 2tr(\Lambda \Delta K_r^T \Gamma_r^{-1} \dot{K}_r) \end{aligned} \quad (6.5)$$

O primeiro membro da Equação (6.4) pode ser escrito em função da derivada do erro expressa na Equação (6.2).

$$\frac{\partial V}{\partial e} \dot{e} = 2e^T P \{(A_{ref} + L)e + B\Lambda[\Delta K_x x_p + \Delta K_r r] + \xi\} \quad (6.6)$$

Como  $e^T P(A_{ref} + L)e$  é um valor escalar, pode-se escrever  $2e^T P A_{ref} e = e^T P(A_{ref} + L)e + (e^T P(A_{ref} + L)e)^T = e^T P(A_{ref} + L)e + e^T (A_{ref} + L)^T P e = -e^T Q e$ .

$$\frac{\partial V}{\partial e} \dot{e} = -e^T Q e + 2e^T P B \Lambda [\Delta K_x^T x_p + \Delta K_r^T r] + \xi \quad (6.7)$$

A identidade matricial  $a^T b = tr(ba^T)$  permite escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial e} \dot{e} &= -e^T Q e + 2tr(\Lambda \Delta K_x^T x_p e^T P B) \\ &\quad + 2tr(\Lambda \Delta K_r^T r e^T P B) + 2e^T P \xi \end{aligned} \quad (6.8)$$

Assim, a derivada temporal da função de Lyapunov apresentada na Equação (6.3) será dada pela Equação (6.9).

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e^T Q e + 2e^T P \xi(t) \\ &\quad + 2tr(\Lambda [\Delta K_x^T x_p e^T P B + \Delta K_x^T \Gamma_x^{-1} \dot{K}_x]) \\ &\quad + 2tr(\Lambda [\Delta K_r^T r e^T P B + \Delta K_r^T \Gamma_r^{-1} \dot{K}_r]) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Tomando-se as leis de adaptação definidas, tem-se que

$$\dot{V} = -e^T Q e + 2e^T P \xi(t) \leq -\lambda_{min}(Q)|e|^2 + 2|e|\lambda_{max}(P)\xi_{max}. \quad (6.10)$$

Em função do termo  $\xi(t)$ , as considerações de estabilidade devem ser feitas em relação ao conceito de soluções ultimamente uniformemente limitadas (UUB).

Segundo [Ioannou e Sun \(2012\)](#), soluções UUB existem se existe um limite  $E > 0$  e, correspondente a qualquer  $\alpha > 0$  e  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , existe um  $T = T(\alpha) > 0$  tal que, independentemente de  $t_0$ ,  $|x_0| < \alpha$  implique em  $|x(t; t_0, x_0)| < E$  para todo  $t \geq t_0 + T$ .

É possível demonstrar que a lei de adaptação dada pela Equação (4.13) não permite garantia da estabilidade do sistema em presença de perturbação externa limitada, uma vez que, mesmo que a norma do erro permaneça finita, não é possível garantir que o erro dos parâmetros de adaptação seja limitado ([NARENDRA et al., 1980](#); [LAVRETSKY](#); [WISE, 2013](#)).

De fato, observa-se que este resultado é o mesmo tanto para o controle adaptativo por modelo de referência tradicional quanto para o controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada, indicando que, apesar de aparentemente representar uma melhoria do transitório, ainda é necessário realizar modificações para garantir a robustez em presença de perturbações externas limitadas.

### 6.1.1 Modificações de robustez

Diversas modificações foram propostas na literatura a fim de garantir o comportamento do sistema em presença de perturbações limitadas.

Originalmente, [Narendra e Peterson \(1980\)](#) propuseram a modificação de zona morta. Seu objetivo é parar o processo adaptativo quando a norma do erro de rastreamento torna-se inferior a um determinado erro  $e_0$ .

Segundo [Lavretsky e Wise \(2013\)](#), esta modificação é suficiente para garantir propriedade de fronteira última uniforme para os erros dos parâmetros do controlador. Entretanto, em seu formato original, a modificação não é Lipschitz e, por isso, pode levar a oscilações em alta frequência. Uma alternativa à esta modificação é a versão contínua da modificação por zona morta, apresentada por [Slotine e Coetsee \(1986\)](#).

Posteriormente, [Ioannou e Kokotovic \(1983\)](#) apresentaram a modificação  $\sigma$ , que tem como principal característica não exigir nenhum conhecimento *a priori* do limite superior da perturbação do sistema e age, essencialmente, como um termo



de amortecimento na lei ideal (LAVRETSKY; WISE, 2013).

Entretanto, segundo Ioannou e Fidan (2006), a modificação  $\sigma$  tradicional tem como principal problema o fato de introduzir uma perturbação da ordem de  $\sigma$  no sistema, fazendo com que seja impossível garantir as propriedades ideais da lei adaptativa.

A modificação  $\epsilon$ , proposta por Narendra e Annaswamy (1987), surgiu como uma tentativa de melhorar a modificação  $\sigma$ , que também levava os parâmetros adaptativos a retornarem para a origem quando o erro de rastreamento era pequeno, desaproveitando os ganhos computados (LAVRETSKY; WISE, 2013).

Finalmente, menciona-se o algoritmo de projeção, estrutura escolhida no trabalho de Gibson (2014). Este algoritmo garante a limitação uniforme dos parâmetros adaptativos enquanto permitindo adaptação rápida e garantindo estabilidade em malha fechada da dinâmica do erro e do sistema original. Entretanto, seu uso exige o conhecimento de um limite superior para os parâmetros desconhecidos.

Este trabalho analisará a robustez do sistema adaptativo por modelo de referência em malha fechada considerando então duas possíveis leis de adaptação: modificação  $\epsilon$  e algoritmo de projeção.

#### 6.1.1.1 Modificação $\epsilon$

A fim de melhorar a robustez de sistemas de controle adaptativo em presença de perturbações limitadas, uma possível adaptação é a chamada modificação *epsilon*, proposta por Narendra e Annaswamy (1987).

Uma implementação desta estratégia consiste em alterar a lei de adaptação dos parâmetros  $\hat{K}_x$  e  $\hat{K}_r$ , de modo que as leis apresentadas na Equação (4.13) tornem-se

$$\begin{aligned}\dot{\hat{K}}_x &= -\Gamma_x(xe^T PB + \sigma \|e^T PB\| \hat{K}_x) \\ \dot{\hat{K}}_r &= -\Gamma_r(re^T PB + \sigma \|e^T PB\| \hat{K}_r),\end{aligned}\tag{6.11}$$

em que  $\sigma > 0$  é uma constante escalar. A Figura 6.2 ilustra este controlador.

A Equação (6.9) torna-se:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -e^T Q e + 2e^T P \xi(t) - 2\sigma \|e^T PB\| \text{tr}(\Lambda \Delta K_x^T \hat{K}_x) \\ &\quad - 2\sigma \|e^T PB\| \text{tr}(\Lambda \Delta K_r^T \hat{K}_r)\end{aligned}\tag{6.12}$$

Figura 6.2 - Esquema adaptativo CRM com modificação de robustez em presença de perturbação limitada.

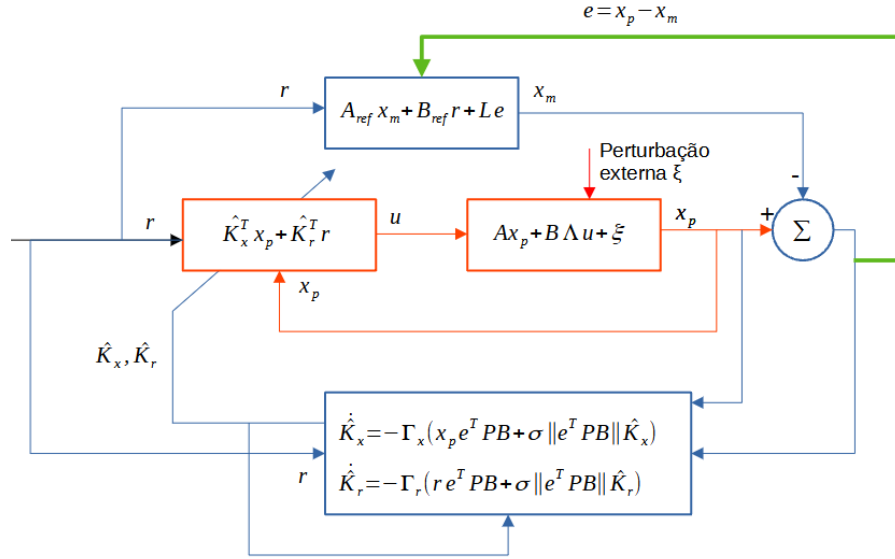


Diagrama esquemático para implementação de controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada em presença de perturbação externa, com modificação  $\epsilon$ .

Fonte: Produção da autora.

Como  $\Delta K_x^T = \hat{K}_x^T - K_x^T$  e  $\Delta K_r^T = \hat{K}_r^T - K_r^T$ , então

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T Q e + 2e^T P \xi(t) \\ & - 2\sigma \|e^T P B\| \text{tr}(\Lambda \Delta K_x^T \Delta K_x) - 2\sigma \|e^T P B\| \text{tr}(\Lambda \Delta K_x^T K_x) \\ & - 2\sigma \|e^T P B\| \text{tr}(\Lambda \Delta K_r^T \Delta K_r) - 2\sigma \|e^T P B\| \text{tr}(\Lambda \Delta K_r^T K_r). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Como propriedade do traço, sabe-se que  $\text{tr}(\Lambda \Delta K_\beta^T K_\beta) = \text{tr}(\Delta K_\beta^T K_\beta \Lambda)$ , para  $\beta = x, r$ . Assim, pela desigualdade de Schwarz, pode-se afirmar que,

$$\text{tr}(\Lambda \Delta K_\beta^T K_\beta) \leq \|\Delta K_\beta^T K_\beta\|_F \|\Lambda\|_F \leq \|\Delta K_\beta\|_F \|K_\beta\|_F \|\Lambda\|_F, \quad (6.14)$$

onde  $\|\cdot\|_F$  indica a norma de Frobenius.

Pela definição do traço, tem-se que, para  $K_x \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,

$$\text{tr}(\Lambda \Delta K_x^T \Delta K_x) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Delta K_{x_{ij}}^2 \Lambda_{jj} \geq \|\Delta K_x\|_F^2 \Lambda_{\min}. \quad (6.15)$$

Analogamente, para  $K_r \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,

$$\text{tr}(\Lambda \Delta K_r^T \Delta K_r) \equiv \sum_{j=1}^m \Delta K_{rjj}^2 \Lambda_{jj} \geq \|\Delta K_r\|_F^2 \Lambda_{\min}. \quad (6.16)$$

Substituindo-se as Equações (6.14), (6.15) e (6.16) na Equação (6.13),

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\lambda_{\min}(Q)\|e\|^2 + 2\|e\|\lambda_{\max}(P)\xi_{\max} \\ & - 2\sigma\|e^T P B\| \|\Delta K_x\|_F^2 \Lambda_{\min} + 2\sigma\|e^T P B\| \|\Delta K_x\|_F \|K_x\|_F \|\Lambda\|_F \\ & - 2\sigma\|e^T P B\| \|\Delta K_r\|_F^2 \Lambda_{\min} + 2\sigma\|e^T P B\| \|\Delta K_r\|_F \|K_r\|_F \|\Lambda\|_F. \end{aligned} \quad (6.17)$$

De maneira semelhante ao proposto em Lavretsky e Wise (2013) para a modificação  $\sigma$ , pode-se expandir esta expressão completando-se os quadrados, tal que

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\lambda_{\min}(Q) \left[ \|e\| - \frac{\lambda_{\max}(P)\xi_{\max}}{\lambda_{\min}(Q)} \right]^2 + \frac{\lambda_{\max}^2(P)\xi_{\max}^2}{\lambda_{\min}(Q)} \\ & - 2\sigma\|e^T P B\| \Lambda_{\min} \left[ \|\Delta K_x\|_F - \frac{\|K_x\|_F \|\Lambda\|_F}{2\Lambda_{\min}} \right]^2 + \sigma\|e^T P B\| \frac{\|K_x\|_F^2 \|\Lambda\|_F^2}{2\Lambda_{\min}} \\ & - 2\sigma\|e^T P B\| \Lambda_{\min} \left[ \|\Delta K_r\|_F - \frac{\|K_r\|_F \|\Lambda\|_F}{2\Lambda_{\min}} \right]^2 + \sigma\|e^T P B\| \frac{\|K_r\|_F^2 \|\Lambda\|_F^2}{2\Lambda_{\min}}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Assim,  $\dot{V}(e, \Delta K_x, \Delta K_r) < 0$  se que pelo menos uma das expressões em (6.19), (6.20) ou (6.21) for verdadeira.

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(Q) \left[ \|e\| - \frac{\lambda_{\max}(P)\xi_{\max}}{\lambda_{\min}(Q)} \right]^2 & > \frac{\lambda_{\max}^2(P)\xi_{\max}^2}{\lambda_{\min}(Q)} + \sigma\|e^T P B\| \frac{\|K_x\|_F^2 \|\Lambda\|_F^2}{2\Lambda_{\min}} \\ & + \sigma\|e^T P B\| \frac{\|K_r\|_F^2 \|\Lambda\|_F^2}{2\Lambda_{\min}} \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} 2\sigma\|e^T P B\| \Lambda_{\min} \left[ \|\Delta K_x\|_F - \frac{\|K_x\|_F \|\Lambda\|_F}{2\Lambda_{\min}} \right]^2 & > \frac{\lambda_{\max}^2(P)\xi_{\max}^2}{\lambda_{\min}(Q)} + \sigma\|e^T P B\| \frac{\|K_x\|_F^2 \|\Lambda\|_F^2}{2\Lambda_{\min}} \\ & + \sigma\|e^T P B\| \frac{\|K_r\|_F^2 \|\Lambda\|_F^2}{2\Lambda_{\min}} \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} 2\sigma\|e^T P B\| \Lambda_{\min} \left[ \|\Delta K_r\|_F - \frac{\|K_r\|_F \|\Lambda\|_F}{2\Lambda_{\min}} \right]^2 & > \frac{\lambda_{\max}^2(P)\xi_{\max}^2}{\lambda_{\min}(Q)} + \sigma\|e^T P B\| \frac{\|K_x\|_F^2 \|\Lambda\|_F^2}{2\Lambda_{\min}} \\ & + \sigma\|e^T P B\| \frac{\|K_r\|_F^2 \|\Lambda\|_F^2}{2\Lambda_{\min}} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Estas expressões permitem descrever condições limitantes para  $\|e\|$ ,  $\|\Delta K_x\|$  e

$\|\Delta K_r\|$ , tal que

$$\|e\| > \frac{\lambda_{max}(P)\xi_{max}}{\lambda_{min}(Q)} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}^2(P)\xi_{max}^2}{\lambda_{min}^2(Q)} + \frac{\sigma\|e^T P B\|}{\lambda_{min}(Q)} \left[ \frac{\|K_x\|_F^2 \|\Lambda\|_F^2}{2\Lambda_{min}} + \frac{\|K_r\|_F^2 \|\Lambda\|_F^2}{2\Lambda_{min}} \right]} \quad (6.22)$$

$$\equiv c_1$$

$$\|\Delta K_x\|_F > \frac{\|K_x\|_F \|\Lambda\|_F}{2\Lambda_{min}} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}^2(P)\xi_{max}^2}{2\sigma\|e^T P B\|\Lambda_{min}\lambda_{min}(Q)} + \frac{1}{2\Lambda_{min}} \left[ \frac{\|K_x\|_F^2 \|\Lambda\|_F^2}{2\Lambda_{min}} + \frac{\|K_r\|_F^2 \|\Lambda\|_F^2}{2\Lambda_{min}} \right]} \quad (6.23)$$

$$\equiv c_2$$

$$\|\Delta K_r\|_F > \frac{\|K_r\|_F \|\Lambda\|_F}{2\Lambda_{min}} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}^2(P)\xi_{max}^2}{2\sigma\|e^T P B\|\Lambda_{min}\lambda_{min}(Q)} + \frac{1}{2\Lambda_{min}} \left[ \frac{\|K_x\|_F^2 \|\Lambda\|_F^2}{2\Lambda_{min}} + \frac{\|K_r\|_F^2 \|\Lambda\|_F^2}{2\Lambda_{min}} \right]} \quad (6.24)$$

$$\equiv c_3$$

Deste modo, pode-se afirmar que  $\dot{V} < 0$  fora de um conjunto compacto (fechado e limitado)  $\Omega \subset (R^n \times R^{n \times m} \times R^{m \times m})$  com limites definidos pelas Equações (6.22), (6.23) e (6.24).

$$\Omega = \{(e, \Delta K_x, \Delta K_r) : (\|e\| \leq c_1) \wedge (\|\Delta K_x\|_F \leq c_2) \wedge (\|\Delta K_r\|_F \leq c_3)\} \quad (6.25)$$

Deste modo, pode-se afirmar que todos os sinais da malha terão uma fronteira última uniforme.

A influência do modelo de referência CRM nesta fronteira será discutida na Seção 6.1.2.

### 6.1.1.2 Algoritmo de projeção

A outra modificação de robustez em estudo neste trabalho é o algoritmo de projeção, lei escolhida por Gibson (2014) em seus estudos de controle adaptativo com modelo de referência em malha fechada.

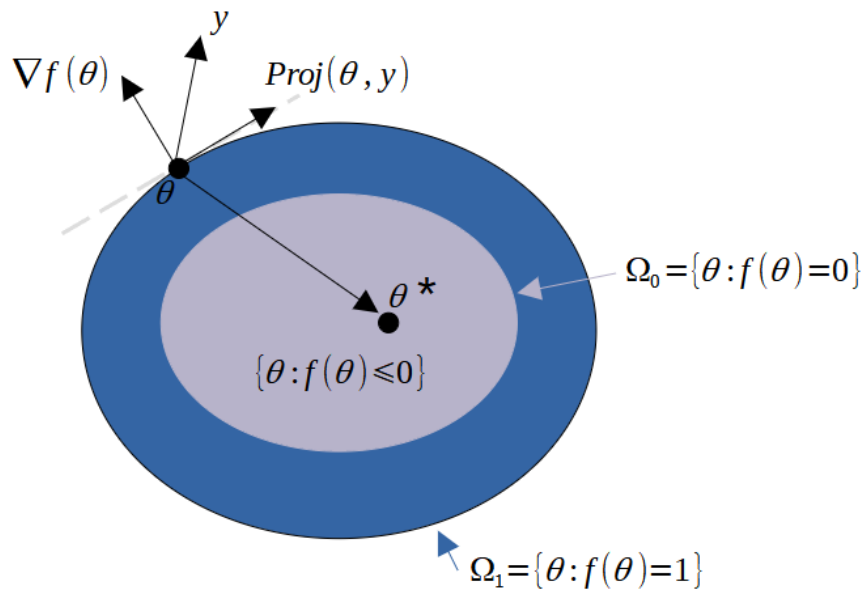
**Definição** (Operador de Projeção). (LAVRETSKY; WISE, 2013)

$$Proj(\theta, y) = \begin{cases} y - \Gamma \frac{\nabla f(\theta)(f(\theta))^T y f(\theta)}{\|\nabla f(\theta)\|_{\Gamma}^2}, & \text{se } [f(\theta) > 0 \wedge y^T \nabla f(\theta) > 0]. \\ y, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.26)$$

Em que  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é qualquer matriz simétrica definida positiva e  $\|\nabla f(\theta)\|_{\Gamma}^2 = (\nabla f^T \Gamma \nabla f)$  é a média euclidiana quadrática ponderada.  $\nabla f(\theta)$  é o vetor gradiente de  $f$  avaliado em  $\theta$ .

A Figura 6.3 ilustra o conceito por trás deste algoritmo. Caso  $\theta$  pertença ao conjunto convexo  $\Omega_0$ , tal que  $f(\theta) \leq 0$  para uma determinada função convexa  $f$ , o vetor  $y$  não é alterado. Por outro lado, se  $\theta$  estiver no anel tal que  $0 \leq f(\theta) \leq 1$ , o algoritmo de projeção busca suavizar a transição desta região (LAVRETSKY; WISE, 2013).

Figura 6.3 - Representação esquemática do algoritmo de projeção.



Fonte: Produção da autora.

O operador de projeção definido pela Equação (6.26) tem como característica os seguintes lemas, cuja prova é apresentada em Lavretsky e Wise (2013).

**Lema 2.** Para qualquer matriz simétrica definida positiva  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

$$(\theta - \theta^*)^T (\Gamma^{-1} Proj(\theta, \Gamma y) - y) \leq 0, \quad (6.27)$$

em que  $\theta^*$  é um ponto interno a  $\Omega_0$ .

**Lema 3.** Seja  $f(\theta)$  um mapa convexo continuamente diferenciável de  $\mathbb{R}^n$  até  $\mathbb{R}$ . Seja ainda a dinâmica  $n$ -dimensional dada por

$$\dot{\theta} = Proj(\theta, y), \quad (6.28)$$

em que  $\theta \in \mathbb{R}^n$  é o estado do sistema e  $y \in \mathbb{R}^n$  é um vetor variante no tempo e contínuo por partes. Assim, partindo de qualquer condição inicial  $\theta(0) = \theta_0$  dentro do conjunto  $\Omega_0 = \{\theta \in \mathbb{R}^n | f(\theta) \leq 0\}$ , as trajetórias do sistema  $\theta(t)$  permanecerão no conjunto  $\Omega_1 = \{\theta \in \mathbb{R}^n | f(\theta) \leq 1\}$  para todo  $t \geq 0$ .

A versão matricial  $n \times m$  do operador de projeção é dada pela equação (GIBSON, 2014)

$$Proj(\Theta, \Gamma Y) = [(Proj(\vec{\theta}_1, \Gamma \vec{y}_1)), \dots, (Proj(\vec{\theta}_m, \Gamma \vec{y}_m))], \quad (6.29)$$

Em que  $\Theta = [\theta_1 \ \dots \ \theta_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $Y = [y_1 \ \dots \ y_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Assim, a desigualdade apresentada na Equação (6.27) passa a ser dada pela Equação (6.30) (LAVRETSKY; WISE, 2013).

$$tr(\Delta \Theta^T (\Gamma^{-1} Proj(\Theta, \Gamma Y) - Y)) = \sum_{j=1}^m (\theta - \theta^*)_j^T (\Gamma^{-1} Proj(\theta, \Gamma Y_j) - Y_j) \leq 0 \quad (6.30)$$

No caso do sistema adaptativo, tomam-se portanto as leis de adaptação dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{K}}_x &= Proj_{\Omega_a}(\hat{K}_x, \Gamma_x x_p e^T P B) \\ \dot{\hat{K}}_r &= Proj_{\Omega_b}(\hat{K}_r, \Gamma_r r e^T P B), \end{aligned} \quad (6.31)$$

em que  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$  representam os conjuntos convexos fechados centrados na ori-

gem e cujos tamanhos são dependentes de um limitante conhecido de  $K_x$  e  $K_r$  respectivamente.

As funções convexas que governam estas leis são

$$\begin{aligned} f(\hat{K}_x) &= \frac{(1 + \varepsilon)\|\hat{K}_x\|^2 - K_{x_{max}}^2}{\varepsilon K_{x_{max}}^2} \\ f(\hat{K}_r) &= \frac{(1 + \varepsilon)\|\hat{K}_r\|^2 - K_{r_{max}}^2}{\varepsilon K_{r_{max}}^2}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

em que  $\varepsilon > 0$  é uma variável de projeto. Estas funções são baseadas nas funções apresentadas por [Lavretsky \(2012\)](#).

A Equação (6.32) mostra uma limitação do uso deste tipo de lei adaptativa, uma vez que o algoritmo de projeção exige conhecimento do limite superior do valor real dos parâmetros.

Assim, afirma-se que  $\Delta K_x$  e  $\Delta K_r$  sejam contidos segundo a Equação (6.33), em que  $\|\cdot\|_F$  define a norma de Frobenius ([GIBSON, 2014](#)).

$$\begin{cases} \Theta_{max} \equiv \sup_{\Theta, \Theta^* \in \Omega_a} \|\Delta\Theta\|_F \\ K_{max} \equiv \sup_{K, K^* \in \Omega_b} \|\Delta K\|_F \end{cases} \quad (6.33)$$

Comparando-se a estrutura da Equação (6.30) com a Equação (6.9), pode-se observar que, caso a lei adaptativa obedeça ao algoritmo de projeção, os termos envolvendo traços na Equação (6.9) serão sempre menores ou iguais a zero, reduzindo a Equação (6.9) à desigualdade apresentada na Equação (6.34).

$$\dot{V} \leq -e^T Q e + 2e^T P \xi(t) \quad (6.34)$$

Considera-se então os limites esperados para a derivada temporal de V.

$$\dot{V} \leq -e^T Q e + 2e^T P \xi(t) \leq -\lambda_{min}(Q)\|e\|^2 + 2\|e\|\lambda_{max}(P)\xi_{max} \quad (6.35)$$

Logo,  $\dot{V} < 0$  quando fora do conjunto  $E_0$ , apresentado na Equação (6.36).

$$E_0 = \left\{ (e, \Delta K_x, \Delta K_r) : \|e\| \leq 2 \frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(Q)} \xi_{max} \wedge \|\Delta K_x\|_F \leq K_{x_{max}} \wedge \|\Delta K_r\|_F \leq K_{r_{max}} \right\} \quad (6.36)$$

Se o conjunto  $\Omega_0$  for compacto no espaço  $(e, \Delta K_x, \Delta K_r)$ , pode-se afirmar que as trajetórias do erro ficariam dentro de um conjunto compacto  $(\Omega_0 \supset E_0) \subset \mathbb{R}^n$  a partir de um determinado tempo finito (KHALIL, 2002). Como, por definição no caso do algoritmo de projeção, exige-se que os parâmetros  $\Delta K_x$  e  $\Delta K_r$  sejam limitados, pode-se garantir que todos os sinais são UUB.

### 6.1.2 Influência da estrutura CRM na robustez

Tanto para a modificação  $\varepsilon$  quanto para o algoritmo de projeção, observa-se que os conjuntos compactos que definem a fronteira última uniforme são diretamente relacionados aos autovalores das matrizes P e Q.

De fato, a principal diferença na análise da estabilidade dos algoritmos com modelo de referência em malha aberta e fechada está na definição da equação algébrica de Lyapunov contínua que define P.

No caso tradicional, tem-se que

$$A_{ref}^T P_o + P_o A_{ref}^T = -Q, \quad (6.37)$$

enquanto no modelo de referência realimentado esta expressão torna-se

$$(A_{ref} + L)^T P + P(A_{ref} + L)^T = -Q. \quad (6.38)$$

Nas equações, considera-se que o mesmo Q foi escolhido para permitir a comparação entre os dois modelos, e o subscrito  $o$  indica a solução para o caso ORM.

Segundo Mori e Deresei (1984), cada uma destas equações têm uma única solução simétrica positiva definida para um dado  $Q = Q^T > 0$ .

Sejam  $\alpha_{o_{max}} \geq \alpha_{o_2} \geq \dots \geq \alpha_{o_n} > 0$  os autovalores de  $P_o$ . Pode-se afirmar que (YASUDA; HIRAI, 1979; MORI; DERESEI, 1984)



$$\lambda_{max}(P_o) = \alpha_{o_{max}} \leq \frac{1}{-\lambda_{max}\{(A_{ref} + A_{ref}^T)Q^{-1}\}} \quad (6.39)$$

Analogamente, para o caso CRM, tem-se que

$$\lambda_{max}(P) \leq \frac{1}{-\lambda_{max}\{[A_{ref} + L + (A_{ref} + L)^T]Q^{-1}\}}. \quad (6.40)$$

Comparando-se com os conjuntos compactos detalhados nas Equações (6.25) e (6.36), pode-se afirmar que a estrutura de modelo de referência realimentada também implicará em uma redução da fronteira última uniforme caso  $\lambda_{max}(P) < \lambda_{max}(P_o)$ , ou seja, se, em módulo, o maior autovalor da matriz  $\{[A_{ref} + L + (A_{ref} + L)^T]Q^{-1}\}$  for maior que o maior autovalor da matriz  $\{(A_{ref} + A_{ref}^T)Q^{-1}\}$ , para um mesmo Q.

### 6.1.3 Tempo de transiente

Esta seção busca apresentar uma análise do tempo de transitório do controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada em presença de perturbação externa limitada, verificando assim se o comportamento visto no caso não perturbado será mantido.

Destaca-se que a análise apresentada nesta seção não depende da modificação escolhida para o modelo de referência, uma vez que estamos comparando apenas o efeito do modelo de referência com realimentação em uma mesmo tipo de lei de adaptação dos parâmetros.

#### 6.1.3.1 Caso escalar

No caso perturbado, é possível demonstrar que a dinâmica do erro será

$$\dot{e} = (a_{ref} - k_e)e + \underbrace{b(\Delta k_x x + \Delta k_r r)}_{\equiv \psi(t)} + \xi. \quad (6.41)$$

Como todos os sinais no sistema em malha fechada são limitados, pode-se dizer que existe uma constante estritamente positiva  $0 < \psi_{max} < \infty$  tal que  $|\psi(t)| \leq \psi_{max}$  para qualquer instante de tempo.

Partindo de uma condição inicial  $e(0) = e_0$ , o erro ao longo do tempo é dado por:

$$e(t) = e^{(a_{ref}-k_e)t}e_0 + \int_0^t e^{(a_{ref}-k_e)(t-\tau)}\psi(\tau)d\tau + \int_0^t e^{(a_{ref}-k_e)(t-\tau)}\xi(\tau)d\tau \quad (6.42)$$

Como a integral é uma integral de convolução do tipo  $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$  válida para  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ , pode-se usar a propriedade comutativa tal que

$$e(t) = e^{(a_{ref}-k_e)t}e_0 + \int_0^t e^{(a_{ref}-k_e)\tau}\psi(t-\tau)d\tau + \int_0^t e^{(a_{ref}-k_e)\tau}\xi(t-\tau)d\tau \quad (6.43)$$

Pode-se então calcular um limite superior para o erro, considerando-se que  $|\psi(t-\tau)| \leq \psi_{max}$  para todo tempo  $t$  e que, por hipótese, a perturbação externa também tem um limite superior tal que  $|\xi(t-\tau)| \leq \xi_{max}$ .

$$|e(t)| \leq \left| e^{(a_{ref}-k_e)t}e_0 \right| + \psi_{max} \left| \int_0^t e^{(a_{ref}-k_e)\tau}d\tau \right| + \xi_{max} \left| \int_0^t e^{(a_{ref}-k_e)\tau}d\tau \right| \quad (6.44)$$

Como  $a_{ref} - k_e < 0$ , tem-se:

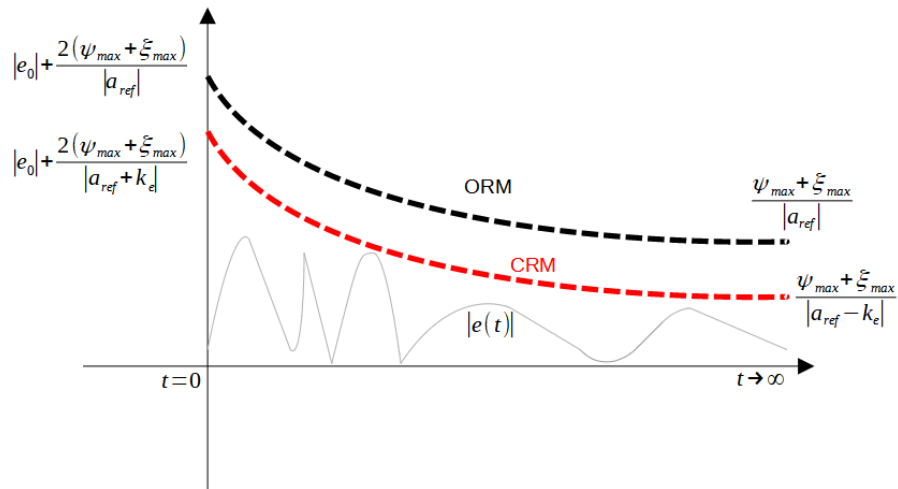
$$|e(t)| \leq |e^{-|a_{ref}+k_e|t}|e_0| + (\psi_{max} + \xi_{max}) \left| \frac{1 - e^{-|a_{ref}+k_e|t}}{|a_{ref} + k_e|} \right| \quad (6.45)$$

$$|e(t)| \leq |e^{-|a_{ref}+k_e|t}|e_0| + \frac{\psi_{max} + \xi_{max}}{|a_{ref} + k_e|} + (\psi_{max} + \xi_{max}) \left| \frac{e^{-|a_{ref}+k_e|t}}{|a_{ref} + k_e|} \right| \quad (6.46)$$

$$|e(t)| \leq \left( |e_0| + \frac{\psi_{max} + \xi_{max}}{|a_{ref} + k_e|} \right) |e^{-|a_{ref}+k_e|t}| + \frac{\psi_{max} + \xi_{max}}{|a_{ref} + k_e|} \quad (6.47)$$

Este resultado demonstra que, no que diz respeito ao tempo de transitório, o efeito positivo da inclusão do termo de realimentação no modelo de referência é mantido, uma vez que a inclusão do termo perturbado afeta igualmente a resposta do sistema, conforme indicado pela Figura 6.4.

Figura 6.4 - Resposta do erro.



Comparação qualitativa do transiente para o modelo de referência tradicional (ORM) e em malha fechada (CRM) para o caso escalar em presença de perturbação limitada.

Fonte: Produção da autora.

Conclui-se, portanto, que o algoritmo com um modelo de referência em malha fechada tem um transitório mais rápido do que o algoritmo em malha aberta, dada uma mesma condição inicial e a mesma perturbação externa limitada.

### 6.1.3.2 Caso vetorial

A dinâmica do erro é dada por

$$\dot{e} = (A_{ref} + L)e + \underbrace{B\Lambda(\Delta K_x x + \Delta K_r r)}_{\equiv \Psi(t)} + \xi. \quad (6.48)$$

Partindo de uma condição inicial  $e(0) = e_0$ , o erro ao longo do tempo é dado por:

$$e(t) = e^{(A_{ref}+L)t}e_0 + \int_0^t e^{(A_{ref}+L)(t-\tau)}\Psi(\tau)d\tau + \int_0^t e^{(A_{ref}+L)(t-\tau)}\xi(\tau)d\tau \quad (6.49)$$

Como a integral é uma integral de convolução do tipo  $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$  válida para  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ , pode-se usar a propriedade comutativa tal que

$$e(t) = e^{(A_{ref}+L)t}e_0 + \int_0^t e^{(A_{ref}+L)(\tau)}\Psi(t-\tau)d\tau + \int_0^t e^{(A_{ref}+L)(\tau)}\xi(t-\tau)d\tau \quad (6.50)$$

A análise desta expressão para o caso vetorial depende da matriz de transição de estados,  $e^{(A_{ref}+L)t}$ .

Da mesma maneira que foi feito no caso não perturbado, toma-se por exemplo a escolha de  $L$  tal que  $(A_{ref}+L)$  seja uma matriz diagonal Hurwitz, com autovalores reais e distintos dados por  $\lambda_i \leq 0$  pode-se afirmar que, para cada elemento  $i$  do vetor erro, tem-se

$$e_i(t) = e^{\lambda_i t}e_0 + \int_0^t e^{\lambda_i(\tau)}\Psi_i(t-\tau)d\tau + \int_0^t e^{\lambda_i(\tau)}\xi_i(t-\tau)d\tau \quad (6.51)$$

Como todos os sinais no sistema em malha fechada são limitados, pode-se dizer que existe uma constante estritamente positiva  $0 < \Psi_{max} < \infty$  tal que  $|\Psi_i(t-\tau)| \leq \Psi_{max}$  para qualquer instante de tempo. Além disso, por hipótese, a perturbação externa também tem um limite superior tal que  $|\xi_i(t-\tau)| \leq \xi_{max}$ . Assim,

$$|e_i(t)| \leq \left| e^{\lambda_i t}e_i(0) \right| + (\Psi_{max} + \xi_{max}) \left| \int_0^t e^{\lambda_i(\tau)}d\tau \right| \quad (6.52)$$

$$|e_i(t)| \leq \left| e^{\lambda_i t}e_i(0) \right| + (\Psi_{max} + \xi_{max}) \left| \frac{1 - e^{\lambda_i t}}{|\lambda_i|} \right| \quad (6.53)$$

Esta expressão é equivalente àquela encontrada para o caso escalar, e indica que a resposta do sistema será mais rápida quão mais afastado o autovalor escolhido esteja do zero.

Nota-se que a inclusão da perturbação no modelo levou a um aumento da amplitude esperada para a envoltória de maneira equivalente para os modelos de referência com e sem realimentação. Assim, conclui-se que, para uma mesma perturbação, o sistema com o modelo de referência em malha fechada terá um melhor comportamento no transitório.

### 6.1.4 Estudos de simulação

Esta seção apresenta resultados ilustrativos do efeito da estrutura realimentada no modelo de referência para diferentes plantas.

Seja uma planta de primeira ordem, dada por

$$\dot{x}_p = x_p + 4u + \xi, \quad x_p(0) = 0, \quad (6.54)$$

em que  $\xi$  representará uma perturbação em pulso com amplitude 5 e duração de 0.5 s, aplicado em  $t = 1$  s.

Considera-se, portanto, dois modelos de referência. O modelo de dinâmica  $\dot{x}_{m0}$  será o modelo de referência tradicional, enquanto o modelo de dinâmica  $\dot{x}_m$  é o modelo de referência realimentado. Ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{m0} &= -4x_{m0} + 4r & x_{m0}(0) &= 0 \\ \dot{x}_m &= -4x_m + 4r + k_e(x_p - x_m) & x_m(0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Para os dois casos, toma-se um controlador do tipo *feed-forward* dado por

$$u = \hat{k}_x x_p + \hat{k}_r r, \quad (6.56)$$

e leis de adaptação de parâmetros com modificação  $\varepsilon$  dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{k}}_x &= -\gamma(e x_p + \sigma \|e\| \hat{k}_x) & \hat{k}_x(0) &= 0 \\ \dot{\hat{k}}_r &= -\gamma(e r + \sigma \|e\| \hat{k}_r) & \hat{k}_r(0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.57)$$

A fim de simular o regime contínuo, considerou-se um integrador de Runge-Kutta de quarta ordem de passo fixo, com frequência de amostragem igual a 1000 Hz.

#### 6.1.4.1 $r(t) = 1$

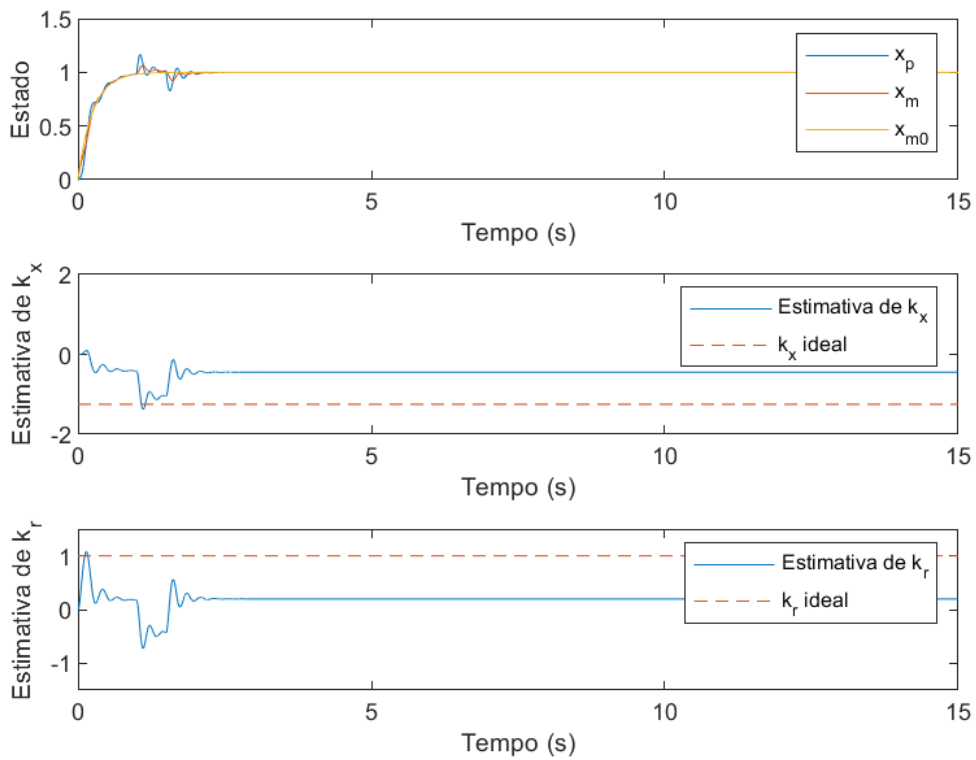
Inicialmente, consideremos novamente uma entrada do tipo degrau, em um modelo de referência em malha fechada (CRM), com  $\gamma = 100$ ,  $\sigma = 0.1$ . As Figuras 6.5, 6.6 e 6.7 apresentam os modelos com  $k_e = 10$ ,  $k_e = 100$  e  $k_e = 1000$ , respectivamente.

Observa-se que a inclusão do ganho  $k_e$  reduz consideravelmente as alta frequên-

cias aparentes no transitório. Entretanto, como pode ser visto especialmente no caso  $k_e = 1000$ , existe uma relação de troca entre o ganho de realimentação e a velocidade de resposta da planta.

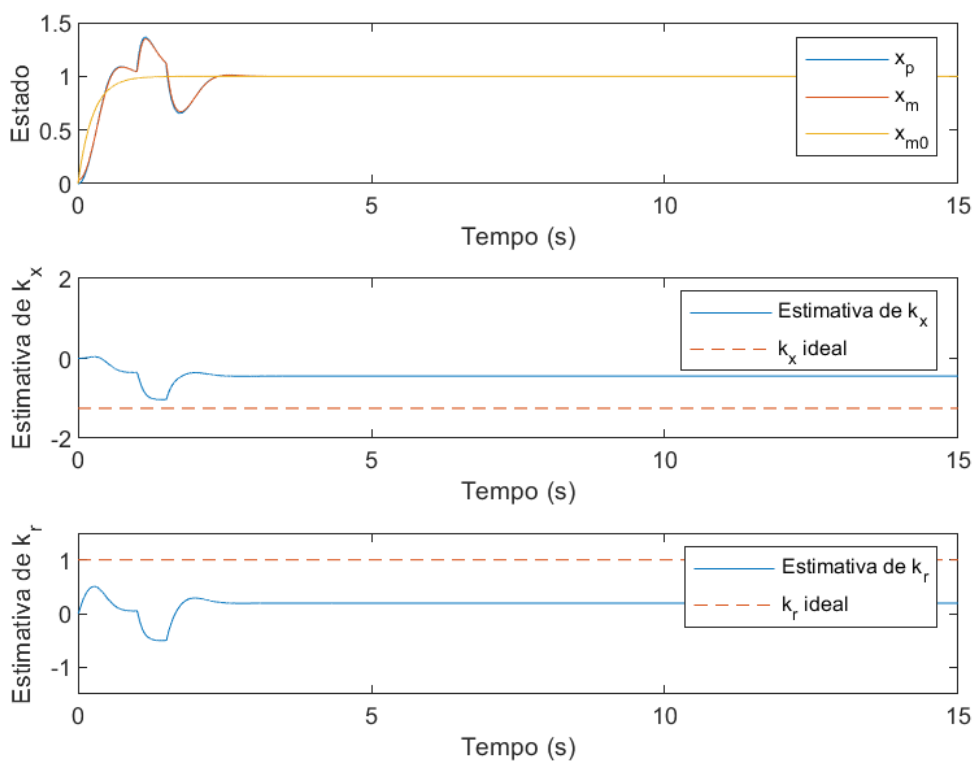
Além disso, comparando-se os resultados, observa-se que, uma vez que o modelo de referência não considera a perturbação, a realimentação do erro no modelo de referência faz com que a trajetória de referência também seja perturbada indiretamente.

Figura 6.5 - Resposta de um sistema CRM, com  $k_e = 10$  e entrada degrau.



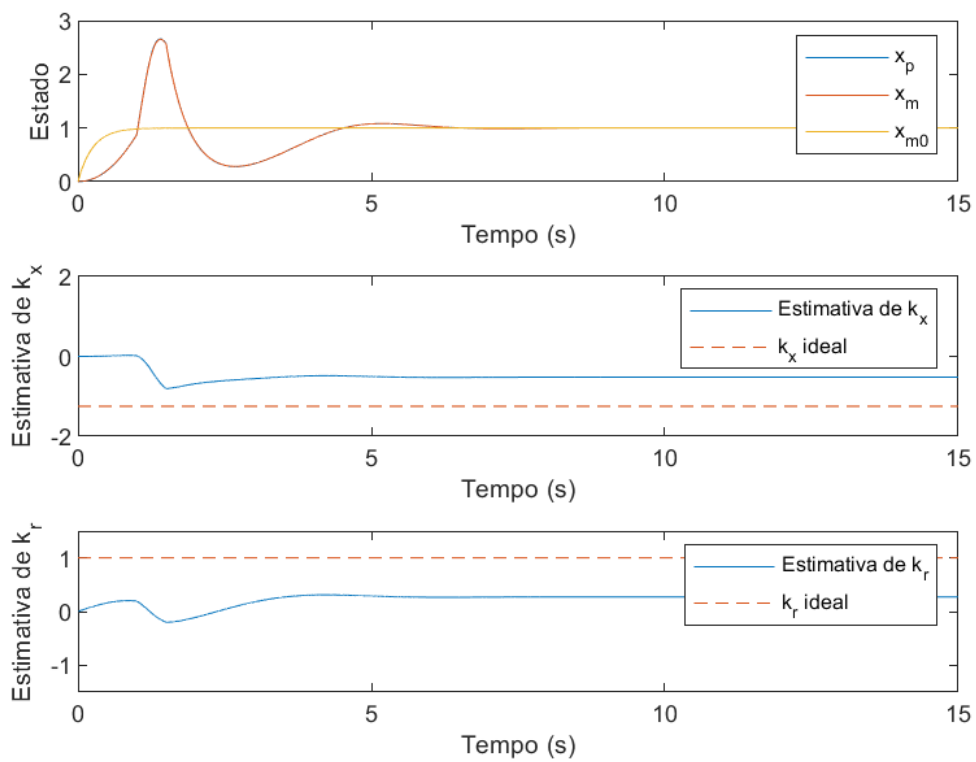
Fonte: Produção da autora.

Figura 6.6 - Resposta de um sistema CRM, com  $k_e = 100$  e entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.

Figura 6.7 - Resposta de um sistema CRM, com  $k_e = 1000$  e entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.

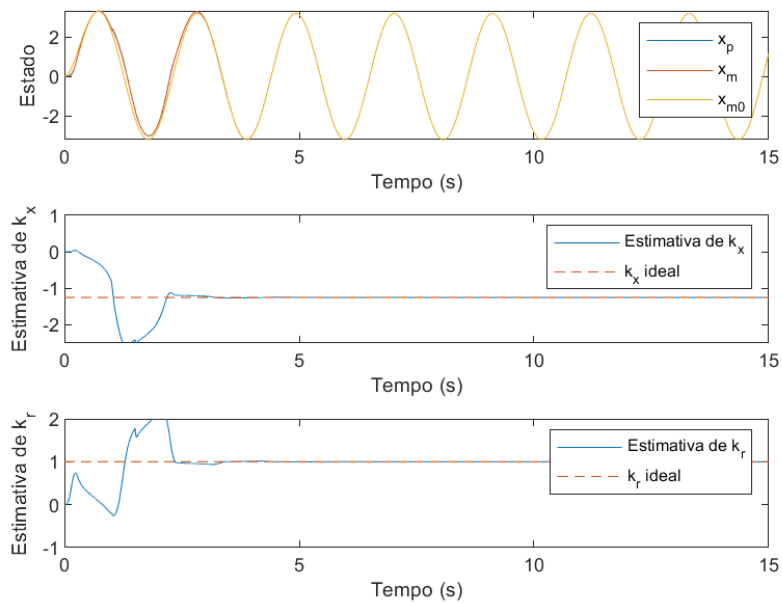


### 6.1.4.2 $r(t) = \sin(2t)$

A Figura 6.8 ilustra o comportamento do sistema dada uma mesma perturbação de entrada, mas com uma entrada rica para este tipo de planta,  $r(t) = \sin(2t)$ .

Observa-se que neste caso, os parâmetros convergem a seu valor de *matching*.

Figura 6.8 - Resposta de um sistema CRM, com  $k_e = 100$  e entrada senoidal.



Fonte: Produção da autora.

## 6.2 Caso discreto - modelo de referência em malha fechada

Seja uma planta linear de ordem  $n$  descrita pelo espaço de estados

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}_p x(t) + \mathbf{B}_p u(t) + \xi_p(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T x(t) \end{aligned} \quad (6.58)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado totalmente mensurável,  $u(t)$  é o sinal de controle e  $\mathbf{A}_p$  e  $\mathbf{B}_p$  são matrizes de dimensões apropriadas. Considera-se que a matriz  $\mathbf{c}^T$  é conhecida e  $\xi_p(t) \in \mathbb{R}^n$  é uma perturbação externa limitada, tal que  $\|\xi_p\| \leq \xi_{p_{max}}$ . Além disso,  $\xi_p(t) \in \ell^2$  (TAO, 1997).

Esta planta terá uma representação no espaço discreto dada por

$$\begin{aligned}x_p(k+1) &= \mathbf{A}x_p(k) + \mathbf{B}u(k) + \xi_k(k) \\y_p(k) &= \mathbf{c}^T x_p(k)\end{aligned}\quad (6.59)$$

onde  $\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_p T_s}$ ,  $\mathbf{B} = [\int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_p \alpha} d\alpha] \mathbf{B}_p$  e  $\xi_k = [\int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_p \alpha} \xi_p(\alpha) d\alpha]$ .

Deseja-se que esta planta siga um modelo de referência em malha fechada representado por

$$\begin{aligned}x_m(k+1) &= \mathbf{A}_m x_m(k) + \mathbf{B}_m r(k) - L(y_p(k) - y_m(k)) \\y_m(k) &= \mathbf{c}^T x_m(k)\end{aligned}\quad (6.60)$$

onde  $\mathbf{A}_m = e^{\mathbf{A}_m T}$  e  $\mathbf{B}_m = [\int_0^T e^{\mathbf{A}_m \alpha} d\alpha] \mathbf{B}_m$ .  $L$  é um ganho de realimentação de Luenberger e a matriz  $\mathbf{c}^T$  é a mesma da planta. Observa-se que os estados no modelo de referência também são considerados totalmente mensuráveis.

A lei de controle é dada por

$$u(k) = \hat{K}_x^T x_p(k) + \hat{K}_r(k) r(k).\quad (6.61)$$

A lei de adaptação dos parâmetros é a mesma apresentada na Seção 5.2 e reproduzida a seguir

$$\begin{aligned}\Delta K(k+1) &= \Delta K(k) - \text{sgn}(k_p) \gamma \frac{\omega_f(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \\ \Delta \varphi(k+1) &= \Delta \varphi(k) - \sigma \frac{e_2(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2},\end{aligned}\quad (6.62)$$

onde  $\omega_f(k) = G_{m_L}(z)\omega(k)$  e  $m(k)^2 = 1 + \omega_f^T(k)\omega_f(k) + e_2^2$  é o fator de normalização.

Com a Equação (5.10), pode-se reescrever a equação da planta como sendo

$$x_p(k+1) = \mathbf{A}x_p(k) + \mathbf{B}_m[\hat{K}_x^T x_p(k) + \hat{K}_r(k)r(k)] + \xi_k(k).\quad (6.63)$$

Por hipótese, assume-se que seja possível definir uma perturbação equivalente  $\xi \in \mathbb{R}^m$  tal que  $\xi_k(k) \equiv \mathbf{B}_m \xi(k)$ ,  $\xi \in \ell^\infty \cap \ell^2$ , conforme Narendra e Annaswamy (1984).

Tomando-se o erro de estimativa dos parâmetros como sendo  $\Delta K_x = \hat{K}_x - K_x$  e  $\Delta K_r = \hat{K}_r - K_r$ , pode-se escrever o erro de estado  $e = x_p - x_m$  como:

$$e(k+1) = x_p(k+1) - x_m(k+1)$$

$$\begin{aligned} x_p(k+1) &= \mathbf{A}x_p(k) + \mathbf{B}[(K_x + \Delta K_x(k))^T x_p(k) + (K_r + \Delta K_r(k))r(k)] + \xi(k) \\ x_m(k+1) &= \mathbf{A}_m x_m(k) + \mathbf{B}_m r(k) + L\mathbf{c}^T(x_p(k) - x_m(k)) \end{aligned} \quad (6.64)$$

Considerando a condição de matching, tem-se que o erro de estado é dado por

$$e(k+1) = (\mathbf{A}_m + L\mathbf{c}^T)e(k) + \mathbf{B}[\Delta K(k)^T \omega(k) + \xi(k)] \quad (6.65)$$

onde  $\Delta K^T(k) = [\Delta K_x^T(k) \quad \Delta K_r^T(k)]$  e  $\omega(k) = [x_p(k) \quad r(k)]$ .

Seja o erro de rastreo  $e_1(k) = y_p(k) - y_m(k) = \mathbf{c}^T e$ , pode-se considerar o seguinte sistema dinâmico

$$\begin{aligned} e(k+1) &= (\mathbf{A}_m + L\mathbf{c}^T)e(k) + \mathbf{B}[\Delta K^T \omega(k) + \xi(k)] \\ e_1(k) &= \mathbf{c}^T e \end{aligned} \quad (6.66)$$

Este sistema tem como solução

$$e_1(k) = \mathbf{c}^T [zI - (\mathbf{A}_m + L\mathbf{c}^T)]^{-1} \mathbf{B}(\Delta K(k)^T \omega(k) + \xi(k)) \quad (6.67)$$

Assim, de maneira análoga ao caso não perturbado, pode-se escrever o erro de rastreo como sendo

$$e_1(k) = \frac{k_p}{k_m} G_{mL} (\Delta K(k)^T \omega(k) + \xi(k)), \quad (6.68)$$

em que  $G_{m_L} = \mathbf{c}^T [zI - (\mathbf{A}_m + L\mathbf{c}^T)]^{-1} \mathbf{B}_m$ .

Conforme visto anteriormente, pode-se escrever o erro auxiliar  $e_2$  como

$$e_2(k) = \Delta K(k)^T G_{m_L}(z) \omega(k) - G_{m_L}(z) \Delta K(k)^T \omega(k). \quad (6.69)$$

Finalmente, define-se o erro aumentado  $\varepsilon_1$  como sendo uma combinação do erro de rastreo com o erro auxiliar.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(k) &= e_1(k) + \hat{\varphi}(k) e_2(k) \\ &= \frac{k_p}{k_m} G_{m_L} (\Delta K(k)^T \omega(k) + \xi(k)) + \hat{\varphi}(k) [\Delta K(k)^T G_{m_L}(z) \omega(k) - G_{m_L}(z) \Delta K(k)^T \omega(k)] \end{aligned} \quad (6.70)$$

em que  $\hat{\varphi}(k) = k_p/k_m + \Delta\varphi(k)$ . Logo

$$\varepsilon_1(k) = \frac{k_p}{k_m} (\Delta K(k)^T G_{m_L}(z) \omega(k) + G_{m_L}(z) \xi(k)) + \Delta\varphi(k) e_2(k) \quad (6.71)$$

Definindo-se  $\omega_f \equiv G_{m_L}(z) \omega(k)$  e  $\xi_f \equiv G_{m_L}(z) \xi(k)$ , tem-se

$$\varepsilon_1(k) = \frac{k_p}{k_m} (\Delta K(k)^T \omega_f(k) + \xi_f(k)) + \Delta\varphi(k) e_2(k) \quad (6.72)$$

### 6.2.1 Análise de robustez

Seja uma função candidata de Lyapunov dada por

$$V_k(\Delta K, \Delta\varphi) = \gamma^{-1} \frac{|k_p|}{k_m} \Delta K^T(k) \Delta K(k) + \sigma^{-1} \Delta\varphi^2(k) \quad (6.73)$$

com  $\gamma, \sigma > 0$ .

A equação de diferenças de Lyapunov será

$$\Delta V(\Delta K, \Delta\varphi) = \gamma^{-1} \frac{|k_p|}{k_m} [\Delta K^T(k+1)\Delta K(k+1) - \Delta K^T(k)\Delta K(k)] + \sigma^{-1} [\Delta\varphi^2(k+1) - \Delta\varphi^2(k)] \quad (6.74)$$

Considerando-se a lei de adaptação estudada anteriormente, tem-se

$$\begin{aligned} \Delta K(k+1) &= \Delta K(k) - \text{sgn}(k_p) \gamma \frac{\omega_f(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \\ \Delta\varphi(k+1) &= \Delta\varphi(k) - \sigma \frac{e_2(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \end{aligned} \quad (6.75)$$

onde  $\omega_f(k) = G_{m_L}(z)\omega(k)$  e  $m(k)^2 = 1 + \omega_f^T(k)\omega_f(k) + e_2^2$  é o fator de normalização.

Assim

$$\begin{aligned} \Delta V(\Delta K, \Delta\varphi) &= \gamma^{-1} \frac{|k_p|}{k_m} \left\{ \left[ \Delta K(k) - \text{sgn}(k_p) \gamma \frac{\omega_f(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \right]^T \left[ \Delta K(k) - \text{sgn}(k_p) \gamma \frac{\omega_f(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \right] \right\} \\ &\quad - \gamma^{-1} \frac{|k_p|}{k_m} \Delta K^T(k)\Delta K(k) + \sigma^{-1} \left[ (\Delta\varphi(k) - \sigma \frac{e_2(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2})^2 - \Delta\varphi(k)^2 \right] \\ &= \gamma^{-1} \frac{|k_p|}{k_m} \left\{ -2\text{sgn}(k_p) \gamma \Delta K^T(k) \frac{\omega_f(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} + \gamma^2 \omega_f^T(k)\omega_f(k) \frac{\varepsilon_1(k)^2}{m(k)^4} \right\} \\ &\quad + \sigma^{-1} \left[ -2\Delta\varphi(k) \sigma \frac{e_2(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} + \sigma^2 \frac{e_2^2(k)\varepsilon_1^2(k)}{m(k)^4} \right] \\ &= -2 \frac{k_p}{k_m} \Delta K^T(k) \frac{\omega_f(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} + \gamma \frac{|k_p|}{k_m} \omega_f^T(k)\omega_f(k) \frac{\varepsilon_1(k)^2}{m(k)^4} \\ &\quad - 2\Delta\varphi(k) \frac{e_2(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} + \sigma \frac{e_2^2(k)\varepsilon_1^2(k)}{m(k)^4} \end{aligned} \quad (6.76)$$

Como este desenvolvimento é análogo ao caso não perturbado, pode-se afirmar que

$$\Delta V(\Delta K, \Delta\varphi) \leq -2 \left[ \frac{k_p}{k_m} \Delta K^T(k) \frac{\omega_f(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} + \Delta\varphi(k) \frac{e_2(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \right] + \frac{\varepsilon_1(k)^2}{m(k)^2}. \quad (6.77)$$

No caso perturbado, tem-se que  $\varepsilon_1(k) = \frac{k_p}{k_m} (\Delta K(k)^T \omega_f(k) + \xi_f(k)) + \Delta\varphi(k)e_2(k)$ .

Assim,

$$\Delta V(\Delta K, \Delta \varphi) \leq -2 \left[ \varepsilon_1(k) - \frac{k_p}{k_m} \xi_f(k) \right] \frac{\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} + \frac{\varepsilon_1(k)^2}{m(k)^2}. \quad (6.78)$$

$$\Delta V(\Delta K, \Delta \varphi) \leq -\frac{\varepsilon_1(k)^2}{m(k)^2} + 2 \frac{k_p}{k_m} \frac{\xi_f(k) \varepsilon_1(k)}{m(k)^2}. \quad (6.79)$$

Considerando-se a desigualdade para o quadrado de uma diferença, pode-se escrever

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab &\geq 0 \\ \frac{-a^2}{2} + ab &\leq \frac{b^2}{2} \\ -a^2 + ab &\leq \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \end{aligned} \quad (6.80)$$

Assim, a Equação (6.79) pode ser reescrita como

$$\Delta V(\Delta K, \Delta \varphi) \leq 2 \left[ \frac{k_p}{k_m} \frac{\xi_f(k)}{m(k)} \right]^2 - \frac{\varepsilon_1^2(k)}{2m^2(k)}. \quad (6.81)$$

Considerando-se o somatório desta desigualdade de diferenças ao longo de  $k$  passos, temos:

$$V(\Delta K(k), \Delta \varphi(k)) + \sum_{i=0}^k \frac{\varepsilon_1^2(i)}{2m^2(i)} \leq V(\Delta K(0), \Delta \varphi(0)) + \sum_{i=0}^k 2 \left[ \frac{k_p}{k_m} \frac{\xi_f(i)}{m(i)} \right]^2. \quad (6.82)$$

Como o erro  $\xi_f \in \ell^2$ , pode-se afirmar que existe  $\xi_u > 0$  tal que

$$\sum_{i=0}^k 2 \left[ \frac{k_p}{k_m} \frac{\xi_f(i)}{m(i)} \right]^2 \equiv 2 \left\| \frac{k_p}{k_m} \frac{\xi_f}{m} \right\|_2 \leq \xi_u. \quad (6.83)$$

$$V(\Delta K(k), \Delta \varphi(k)) + \sum_{i=0}^k \frac{\varepsilon_1^2(i)}{2m^2(i)} \leq V(\Delta K(0), \Delta \varphi(0)) + \xi_u. \quad (6.84)$$

Logo,

$$V(k+1) + \frac{\varepsilon_1^2(k)}{2m^2(k)} \leq V(k) + \xi_u. \quad (6.85)$$

Analogamente a Tao (1997), pode-se então afirmar que  $V(k) \in \ell^\infty$  e  $\varepsilon_1/m \in \ell^2$ , o que implica que os erros paramétricos também são limitados ( $\ell^\infty$ ). Além disso, dada as definições das Equações (6.72) e (6.75), pode-se afirmar que  $K(k+1) - K(k) \in \ell^\infty \cap \ell^2$  e  $\varphi(k+1) - \varphi(k) \in \ell^\infty \cap \ell^2$ .

Essencialmente, pode-se interpretar este resultado como uma fronteira única uniforme tal que todas as trajetórias do sistema ficarão dentro de um conjunto compacto contido em  $E_0$  dentro de um tempo finito.

$$E_0 = \{(\Delta K_x, \Delta K_r) : V(k) \leq V(0) + \xi_u\} \quad (6.86)$$

Como  $\varepsilon_1/m(k) \in \ell^2$  e, conseqüentemente,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_1(k)/m(k) = 0$ , pode-se afirmar de maneira análoga ao caso não perturbado que o erro de saída tenderá a zero para os casos onde  $\xi_f \in \ell^2$ .

## 6.2.2 Tempo de transiente

### 6.2.2.1 Caso escalar

Considera-se inicialmente, uma planta escalar com perturbação externa limitada, já em representação discreta, dada por

$$\begin{aligned} x_p(k) &= a_p x + bu + \xi_k \\ y_p(k) &= x_p(k). \end{aligned} \quad (6.87)$$

O modelo de referência de malha fechada será

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= a_m x_m + b_m r + k_e (y_p - y_m) \\ y_m(k) &= x(k) \end{aligned} \quad (6.88)$$

Dado um controlador do tipo  $u = \hat{k}^T \omega$ , com  $\hat{k} = [\hat{k}_x(k) \ \hat{k}_r(k)]^T$  e  $\omega(k) =$

$[x_p(k) \quad r(k)]$ , encontra-se que a dinâmica do erro será dada por

$$e(k+1) = (a_{ref} - k_e)e(k) + \underbrace{b\Delta k^T \omega}_{\alpha(k)} + \xi_k, \quad (6.89)$$

onde  $\Delta k = \hat{k} - k$  é o erro de convergência dos parâmetros do controlador.

Conforme demonstrado na Seção 6.2.1, os sistema será estável e os sinais do sistema são limitados, assim, existe  $\alpha_{max} > 0$  tal que  $|\alpha(k)| \leq \alpha_{max}$  para todo k.

Com base na Equação (6.89), a resposta do erro será dada por (OGATA, 1995)

$$e(k) = (a_{ref} - k_e)^k e_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (a_{ref} - k_e)^i \alpha(k-1-i) + \sum_{i=0}^{k-1} (a_{ref} - k_e)^i \xi_k(k-1-i), \quad (6.90)$$

onde  $e_0$  é a condição inicial do erro.

Assim, considerando-se a propriedade de desigualdade triangular no caso da soma, pode-se escrever um limite superior para esta expressão, tal que

$$|e(k)| \leq |(a_{ref} - k_e)^k e_0| + \sum_{i=0}^{k-1} |(a_{ref} - k_e)^i| |\alpha(k-1-i)| + \sum_{i=0}^{k-1} |(a_{ref} - k_e)^i| |\xi_k(k-1-i)|. \quad (6.91)$$

Assumindo-se, assim como no caso contínuo, que exista um limite superior máximo para a perturbação, pode-se escrever

$$|e(k)| \leq |(a_{ref} - k_e)^k e_0| + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{max} |(a_{ref} - k_e)^i| + \sum_{i=0}^{k-1} \xi_{max} |(a_{ref} - k_e)^i|. \quad (6.92)$$

A somatória na expressão é uma progressão geométrica. Assim,



$$|e(k)| \leq |(a_{ref} - k_e)^k e_0| + (\alpha_{max} + \xi_{max}) \frac{(|a_{ref} - k_e|)^k - 1}{|a_{ref} - k_e| - 1}. \quad (6.93)$$

Como já foi provado que o sistema é estável, sabe-se que  $|a_{ref} - k_e| < 1$ . Assim, a medida que  $k \rightarrow \infty$ , os elementos de expoente  $k$  tendem a zero quanto maior o valor de  $|a_{ref} - k_e|$ . Isso permite a conclusão de que a velocidade de convergência do sistema com modelo de referência realimentado ( $k_e \neq 0$ ) é maior.

O efeito da perturbação neste caso é visto de maneira a elevar a amplitude da envoltória do erro de maneira uniforme em ambos os controladores, tal que a conclusão obtida para o sistema não perturbado é mantida aqui.

### 6.2.2.2 Caso vetorial

Expandimos agora o resultado da seção anterior para sistemas de ordem  $n$  descritos em sua forma discreta por:

$$\begin{aligned} x_p(k) &= \mathbf{A}x_p(k) + \mathbf{B}u(k) + \xi(k) \\ y_p(k) &= \mathbf{c}^T x_p(k). \end{aligned} \quad (6.94)$$

O modelo de referência de malha fechada será

$$\begin{aligned} x_{ref}(k+1) &= \mathbf{A}_{ref}x_m + \mathbf{B}_{ref}r - \mathbf{L}(y_p - y_m) \\ y_{ref}(k) &= \mathbf{c}^T x(k) \end{aligned} \quad (6.95)$$

Dado um controlador do tipo  $u = \hat{\Theta}^T \omega$ , com  $\hat{\Theta} = [\hat{\Theta}_x \ \hat{\theta}_r]^T$  e  $\omega = [x_p \ r]$ , encontra-se que a dinâmica do erro de estado será dada por

$$e(k+1) = (\mathbf{A}_{ref} + \mathbf{L}\mathbf{c}^T)e(k) + \underbrace{\mathbf{B}\Delta\Theta^T}_{\Phi(k)}\omega + \xi(k), \quad (6.96)$$

onde  $\Delta\Theta = \hat{\Theta} - \Theta$  é o erro de convergência dos parâmetros do controlador.

Com base na Equação (6.96), a resposta do erro será dada por (OGATA, 1995)

$$\begin{aligned}
e(k) = (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{L}\mathbf{c}^T)^k e_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{L}\mathbf{c}^T)^i \Phi(k-1-i) \\
+ \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{L}\mathbf{c}^T)^i \xi(k-1-i)
\end{aligned} \tag{6.97}$$

Conforme demonstrado na Seção 6.2.1, os sistema será estável e os sinais do sistema são limitados, assim, existe  $\Phi_{max} > 0$  tal que  $|\Phi(k)|_{\ell_\infty} \leq \Phi_{max}$  para todo  $k$ . Analogamente, considerando-se que a perturbação é limitada por hipótese, existe  $\xi_{max} > 0$  tal que  $|\xi(k)|_{\ell_\infty} \leq \xi_{max}$  para todo  $k$ .

Pode-se portanto escrever um limitante para o erro dado por

$$|e(k)|_{\ell_\infty} \leq |(\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{L}\mathbf{c}^T)^k e_0|_{\ell_\infty} + (\Phi_{max} + \xi_{max}) \left| \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{L}\mathbf{c}^T)^i \right|_{\ell_\infty} \tag{6.98}$$

A somatória é uma progressão geométrica matricial, e sua soma até o elemento  $(k-1)$  tem expressão conhecida, desde que a matriz  $[I - (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{L}\mathbf{c}^T)]$  seja inversível. Assim,

$$|e(k)|_{\ell_\infty} \leq |(\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{L}\mathbf{c}^T)^k e_0|_{\ell_\infty} + (\Phi_{max} + \xi_{max}) \|[I - (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{L}\mathbf{c}^T)]^{-1} [I - (\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{L}\mathbf{c}^T)^k]\|_{\ell_\infty} \tag{6.99}$$

Assim como no caso não perturbado, a escolha de  $\mathbf{L}$  deve ser feita de maneira a reduzir a magnitude dos autovalores da matriz composta  $(\mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{L}\mathbf{c}^T)$ , garantindo uma resposta mais rápida na convergência do erro. Nota-se, porém, que assim como no caso escalar, a inclusão da perturbação limitada levou apenas a um aumento geral da amplitude da envoltória de convergência, influenciando igualmente os modelos com controle de referência em malha aberta ( $L = 0$ ) e malha fechada ( $L \neq 0$ ).

### 6.2.3 Estudos de simulação

Esta seção apresenta resultados ilustrativos do efeito da estrutura realimentada no modelo de referência discreto, para diferentes entradas, em presença de uma perturbação limitada.

Seja uma planta de primeira ordem, dada por

$$\dot{x}_p = x_p + 4u + \xi, \quad x_p(0) = 0, \quad (6.100)$$

em que  $\xi$  representará uma perturbação em pulso com amplitude 2 e duração de 0.5 s, aplicado em  $t = 1$  s.

Considera-se, portanto, dois modelos de referência discretos com frequência de amostragem  $F_s = 50\text{Hz}$ . O modelo de dinâmica  $x_{m0}(k+1)$  será o modelo de referência tradicional, enquanto o modelo de dinâmica  $x_m(k+1)$  é o modelo de referência realimentado. Ou seja,

$$\begin{aligned} x_{m0}(k+1) &= 0.9802x_{m0} + 0.0198r(k) & x_{m0}(0) &= 0 \\ x_m(k+1) &= 0.9802x_{m0} + 0.0198r(k) + k_e(x_p(k) - x_m(k)) & x_m(0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Para os dois casos, toma-se um controlador do tipo *feed-forward* dado por

$$u(k) = \hat{k}_x(k)x_p(k) + \hat{k}_r(k)r(k) = \hat{K}^T \omega_f, \quad (6.102)$$

e leis de adaptação de parâmetros dadas por

$$\begin{aligned} \hat{K}(k+1) &= \hat{K}(k) - \gamma \frac{\omega_f(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \\ \hat{\varphi}(k+1) &= \hat{\varphi}(k) - \frac{e_2(k)\varepsilon_1(k)}{m(k)^2} \\ G_{mL}(z) &\triangleq [z - 0.9808 + k_e]^{-1} \\ \varepsilon_1(k) &= e_1(k) + \hat{\varphi}(k)e_2(k) \\ e_2(k) &= \hat{K}(k)^T G_{mL}(z)\omega(k) - G_{mL}(z)\hat{K}(k)^T \omega(k). \end{aligned} \quad (6.103)$$

onde  $\omega_f(k) = G_m(z) [x_p(k) \ r(k)]^T$ ,  $\Delta K(k) = [\Delta K_x(k) \ \Delta K_r(k)]$  e  $m(k)^2 = 1 + \omega_f^T(k)\omega_f(k) + e_2^2$  é o fator de normalização.

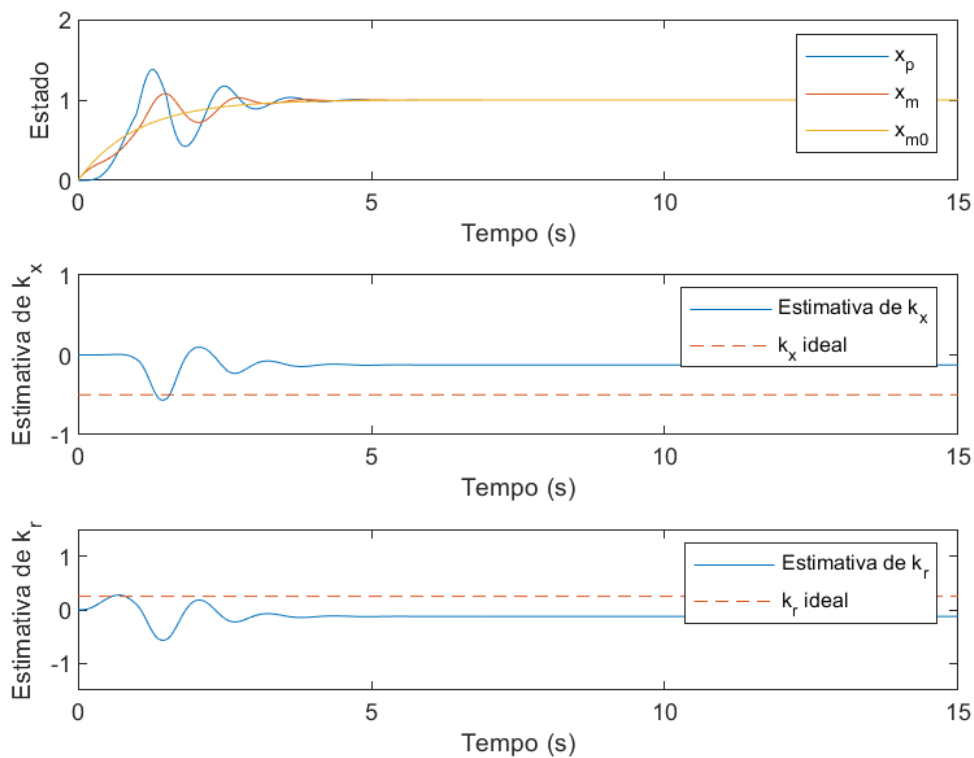
A fim de simular a planta, em regime contínuo, considerou-se um integrador de Runge-Kutta de quarta ordem de passo fixo, com frequência de amostragem igual a 1000 Hz. O sistema de controle, por sua vez, foi simulado com frequência de amostragem igual a 50 Hz, com blocos de transição apropriados.

### 6.2.4 $r(t) = 1$

Inicialmente, considera-se como entrada de referência um degrau unitário discretizado em  $F_s = 50Hz$ . As Figuras 6.9, 6.10 e 6.11 mostram a resposta deste controlador com  $\gamma = 0.4$  e  $k_e = 0.05$ ,  $k_e = 0.1$  e  $k_e = 0.2$ , respectivamente.

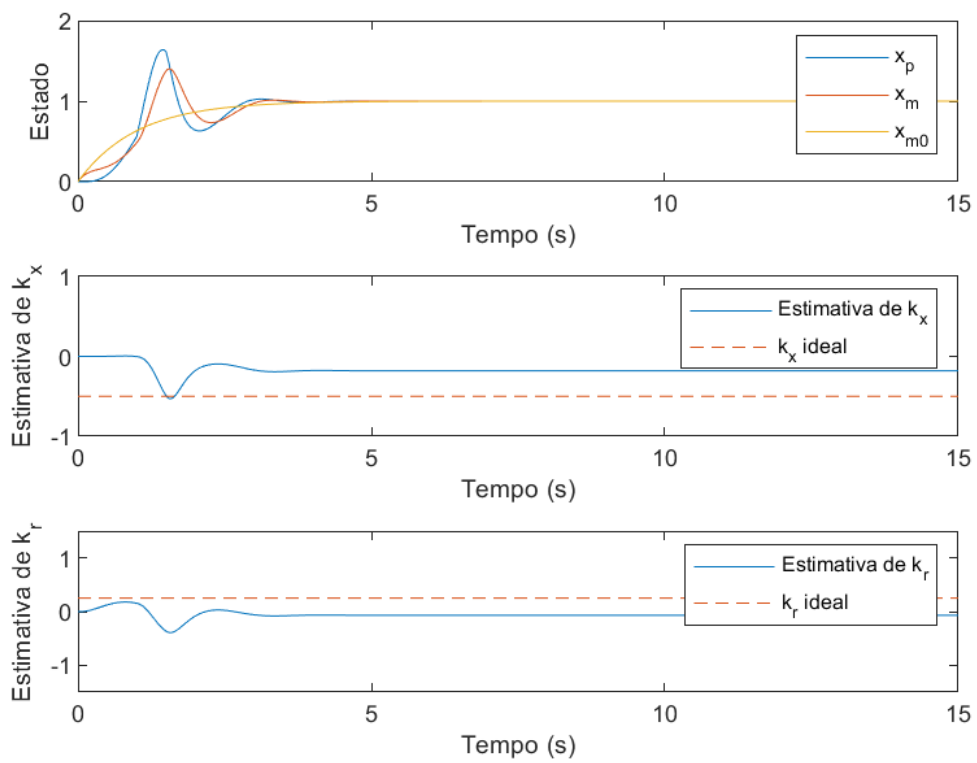
Assim como observado no caso contínuo, nota-se que a perturbação na planta é também realimentada junto ao termo do erro no modelo de referência. Como a perturbação simulada foi um pulso positivo no instante de 1s, nota-se que a amplitude tanto da planta quanto do modelo de referência aumentam, mesmo o erro sendo pequeno entre os dois.

Figura 6.9 - Resposta de um sistema CRM, com  $\gamma = 0.4$ ,  $k_e = 0.05$  e entrada degrau, com perturbação limitada.



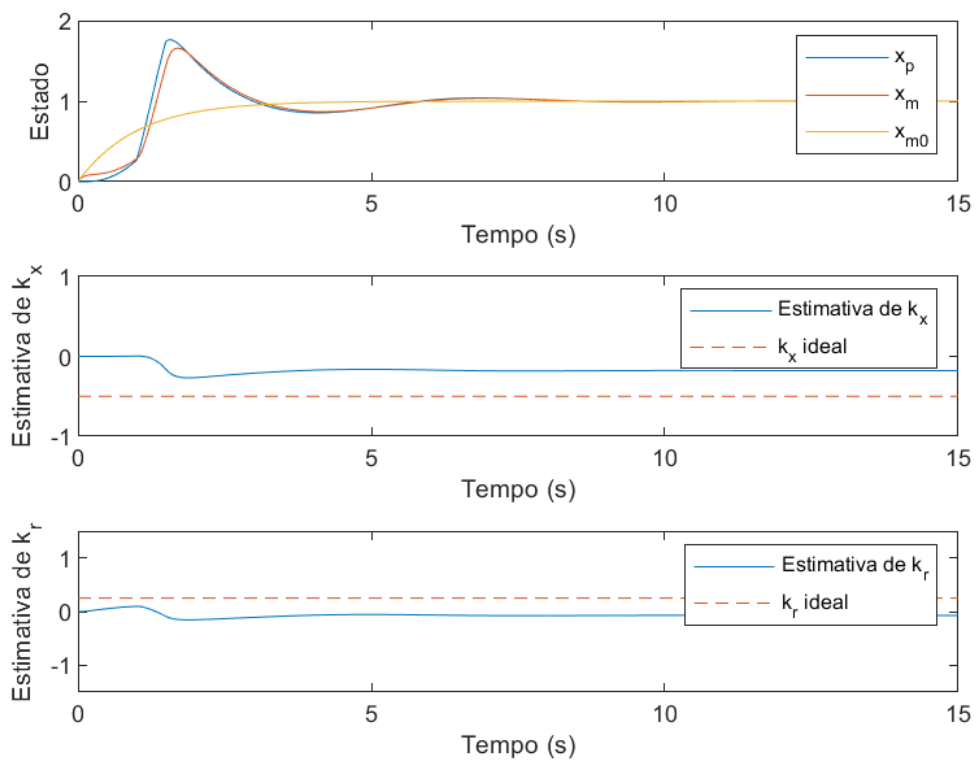
Fonte: Produção da autora.

Figura 6.10 - Resposta de um sistema CRM, com  $\gamma = 0.4$ ,  $k_e = 0.1$  e entrada degrau, com perturbação limitada.



Fonte: Produção da autora.

Figura 6.11 - Resposta de um sistema CRM, com  $\gamma = 0.4$ ,  $k_e = 0.2$  e entrada degrau, com perturbação limitada.



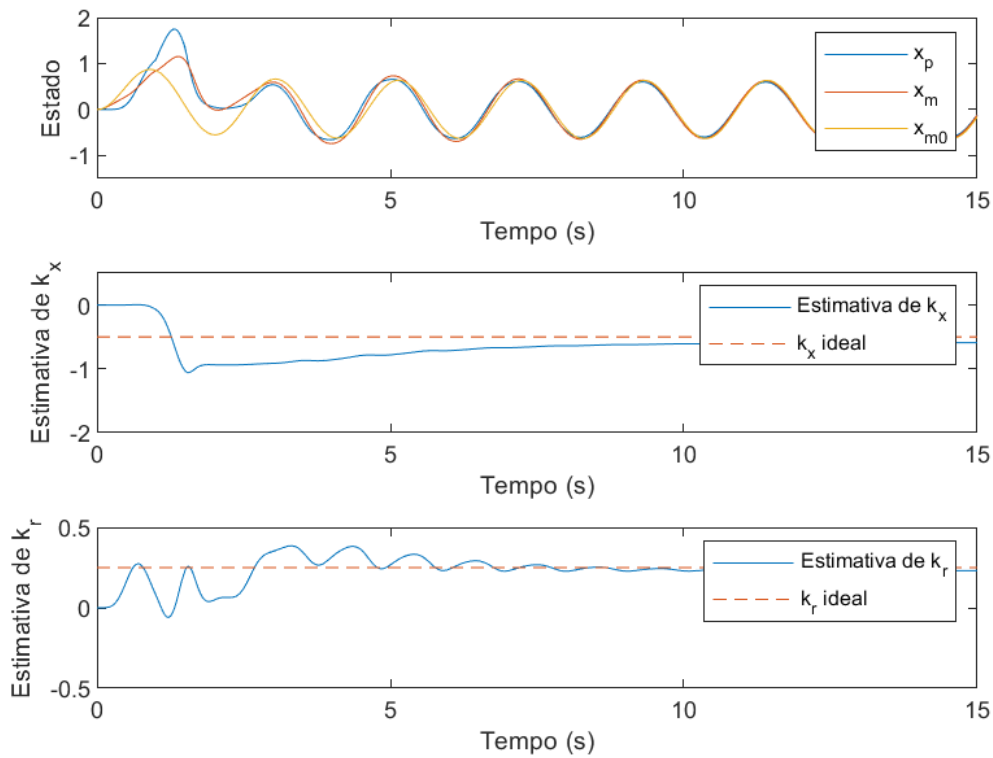
Fonte: Produção da autora.

### 6.2.5 $r(t) = 2\sin(3t)$

A Figura 6.12 apresenta a resposta do controlador adaptativo por modelo de referência em malha fechada em presença de uma entrada senoidal  $r(t) = 2\sin(3t)$ , discretizada em  $F_s = 50Hz$ .

Observa-se que, em presença de uma entrada rica, existe convergência dos parâmetros para seus valores ideais.

Figura 6.12 - Resposta de um sistema CRM, com  $\gamma = 0.4$ ,  $k_e = 0.1$  e entrada senoidal  $r = 2\sin(3t)$ , com perturbação limitada.



Fonte: Produção da autora.





## 7 APLICAÇÃO PRÁTICA DO CONTROLE ADAPTATIVO POR MODELO DE REFERÊNCIA EM MALHA FECHADA NO REGIME DISCRETO

Conforme mencionado anteriormente, diversos trabalhos com análises numéricas do desempenho de estruturas de controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada no regime contínuo foram encontrados na literatura (LAVRETSKY, 2012; GIBSON, 2014; ZOLLITSCH et al., 2015). Por outro lado, não encontrou-se trabalhos que focassem no desempenho, nem mesmo com análises de simulação, de uma estrutura discreta como a descrita no Capítulo 5.

Assim, este capítulo opta por detalhar o modelo discreto aplicado em uma planta de segunda ordem com um polo nulo. Este exemplo, também utilizado por Carrijo e Leite Filho (2012), é um caso particularmente interessante pois pode ser aplicado diretamente no controle de um atuador utilizado em mísseis anti-tanque, conforme explorado na Seção 7.2.

### 7.1 Controle adaptativo discreto por modelo de referência em malha fechada de uma planta de segunda ordem

Inicialmente, toma-se uma planta representada pela função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - s} = \frac{1}{s(s - 1)}. \quad (7.1)$$

Escolhe-se o mesmo modelo de referência em malha aberta proposto por Carrijo (2008), dado por

$$G_M(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}. \quad (7.2)$$

Ao contrário do que ocorre no modelo de referência tradicional detalhado em Carrijo e Leite Filho (2010), a implementação deste controlador depende na verdade de uma função de transferência expandida  $G_{m_L}(z) \triangleq \mathbf{c}^T [zI - (\mathbf{A}_m + L_c \mathbf{c}^T)]^{-1} \mathbf{B}_m$ .

Assim, escolhe-se uma representação no espaço de estados para o modelo de referência da Equação (7.2), ainda no contínuo, dada por

$$\dot{x}_{m0_c}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{A_{m_c}} x_{m0_c}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_{m_c}} r(t) \quad (7.3)$$

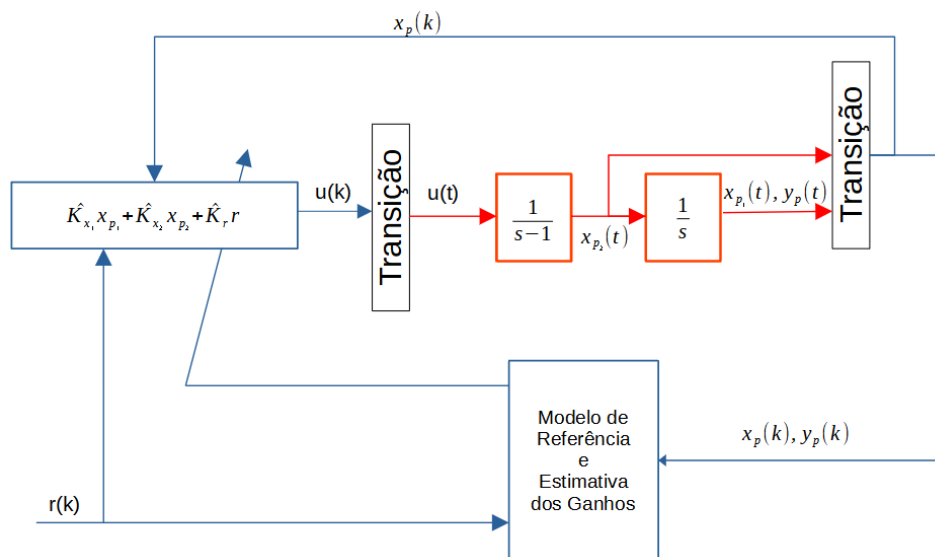
$$y_{m_{cont}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_{m0_c}.$$

Observa-se que, até então, estamos considerando o modelo de referência em malha aberta,  $x_{m0}$ , ou seja, o modelo de referência que descreve o comportamento para o qual deseja-se que a planta convirja uma vez que o erro tenda a zero.

A partir desta representação em espaço de estados, é possível calcular a função de transferência expandida no contínuo como  $G_{m_L}(s) \triangleq c^T [sI - (A_{m_c} + L_c c^T)]^{-1} B_{m_c}$ . Esta função pode então ser implementada no regime discreto,  $G_{m_L}(z)$ , por meio de um *zero-order-hold* em função do tempo de amostragem.

A Figura 7.1 apresenta a estrutura implementada na prática, aqui simulada. Os elementos em vermelho representam a planta no contínuo, enquanto os elementos em azul são os elementos do controlador discreto. Os blocos de transição representam elementos apropriados (*zero-order-hold* ou *sampler*).

Figura 7.1 - Implementação do Sistema Controlado por Controlador Discreto.



Fonte: Produção da autora.

### 7.1.1 Resposta ao degrau

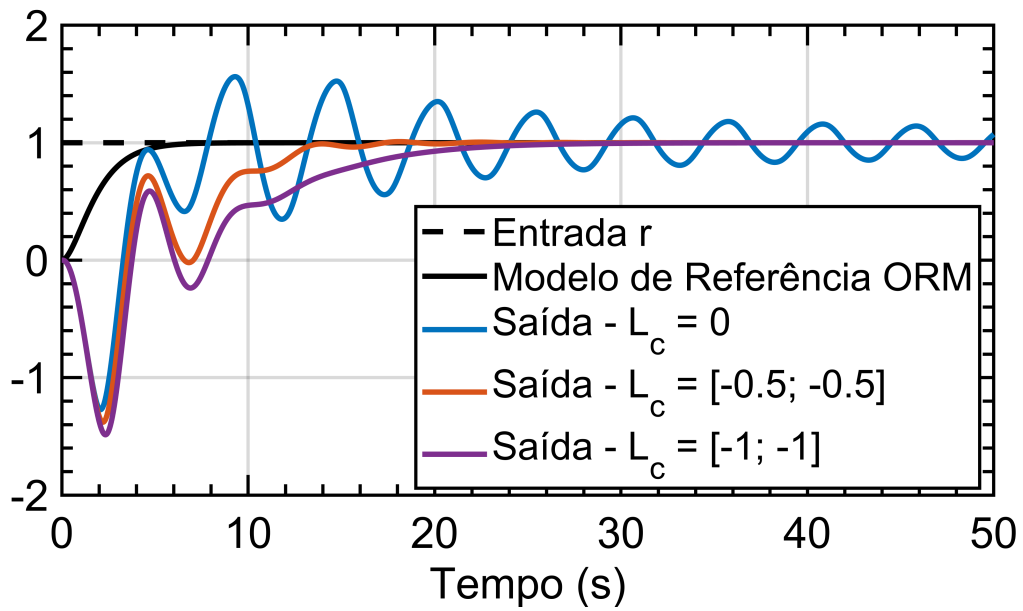
Inicialmente, considerou-se uma resposta a uma entrada degrau unitária. A planta tem condição inicial nula em todos os estados, e utilizou-se um tempo de amostragem de 200 Hz para simular o contínuo. O controlador, por sua vez, tem frequência de amostragem  $T_s = 20Hz$  e as condições iniciais utilizadas para a estimativa dos ganhos foram  $[\hat{K}_{x_1}(0) \quad \hat{K}_{x_2}(0) \quad \hat{K}_r(0)] = [-1 \quad -1 \quad -1]$ . Em todos os casos, tomou-se  $\sigma = 1$  e  $\gamma = 0.2$ .

A Figura 7.2 compara a saída da planta controlada em relação ao modelo de referência em malha aberta (ORM) projetado para diferentes valores do ganho de realimentação. Observa-se que a saída controlada por meio do modelo de referência tradicional (equivalente a  $L_c = 0$ ) apresenta considerável oscilação, o que é atenuado pela presença da realimentação do modelo de referência.

Por outro lado, a realimentação altera o modelo de referência enquanto o erro não é nulo, o que faz com que o tempo de convergência seja maior em presença de  $L$ . Isto é evidenciado pela Figura 7.3, que apresenta o erro de saída  $e_1$ . Observa-se que o erro converge para zero bem mais rapidamente que o que ocorre no modelo tradicional. Mais que isso, nota-se que, apesar da saída com  $L = [-1 \quad -1]$  ser a mais afastada da referência nos primeiros cinco segundos, é a que apresenta menor erro de rastreamento no mesmo período.

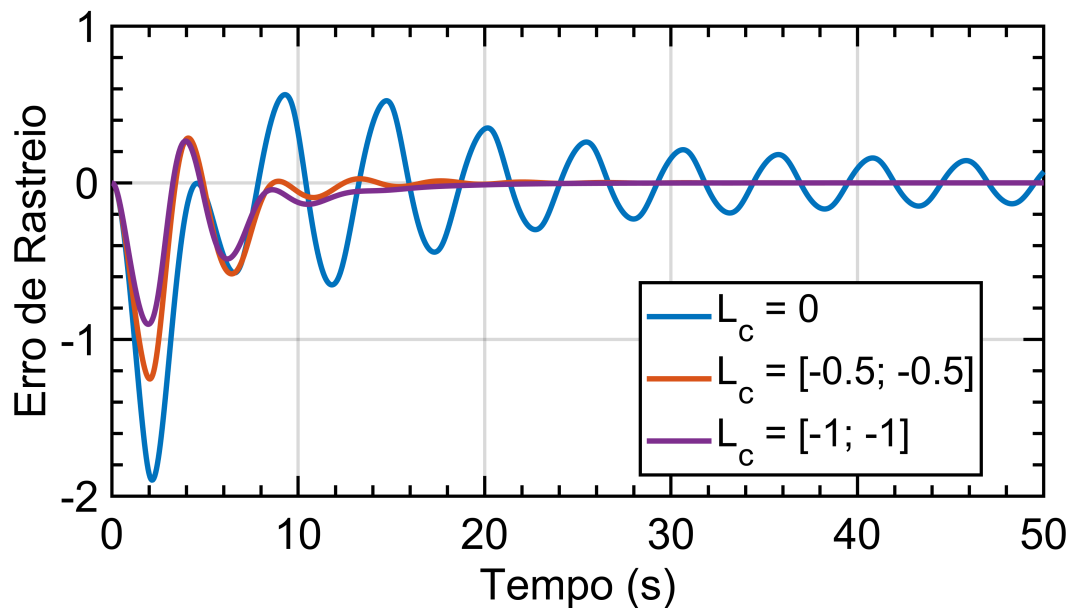
Um outro elemento interessante é observar o comportamento dos ganhos estimados pelo controlador adaptativo ao longo do tempo, dada pelas Figuras 7.4, 7.5 e 7.6. Dado o modelo de referência e a planta, sabe-se que os ganhos de *matching* para este sistema são  $[K_{x_1} \quad K_{x_2} \quad K_r] = [-1 \quad -3 \quad 1]$ . Entretanto, nota-se que os ganhos estabilizam em valores diferentes daqueles do *matching*. Mais que isso, nota-se que os ganhos  $\hat{K}_{x_1}$  e  $\hat{K}_r$  no modelo de referência tradicional são consideravelmente oscilatórios, assim como ocorre com a resposta do sistema.

Figura 7.2 - Saída da planta representada pela Equação (7.1) a uma entrada degrau.



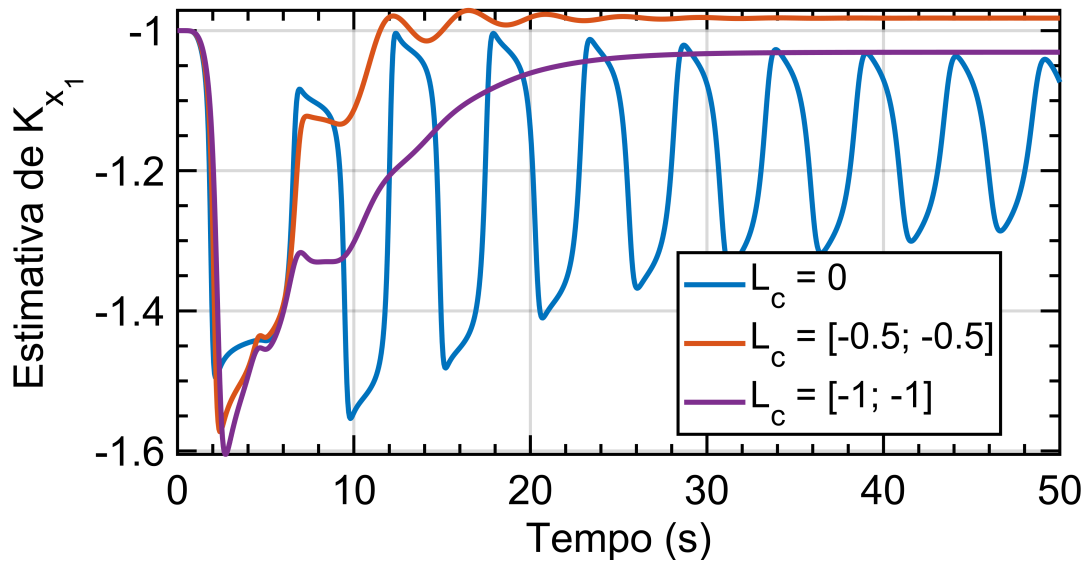
Fonte: Produção da autora.

Figura 7.3 - Erro  $e_1$  perante uma entrada degrau.



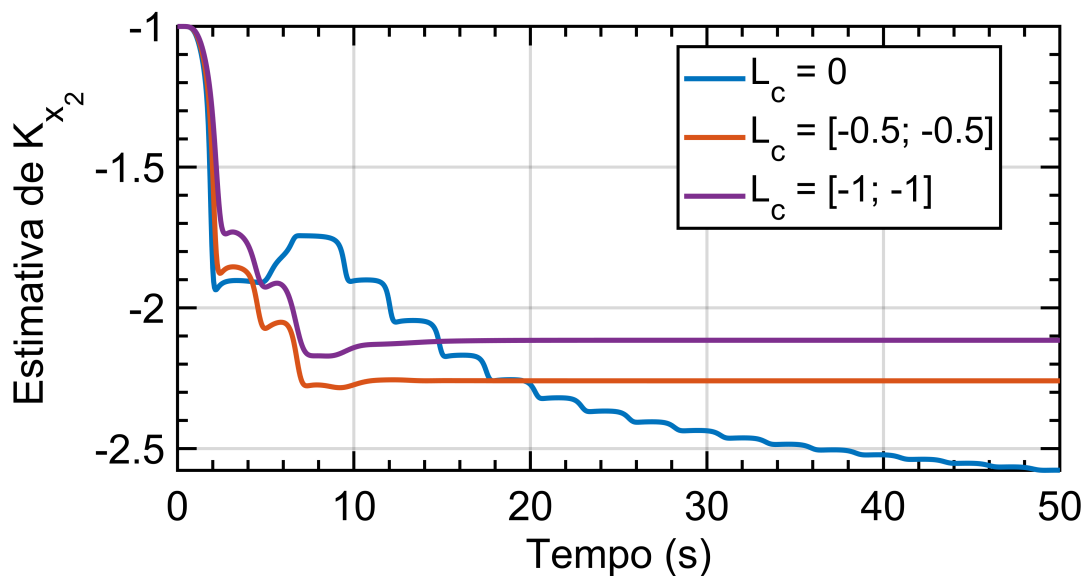
Fonte: Produção da autora.

Figura 7.4 - Variação no ganho  $\hat{K}_{x_1}$  perante uma entrada degrau.



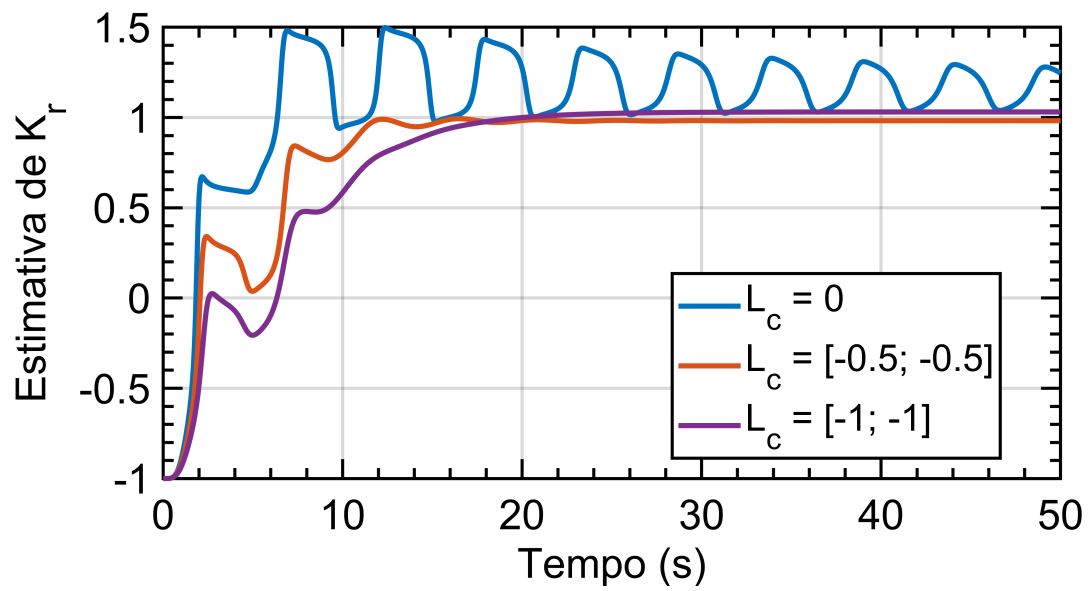
Fonte: Produção da autora.

Figura 7.5 - Variação no ganho  $\hat{K}_{x_2}$  perante uma entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.

Figura 7.6 - Variação no ganho  $\hat{K}_r$  perante uma entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.

### 7.1.2 Resposta a uma entrada rica

A seguir, considerou-se uma entrada considerada, dada por  $r = \sin(0,15T_s k) + 3,5\sin(1,6T_s k) + 7\sin(10,85T_s k)$ , com  $T_s = 1/F_s = 0.05$ .

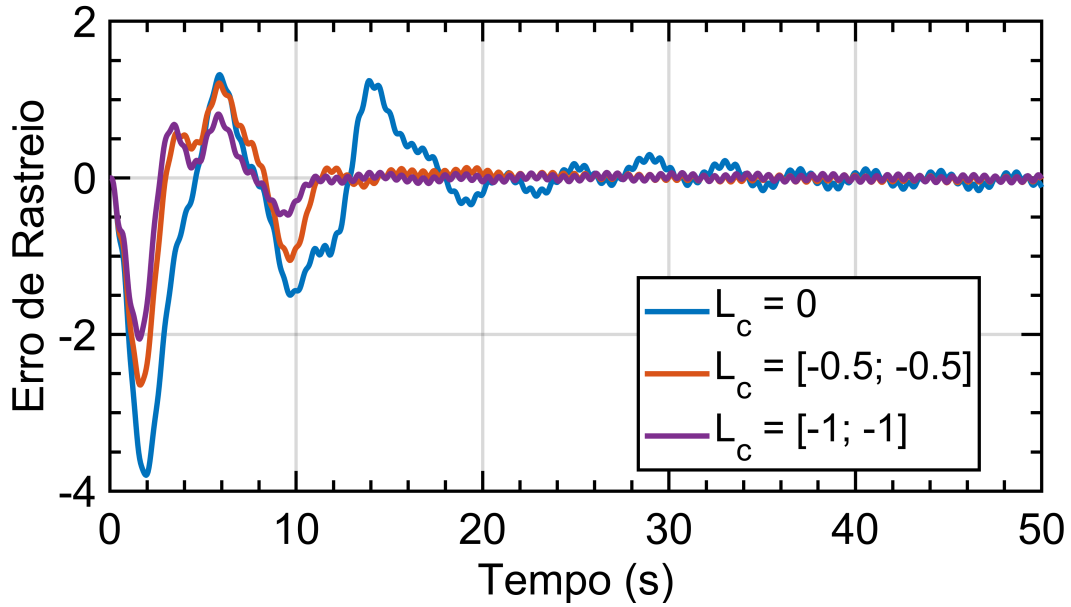
A Figura 7.7 mostra o erro  $e_1$  para este caso. Observa-se um comportamento parecido com aquele encontrado para a entrada em degrau, com o erro de rastreamento menor para  $L_c = [-1; -1]$  e uma convergência mais rápida do erro à zero quando comparado ao modelo de referência tradicional  $\ell_c = 0$ .

Entretanto, mesmo com o uso de três senoides, os ganhos não convergem para os valores de *matching*, como pode ser visto nas Figuras 7.8, 7.9 e 7.10. De fato, este resultado é coerente com aquele encontrado por Carrijo (2008), que mostra que, para um controlador de adaptação rápida, sem congelamento de parâmetros ( $N = 1$ , na nomenclatura daquele trabalho), não é possível garantir que os parâmetros do controlador convergirão para seu valor de *matching* em uma planta de segunda ordem, mesmo em presença de um sinal rico.

Conforme detalhado na prova de estabilidade do caso discreto, pode-se somente garantir que o erro  $e_1$  tenderá a zero, como visto na Figura 7.19, e que os parâmetros do controlador se estabilizarão, mas nada pode ser afirmado em relação à convergência dos parâmetros estimados pelo controlador. Carrijo (2008) demonstra que para que os parâmetros convirjam nesta planta, uma possível solução é congelar a adaptação dos parâmetros por um determinado número de amostras (N), mas esta arquitetura está fora do escopo deste trabalho.

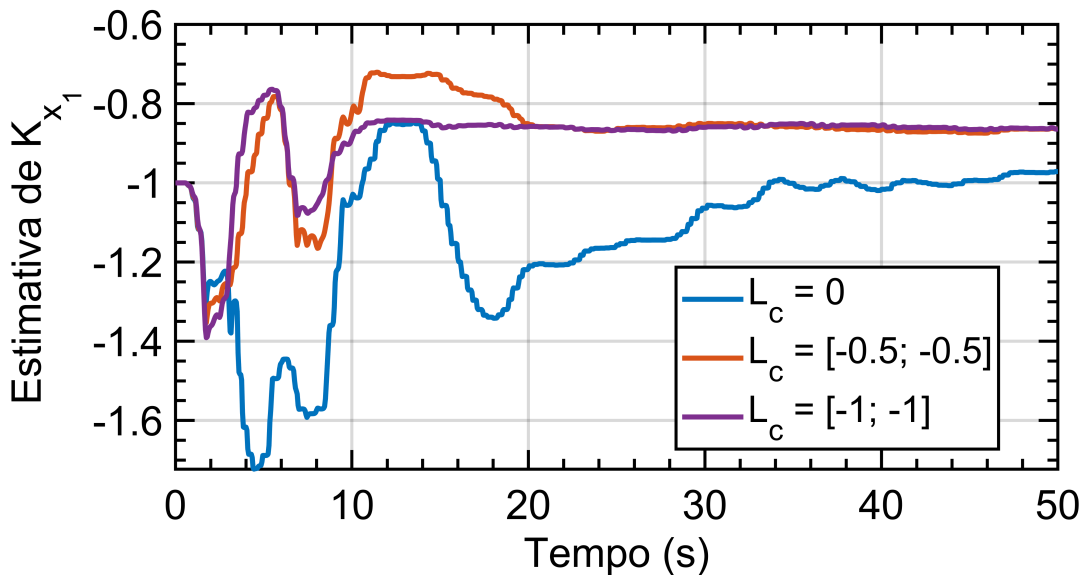
Este resultado também ilustra uma distinção relevante do controlador adaptativo discreto em relação ao controlador contínuo. Gibson (2014) afirma que, para o caso contínuo, a persistência de sinal é suficiente para garantir a convergência paramétrica em uma planta de segunda ordem, enquanto Carrijo (2008) demonstrou que a aplicação destes conceitos em controladores discretos requer maior estudo.

Figura 7.7 - Erro  $e_1$  perante uma entrada  $r = \text{sen}(0,15T_s k) + 3,5\text{sen}(1,6T_s k) + 7\text{sen}(10,85T_s k)$ .



Fonte: Produção da autora.

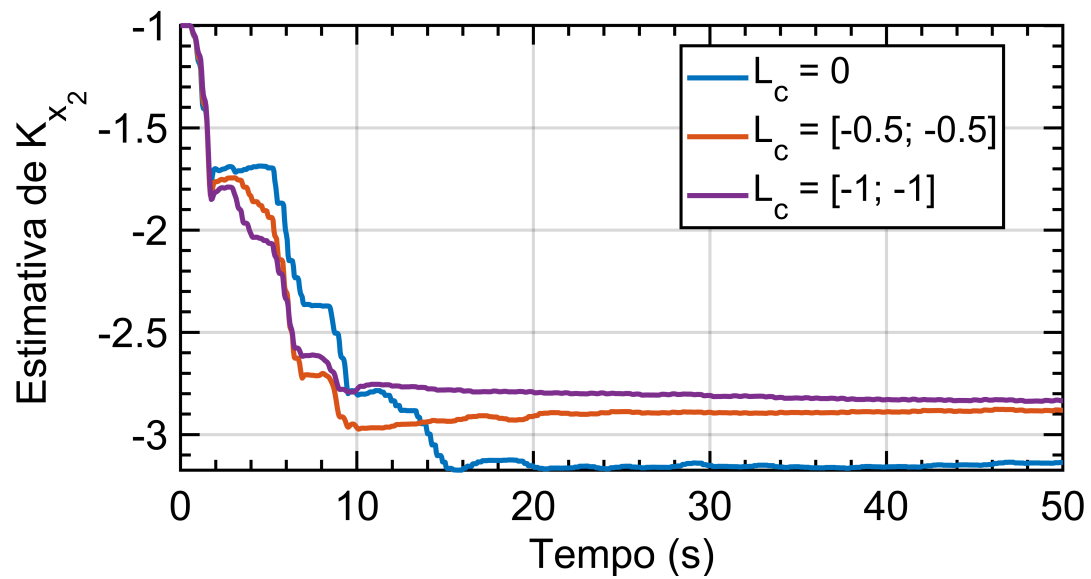
Figura 7.8 - Variação no parâmetro  $K_x(1)$  perante uma entrada  $r = \text{sen}(0,15T_s k) + 3,5\text{sen}(1,6T_s k) + 7\text{sen}(10,85T_s k)$ .



Fonte: Produção da autora.

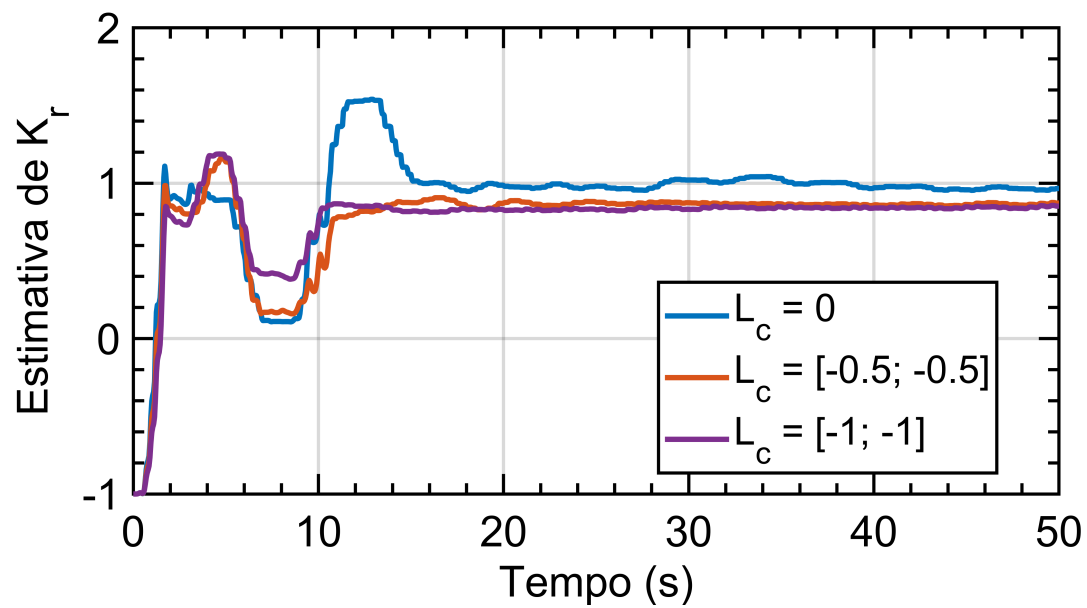


Figura 7.9 - Variação no parâmetro  $K_x(2)$  perante uma entrada  $r = \text{sen}(0,15T_s k) + 3,5\text{sen}(1,6T_s k) + 7\text{sen}(10,85T_s k)$ .



Fonte: Produção da autora.

Figura 7.10 - Variação no parâmetro  $K_r$  perante uma entrada  $r = \text{sen}(0,15T_s k) + 3,5\text{sen}(1,6T_s k) + 7\text{sen}(10,85T_s k)$ .



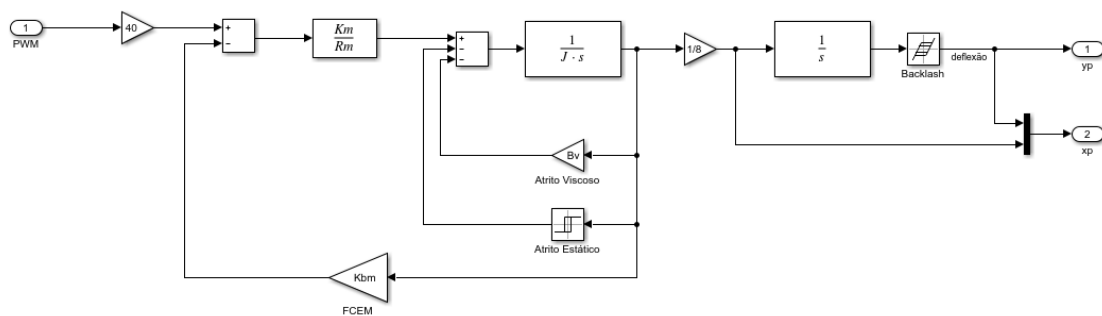
Fonte: Produção da autora.

## 7.2 Controle adaptativo discreto por modelo de referência em malha fechada de um atuador

Borges (2019) apresentou o estudo detalhado de um controlador digital para atuadores de superfícies aerodinâmicas do míssil anti-tanque MSS-1.2, do Exército Brasileiro. Por ser um míssil que voa baixo, muitas vezes ele pode ser recuperado no caso de lançamentos telemétricos, o que permite a reutilização de subsistemas, incluindo os atuadores, em lançamentos subsequentes. Esta reutilização, porém, faz com que os coeficientes da planta sejam distintos daqueles modelados inicialmente, o que torna este um caso interessante para a análise de um controlador adaptativo.

A Figura 7.11 apresenta o modelo da planta deste atuador, representando a deflexão em função do valor PWM entre 0 e 1 gerado pelo controlador. As variáveis presentes no modelo são apresentadas na Tabela 7.1.

Figura 7.11 - Modelo de um atuador.



Fonte: Adaptado de Borges (2019).

Desconsiderando-se as não linearidades presentes no modelo, a saber, um *backlash* proveniente da folga de engrenagem utilizada para aumentar a rotação do motor e a presença de um atrito estático, relevante em motores trabalhando em baixas velocidades, pode-se escrever a função de transferência que relaciona a deflexão do atuador com o *duty cycle* do sinal PWM como (BORGES, 2019)

$$\frac{\delta_c(s)}{PWM(s)} = \frac{4480}{s^2 + 112s} \quad (7.4)$$

Tabela 7.1 - Coeficientes do modelo do atuador.

Variável	Significado	Valor
$K_m$	Constante de proporcionalidade do torque do motor	0,064 Nm/A
$R_m$	Resistência da armadura	5,8 $\Omega$
$J$	Inércia	$1,25 \times 10^{-5}$ kgm <sup>2</sup>
$B_v$	Coeficiente de atrito viscoso	$7 \times 10^{-4}$ Nm/(rad/s)
$K_{bm}$	Constante de proporcionalidade FCEM	0,064 V/(rad/s)

Fonte: Borges (2019).

Esta planta tem características próximas daquela apresentada na seção anterior, com dois polos, sendo um em zero, apesar do segundo polo do exemplo anterior estar no semiplano direito. Este sistema, porém, exige uma resposta consideravelmente mais rápida. De fato, espera-se que o controlador tenha uma frequência de amostragem igual a  $F_s = 400\text{Hz}$ , e que a planta tenha uma resposta controlada com tempo de subida de, no máximo, 50 ms. Assim, escolhe-se um modelo de referência dado por

$$G_M(s) = \frac{4039}{s^2 + 88,97s + 4039}. \quad (7.5)$$

Este modelo tem um *overshoot* de 4,6% e um tempo de subida de 90% de 33,5 ms.

O modelo de referência em malha aberta pode ser então escrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}_{m0c}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4039 & -89 \end{bmatrix}}_{A_{mc}} x_{m0c}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 4039 \end{bmatrix}}_{B_{mc}} r(t) \\ y_{mcont} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_{m0c}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

A partir deste modelo, é possível calcular a função de transferência expandida, implementável no regime discreto.

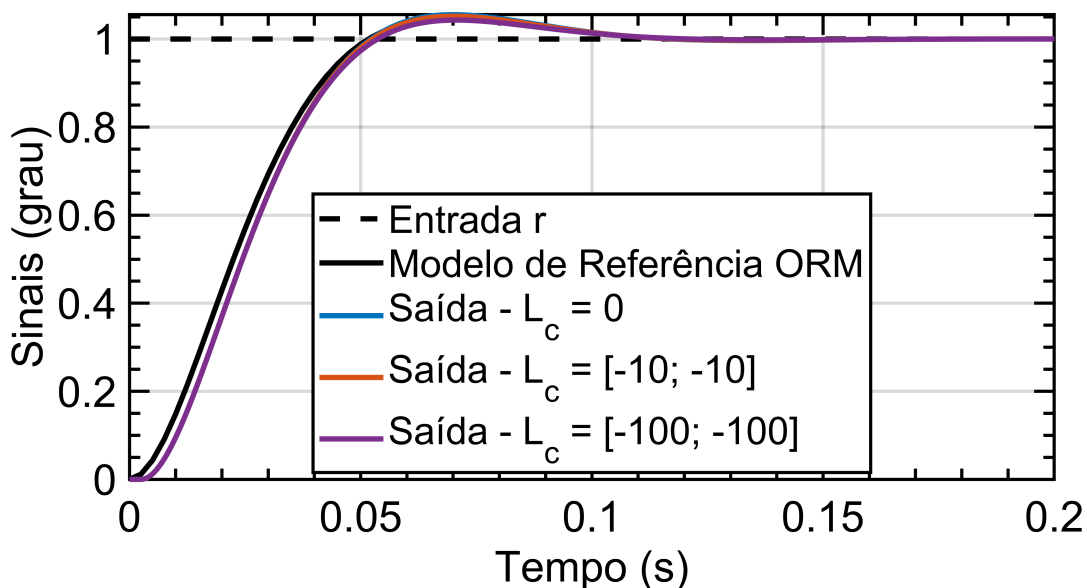
### 7.2.1 Resposta ao degrau

Considera-se primeiramente a resposta do sistema controlado a uma entrada degrau com valor de  $1^\circ$ . Dado que o controlador tem um tempo de amostra-

gem  $F_s = 400Hz$ , optou-se por simular a planta em  $F_{s_p} = 4000Hz$ , representando o contínuo. Novamente, tomou-se condições iniciais nulas para os estados da planta, e considerou-se como condições iniciais dos ganhos do controlador  $[\hat{K}_{x_1}(0) \ \hat{K}_{x_2}(0) \ \hat{K}_r(0)] = [-1 \ 0 \ 1]$ . Além disso, escolheu-se  $\sigma = 1$  e  $\gamma = 0.9$ .

A Figura 7.12 apresenta a saída controlada do atuador para diferentes configurações de modelo de referência. Ao contrário do que ocorreu com o caso anterior, não se observam oscilações no controlador adaptativo por modelo de referência tradicional, e a influência da realimentação no modelo de referência é pequena. Isso é evidenciado na Figura 7.13, onde é possível observar que, mesmo com o modelo de referência ORM, o erro inicial era consideravelmente baixo, fazendo com que a realimentação proposta não traga grande diferença na resposta do sistema.

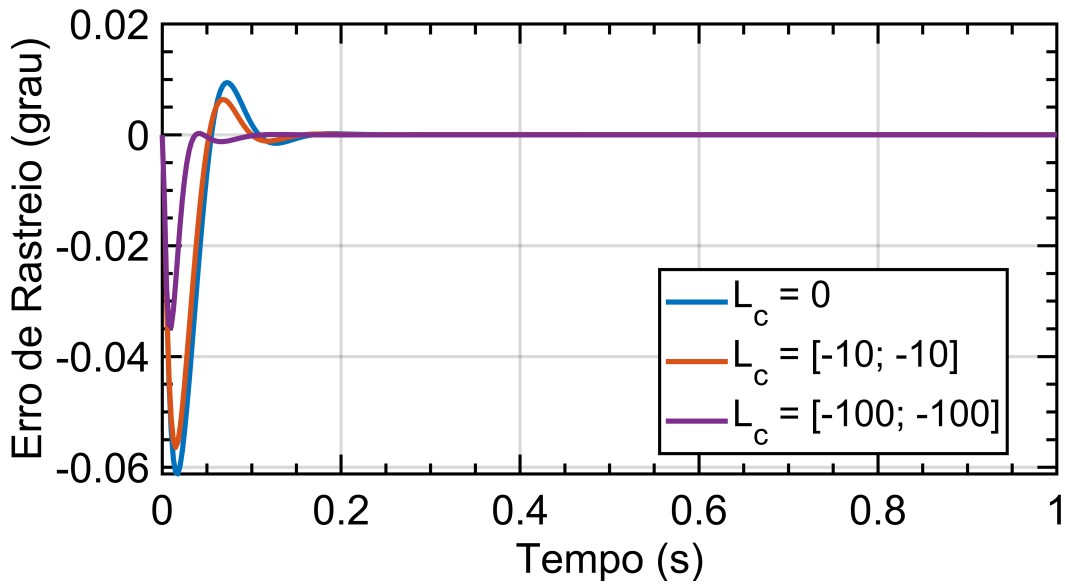
Figura 7.12 - Saída controlada do atuador perante entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.

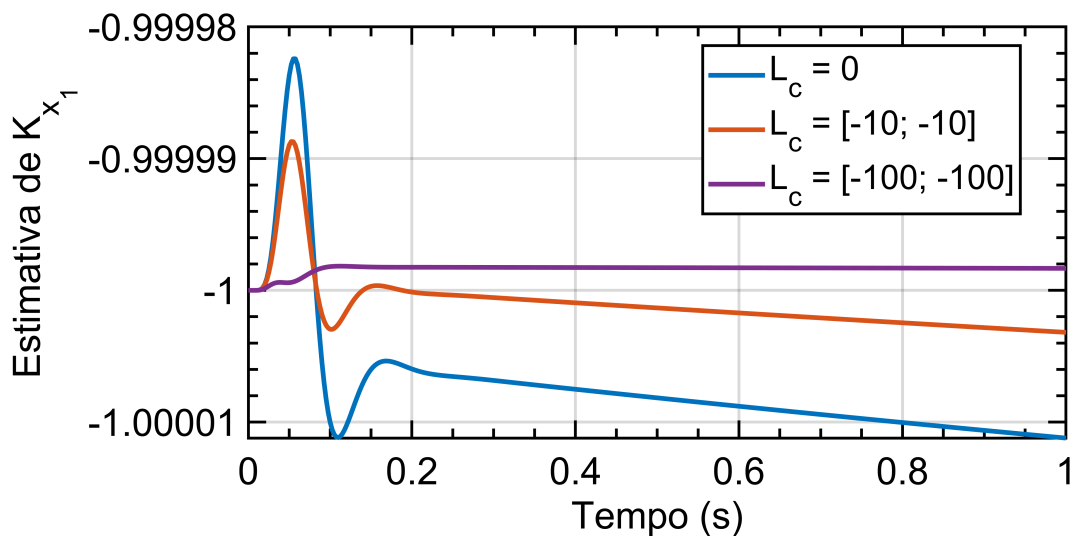
Além disso, as Figuras 7.14, 7.15 e 7.16 mostram que, neste caso, existe muito pouca adaptação dos ganhos, que variam muito lentamente em relação à resposta da planta.

Figura 7.13 - Erro de rastreo  $e_1$  perante entrada degrau.



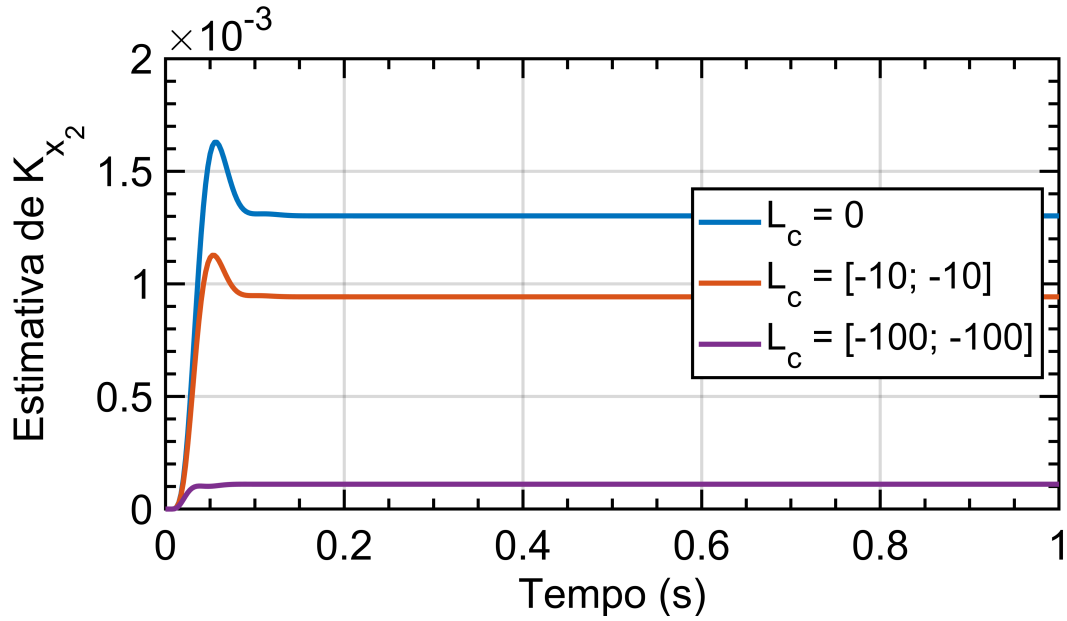
Fonte: Produção da autora.

Figura 7.14 - Variação no ganho  $\hat{K}_{x_1}$  perante uma entrada degrau.



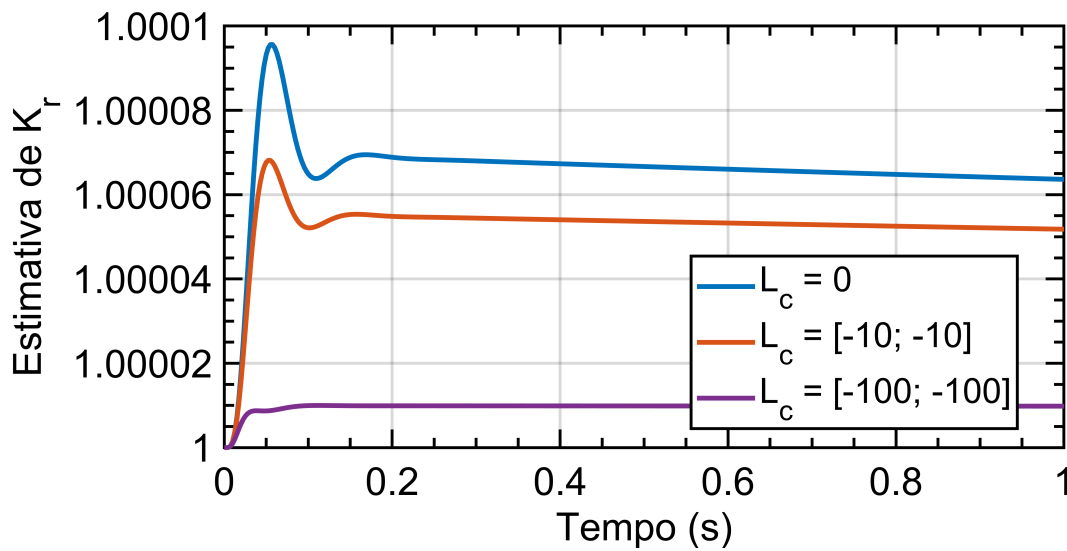
Fonte: Produção da autora.

Figura 7.15 - Variação no ganho  $\hat{K}_{x_2}$  perante uma entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.

Figura 7.16 - Variação no ganho  $\hat{K}_r$  perante uma entrada degrau.

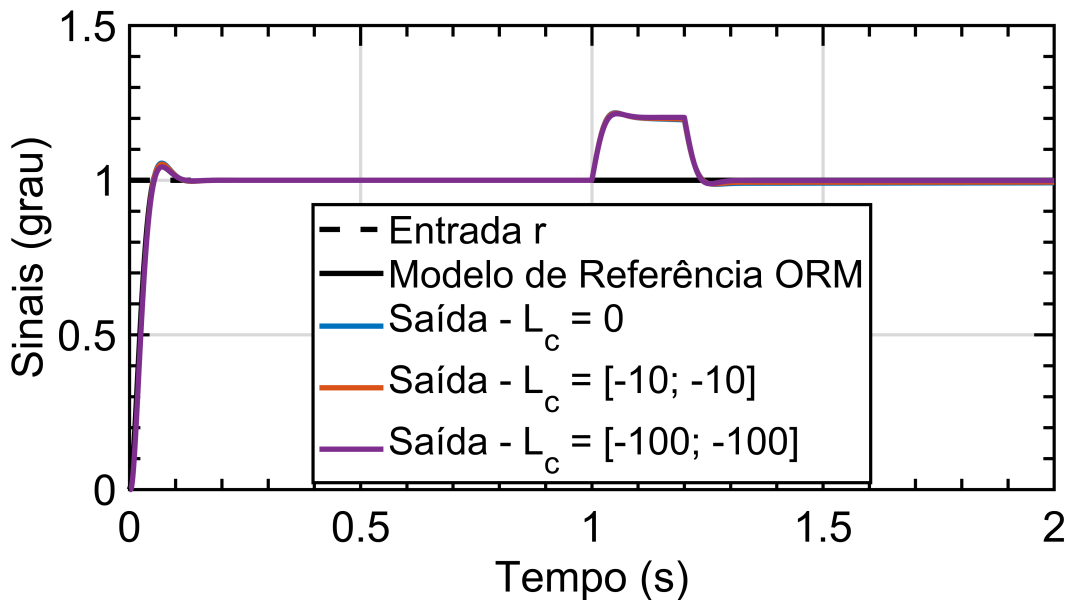


Fonte: Produção da autora.

## 7.2.2 Resposta ao degrau em presença de perturbações limitadas

A seguir, considerou-se uma perturbação externa limitada, inserida em forma de um pulso de 8 graus/s na planta, logo após a redução, representada como um bloco de ganho 1/8 na Figura 7.11.

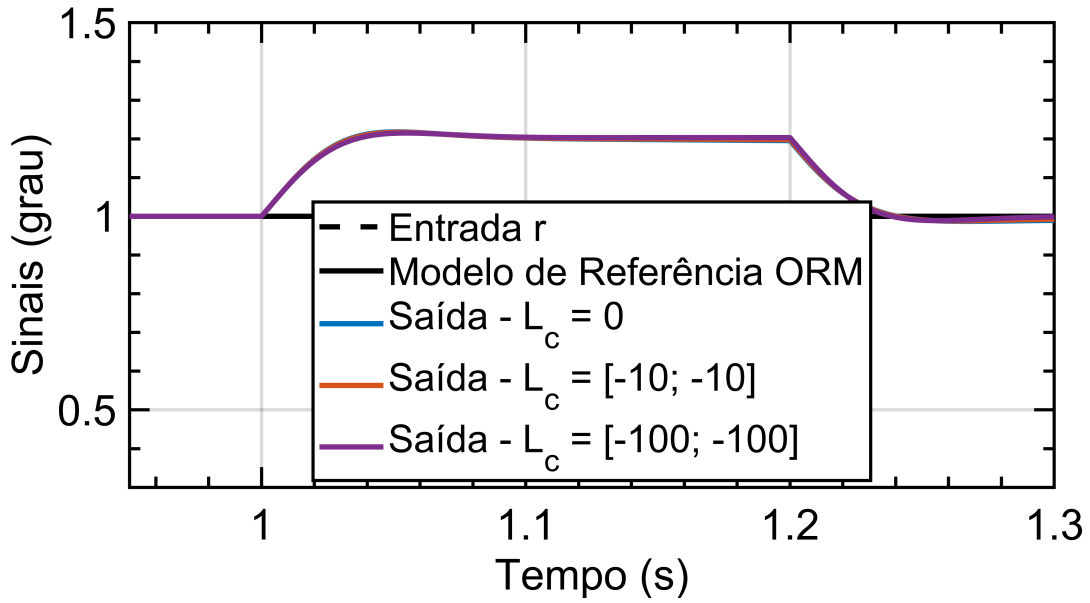
Figura 7.17 - Saída controlada do atuador perante entrada degrau e perturbação limitada.



Fonte: Produção da autora.

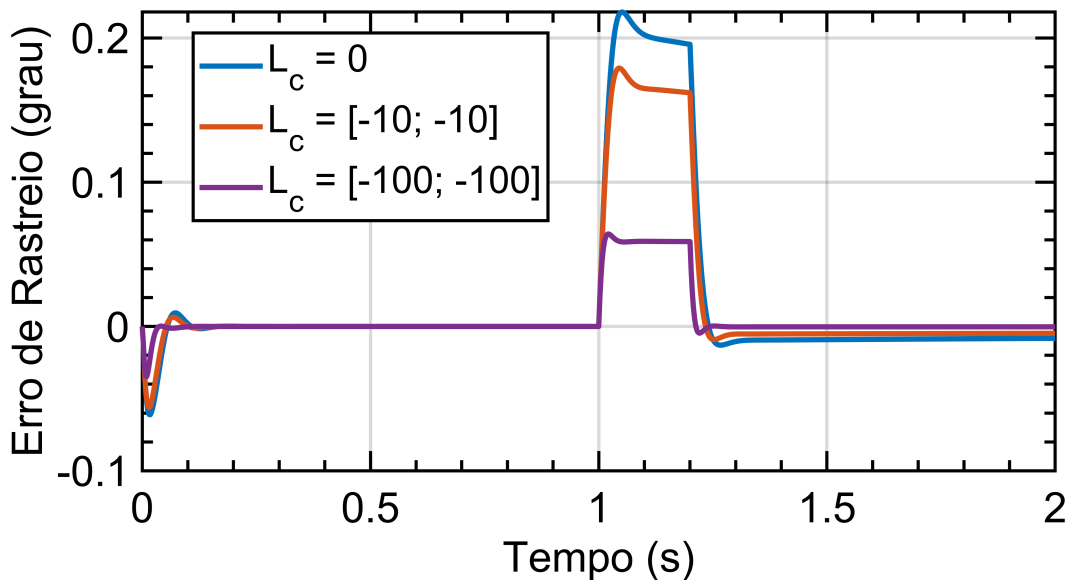
Como pode ser observado na Figura 7.17 e detalhada na Figura 7.18, novamente não foi vista uma diferença significativa entre o modelo de referência tradicional e o modelo de referência realimentado. Apesar do erro de rastreamento ser menor, como visto na Figura 7.19 e esperado dado a modificação do modelo de referência, os resultados parecem indicar que, dada a baixa taxa de adaptação vista neste sistema, o que se traduz em um transitório mais comportado mesmo com o modelo de referência tradicional, o controlador adaptativo em malha fechada não traz uma vantagem representativa nesta planta, mesmo em presença de perturbações externas.

Figura 7.18 - Saída controlada do atuador perante entrada degrau e perturbação limitada (detalhe).



Fonte: Produção da autora.

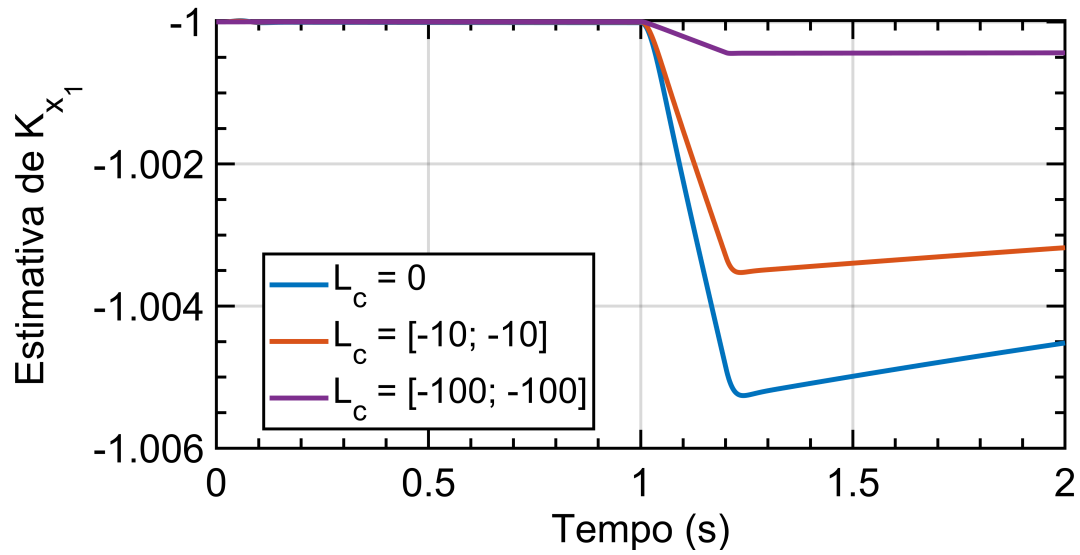
Figura 7.19 - Erro de rastreo  $e_1$  perante entrada degrau e perturbação limitada.



Fonte: Produção da autora.

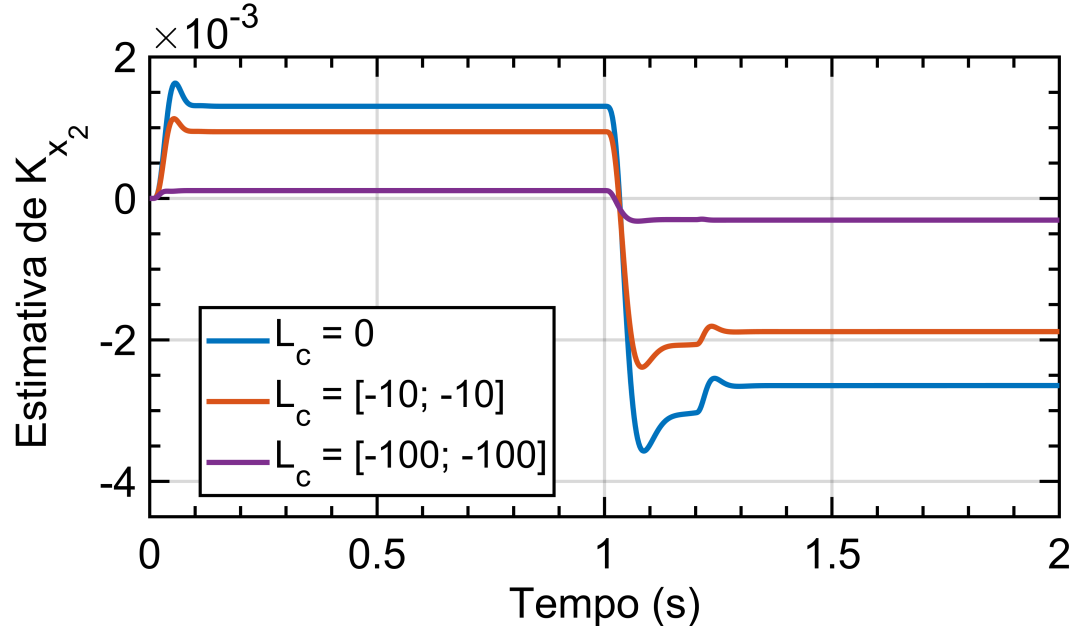


Figura 7.20 - Variação no ganho  $\hat{K}_{x_1}$  perante uma entrada degrau e perturbação limitada.



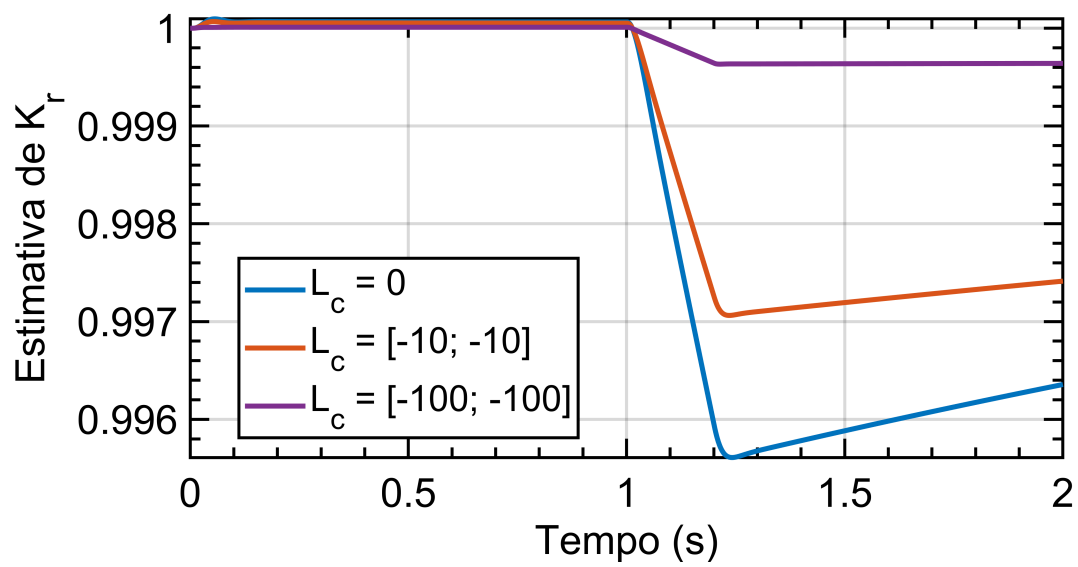
Fonte: Produção da autora.

Figura 7.21 - Variação no ganho  $\hat{K}_{x_2}$  perante uma entrada degrau e perturbação limitada.



Fonte: Produção da autora.

Figura 7.22 - Variação no ganho  $\hat{K}_r$  perante uma entrada degrau e perturbação limitada.



Fonte: Produção da autora.

### 7.2.3 Resposta ao degrau em presença de *backlash*

Finalmente, considera-se o efeito do *backlash* existente em função da engrenagem. Este elemento representa uma não linearidade não modelada na planta durante o projeto do controle, e exigiria um estudo mais detalhado dos efeitos de sua presença em relação à estabilidade do sistema para aplicações críticas. Esta seção, porém, busca apenas apresentar o efeito de um elemento como este - existente no atuador real - em uma planta controlada por meio de um controle adaptativo.

Os estudos apresentados em [Borges \(2019\)](#) indicam que a folga nas engrenagens tem influência considerável no comportamento dos atuadores, e isto é observado também no controle adaptativo. Nesta seção, simulou-se o efeito do *backlash* por meio de uma faixa de banda morta de 0.01.

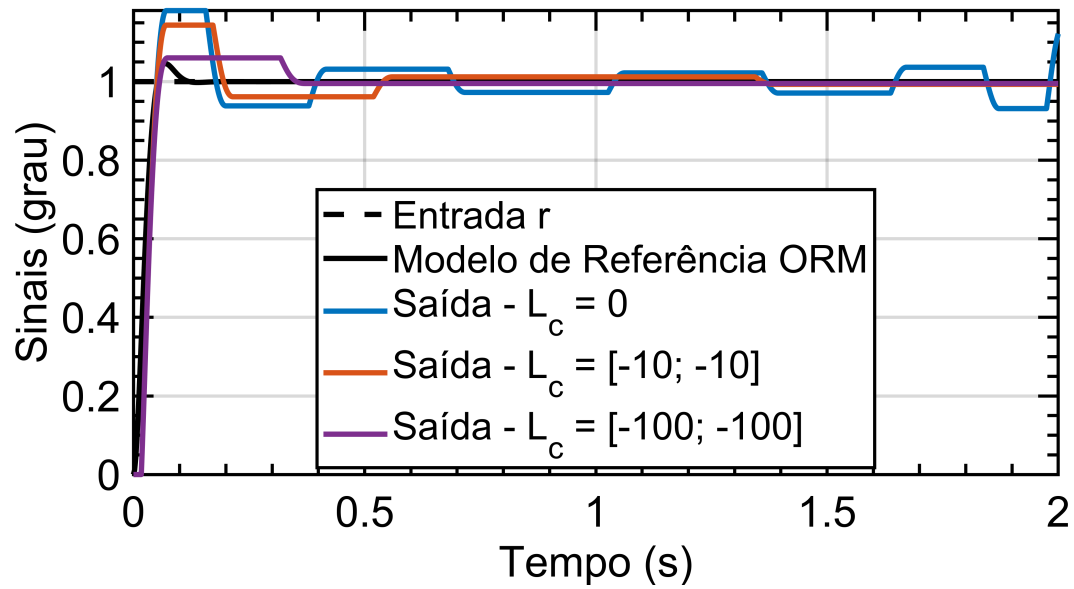
Um efeito interessante é observado com o uso do modelo de referência realimentado neste caso. Como pode ser visto na [Figura 7.23](#), a realimentação do erro no modelo de referência parece reduzir a influência do *backlash*, fazendo com que o modelo realimentado tenha um comportamento mais suave mesmo com a presença desta não-linearidade na planta, especialmente quando comparado com o modelo adaptativo tradicional, com  $L_c = 0$ , que é bem sensível ao *backlash* neste caso.

Estes resultados parecem indicar que a estrutura realimentada pode ser promissora para aplicações práticas dada a existência de uma não-linearidade conhecida na planta. É importante enfatizar que estes resultados são somente advindos de simulação, e apesar de promissores, qualquer aplicação real deste sistema de controle exige uma análise detalhada de robustez e estabilidade já considerando a não-linearidade causada pela folga de engrenagem.

Apesar disso, deve-se destacar que os resultados de simulação são bastante estáveis mesmo com uma planta não linear, o que é um resultado auspicioso no que diz respeito às aplicações reais desta arquitetura de modelo de referência. Sabe-se com base em testes reais que este elemento é crítico para a estabilidade do sistema de controle do atuador do MSS-1.2, apresentando o fenômeno de ciclo-limite em testes práticos ([BORGES, 2019](#)). Assim, um trabalho futuro interessante pode ser explorar as características de estabilidade e robustez de um sistema de controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada aplicada em uma planta com *backlash*, a fim de viabilizar a implementação deste

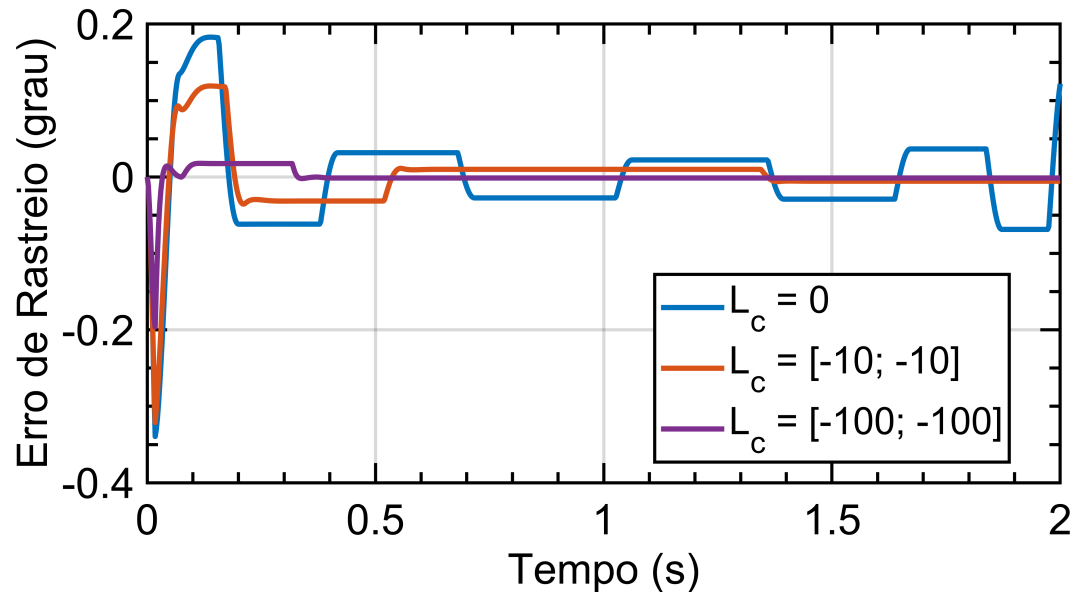
controlador neste problema especificamente.

Figura 7.23 - Saída controlada do atuador com backlash perante entrada degrau.



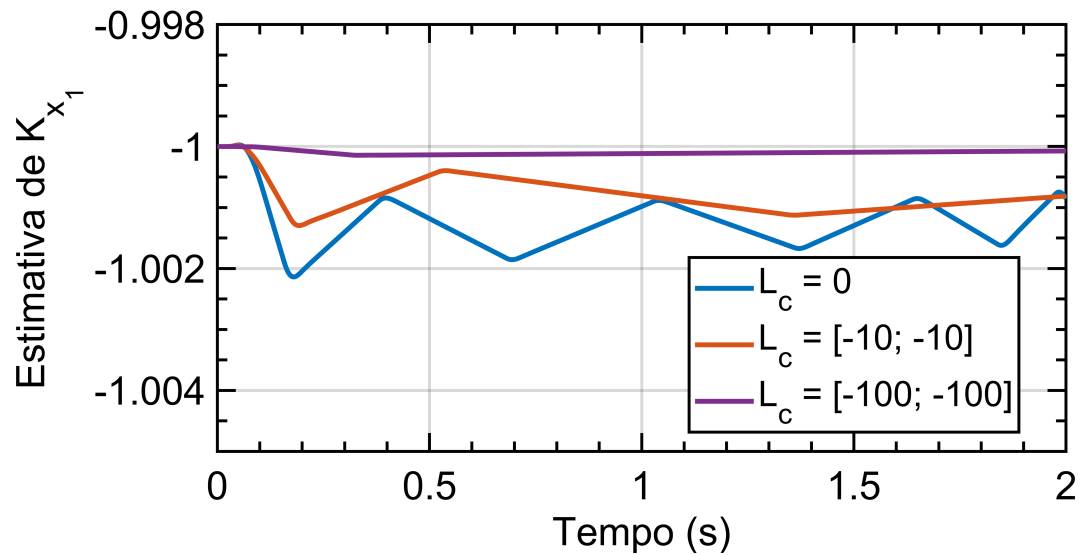
Fonte: Produção da autora.

Figura 7.24 - Erro de rastreo  $e_1$  para um atuador com backlash perante entrada degrau.



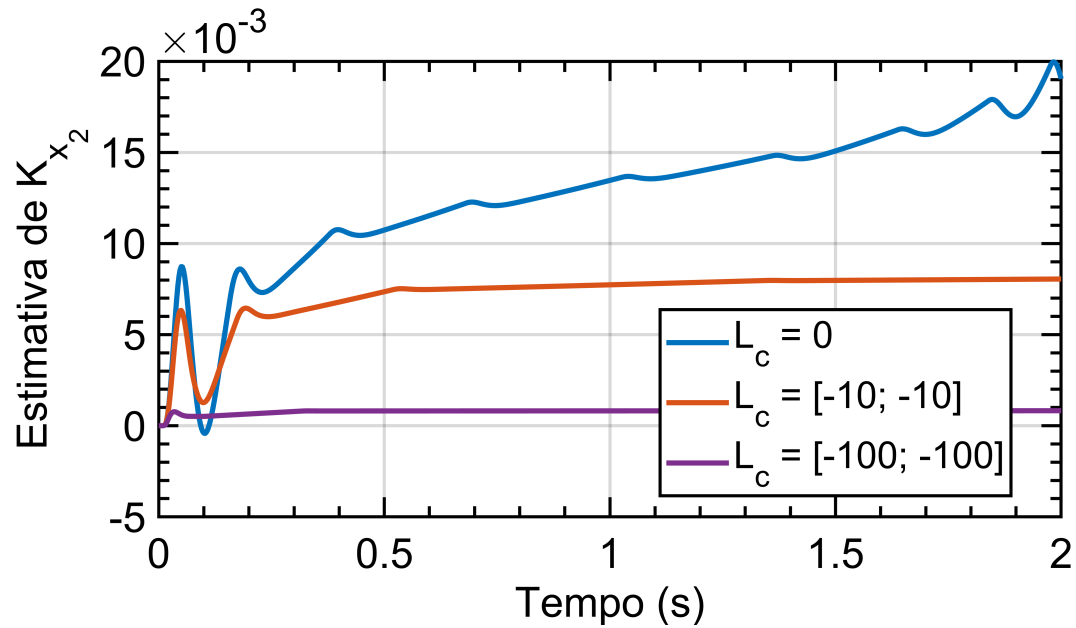
Fonte: Produção da autora.

Figura 7.25 - Variação no ganho  $\hat{K}_{x_1}$  para um atuador com backlash perante uma entrada degrau.



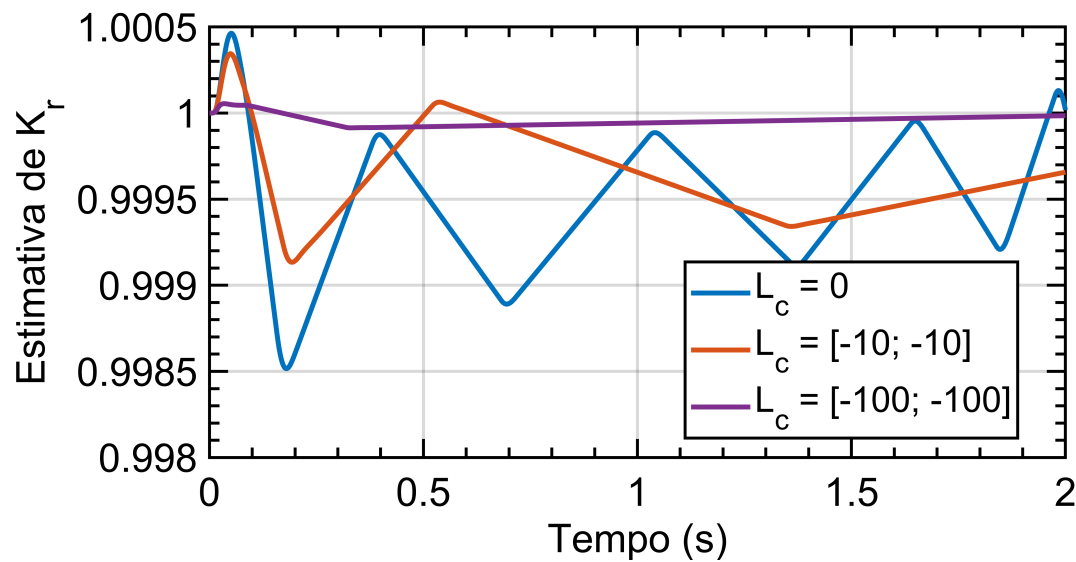
Fonte: Produção da autora.

Figura 7.26 - Variação no ganho  $\hat{K}_{x_2}$  para um atuador com backlash perante uma entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.

Figura 7.27 - Variação no ganho  $\hat{K}_r$  para um atuador com backlash perante uma entrada degrau.



Fonte: Produção da autora.

## 8 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um estudo de controladores adaptativos por modelo de referência em malha fechada tanto no regime contínuo quanto no regime discreto, apresentando ferramentas de análise teórica para apoiar sua utilização em casos reais através da garantia de estabilidade e robustez.

Os resultados encontrados demonstram que o uso de um modelo de referência em malha fechada de fato traz benefícios no tempo de convergência do erro. Entretanto, deve-se garantir que a escolha do ganho de realimentação seja tal que a modificação nos autovalores da dinâmica do erro seja benéfica.

No âmbito do regime contínuo, este trabalho apresentou uma envoltória mais restritiva do que aquela encontrada na literatura, além de provar a robustez desta arquitetura em presença de uma classe de perturbações limitadas para duas modificações distintas da lei de adaptação dos parâmetros. Ainda no que diz respeito a estes sistemas perturbados, este trabalho apresentou uma métrica capaz de comparar a dimensão esperada da para a fronteira última uniforme dada a presença da modificação em relação à arquitetura tradicional.

No regime discreto, por sua vez, a principal contribuição deste trabalho foi demonstrar a viabilidade desta arquitetura quando implementada em sistemas embarcados. Como se sabe, a não-linearidade inerente a sistemas adaptativos faz com que não seja possível afirmar que sistemas estáveis no regime contínuo sejam diretamente implementáveis na prática, o que é fundamental para viabilizar seu uso em aplicações críticas.

Além disso, analisou-se a robustez destes sistemas discretos em presença de perturbações externas limitadas do tipo  $\ell^2$ , demonstrando-se também fronteiras últimas uniformes para este tipo de planta.

Finalmente, apresentou-se simulações que demonstram o efeito da modificação na arquitetura do modelo de referência, e a influência da riqueza de sinal tanto da entrada quanto da perturbação externa no sistema.

### 8.1 Trabalhos futuros

- Estudos do erro e da variação dos parâmetros adaptativos no domínio da frequência para o sistema discreto.
- Estudos em relação ao efeito de sincronia no regime discreto, fazendo

com que o modelo de referência passe a agir como um observador dependendo da escolha do ganho de realimentação.

- Estudo da implementação de controladores adaptativos por modelo de referência em malha fechada para plantas mais complexas e/ou não lineares.
- Estudo do efeito desta arquitetura em plantas variantes no tempo.
- Estudo detalhado da persistência de sinal e condições necessárias e suficientes de riqueza de sinal para convergência dos ganhos de controle e outras propriedades.
- Estudo das propriedades do controle adaptativo por modelo de referência em malha fechada em estruturas de controle com congelamento de parâmetros.
- Estudo detalhado do uso de um controlador adaptativo por modelo de referência em malha fechada para o controle de um atuador com presença de backlash.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AJEL, A. R.; HUMAIDI, A. J.; IBRAHEEM, I. K.; AZAR, A. T. Robust model reference adaptive control for tail-sitter vtol aircraft. **Actuators**, v. 10, n. 7, p. 162, jul. 2021. ISSN 2076-0825. 7
- ANDERSON, R. B.; MARSHALL, J. A.; L'AFFLITTO, A. Novel model reference adaptive control laws for improved transient dynamics and guaranteed saturation constraints. **Journal of the Franklin Institute**, v. 358, n. 12, p. 6281–6308, 2021. ISSN 0016-0032. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0016003221003689>>. Acesso em: 15 jan. 2022. 7
- BALAS, M. J. Finite-dimensional direct adaptive control for discrete-time infinite-dimensional linear systems. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 196, p. 153 – 171, 1995. 58
- BERNARDO, M. d.; MONTANARO, U.; OLM, J. M.; SANTINI, S. Model reference adaptive control of discrete-time piecewise linear systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 23, n. 7, p. 709–730, 2013. 7
- BORGES, J. L. V. M. **Projeto de controlador para simulação HIL**. 2019. 139 p. Monografia (Graduação em Engenharia Eletrônica) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos, 2019. 116, 117, 125
- CARRIJO, D. S. **Controlador adaptativo digital por modelo de referência**. 2008. 92 p. Tese (Doutorado em Ciências) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos, SP, 2008. 7, 49, 50, 53, 57, 107, 113
- CARRIJO, D. S.; LEITE FILHO, W. de C. Controlador adaptativo discreto por modelo de referência: análise de estabilidade. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 13., 2010, Bonito. **Anais...** Bonito: SBA, 2010. p. 1609–1614. 7, 51, 54, 107
- \_\_\_\_\_. Controlador adaptativo discreto por modelo de referência: robustez a erros de modelagem. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 14., 2012, Campina Grande. **Anais...** Campina Grande: SBA, 2012. p. 743–748. 7, 107
- CHEN, C. **Analog and digital control system design: transfer-function, state-space and algebraic methods**. Oxford: Oxford University Press, 2006. 624 p. ISBN 9780195310467. 50

DATTA, A.; IOANNOU, P. A. Performance analysis and improvement in model reference adaptive control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 39, n. 12, p. 2370–2387, dez. 1994. 8, 9

DENG, K.; CONG, S.; KONG, D.; SHEN, H. Discrete-time direct model reference adaptive control application in a high-precision inertially stabilized platform. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 66, n. 1, p. 358–367, jan. 2019. 8

DOGAN, K. M.; YUCELEN, T.; HADDAD, W. M.; MUSE, J. A. Improving transient performance of discrete-time model reference adaptive control architectures. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, v. 34, n. 7, p. 901–918, 2020. 8, 49

GIBSON, T. E. **Closed-loop reference model adaptive control : with application to very flexible aircraft**. 2014. 152 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Massachusetts Institute of Technology (MIT), Boston, 2014. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1721.1/87974>>. Acesso em: 13 mar. 2019. 1, 2, 5, 8, 9, 27, 28, 29, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 64, 71, 75, 78, 80, 81, 107, 113

GIBSON, T. E.; ANNASWAMY, A. M.; LAVRETSKY, E. On adaptive control with closed-loop reference models: Transients, oscillations, and peaking. **IEEE Access**, v. 1, p. 703–717, 2013. 9

GIBSON, T. E.; QU, Z.; ANNASWAMY, A. M.; LAVRETSKY, E. Adaptive output feedback based on closed-loop reference models. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 60, n. 10, p. 2728–2733, 2015. 9

GOEL, R.; ROY, S. B. Closed-loop reference model based distributed model reference adaptive control for multi-agent systems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2021, New Orleans. **Proceedings...** New Orleans: AACC, 2021. p. 1082–1087. 9

GUO, J.; TAO, G.; LIU, Y. A multivariable mrac design for aircraft systems under failure and damage conditions. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2011, San Francisco. **Proceedings...** San Francisco: AACC, 2011. p. 600–605. 7

HODEL, A.; WHORTON, M.; ZHU, J. Stability metrics for simulation and flight-software assessment and monitoring of adaptive control assist compensators. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL

CONFERENCE AND EXHIBIT, 2008, Honolulu. **Proceedings...** Honolulu: AIAA, 2008. p. 1–25. ISBN 978-1-60086-999-0. [10](#)

IOANNOU, P. A.; FIDAN, B. **Adaptive control tutorial**. Philadelphia: SIAM, 2006. 389 p. ISBN 978-0-89871-615-3. [1](#), [5](#), [6](#), [18](#), [19](#), [20](#), [58](#), [59](#), [71](#), [75](#)

IOANNOU, P. A.; KOKOTOVIC, P. V. **Adaptive systems with reduced models**. Berlin: Springer, 1983. 164 p. ISBN 978-3-540-39547-8. [5](#), [74](#)

IOANNOU, P. A.; SUN, J. **Robust adaptive control**. Mineola, New York: Dover Publications, 2012. 821 p. ISBN 978-0-486-49817-1. [6](#), [13](#), [14](#), [15](#), [16](#), [17](#), [47](#), [74](#)

JACKLIN, S.; SCHUMANN, J.; GUPTA, P.; RICHARD, M.; GUENTHER, K.; SOARES, F. Development of advanced verification and validation procedures and tools for the certification of learning systems in aerospace applications. In: INFOTECH@AEROSPACE, 2005, Arlington. **Proceedings...** Arlington: AIAA, 2005. p. 1–16. [9](#)

JACKLIN, S. A. Closing the certification gaps in adaptive flight control software. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL CONFERENCE AND EXHIBIT, 2008, Honolulu. **Proceedings...** Honolulu: AIAA, 2008. p. 1–14. [10](#)

\_\_\_\_\_. Survey of verification and validation techniques for small satellite software development. In: SPACE TECH EXPO, 2015, Long Beach. **Proceedings...** Long Beach: NASA, 2015. p. 1–20. Disponível em: <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=20150010982>. Acesso em: 15 maio 2022. [10](#)

JENKINS, D. R. **Hypersonics before the shuttle**: a concise history of the x-15 research airplane. Washington: NASA, 2000. 128 p. ISBN 9780160503634. [5](#)

KERSTING, S.; BUSS, M. Direct and indirect model reference adaptive control for multivariable piecewise affine systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 62, n. 11, p. 5634–5649, 2017. [7](#)

KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. 3. ed. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 2002. 750 p. ISBN 978-0-13-067389-3. [82](#)

KRSTIC, M.; KOKOTOVIC, P. V.; KANELLAKOPOULOS, I. Transient-performance improvement with a new class of adaptive controllers. **Systems and Control Letters**, v. 21, n. 6, p. 451 – 461, 1993. ISSN 0167-6911. [8](#), [9](#)

KUMAR, R.; DAS, S.; SYAM, P.; CHATTOPADHYAY, A. K. Review on model reference adaptive system for sensorless vector control of induction motor drives. **IET Electric Power Applications**, v. 9, n. 7, p. 496–511, 2015. [7](#)

LANDAU, I.; LOZANO, R. Unification of discrete time explicit model reference adaptive control designs. **Automatica**, v. 17, n. 4, p. 593 – 611, 1981. [7](#)

LAVRETSKY, E. Combined/composite model reference adaptive control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 54, n. 11, p. 2692–2697, Nov 2009. ISSN 0018-9286. [6](#)

\_\_\_\_\_. Adaptive output feedback design using asymptotic properties of lqg/ltr controllers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 57, n. 6, p. 1587–1591, jun. 2012. ISSN 0018-9286. [9](#), [81](#), [107](#)

LAVRETSKY, E.; WISE, K. A. **Robust and adaptive control: with aerospace applications**. London: Springer, 2013. ISBN 978-1-4471-4395-6. [9](#), [14](#), [15](#), [20](#), [21](#), [25](#), [26](#), [72](#), [74](#), [75](#), [77](#), [79](#), [80](#)

LEE, T.; HUH, U. An error feedback model based adaptive controller for nonlinear systems. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, 1997, Guimaraes. **Proceedings...** Guimaraes: ISIE, 1997. p. 1095–1100. [1](#), [9](#), [27](#)

MATSUTANI, M. **Robust adaptive flight control systems in the presence of time delay**. 2013. 165 p. Tese (Doutorado em Aeronáutica e Astronáutica) — Massachusetts Institute of Technology (MIT), Boston, 2013. [11](#)

MONTANARO, U.; GAETA, A. di; GIGLIO, V. Robust discrete-time mrac with minimal controller synthesis of an electronic throttle body. **IEEE/ASME Transactions on Mechatronics**, v. 19, n. 2, p. 524–537, abr. 2014. ISSN 1083-4435. [8](#)

MORI, T.; DERESI, I. A brief summary of the bonds on the solution of the algebraic matrix equations in control theory. **International Journal of Control**, v. 39, n. 2, p. 247–256, 1984. [82](#)

NARENDRA, K.; ANNASWAMY, A. A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 32, n. 2, p. 134–145, fev. 1987. ISSN 0018-9286. [5](#), [55](#), [75](#)

NARENDRA, K.; LIN, Y.-H.; VALAVANI, L. Stable adaptive controller design, part ii: Proof of stability. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 25, n. 3, p. 440–448, jun. 1980. ISSN 0018-9286. [74](#)

NARENDRA, K. S.; ANNASWAMY, A. M. Robust adaptive control. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1984, San Diego. **Proceedings...** San Diego: AACC, 1984. p. 333–335. [93](#)

\_\_\_\_\_. **Stable adaptive systems**. Mineola, N.Y: Dover Publications, 2005. 512 p. ISBN 978-0-486-44226-6. [1](#), [47](#), [51](#), [55](#)

NARENDRA, K. S.; PETERSON, B. B. Bounded error adaptive control. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL INCLUDING THE SYMPOSIUM ON ADAPTIVE PROCESSES, 19., 1980, Albuquerque. **Proceedings...** Albuquerque: IEEE, 1980. p. 605–610. [5](#), [74](#)

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION (NASA). **Experience with the X-15 adaptive flight control system**. Washington: NASA, 1971. [5](#)

NGUYEN, N. Hybrid adaptive flight control with model inversion adaptation. In: BALINT, M. A. (Ed.). **Advances in flight control systems**. Rijeka: IntechOpen, 2011. cap. 3. Disponível em: <<https://doi.org/10.5772/15208>>. [6](#)

NGUYEN, N.; BOSKOVIC, J. Bounded linear stability margin analysis of nonlinear hybrid adaptive control. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2008, Seattle. **Proceedings...** Seattle: AACC, 2008. p. 3638–3643. [10](#)

NGUYEN, N.; SUMMERS, E. On time delay margin estimation for adaptive control and robust modification adaptive laws. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL CONFERENCE, 2011, Portland. **Proceedings...** Portland: AIAA, 2011. [11](#)

NGUYEN, N. T. **Model-reference adaptive control: a primer**. Mosffet Field: Springer, 2018. 448 p. [5](#), [6](#), [7](#), [9](#)

OGATA, K. **Discrete-time control systems**. 2. ed. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1995. [49](#), [50](#), [60](#), [61](#), [98](#), [99](#)

OHREM, S. J.; HOLDEN, C. Adaptive controller and observer design using open and closed-loop reference models for linear time-invariant systems with unknown dynamics. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 66, n. 11, p. 5482–5489, 2021. [9](#)

ORTEGA, R.; KREISSELMEIER, G. Discrete-time model reference adaptive control for continuous-time systems using generalized sampled-data hold functions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 35, n. 3, p. 334–338, March 1990. ISSN 0018-9286. [7](#)

PARKS, P. Liapunov redesign of model reference adaptive control systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 11, n. 3, p. 362–367, jul. 1966. ISSN 0018-9286. [5](#)

POMET, J.; PRALY, L. Adaptive nonlinear regulation: estimation from the lyapunov equation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 37, n. 6, p. 729–740, jun. 1992. [5](#)

QU, Z.; ANNASWAMY, A. M. Adaptive output-feedback control with closed-loop reference models for very flexible aircraft. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 39, n. 4, p. 873–888, 2016. [9](#)

RADAC, M.; PRECUP, R.; ROMAN, R. Data-driven model reference control of mimo vertical tank systems with model-free vrft and q-learning. **ISA Transactions**, v. 73, p. 227–238, 2018. ISSN 0019-0578. [7](#)

RAJAGOPAL, K.; BALAKRISHNAN, S.; NGUYEN, N.; KRISHNAKUMAR, K. S. Time delay margin analysis of modified state observer based adaptive control. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL CONFERENCE, 2013, Boston. **Proceedings...** Boston: AIAA, 2013. [11](#)

ROHRS, C.; VALAVANI, L.; ATHANS, M.; STEIN, G. Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 30, n. 9, p. 881–889, set. 1985. ISSN 0018-9286. [1](#), [5](#)

SANTOS, T.; VIEIRA, F. An adaptive control approach for discrete-time systems with unknown backlash at the input. **Trends in Applied and Computational Mathematics**, v. 9, n. 2, p. 331–340, 2008. ISSN 2179-8451. [7](#)

SASTRY, S.; BODSON, M. **Adaptive control: stability, convergence, and robustness**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1989. 377 p. ISBN 0-13-004367-2. [23](#)

SCHUMANN, J.; LIU, Y. Tools and methods for the verification and validation of adaptive aircraft control systems. In: IEEE AEROSPACE CONFERENCE, 2007, Big Sky. **Proceedings...** Big Sky: IEEE, 2007. p. 1–8. ISSN 1095-323X. [10](#)

SLOTINE, J. E.; COETSEE, J. A. Adaptive sliding controller synthesis for non-linear systems. **International Journal of Control**, v. 43, n. 6, p. 1631–1651, 1986. [55, 74](#)

SONG, G.; TAO, G.; TAN, C. A unified discrete-time model reference adaptive control scheme. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL AND AUTOMATION, 14., 2018, Anchorage. **Proceedings...** Anchorage: IEEE, 2018. p. 106–111. [8](#)

STEPANYAN, V.; KRISHNAKUMAR, K. Mrac revisited: Guaranteed performance with reference model modification. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2010, Baltimore. **Proceedings...** Baltimore: AACC, 2010. p. 93–98. ISSN 2378-5861. [6, 9](#)

\_\_\_\_\_. Adaptive control with reference model modification. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 35, n. 4, p. 1370–1374, 2012. [9](#)

TAO, G. Robustness of mrac schemes. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 16., 1997, Albuquerque. **Proceedings...** Albuquerque: AACC, 1997. p. 744–745. [91, 97](#)

TRAVIESO-TORRES, J. C.; DUARTE-MERMOUD, M. A. Normalized model reference adaptive control applied to high starting torque scalar control scheme for induction motors. **Energies**, v. 15, n. 10, p. 3606, May 2022. ISSN 1996-1073. [7](#)

XIAO, S.; DONG, J. Robust adaptive fault-tolerant tracking control for uncertain linear systems with actuator failures based on the closed-loop reference model. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems**, v. 50, n. 9, p. 3448–3455, 2020. [9](#)

YASUDA, K.; HIRAI, K. Upper and lower bounds on the solution of the algebraic riccati equation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 24, n. 3, p. 483–487, 1979. [82](#)

YUCELEN, T.; CALISE, A. Derivative-free model reference adaptive control of a generic transport model. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL CONFERENCE, 2010, Toronto. **Proceedings...** Toronto: AIAA, 2010. p. 1–17. [6](#)

YUCELEN, T.; TORRE, G. D. L.; JOHNSON, E. N. Frequency-limited adaptive control architecture for transient response improvement. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2013, Washington. **Proceedings...** Washington:



IEEE, 2013. p. 6631–6636. ISBN 978-1-4799-0178-4 978-1-4799-0177-7  
978-1-4799-0175-3. 1

YUKSEK, B.; INALHAN, G. Reinforcement learning based closed-loop reference model adaptive flight control system design. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, v. 35, n. 3, p. 420–440, 2021. 9

ZANG, Z.; BITMEAD, R. R. Transient bounds for adaptive control systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 39, n. 1, p. 171–175, Jan 1994. ISSN 0018-9286. 8, 9

ZHANG, D.; WEI, B. A review on model reference adaptive control of robotic manipulators. **Annual Reviews in Control**, v. 43, p. 188–198, 2017. ISSN 1367-5788. 7

ZHEN, Z.; TAO, G.; YU, C.; XUE, Y. A multivariable adaptive control scheme for automatic carrier landing of uav. **Aerospace Science and Technology**, v. 92, p. 714–721, 2019. ISSN 1270-9638. 7

ZOLLITSCH, A. W.; HOLZAPFEL, F.; ANNASWAMY, A. M. Application of adaptive control with closed-loop reference models to a model aircraft with actuator dynamics and input uncertainty. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2015, Chicago. **Proceedings...** Chicago: AACC, 2015. p. 3848–3853. 107