



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÕES



# UM ESTUDO SOBRE A INTERFERÊNCIA DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA DO FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO NA ESTIMAÇÃO DA ATITUDE EM QUATÉRNIONS

Geovani Augusto Xavier Ribeiro

Relatório Final de Projeto  
de Iniciação Científica (PI-  
BIC/CNPq/INPE), orientado  
pela Dra. Roberta Veloso Garcia e  
pelo Dr. Helio Koiti Kuga.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/>](http://urlib.net/)

INPE  
São José dos Campos  
2022

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6923/6921

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):****Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**Membros:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Amauri Silva Montes - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espaciais (ETE)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr. Joaquim José Barroso de Castro - Centro de Tecnologias Espaciais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Simone Angélica Del Duca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÕES



# UM ESTUDO SOBRE A INTERFERÊNCIA DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA DO FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO NA ESTIMAÇÃO DA ATITUDE EM QUATÉRNIONS

Geovani Augusto Xavier Ribeiro

Relatório Final de Projeto  
de Iniciação Científica (PI-  
BIC/CNPq/INPE), orientado  
pela Dra. Roberta Veloso Garcia e  
pelo Dr. Helio Koiti Kuga.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/>](http://urlib.net/)

INPE  
São José dos Campos  
2022



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](#).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](#).

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

*“A mathematical theory is not to be considered complete until you have made it so clear that you can explain it to the first man whom you meet on the street”.*

*DAVID HILBERT*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, sou grato aos meus pais, Elizabete e Elton, pelo incentivo. Ao meu irmão, Felipe, uma pessoa muito tranquila em casa. Agradeço também a minha namorada Mel Capobianco por me acompanhar, apoiar, incentivar e sempre estar comigo neste período de trabalho.

Um grande agradecimento para a minha orientadora, Dr<sup>a</sup> Roberta Veloso Garcia, que ensinou lições importantes desde o meu primeiro dia na faculdade e que é um exemplo de competência e profissionalismo a ser seguido por todos os seus alunos. Gratidão também para meu orientador, Dr. Helio Koiti Kuga, que ofereceu esta oportunidade incrível de trabalhar no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

A todos os meus amigos que estavam ao meu lado para dar forças e dicas de como prosseguir com o trabalho. Principalmente para o Bruno Gomes Cordeiro pelo companheirismo durante a caminhada de iniciação científica na área de Engenharia e Tecnologias Espaciais.

Agradeço aos meus amigos da república Faenquil, Felipe Cruz, Diego Garcia, Lucas Bissoli, Pedro Lee, Hugo Magalhães, João Pedro Noronha, Pedro Augusto Gonçalves, Igor Bonanno, Gustavo França, nós somos uma família e apoiamos um ao outro sempre e incondicionalmente.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro concedido, através deste financiamento foi possível arcar com as participações em cursos, congressos e viagens acadêmicas.

## RESUMO

A determinação da atitude de um satélite é de suma importância para a supervisão e controle do seu movimento rotacional. Nessa perspectiva, com a descrição das equações cinemáticas utilizando os quatérnions, é possível fazer uma descrição matemática da atitude sem singularidades e que não dependem de descrições geométricas para a sua definição, entretanto os quatérnions não possuem uma descrição física óbvia o que implica fazer conversões para Ângulos de Euler. Neste trabalho, o objetivo é fazer um estudo da interferência das matrizes de covariância do Filtro de Kalman Estendido (FKE) aplicado ao problema de estimação de atitude com os quatérnions. O cerne do FKE está na linearização analítica ou numérica do modelo do sistema dinâmico, sendo a solução mais usada nas últimas décadas no que tange os problemas de estimação de atitude e órbita de satélites artificiais. Portanto, a estimação de atitude com o FKE é realizada computacionalmente a partir de um vetor de estado, composto pelos quatérnions e pelo vetor de *bias* do giroscópio e um vetor de medidas, composto pelas equações de sensores que fornecem informações sobre a orientação do satélite com relação a um determinado sistema de referência. As matrizes de covariância estão associadas aos ruídos do processo ( $\mathbf{Q}$ ) da medida ( $\mathbf{R}$ ) e dos estados iniciais ( $\mathbf{P}_0$ ), portanto a compreensão da variação das matrizes de covariância no FKE auxilia a entender a sua interferência nos resultados obtidos pelo filtro. Desse modo, a análise da interferência das matrizes foi importante para inferir como os resíduos da estimação se comportam no sentido de convergência, tempo de convergência ou mesmo a divergência do filtro. Os resultados mostram que quando os valores da matriz  $\mathbf{Q}$  são divididos por 100 e quando os valores da matriz  $\mathbf{R}$  são multiplicadas por 100, os resíduos não tendem à zero, o que mostra uma possível divergência do filtro. Para o caso em que  $\mathbf{Q}$  é multiplicado por 100 e  $\mathbf{R}$  é dividido por 100, o FKE apresentou convergência nos resultados em que os erros da estimação relativos aos valores reais obtidos via simulador permaneceram próximos a zero. Para  $\mathbf{P}_0$ , nota-se que, quando multiplica-se a matriz por 100, o FKE é totalmente impreciso, o que pode ser observado pelos erros referentes à estimação de atitude e *bias* dos giros. Sobre a estimação dos *bias*, observou-se uma dificuldade maior em apresentar a convergência dos resultados para o período e condições utilizadas neste trabalho.

Palavras-chave: Filtro de Kalman Estendido. Atitude. Quatérnions. Matrizes de covariância.

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
3.1 Referencial inercial . . . . .	5
3.2 Referencial orbital . . . . .	6
3.3 Sequência de rotações do referencial orbital para o referencial do satélite	7
5.1 Representação dos cossenos diretores . . . . .	13
7.1 Estimação de atitude para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações .	33
7.2 Estimação do <i>bias</i> dos giros para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 obser- vações . . . . .	34
7.3 Resíduos dos DSS para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações . . .	34
7.4 Resíduos dos IRES para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações . .	35
7.5 Estimação de erro de atitude para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 ob- servações . . . . .	36
7.6 Estimação de erro dos <i>bias</i> dos giros para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações . . . . .	37
7.7 Estimação de atitude para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações .	39
7.8 Resíduos dos DSS para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações . . .	39
7.9 Resíduos dos IRES para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações . .	40
7.10 Estimação de erro de atitude para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 ob- servações . . . . .	41
7.11 Estimação de atitude para as Condições 1, 6 e 7 para 1000 observações .	43
7.12 Resíduos dos DSS para as Condições 1, 6 e 7 para 1000 observações . . .	43
7.13 Resíduos dos IRES para as Condições 1, 6 e 7 para 1000 observações . .	44
7.14 Estimação de erro de atitude para as Condições 1, 6 e 7 para 1000 ob- servações . . . . .	45
7.15 Estimação de atitude para as Condições 1, 2 e 3 para 50 observações . .	47
7.16 Estimação de erro de atitude para as Condições 1, 2 e 3 para 50 observações	48
7.17 Estimação de atitude para as Condições 1, 4 e 5 para 50 observações . .	49
7.18 Estimação de erro de atitude para as Condições 1, 4 e 5 para 50 observações	50
7.19 Estimação de atitude para as Condições 1, 6 e 7 para 50 observações . .	51
7.20 Estimação de erro de atitude para as Condições 1, 6 e 7 para 50 observações	52



## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
7.1 Condições iniciais de referência (Condição 1) . . . . .	32
7.2 Média e desvio padrão estatístico dos resíduos referente aos dois DSS para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações . . . . .	32
7.3 Média e desvio padrão estatístico dos resíduos referente aos dois IRES para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações . . . . .	35
7.4 Média e desvio padrão estatístico dos erros referente à atitude para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações . . . . .	36
7.5 Média e desvio padrão estatístico dos erros referente à estimação dos <i>bias</i> dos giros para Condições 1, 2, 3 para 1000 observações . . . . .	37
7.6 Erro relativo da atitude e do <i>bias</i> dos giros em comparação com os valores reais para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações . . . . .	38
7.7 Média e desvio padrão estatístico dos resíduos referente aos dois DSS para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações . . . . .	40
7.8 Média e desvio padrão estatístico dos resíduos referente aos dois IRES para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações . . . . .	40
7.9 Média e desvio padrão estatístico dos erros referente à estimação de atitude para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações . . . . .	41
7.10 Erro relativo da atitude em comparação com os valores reais para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações . . . . .	41
7.11 Média e desvio padrão estatístico dos resíduos referente aos dois DSS para as Condições 1, 6 e 7 para 1000 observações . . . . .	42
7.12 Média e desvio padrão estatístico dos resíduos para as Condições 1, 6 e 7 . . . . .	44
7.13 Média e desvio padrão estatístico dos erros referente à estimação de atitude em relação as Condições 1, 6 e 7 para 1000 observações . . . . .	44
7.14 Erro relativo da atitude em comparação com os valores reais para as Condições 1, 6 e 7 para 1000 observações . . . . .	45
7.15 Média e desvio padrão estatístico dos erros referente à estimação de atitude para as Condições 1, 2 e 3 para 50 observações . . . . .	46
7.16 Erro relativo da atitude em comparação com os valores reais para as Condições 1, 2 e 3 para 50 observações . . . . .	48
7.17 Média e desvio padrão estatístico dos erros referente à estimação de atitude para as Condições 1, 4 e 5 para 50 observações . . . . .	49
7.18 Erro relativo da atitude em comparação com os valores reais para as Condições 1, 4 e 5 para 50 observações . . . . .	50

7.19 Média e desvio padrão estatístico dos erros referente à estimação de atitude em relação as Condições 1, 6 e 7 para 50 observações . . . . .	51
7.20 Erro relativo da atitude em comparação com os valores reais para as Condições 1, 6 e 7 para 50 observações . . . . .	52

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CBERS	–	<i>China Brazil Earth Resources Satellite</i> (Satélite Sino-Brasileiro de Sensoriamento Remoto)
DCM	–	<i>Directional Cosine Matrix</i> (Matriz de Cossenos Diretores)
DSS	–	<i>Digital Sun Sensor</i> (Sensor Solar Digital)
FKE	–	Filtro de Kalman Estendido
INPE	–	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
IRES	–	<i>Infrared Earth Sensor</i> (Sensor de Terra Infravermelho)
MEKF	–	<i>Multiplicative Extended Kalman Filter</i> (Filtro de Kalman Estendido Multiplicativo)
PROPAT	–	Propagador de Órbita e Atitude
RIG's	–	<i>Rate-Integration Gyros</i> (Taxa de Integração de Giros)

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	– Semieixo maior
$\hat{\mathbf{b}}$	– Versor do sistema do corpo
$e$	– Excentricidade
$\hat{\mathbf{e}}$	– Eixo de rotação principal
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	– Vetores unitários do Sistema do Satélite
$\vec{e}_{x_o}, \vec{e}_{y_o}, \vec{e}_{z_o}$	– Vetores unitários do Sistema Orbital
$\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z$	– Vetores unitários do Sistema de Referência Inercial
$f$	– Anomalia verdadeira
$f(\cdot)$	– Função vetorial não linear representando o modelo do processo
$g_i$	– Componentes do vetor de saída do giroscópio ( $i = x, y, z$ )
$h(\cdot)$	– Função vetorial não linear representando o modelo de medida
$k$	– Índice de tempo discreto
$\hat{\mathbf{n}}$	– Versor do sistema inercial
$\mathbf{q}$	– Quatérnion
$\dot{\mathbf{q}}$	– Taxa de variação do quatérnion
$\vec{q}$	– Parcela vetorial do quatérnion
$q_4$	– Parcela escalar do quatérnion
$t$	– Tempo
$\mathbf{u}_k$	– Entrada de controle para o tempo $k$
$\tilde{\mathbf{u}}_k$	– Entrada de controle da função vetorial não linear $f(\cdot)$ para o tempo $k$
$v_{\phi_H}$	– Ruído do sensor da componente de saída do IRES <sub>1</sub>
$v_{\theta_H}$	– Ruído do sensor da componente de saída do IRES <sub>2</sub>
$v_{\alpha_\psi}$	– Ruído do sensor da componente de saída do DSS <sub>1</sub>
$v_{\alpha_\theta}$	– Ruído do sensor da componente de saída do DSS <sub>2</sub>
$\mathbf{v}$	– Ruído do sensor
$\mathbf{v}_k$	– Ruído do sensor para o tempo $k$
$\tilde{\mathbf{v}}_k$	– Ruído do sensor da função vetorial não linear $h(\cdot)$ para o tempo $k$
$\mathbf{w}$	– Ruído do processo
$\mathbf{w}_k$	– Ruído do processo para o tempo $k$
$w_{q_1}$	– Componente do ruído do processo em $q_1$
$w_{q_2}$	– Componente do ruído do processo em $q_2$
$w_{q_3}$	– Componente do ruído do processo em $q_3$
$w_{q_4}$	– Componente do ruído do processo em $q_4$
$w_{\varepsilon_x}$	– Componente do ruído do processo em $\varepsilon_x$
$w_{\varepsilon_y}$	– Componente do ruído do processo em $\varepsilon_y$
$w_{\varepsilon_z}$	– Componente do ruído do processo em $\varepsilon_z$
$\tilde{\mathbf{w}}_k$	– Ruído do processo da função vetorial não linear $f(\cdot)$ para o tempo $k$
$\mathbf{x}$	– Vetor de estados
$\mathbf{x}_k$	– Vetor de estados para o tempo $k$
$\hat{\mathbf{x}}_k$	– Vetor de estados estimado para o tempo $k$

$\mathbf{x}_0$	–	Vetor de estados inicial
$\hat{\mathbf{x}}_0$	–	Vetor de estados inicial estimado
$\hat{\mathbf{x}}_k^-$	–	Vetor de estados propagado para o tempo $k$
$\hat{\mathbf{x}}_k^+$	–	Vetor de estados estimado para o tempo $k$
$\mathbf{y}$	–	Vetor de medidas
$\mathbf{y}_k$	–	Vetor de medidas para o tempo $k$
$\mathbf{z}_k$	–	Vetor de combinação linear dos estados para o tempo $k$
$\mathcal{B}$	–	Referência no corpo rígido
$\mathbf{C}$	–	Matriz de Atitude
$E[\cdot]$	–	Operador esperança
$\mathbf{F}_k$	–	Matriz de transição de estado para o tempo $k$
$\mathbf{G}_k$	–	Matriz de transição de estado para o tempo $k$
$\mathbf{G}(t)$	–	Matriz $n \times n$ com elementos contínuos no tempo
$\mathbf{H}_k$	–	Matriz de entrada de controle para o tempo $k$
$\mathbf{H}_k$	–	Matriz Jacobiana da função vetorial não linear $h(\cdot)$ para o tempo $k$
$\mathbf{I}$	–	Matriz identidade
$\mathbf{I}_{n \times n}$	–	Matriz identidade $n \times n$
$\mathbf{K}_k$	–	Ganho do Filtro de Kalman
$\mathbf{L}_k$	–	Matriz Jacobiana da função vetorial não linear $f(\cdot)$ para o tempo $k$
$\mathbf{M}_1(\psi)$	–	Primeira rotação de um ângulo $\psi$ em torno do eixo $\mathbf{z}_o$
$\mathbf{M}_2(\theta)$	–	Segunda rotação de um ângulo $\theta$ em torno do eixo intermediário $\mathbf{y}'$
$\mathbf{M}_3(\phi)$	–	Terceira rotação de um ângulo $\phi$ em torno do eixo $\mathbf{z}$
$\mathcal{N}$	–	Referência no sistema inercial
$\mathbf{O}$	–	Centro de massa no satélite
$\mathbf{O}'$	–	Centro de massa da Terra
$\mathbf{O}_{xyz}$	–	Sistema do Satélite
$\mathbf{O}_{x_o y_o z_o}$	–	Sistema Orbital
$\mathbf{O}'\mathbf{XYZ}$	–	Sistema de Referência Inercial
$\mathbf{P}_k$	–	Matriz de covariância dos estados para o tempo $k$
$\mathbf{P}_0$	–	Matriz de covariância dos estados iniciais
$\mathbf{P}_k^-$	–	Matriz de covariância do vetor estado propagado para o tempo $k$
$\mathbf{P}_k^+$	–	Matriz de covariância do vetor estado estimado para o tempo $k$
$\mathbf{P}_0^+$	–	Matriz de covariância do vetor de estado inicial
$Q_i$	–	Componentes da matriz de covariância do ruído do processo
$\mathbf{Q}_k$	–	Matriz de covariância do ruído para o tempo $k$
$\tilde{\mathbf{Q}}_k$	–	Matriz de covariância do ruído para o tempo $k$
$\mathbf{R}_k$	–	Matriz de covariância do ruído de medidas para o tempo $k$
$R_{v_{\phi H}}$	–	Componente da diagonal principal da matriz de covariância de ruído de medidas referente a $\phi_H$
$R_{v_{\theta H}}$	–	Componente da diagonal principal da matriz de covariância de ruído de medidas referente a $\theta_H$
$R_{v_{\alpha\psi}}$	–	Componente da diagonal principal da matriz de covariância de ruído

	de medidas referente a $\alpha_\psi$
$R_{v_{\alpha\theta}}$	– Componente da diagonal principal da matriz de covariância de ruído de medidas referente a $\alpha_\theta$
$S$	– Primeiro sistema para rotação
$S'$	– Segundo sistema para rotação
$S_x$	– Componente do vetor solar em $x$
$S_y$	– Componente do vetor solar em $y$
$S_z$	– Componente do vetor solar em $z$
$S_{0_x}$	– Componente do vetor solar em $x_o$
$S_{0_y}$	– Componente do vetor solar em $y_o$
$S_{0_z}$	– Componente do vetor solar em $z_o$
$\alpha_{ij}$	– Ângulos formados entre os versores do corpo e inercial
$\alpha_\psi$	– Componente de saída do DSS <sub>1</sub>
$\alpha_\theta$	– Componente de saída do DSS <sub>2</sub>
$\delta$	– Delta de Kronecker
$\dot{\epsilon}$	– Taxa de variação do <i>bias</i> dos giros
$\epsilon_x$	– Componente do <i>bias</i> dos giros no eixo $x$
$\epsilon_y$	– Componente do <i>bias</i> dos giros no eixo $y$
$\epsilon_z$	– Componente do <i>bias</i> dos giros no eixo $z$
$\eta_i$	– Componentes do ruído branco Gaussiano do processo ( $i = x, y, z$ )
$\theta$	– Ângulo <i>pitch</i>
$\theta_H$	– Componente de saída do IRES <sub>2</sub>
$\phi$	– Ângulo <i>roll</i>
$\phi_H$	– Componente de saída do IRES <sub>1</sub>
$\psi$	– Ângulo <i>yaw</i>
$\omega$	– Velocidade angular do satélite
$\omega_x$	– Componente da velocidade angular do satélite no eixo $x$ (eixo de <i>roll</i> )
$\omega_y$	– Componente da velocidade angular do satélite no eixo $y$ (eixo de <i>pitch</i> )
$\omega_z$	– Componente da velocidade angular do satélite no eixo $z$ (eixo de <i>yaw</i> )
$\hat{\omega}_x$	– Componente da velocidade angular do satélite no eixo $x$ fornecida pelo giro
$\hat{\omega}_y$	– Componente da velocidade angular do satélite no eixo $y$ fornecida pelo giro
$\hat{\omega}_z$	– Componente da velocidade angular do satélite no eixo $z$ fornecida pelo giro
$\Delta t$	– Intervalo de tempo da amostra
$\Delta\Omega_i$	– Deslocamentos angulares medidos no eixo do satélite ( $i = x, y, z$ )
$\Gamma_k$	– Matriz associada a matriz de covariância $\mathbf{Q}_k$
$\Phi$	– Ângulo de rotação principal
$\Phi$	– Matriz de transição de estados para o tempo $k$
$\Omega_\omega$	– Matriz antissimétrica transposta $4 \times 4$
$\mathbf{0}_{n \times n}$	– Matriz de zeros ( $n \times n$ )

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	2
1.2 Justificativa . . . . .	2
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>3 SISTEMAS DE REFERÊNCIA</b> . . . . .	<b>5</b>
3.1 Referencial Inercial . . . . .	5
3.2 Referencial Orbital . . . . .	5
3.3 Referencial do Satélite . . . . .	6
<b>4 MODELO MATEMÁTICO DOS SENSORES DE ATITUDE</b> . .	<b>8</b>
4.1 Modelo do Giroscópio . . . . .	8
4.2 Modelo de Medidas do Sensor de Terra Infravermelho . . . . .	9
4.3 Modelo de Medidas do Sensor Solar Digital . . . . .	10
<b>5 REPRESENTAÇÕES DE ATITUDE</b> . . . . .	<b>13</b>
5.1 Atitude representada por Matriz de Cossenos Diretores . . . . .	13
5.2 Atitude representada por Ângulos de Euler . . . . .	15
5.3 Atitude representada por Quatérnions . . . . .	17
5.3.1 Dinâmica de atitude em Quatérnions . . . . .	19
<b>6 MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE ATITUDE</b> . . . . .	<b>22</b>
6.1 Estimação de atitude . . . . .	22
6.1.1 Filtro de Kalman . . . . .	22
6.1.2 Filtro de Kalman Estendido . . . . .	25
<b>7 RESULTADOS</b> . . . . .	<b>31</b>
7.1 Dados simulados para 1000 observações . . . . .	31
7.1.1 Análise da interferência da matriz de covariância do vetor de estado inicial . . . . .	31
7.1.2 Análise da interferência da matriz de covariância do ruído do processo . . . . .	38
7.1.3 Análise da interferência da matriz de covariância do ruído da medida . . . . .	42
7.2 Dados simulados para 50 observações . . . . .	46

7.2.1	Análise da interferência da matriz de covariância dos estados iniciais .	46
7.2.2	Análise da interferência da matriz de covariância do ruído do processo .	48
7.2.3	Análise da interferência da matriz de covariância do ruído da medida .	50
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>53</b>
8.1	Trabalhos futuros . . . . .	53
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>55</b>



# 1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa está relacionada com a descrição do movimento rotacional do satélite, ou seja, a atitude. A determinação de atitude pode ser feita através de um processo estático e estocástico. Nesse trabalho, o método utilizado são os métodos estocásticos que são de suma importância para a supervisão e controle do movimento rotacional do satélite, já que a sua resposta determina a sua atitude. Nesse contexto, com os resultados obtidos através de sensores que estão acoplados no sistema do satélite, é factível determinar se o satélite está na orientação correta ou incorreta em relação a um determinado referencial. Assim, é necessário salientar que o termo “estimação” de atitude é o termo exclusivo utilizado para a determinação de atitude por meio de processos estocásticos (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014).

Existem diversas maneiras de representar a atitude de um satélite, porém elas podem conter singularidades e descrições geométricas ambíguas. Nesse âmbito, a atitude é representada pelos quatérnions, pois os quatérnions não apresentam singularidades na sua equação cinemática, já que ela é linear, o que facilita a aplicação do método utilizado. Além disso, serão simulados dados específicos para o satélite artificial CBERS (*China-Brazil Earth Resources Satellite*) além de dados de sensores solares, sensores de Terra e giros integradores de velocidade. Estes dados foram obtidos via propagador PROPAT desenvolvido por Carrara (2015) que fornece as informações orbitais e de atitude reais e que são utilizados para comparar com os resultados obtidos com o algoritmo do Filtro de Kalman Estendido desenvolvido em MATLAB para a estimação de atitude.

O método utilizado para estimar a atitude do satélite foi o Filtro de Kalman Estendido (FKE), que considera o vetor de observação fornecido pelos sensores e corrige o vetor de estado na etapa de atualização. O FKE possui matrizes de covariância que estão associadas aos ruídos do processo, ruídos das medidas e da estimação do erro. Nessa perspectiva, o entendimento da interferência das matrizes de covariância do FKE auxilia a compreendermos a sua interferência nos resultados do filtro. Ademais, é válido ressaltar que as equações que os sensores fornecem são não lineares e, por isso, o FKE é utilizado.

Com os dados simulados é possível manusear as matrizes de covariância para determinar a interferência nos resultados do movimento de atitude do satélite.

## 1.1 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho de pesquisa é fazer um estudo sobre a interferência das matrizes de covariância do Filtro de Kalman Estendido na estimação da atitude em quatérnions e analisar como os resíduos da estimação se comportam no sentido de convergência ou mesmo a divergência do filtro.

## 1.2 Justificativa

Este trabalho está relacionado com a dinâmica do movimento rotacional de satélites artificiais, ou seja, com sua orientação espacial em relação a um sistema de referência inercial, denominada de atitude. A análise da dinâmica de atitude de um satélite envolve abordagens de predição, estimação (ou determinação) e controle de atitude. Este trabalho está diretamente relacionado com a estimação de atitude que é realizada durante a análise da missão do satélite e tem grande importância para manter em segurança a carga útil do veículo ou mesmo para auxiliar o sistema de controle de forma a manter o satélite na orientação desejada (WERTZ, 2012).

Para se determinar a atitude de um satélite é importante que se escolha um estimador que leve em conta as necessidades da missão e da estimação. O Filtro de Kalman é o melhor estimador linear, pois nenhum outro fornece variância menor. No entanto, para problemas não lineares são consideradas aproximações nas equações do Filtro de Kalman para que o algoritmo possa ser aplicado. Neste caso, é de grande relevância que seja feito um estudo das componentes que possam levar o filtro a divergência ou a instabilidade.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo tem como finalidade apresentar os principais trabalhos que possuem relação com o tema. Nesse contexto, são feitas breves apresentações de alguns trabalhos que analisam o Filtro de Kalman Estendido para a estimação de atitude de satélites com análises em relação ao custo computacional, implementação e abordagens matemáticas diferentes.

Schmidt (1981) faz uma análise sobre o Filtro de Kalman Estendido com a aplicação no setor aeroespacial para a missão Apollo em um sistema de navegação. Os resultados obtidos para o cálculo da missão Terra até a Lua convergiram rapidamente e precisamente e fez com que a operação utilizasse dados reais para estimar os parâmetros necessários.

Em Lefferts et al. (1982) é feito uma abordagem da estimação de atitude de um satélite com o uso dos quatérnions com diferentes estratégias. Inicialmente, desenvolve-se o Filtro de Kalman Estendido para a representação da matriz de covariância quando o vetor de estado tem dimensão 7, entretanto essa matriz é singular. Dessa forma, apresenta-se dois métodos distintos para evitar a singularidade associada a dimensão da matriz. A primeira maneira é através da representação da matriz de covariância reduzida e a segunda maneira é através de um incremento de quatérnion.

Em Bar-Itzhack et al. (1991) é analisado algumas maneiras distintas da normalização do quatérnion para aplicação do Filtro de Kalman Estendido. Nesse contexto, três novas maneiras de normalização são introduzidas para analisar a eficiência dos métodos para a estimação de atitude de um satélite. Os resultados mostram que quaisquer das três normalizações do quatérnion quando baseada em vetores de medida o Filtro de Kalman Estendido converge e apresenta um erro de estimação pequeno.

No mesmo ano, Markley (2003) clarifica as relações dos quatérnions com quatro componentes e com o incremento de quatérnions com três componentes. Nesse artigo, é utilizado o Filtro de Kalman Estendido Multiplicativo (*Multiplicative Extended Kalman Filter* - MEKF) e é feito uma análise para segunda ordem do MEKF. O autor conclui que as relações fornecem resultados idênticos no Filtro de Kalman Estendido e no MEKF.

Garcia et al. (2011) analisa dados reais dos satélites CBERS-2 e CBERS-2B para estimar a atitude através dos sensores que estão a bordo do satélite. Neste trabalho,

é feito uma comparação entre o Filtro de Kalman Estendido e o Filtro de Kalman Sigma Ponto com uma quantidade limitada e escassa de medidas obtidas através das efemérides e telemetria dos satélites CBERS-2 e CBERS-2B. Observa-se que o algoritmo do Filtro de Kalman Sigma Ponto, com condições iniciais com baixa precisão, é capaz de convergir e fornecer estimativas de atitude com uma precisão elevada quando comparado com o FKE.

Em [Silva \(2016\)](#) é analisado alguns filtros para a estimação de atitude do satélite CBERS-2 utilizando dados simulados e reais. O Filtro  $H_\infty$  Estendido, Filtro de Kalman Estendido, Filtro de Partículas, Filtro de Kalman *Unscented* são utilizados para fazer essa análise. Nesse trabalho, o vetor de estado é determinado pelos ângulos de Euler e pelo *bias* do giroscópio. O autor mostra que os resultados das estimativas de diferentes filtros convergem e que a atitude estimada está em concordância com trabalhos que foram realizados anteriormente.

[Yang \(2019\)](#) demonstra as principais maneiras de determinar o controle e atitude de um satélite usando o modelo dos quatérnions. Nesse contexto, o trabalho é elaborado de tal forma que é feita toda uma abordagem de mecânica celeste, descrição de atitude, modelo das equações cinemáticas e dinâmicas, torques, determinação estática e estocástica da atitude e controle de um satélite.

Em [Ribeiro et al. \(2021\)](#) é feita uma interface gráfica no *software* Python interativa que, a partir de uma informação inicial fornecida pelo usuário, o algoritmo retorna os principais parâmetros de atitude correspondentes para a informação fornecida. Além disso, as manipulações de coordenadas de atitude do satélite são fornecidas de maneira eficiente e rapidamente.

Dessa forma, é possível notar que o Filtro de Kalman Estendido é amplamente utilizado e que existem várias abordagens para estimação de atitude de satélites com diferentes parâmetros e abordagens.

Este trabalho faz uma abordagem diferente dos demais trabalhos, já que o objetivo principal é analisar a interferência das matrizes de covariância do Filtro de Kalman Estendido durante o processo de estimação da atitude em quatérnions quando dados simulados do satélite do tipo CBERS é considerado.

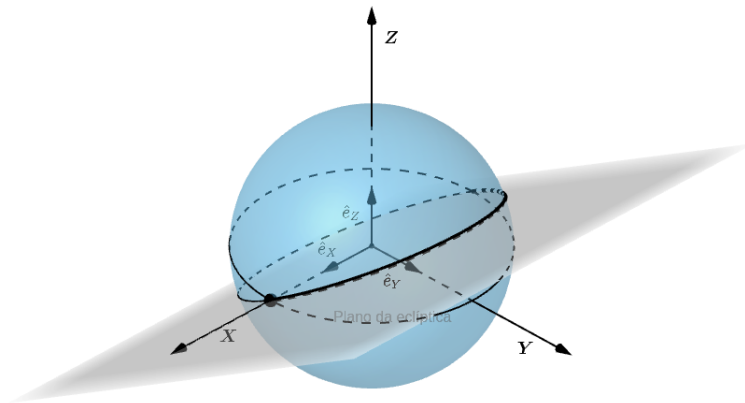
### 3 SISTEMAS DE REFERÊNCIA

A representação da atitude em diferentes sistemas de referência é de suma importância para análise e controle do movimento rotacional do satélite, uma vez que é a partir dos sistemas de coordenadas que é possível prever irregularidades e possíveis problemas na posição e na atitude do satélite. Este capítulo apresenta os sistemas de referência que serão usados no trabalho.

#### 3.1 Referencial Inercial

O referencial inercial ou equatorial é um sistema de referência fixo que tem origem no centro de massa da Terra, o sistema é representado por  $\mathbf{O'XYZ}$ . O sistema de coordenadas é estabelecido de maneira que não sofre alteração com o céu estelar. O eixo  $\mathbf{Z}$  aponta na direção do pólo norte geográfico, o eixo  $\mathbf{X}$  aponta para o ponto vernal e o eixo  $\mathbf{Y}$  completa o sistema dextrógiro. Sua base ortonormal é representada como  $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z)$  (ALMEIDA, 2003). A Figura 3.1 representa o referencial inercial com origem no CM da Terra.

Figura 3.1 - Referencial inercial



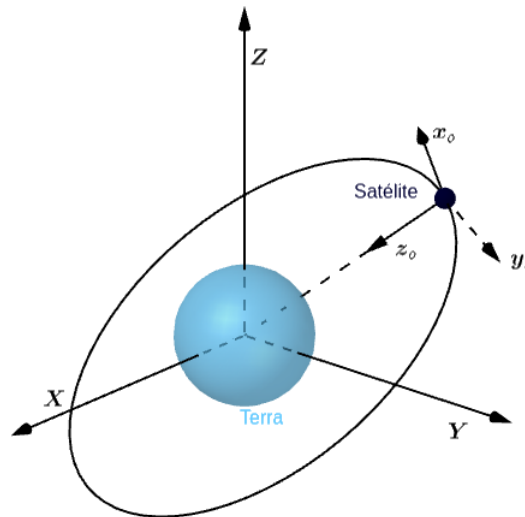
Fonte: Autor

#### 3.2 Referencial Orbital

O referencial orbital é um sistema de referência que tem origem no centro de massa do satélite e é representado por  $\mathbf{Ox}_o\mathbf{y}_o\mathbf{z}_o$ . O eixo  $\mathbf{z}_o$  aponta diretamente abaixo do observador, ou seja, em direção para o centro da Terra (direção Nadir), o eixo  $\mathbf{y}_o$

aponta na direção normal a órbita e o eixo  $\mathbf{x}_o$  completa o sistema dextrógiro. Sua base ortonormal é representada como  $(\vec{e}_{x_o}, \vec{e}_{y_o}, \vec{e}_{z_o})$  (GARCIA et al., 2011). A Figura 3.2 representa o referencial orbital.

Figura 3.2 - Referencial orbital



Fonte: Autor

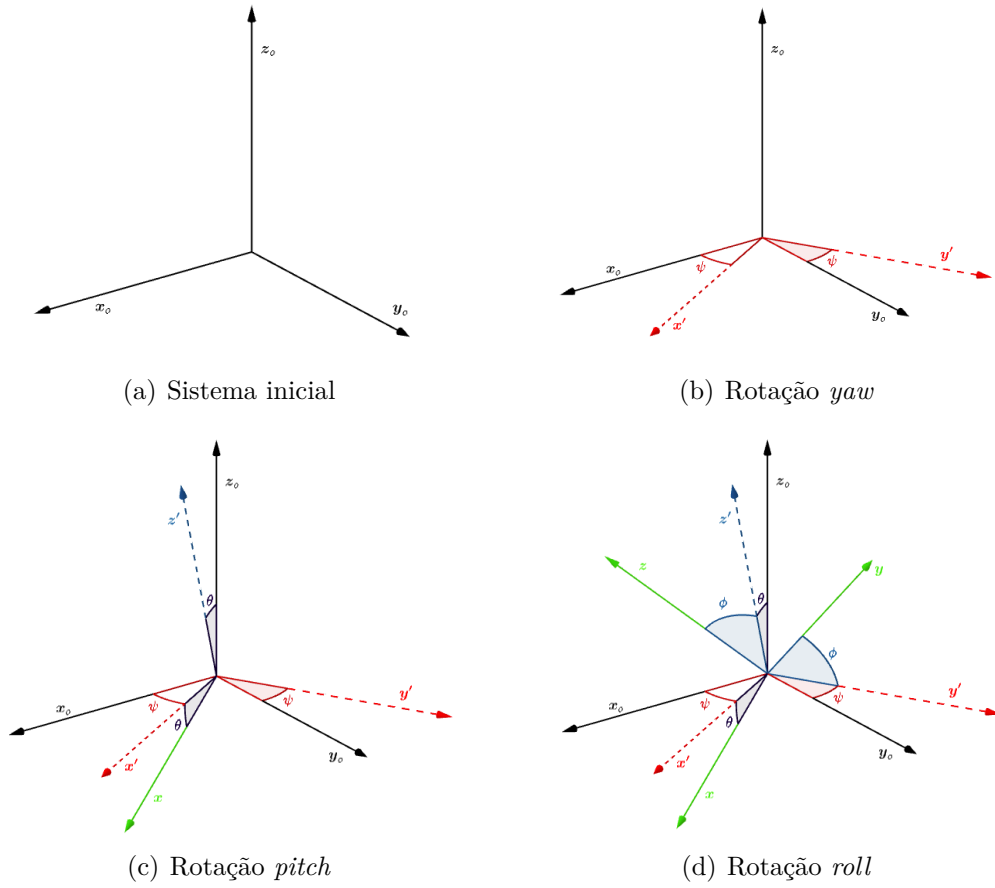
### 3.3 Referencial do Satélite

O referencial do satélite é um sistema de referência que tem origem no centro de massa do satélite, o seu sistema é representado por  $\mathbf{Oxyz}$ . No caso de satélites que apontam para a Terra, é usualmente definido os eixos de *roll*, *pitch* e *yaw*. Dessa forma, é possível definir (GARCIA et al., 2011):

- Primeira rotação de um ângulo  $\psi$  (ângulo *yaw*) em torno do eixo  $\mathbf{z}_o$ ;
- Segunda rotação de um ângulo  $\theta$  (ângulo *pitch*) em torno de um eixo intermediário  $\mathbf{y}'$ ;
- Terceira rotação de um ângulo  $\phi$  (ângulo *roll*) em torno do eixo  $\mathbf{z}$ ;

A sequência de rotação adotada  $(\phi, \theta, \psi)$  é representada na Figura 3.3.

Figura 3.3 - Sequência de rotações do referencial orbital para o referencial do satélite



Fonte: Autor

Dessa forma, define-se o referencial do satélite que será utilizado na Seção 5.2 para compreender a atitude representada pelos ângulos de Euler.

## 4 MODELO MATEMÁTICO DOS SENSORES DE ATITUDE

A identificação do modelo matemático dos sensores de atitude presentes em uma missão espacial de sucesso é imprescindível. Neste capítulo são apresentados os modelos do giroscópio, do sensor de Terra Infravermelho (*Infrared Earth Sensors - IRES*) e do sensor Solar Digital (*Digital Sun Sensors - DSS*) que estão a bordo do satélite CBERS e que são utilizados neste trabalho.

### 4.1 Modelo do Giroscópio

Os giroscópios são equipamentos que controlam o momento angular do satélite. Em um satélite artificial, a taxa do momento angular é igual ao torque externo do corpo, sendo que os torques internos não interferem na orientação do satélite. Dessa forma, o giro do giroscópio pode fornecer, de maneira direta, o deslocamento angular e/ou a velocidade angular do satélite (GARCIA et al., 2011; SILVA, 2016).

Os erros de deriva que estão associados ao giroscópio são denominados de *bias* e são utilizados no vetor de estado a ser estimado. Ademais, os RIG's medem a velocidade angular dos eixos de *roll*, *pitch* e *yaw* do satélite.

Define-se, portanto, o modelo de RIG's dado por (FUMING; KUGA, 1999):

$$\Delta\Theta_i = \int_0^{\Delta t} (\omega_i + \varepsilon_i) dt, \quad i = x, y, z \quad (4.1)$$

tal que  $\Delta\Theta_i$  são os deslocamentos angulares do satélite em um intervalo de tempo  $\Delta t$ ,  $\omega_i$  são as componentes da velocidade angular no sistema do satélite e  $\varepsilon_i$  são as componentes dos *bias* do giroscópio.

A medida das componentes da velocidade angular do satélite pode ser representada como (WERTZ, 2012; GARCIA et al., 2011; SILVA, 2016):

$$\hat{\omega}_i = \frac{d\Theta_i}{dt} - \hat{\varepsilon}_i(t) - \eta_i(t) = g_i(t) - \hat{\varepsilon}_i(t) - \eta_i(t) \quad (4.2)$$

tal que  $g_i(t)$  são as componentes do vetor de saída do giroscópio  $\eta_i(t)$  representam as componentes do ruído branco Gaussiano do processo, de tal forma que todos os efeitos do ruído não-modelados estão ligados a esse ruído, ou seja

$$E[\eta_i(t)] = 0 \quad (4.3)$$



$$E[\eta_i(t)\eta_i^T(t + \Delta t)] = Q_i\delta(t) \quad (4.4)$$

em que  $E[.]$  é a operação esperança, definida por  $E[x] = \sum xp(x)$  com  $x$  uma variável aleatória e  $p(x)$  a probabilidade associada a esta variável,  $Q_i$  são as componentes diagonais do ruído do processo cinemático e  $\delta$  é o delta de Kronecker.

Além disso, a taxa de deriva do *bias* não é constante com o tempo, mas sim relacionada a um segundo processo de ruído branco gaussiano,

$$\hat{\varepsilon}_i = w_{\varepsilon_i}(t) \quad (4.5)$$

com,

$$E[w_{\varepsilon_i}(t)] = 0 \quad (4.6)$$

$$E[w_{\varepsilon_i}(t)w_{\varepsilon_i}(t)^T(t + \Delta t)] = Q_{\varepsilon_i}(t)\delta(t) \quad (4.7)$$

sendo  $Q_{\varepsilon_i}(t)$  são as componentes diagonais do ruído do processo do *bias*.

Além disso, ambos os ruídos são considerados não correlacionados, ou seja,

$$E[\eta_i(t)w_{\varepsilon_i}^T(t + \Delta t)] = E[w_{\varepsilon_i}(t)\eta_i(t)^T(t + \Delta t)] = 0 \quad (4.8)$$

## 4.2 Modelo de Medidas do Sensor de Terra Infravermelho

Os Sensores de Terra Infravermelho (*Infrared Earth Sensors - IRES*) são mecanismos que determinam a orientação do satélite em relação ao calor emitido da Terra. Nesse contexto, os IRES determinam dois ângulos: *roll* e *pitch* (GARCIA et al., 2011).

No satélite CBERS-4A, existem dois sensores de Terra Infravermelho. Nessa perspectiva, a medida do ângulo *roll* e *pitch* está sujeita a variação de cunho aleatório.

As equações que regem as medidas dos dois sensores IRES são representadas por (FUMING; KUGA, 1999):

$$\phi_H = \phi + v_{\phi_H} \quad (4.9a)$$

$$\theta_H = \theta + v_{\theta_H} \quad (4.9b)$$

tal que  $v_{\phi_H}$  e  $v_{\theta_H}$  são os ruídos brancos Gaussianos que podem ter sido causados por desalinhamentos durante a instalação e/ou pela montagem do sensor (GARCIA et al., 2011; SILVA, 2016).

Como os ruídos são considerados brancos e Gaussianos, temos que

$$E[v_{\phi_H}(t)] = 0 \quad (4.10a)$$

$$E[v_{\theta_H}(t)] = 0 \quad (4.10b)$$

$$E[v_{\phi_H}(t)v_{\phi_H}^T(t + \Delta t)] = R_{v_{\phi_H}}\delta(t) \quad (4.11a)$$

$$E[v_{\theta_H}(t)v_{\theta_H}^T(t + \Delta t)] = R_{v_{\theta_H}}\delta(t) \quad (4.11b)$$

sendo que  $R_{v_{\phi_H}}$  e  $R_{v_{\theta_H}}$  são as componentes da diagonal principal da matriz de covariância de ruído de medidas.

Além disso, como os ruídos são não correlacionados:

$$E[v_{\phi_H}(t)v_{\theta_H}^T(t + \Delta t)] = E[v_{\theta_H}(t)v_{\phi_H}^T(t + \Delta t)] = 0 \quad (4.12)$$

### 4.3 Modelo de Medidas do Sensor Solar Digital

Os Sensores Solares Digital (*Digital Sun Sensor - DSS*) identificam a posição do Sol e calculam a orientação do satélite de acordo com um determinado referencial. Como o sensor de Terra Infravermelho não consegue determinar o ângulo *yaw*, o sensor do Sol fornecem dois ângulos acoplados *pitch* ( $\alpha_\theta$ ) e *yaw* ( $\alpha_\psi$ ). As equações que determinam as medidas dos dois sensores que estão acoplados no satélite CBERS-4A são representadas por (FUMING; KUGA, 1999):

$$\alpha_\psi = \arctan \left( \frac{-S_y}{S_x \cos 60^\circ + S_z \cos 150^\circ} \right) + v_{\alpha_\psi} \quad (4.13)$$

quando  $|S_x \cos 60^\circ + S_z \cos 150^\circ| \geq \cos 60^\circ$ , e

$$\alpha_\theta = 24^\circ + \arctan \left( \frac{S_x}{S_z} \right) + v_{\alpha_\theta} \quad (4.14)$$

quando  $\left| 24^\circ + \arctan \left( \frac{S_x}{S_z} \right) \right| < 60^\circ$ . Tais condições são necessárias para que o vetor solar esteja no campo óptico do DSS. As componentes do vetor unitário associado ao vetor solar no Referencial do Satélite são  $S_x$ ,  $S_y$  e  $S_z$  e podem ser associadas no Referencial Orbital por (GARCIA et al., 2011; SILVA, 2016):

$$S_x = S_{0_x} + \psi S_{0_y} - \theta S_{0_z} \quad (4.15a)$$

$$S_y = S_{0_y} - \psi S_{0_x} + \phi S_{0_z} \quad (4.15b)$$

$$S_z = S_{0_z} - \phi S_{0_y} - \theta S_{0_x} \quad (4.15c)$$

sendo que  $S_{0_x}$ ,  $S_{0_y}$ ,  $S_{0_z}$  são as componentes do vetor solar no Referencial Orbital e  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  são os ângulos de Euler da atitude estimada.

Ademais,  $v_{\alpha_\psi}$  e  $v_{\alpha_\theta}$  são os ruídos brancos Gaussianos que podem ter sido causados por desalinhamentos durante a instalação e/ou pela montagem do sensor (SILVA, 2016).

Como os ruídos são considerados brancos e Gaussianos, temos que

$$E[v_{\alpha_\psi}(t)] = 0 \quad (4.16a)$$

$$E[v_{\alpha_\theta}(t)] = 0 \quad (4.16b)$$

$$E[v_{\alpha_\psi}(t)v_{\alpha_\psi}^T(t + \Delta t)] = R_{v_{\alpha_\psi}}\delta(t) \quad (4.17a)$$

$$E[v_{\alpha_\theta}(t)v_{\alpha_\theta}^T(t + \Delta t)] = R_{v_{\alpha_\theta}}\delta(t) \quad (4.17b)$$

sendo que  $R_{v_{\alpha\psi}}$  e  $R_{v_{\alpha\theta}}$  são as componentes da diagonal principal da matriz de covariância de ruído de medidas.

Além disso, como os ruídos são não correlacionados:

$$E[v_{\alpha\psi}(t)v_{\alpha\theta}^T(t + \Delta t)] = E[v_{\alpha\theta}(t)v_{\alpha\psi}^T(t + \Delta t)] = 0 \quad (4.18)$$

Dessa forma, é possível determinar o vetor de medidas que será utilizado para descrever o sistema dinâmico:

$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{-(S_{0y} - \psi S_{0x} + \phi S_{0z})}{(S_{0x} + \psi S_{0y} - \theta S_{0z}) \cos 60^\circ + (S_{0z} - \phi S_{0y} - \theta S_{0z}) \cos 150^\circ}\right) \\ 24^\circ + \arctan\left(\frac{S_{0x} + \psi S_{0y} - \theta S_{0z}}{S_{0z} - \phi S_{0y} - \theta S_{0z}}\right) \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} + \mathbf{v}_k \quad (4.19)$$

tal que  $\mathbf{v}_k = (v_{\alpha\psi} \ v_{\alpha\theta} \ v_{\psi_H} \ v_{\theta_H})^T$  é o ruído das medidas.

## 5 REPRESENTAÇÕES DE ATITUDE

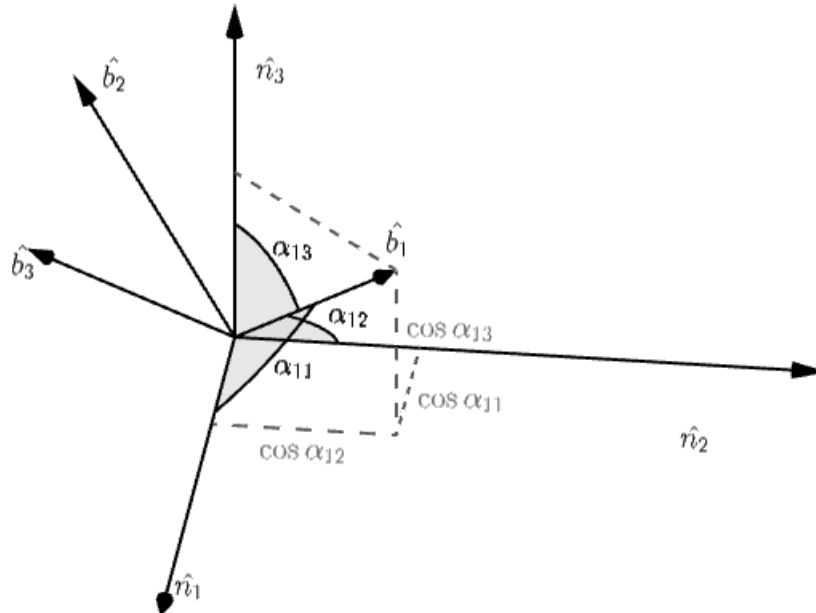
Este capítulo apresenta os parâmetros de atitude que são utilizados neste trabalho para descrever o movimento rotacional do satélite.

### 5.1 Atitude representada por Matriz de Cossenos Diretores

A atitude representada por Matriz de Cossenos Diretores (*Directional Cosine Matrix* - DCM) é uma maneira de descrever um corpo rígido de um satélite. Para a representação da matriz de cossenos diretores é considerado dois sistemas diferentes  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{B}$  sendo definidos com uma base ortonormal em  $\mathbb{R}^3$ . Os versores que representam sua base são definidos por  $\{\hat{\mathbf{n}}\}$  e  $\{\hat{\mathbf{b}}\}$  (SCHAUB; JUNKINS, 2003).

O sistema de coordenada  $\mathcal{B}$  representa uma referência no corpo rígido do satélite e o sistema de coordenada  $\mathcal{N}$  representa um sistema inercial qualquer. Os ângulos  $\alpha_{ij}$  com  $i, j = 1, 2, 3$  representam os ângulos formados com os três eixos do versor inicial. Os versores e os ângulos entre as bases são representados na Figura 5.1.

Figura 5.1 - Representação dos cossenos diretores



Fonte: Autor

É possível descrever a base ortonormal do versor  $\{\hat{\mathbf{b}}\}$  em termos da base de  $\{\hat{\mathbf{n}}\}$  como

$$\{\hat{\mathbf{b}}\} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \{\hat{\mathbf{n}}\} = \mathbf{C} \cdot \{\hat{\mathbf{n}}\} \quad (5.1)$$

tal que a matriz  $\mathbf{C}$  é conhecida como a Matriz de Cossenos Diretores ou Matriz de Atitude.

Algumas propriedades são interessantes, por exemplo, o versor  $\{\hat{\mathbf{n}}\}$  pode ser projetada sobre o versor  $\{\hat{\mathbf{b}}\}$ , assim

$$\{\hat{\mathbf{n}}\} = \mathbf{C}^T \{\hat{\mathbf{b}}\} \quad (5.2)$$

Substituindo a Equação 5.2 na Equação 5.1 temos que:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (5.3)$$

Essa propriedade garante que a matriz de cossenos diretores é ortogonal. Além disso, a inversa de  $\mathbf{C}$  é a transposta de  $\mathbf{C}$ , ou seja (SCHAUB; JUNKINS, 2003)

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T \quad (5.4)$$

Uma outra propriedade interessante da matriz de cossenos diretores é que a determinante é  $\pm 1$ . Através da Equação 5.3, temos que

$$\det(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) = \det(\mathbf{I}_{3 \times 3}) = 1 \quad (5.5)$$

Como a matriz é quadrada e a partir da sua linearidade, é factível escrever a Equação 5.5 como:

$$\det(\mathbf{C}) \det(\mathbf{C}^T) = 1 \quad (5.6)$$

Dessa forma, é factível descrever a determinante como:

$$(\det(\mathbf{C}))^2 = 1 \Leftrightarrow \det(\mathbf{C}) = \pm 1 \quad (5.7)$$

Após descrever algumas propriedades importantes da Matriz de Cossenos Diretores e descrever a base para análise de um corpo rígido de um satélite, nas próximas seções serão retratadas outras parametrizações de atitude para descrever o movimento rotacional do satélite. Essa descrição é necessária, pois é com a representação da matriz de cossenos diretores que são feitas as conversões que serão abordadas posteriormente.

## 5.2 Atitude representada por Ângulos de Euler

O parâmetro de atitude que é mais usualmente utilizado são os Ângulos de Euler (SCHAUB; JUNKINS, 2003). A descrição dos ângulos de Euler acontecem com a relação entre dois sistemas de coordenadas, um referencial no corpo qualquer  $\mathcal{B}$  e um sistema de coordenadas associado a um sistema inercial  $\mathcal{N}$ .

Os ângulos de Euler são descritos com três rotações sequenciais e podem ser descritos de 12 maneiras diferentes em sequências assimétricas e simétricas. No caso dos satélites CBERS, a atitude é descrita em uma sequência assimétrica 3-2-1, tal que o sistema de coordenadas adotado é o referencial principal  $\mathbf{Oxyz}$  e o referencial orbital  $\mathbf{Ox}_o\mathbf{y}_o\mathbf{z}_o$  (GARCIA et al., 2011; FUMING; KUGA, 1999). As sequências de rotações são descritas a seguir:

- Primeira rotação de um ângulo  $\psi$  (ângulo *yaw*) em torno do eixo  $\mathbf{z}_o$ ;

$$\mathbf{M}_1(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

- Segunda rotação de um ângulo  $\theta$  (ângulo *pitch*) em torno de um eixo intermediário  $\mathbf{y}'$ ;

$$\mathbf{M}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

- Terceira rotação de um ângulo  $\phi$  (ângulo *roll*) em torno do eixo  $\mathbf{z}$ ;

$$\mathbf{M}_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Dessa forma, é factível descrever a matriz de cossenos diretores através das rotações descritas acima, então:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}_3(\phi)\mathbf{M}_2(\theta)\mathbf{M}_1(\psi) \quad (5.11)$$

Em termos matriciais,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - s\psi c\phi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

tal que a descrição de atitude é feita de forma simples com  $s\xi = \sin \xi$  e  $c\xi = \cos \xi$ . Dessa forma, é possível relacionar a matriz de cossenos diretores com os ângulos de Euler tal que:

$$\psi = \arctan\left(\frac{C_{12}}{C_{11}}\right) \quad (5.13a)$$

$$\theta = -\arcsin(C_{13}) \quad (5.13b)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{C_{23}}{C_{33}}\right) \quad (5.13c)$$

com  $C_{ij}$  sendo definidos pelas posições dos elementos considerando que a matriz é quadrática  $3 \times 3$ , temos que  $i, j = 1, 2, 3$ .

Entretanto, a construção dos ângulos de Euler possuem algumas singularidades associadas aos denominadores nulos e descrições ambíguas que dificultam a análise do movimento rotacional do satélite. Devido a esses fatores, na próxima seção são apresentados os quatérnions uma alternativa para contornar as singularidades e que serão utilizados neste trabalho.



### 5.3 Atitude representada por Quatérnions

Os quatérnions (parâmetros de Euler) foram desenvolvidos por William Rowan Hamilton e são amplamente utilizados para o controle de atitude no setor aeroespacial (SCHAUB; JUNKINS, 2003). Com os quatérnions é possível fazer uma descrição da atitude sem singularidades. Além disso, os quatérnions não dependem de relações geométricas para a sua descrição, entretanto eles não possuem uma representação física óbvia.

Ademais, os quatérnions podem ser descritos através do vetor de rotação principal. Através de um ângulo de rotação principal  $\Phi$  em torno de um eixo de rotação  $\hat{e}$  é possível descrever os quatérnions. A definição dos quatérnions pode ocorrer de duas maneiras, com a parcela escalar como primeiro termo ou a parcela escalar como último termo. Neste trabalho, o escalar é definido no último termo do vetor, ou seja,  $q_4$  e a parcela vetorial é dada por  $\vec{q}$  (GARCIA et al., 2011; WERTZ, 2012).

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \vec{q} & q_4 \end{pmatrix}^T \quad (5.14)$$

Como citado anteriormente, é factível descrever os quatérnions através do vetor de rotação principal como (SCHAUB; JUNKINS, 2003):

$$q_1 = e_1 \sin(\Phi/2) \quad (5.15a)$$

$$q_2 = e_2 \sin(\Phi/2) \quad (5.15b)$$

$$q_3 = e_3 \sin(\Phi/2) \quad (5.15c)$$

$$q_4 = \cos(\Phi/2) \quad (5.15d)$$

Tal que  $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$ , além de que os quatérnions necessitam satisfazer a condição da norma unitária, ou seja

$$\|\mathbf{q}\| = \mathbf{q}^T \mathbf{q} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (5.16)$$

A matriz de atitude através dos quatérnions pode ser descrita como (GARCIA et al., 2011):

$$\mathbf{C} = (|q_4|^2 - \|\vec{q}\|^2)\mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\vec{q}\vec{q}^T + 2q_4[[\vec{q}]] \quad (5.17)$$

tal que  $[[\vec{q}]]$  é uma matriz antissimétrica que é descrita como (SHUSTER et al., 1993):

$$[[\vec{q}]] = \begin{pmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Dessa forma, é factível escrever os elementos da matriz de atitude em termos das componentes dos quatérnions

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Sendo  $\mathbf{C}$  a matriz de cossenos diretores e a partir dos elementos dessa matriz, é possível descrever os quatérnions, dados pelas relações (SCHAUB; JUNKINS, 2003):

$$q_1 = \frac{C_{23} - C_{32}}{4q_4} \quad (5.20a)$$

$$q_2 = \frac{C_{31} - C_{13}}{4q_4} \quad (5.20b)$$

$$q_3 = \frac{C_{12} - C_{21}}{4q_4} \quad (5.20c)$$

$$q_4 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{C_{11} + C_{22} + C_{33} + 1} \quad (5.20d)$$

Quando  $q_4 \rightarrow 0$ , existe uma singularidade correspondente ao ângulo de  $180^\circ$  do vetor de rotação principal (SHUSTER et al., 1993). Existem algumas formas de descrever computacionalmente o método para o cálculo dos quatérnions para contornar as singularidades que foi desenvolvido por Shepperd (1978), e que não serão abordados neste trabalho.

Neste momento, é considerado dois sistemas  $S$  e  $S'$  relacionados com duas rotações consecutivas. A característica da composição de rotação dos quatérnions é muito importante para descrever as rotações do satélite (GARCIA et al., 2011; SCHAUB; JUNKINS, 2003). Considere  $\mathbf{q}$  o quatérnion da primeira rotação e  $\mathbf{q}'$  o quatérnion da

segunda rotação, assim podemos definir:

$$\mathbf{q}'' = \mathbf{q}' \otimes \mathbf{q} \quad (5.21)$$

tal que as matrizes de atitude dos dois sistemas são relacionadas por:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}'') = \mathbf{C}(\mathbf{q}')\mathbf{C}(\mathbf{q}) \quad (5.22)$$

Para calcular  $\mathbf{C}(\mathbf{q}'')$  é necessário calcular previamente as matrizes de atitude relacionados a  $\mathbf{C}(\mathbf{q}')$  e  $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ . Dessa forma, é possível calcular a matriz de atitude  $\mathbf{C}(\mathbf{q}'')$  através da Equação 5.22 e calcular os quatérnions através da Equação 5.20. Existe uma outra maneira de descrever os quatérnions que é descrito a seguir (GARCIA et al., 2011):

$$\mathbf{q}'' = \mathbf{q}' \otimes \mathbf{q} = \{\mathbf{q}'\}\mathbf{q} = \{\mathbf{q}\}\mathbf{q}' \quad (5.23)$$

com

$$\{\mathbf{q}'\} = \begin{pmatrix} q'_4 & q'_3 & -q'_2 & q'_1 \\ -q'_3 & q'_4 & q'_1 & q'_2 \\ q'_2 & -q'_1 & q'_4 & q'_3 \\ -q'_1 & -q'_2 & -q'_3 & q'_4 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{pmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

### 5.3.1 Dinâmica de atitude em Quatérnions

As equações cinemáticas para os quatérnions são derivadas da Equação 5.20 e é possível expressar a equação cinemática como (GARCIA et al., 2011):

$$\{\dot{\mathbf{q}}\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

tal que  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  são as componentes da taxa de variação da velocidade de angular.

As equações diferenciais do estado para a atitude e o *bias* do giroscópio são representadas, respectivamente, por (GARCIA et al., 2011):

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}_\omega \mathbf{q} \quad (5.27)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad (5.28)$$

tal que  $\mathbf{\Omega}_\omega$  é uma matriz antissimétrica transposta  $4 \times 4$  dada por:

$$\mathbf{\Omega}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

O vetor de estado formado pelos quatérnions e o vetor de *bias* do giroscópio é dado por:

$$\mathbf{x} = \left( q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \right)^T \quad (5.30)$$

Dessa forma, uma solução analítica é obtida com a hipótese de os dados do giro serem amostrados a uma taxa fixa. Assim, teremos que:

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{\Phi}_q(\Delta t, |\boldsymbol{\omega}|) \mathbf{q}(t_k) \quad (5.31)$$

tal que  $\Delta t$  é o intervalo de amostra;  $\mathbf{q}(t_k)$  é o quatérnion de atitude no tempo  $t_k$ ;  $\mathbf{q}(t_{k+1})$  é o quatérnion de atitude propagado no tempo  $t_{k+1}$ ; e  $\mathbf{\Phi}_q$  é a matriz de transição transportando o sistema do tempo  $t_k$  a  $t_{k+1}$ , dada por (SILVA et al., 2019):

$$\Phi_q(\Delta t, |\boldsymbol{\omega}|) = \cos\left(\frac{|\boldsymbol{\omega}|\Delta t}{2}\right)\mathbf{I}_{4\times 4} + \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|}\sin\left(\frac{|\boldsymbol{\omega}|\Delta t}{2}\right)\boldsymbol{\Omega}_\omega \quad (5.32)$$

Dessa forma, descreve-se a dinâmica de atitude por meio da parametrização dos quatérnions que serão utilizadas neste trabalho:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_\omega & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix} + \mathbf{w} \quad (5.33)$$

tal que  $\mathbf{w} = (w_{q_1} \ w_{q_2} \ w_{q_3} \ w_{q_4} \ w_{\varepsilon_x} \ w_{\varepsilon_y} \ w_{\varepsilon_z})^T$  é o ruído do processo.

## 6 MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE ATITUDE

A determinação da atitude é de grande importância para a supervisão e controle do satélite. Nesse aspecto, a descrição do movimento rotacional do satélite é necessária para prever possíveis erros e falhas a bordo do sistema.

É usual dividir a determinação de atitude em duas categorias: estática e estocástica. A primeira categoria é relacionada com dados precisos no mesmo tempo ou com intervalos de tempo pequenos para que o movimento do satélite artificial seja compensado ou ignorado pelo controle de atitude. Entretanto, esse método determinístico não é eficiente para análise de dados reais simultâneos. A segunda categoria faz uso de filtros que consideram o movimento do satélite com medições *a priori* para determinar a atitude em um estado *a posteriori*. O método estocástico é eficiente para a determinação da atitude de dados reais simultâneos sendo, assim, muito utilizado no setor aeroespacial (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014; WERTZ, 2012).

### 6.1 Estimação de atitude

O termo “estimação” é restrito para a determinação de atitude de maneira estocástica (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014). Em 1960, Kalman publicou um novo método de predição de problemas lineares que foi amplamente divulgado pelo setor aeroespacial e foi utilizado na missão Apollo por Schmidt e colaboradores (KALMAN, 1960; SCHMIDT, 1981). Nesse contexto, o Filtro de Kalman é, sem dúvidas, o filtro mais utilizado no setor aeroespacial. No entanto, o Filtro de Kalman é uma ferramenta originalmente desenvolvida para a estimação linear o que dificulta a análise de problemas não lineares (LEFFERTS et al., 1982).

Nos casos de estimação não lineares, foram formuladas variações para o Filtro de Kalman como: o Filtro de Kalman linearizado, o Filtro de Kalman Estendido e a família do Filtro de Kalman Sigma Ponto (GARCIA et al., 2011; YANG, 2019). Os métodos não lineares são muito utilizados, já que, na maioria dos problemas reais, as formulações envolvidas são não lineares.

#### 6.1.1 Filtro de Kalman

Existem diversas formas para descrever o Filtro de Kalman, entretanto todas são equivalentes matematicamente. O Filtro de Kalman opera com 2 etapas: propagação e atualização (GARCIA et al., 2011). Ademais, o erro do estado é atualizado com as medidas e, por isso, a tendência do Filtro de Kalman é minimizar a variância do erro.

Considere o sistema dinâmico linear descrito por (SIMON, 2006):

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (6.1a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (6.1b)$$

Os ruídos do processo são  $\{\mathbf{w}_k\}$  e  $\{\mathbf{v}_k\}$  e são considerados independentes, brancos, com média igual à zero e possuem uma matriz de covariância conhecida  $\mathbf{Q}_k$  e  $\mathbf{R}_k$ , respectivamente, as matrizes de transição de estado  $\mathbf{F}_{k-1}$  e  $\mathbf{G}_{k-1}$  e a matriz de entrada de controle  $\mathbf{H}_k$  são conhecidas, têm dimensões apropriadas e são funções determinísticas do tempo (ROCHA et al., 2019; SIMON, 2006). Além disso, as hipóteses que são assumidas são descritas por:

$$\mathbf{w}_k \sim (0, \mathbf{Q}_k) \quad (6.2a)$$

$$\mathbf{v}_k \sim (0, \mathbf{R}_k) \quad (6.2b)$$

$$E[\mathbf{w}_k\mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q}_k\delta_{kj} \quad (6.2c)$$

$$E[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_j^T] = \mathbf{R}_k\delta_{kj} \quad (6.2d)$$

$$E[\mathbf{v}_k\mathbf{w}_j^T] = 0 \quad (6.2e)$$

tal que  $\delta_{kj}$  é o Delta de Kronecker e  $\delta_{kj} = 1$  se  $k = j$  e  $\delta_{kj} = 0$  se  $k \neq j$ . O objetivo é estimar um estado  $\mathbf{x}_k$  com base nos ruídos e com a determinação do sistema dinâmico do satélite  $\{\mathbf{y}_k\}$  (SIMON, 2006).

Dessa forma, é possível definir um estado antes da estimação. Assim, representa-se o vetor de estado em um período *a priori*

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}] \quad (6.3)$$

Da mesma maneira, é possível estimar um vetor de estado depois de um tempo  $k$ . Uma maneira de descrever esse estado *a posteriori* é computar as condições dadas por  $\{\mathbf{y}_k\}$ . Dessa forma, representa-se o vetor de estado em um período *a posteriori* como:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k] \quad (6.4)$$

O vetor de estado inicial é dado por:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E(\mathbf{x}_0) \quad (6.5)$$

O termo  $\mathbf{P}_k$  representa a matriz de covariância da estimação do erro. Dessa forma, as Equações 6.6 e 6.7 representam a matriz de covariância para os estados  $\mathbf{x}_k^-$  e  $\mathbf{x}_k^+$ , respectivamente.

$$\mathbf{P}_k^- = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T] \quad (6.6)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)^T] \quad (6.7)$$

Dessa forma, define-se a covariância do estado inicial ( $\mathbf{P}_0^+$ ). Caso a medida de covariância de um estado  $\mathbf{x}_0$  fosse perfeita, ela seria zero e se o usuário não tivesse nenhuma noção de quanto valeria  $\mathbf{P}_0^+$ , ela seria  $\mathbf{P}_0^+ = \infty \mathbf{I}$  (SIMON, 2006). Geralmente, a  $\mathbf{P}_0^+$  representa a incerteza do estado inicial  $\mathbf{x}_0$  e sua representação é dada por:

$$\mathbf{P}_0^+ = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T] \quad (6.8)$$

Além disso, é possível descrever em um sistema linear discreto a propagação da covariância de maneira mais geral como:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (6.9)$$

tal que a Equação 6.9 é conhecida como equação de atualização do tempo para  $\mathbf{P}$ .

Nesta etapa, são fornecidos mais detalhes para a etapa recursiva do código, sendo desenvolvido algumas medidas que dependam de  $\mathbf{y}_k$  de tal forma que  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  é sempre



atualizado com uma condição  $\mathbf{y}_k$ , então segue-se:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (6.10a)$$

$$= \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (6.10b)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (6.10c)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (6.10d)$$

$$= (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \quad (6.10e)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k-1} \quad (6.10f)$$

tal que  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  e  $\mathbf{P}_{k-1}$  são as estimativas antes de medida  $\mathbf{y}_k$  serem processadas e  $\hat{\mathbf{x}}_k$  e  $\mathbf{P}_k$  são as estimativas após a medida de  $\mathbf{y}_k$  ser processada, mas, por definição,  $\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k$  e  $\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k$ .

Dessa forma, fazendo as seguintes substituições:  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  por  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ ,  $\mathbf{P}_{k-1}$  por  $\mathbf{P}_k^-$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_k$  por  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  e  $\mathbf{P}_k$  por  $\mathbf{P}_k^+$ , temos que (SIMON, 2006):

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (6.11a)$$

$$= \mathbf{P}_k^+ \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (6.11b)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (6.11c)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (6.11d)$$

$$= [(\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k]^{-1} \quad (6.11e)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (6.11f)$$

tal que essas são as equações de atualização de estimação de  $\hat{\mathbf{x}}_k$  e  $\mathbf{P}_k$ . A matriz  $\mathbf{K}_k$  é chamada de ganho de Kalman (SIMON, 2006).

Na próxima subseção, é feita a descrição teórica do Filtro de Kalman Estendido para sistemas dinâmicos não lineares.

### 6.1.2 Filtro de Kalman Estendido

O Filtro de Kalman Estendido (FKE) é uma versão não linear do filtro de Kalman. Ele considera uma trajetória linearizada para fazer a estimativa do estado atual e depois fazer a atualização (LEFFERTS et al., 1982).

Considere o sistema dinâmico não linear do processo contínuo e modelo de medidas discreto representado por (SILVA, 2016):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \quad (6.12a)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (6.12b)$$

tal que  $k$  é o índice de tempo,  $\mathbf{x}(t)$  é o estado,  $\mathbf{w}(t)$  é o ruído do processo,  $\mathbf{y}_k$  são as medidas observacionais e  $\mathbf{v}_k$  é a medida do ruído. As funções  $f(\cdot)$  e  $h(\cdot)$  são as equações que descrevem o sistema dinâmico não linear. Os ruídos  $\mathbf{w}(t)$  e  $\mathbf{v}_k$  são considerados independentes, brancos, com média igual à zero e possuem uma matriz de covariância conhecida  $\mathbf{Q}(t)$  e  $\mathbf{R}_k$ , respectivamente.

As hipóteses assumidas para os ruídos são as mesmas referenciadas na Seção 6.1.1 na Equação 6.2.

Na etapa de propagação da atitude, o estado e a matriz de covariância são dados por (SILVA, 2016):

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \boldsymbol{\mu}_k) \quad (6.13a)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \boldsymbol{\Phi}_{k-1}^T + \tilde{\mathbf{Q}}_k \quad (6.13b)$$

tal que  $\boldsymbol{\Phi}_k$  é chamada de matriz de transição e calculada através de

$$\boldsymbol{\Phi}_k = \mathbf{F}_k \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \quad (6.14)$$

sendo que as condições iniciais são  $\boldsymbol{\Phi}_{k-1} = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-}$ .

O termo  $\tilde{\mathbf{Q}}_k = \boldsymbol{\Gamma}_k \mathbf{Q}_k \boldsymbol{\Gamma}_k^T$  é dado por

$$\boldsymbol{\Gamma}_k \mathbf{Q}_k \boldsymbol{\Gamma}_k^T = \int_{k-1}^k = \boldsymbol{\Phi}_t \mathbf{G}(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{G}(t)^T \boldsymbol{\Phi}_t^T dt \quad (6.15)$$

sendo  $\boldsymbol{\Gamma}_k$  uma matriz ( $n \times n$ ) com elementos discretos no tempo.

Para a etapa de atualização, considera-se o vetor de observação dado pela Equação 6.12b de tal forma que a estimativa de mínima variância para o estado  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  é dada

pelas equações contidas na fase de atualização:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k[\mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k^-)] \quad (6.16a)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (6.16b)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (6.16c)$$

em que  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  é o estado estimado,  $\mathbf{K}_k$  é o ganho de Kalman,  $\mathbf{P}_k^+$  é a matriz de covariância estimada e  $\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-}$ .

Neste trabalho, a estimação de atitude com quatérnions é feita com a redução da matriz de covariância, já que a matriz de covariância de sete dimensões associada aos quatérnions é não diagonal e singular. Nessa perspectiva, a singularidade é causada devido a restrição dos quatérnions estarem sujeitos ao módulo unitário que causa consequências numéricas dificultantes devido ao acúmulo de erros de arredondamento (GARCIA et al., 2011; LEFFERTS et al., 1982).

Desse modo, é imprescindível fazer alterações na maneira em que o Filtro de Kalman Estendido atua. Inicialmente, é necessário modificar o conjunto de informações que são obtidas de maneira *a priori*. As matrizes de covariância associada ao erro do estado ( $\mathbf{P}$ ) e a matriz de covariância do processo ( $\mathbf{Q}$ ) serão representadas por uma parcela associada a matriz de covariância associada a atitude em ângulos de Euler será representada por  $\mathbf{P}_\phi$ , com dimensão  $(3 \times 3)$ , e por uma parcela associada ao *bias* do giro que será representada por  $\mathbf{P}_\varepsilon$ , também com dimensão  $(3 \times 3)$ . A matriz de covariância associada ao erro do estado completa é representada por  $\mathbf{P}_{\phi,\varepsilon}$ , com dimensão  $(6 \times 6)$ . De forma similar, a matriz de covariância do processo associada aos ângulos de Euler será representada por  $\mathbf{Q}_\phi$ , com dimensão  $(3 \times 3)$  e aos *bias* do giro por  $\mathbf{Q}_\varepsilon$ , com dimensão  $(3 \times 3)$  sendo que a matriz completa é representada por  $\mathbf{Q}_{\phi,\varepsilon}$ , com dimensão  $(6 \times 6)$  (GARCIA et al., 2011).

Portanto, a partir das matrizes  $\mathbf{P}_\phi$  e  $\mathbf{Q}_\phi$ , é possível determinar as matrizes associadas aos quatérnions  $\mathbf{P}_q$   $(4 \times 4)$  e  $\mathbf{Q}_q$   $(4 \times 4)$ :

$$\mathbf{P}_q = \mathbf{H} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \phi} \end{pmatrix} \mathbf{P}_\phi \mathbf{H} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \phi} \end{pmatrix}^T \quad (6.17)$$

$$\mathbf{Q}_q = \mathbf{H} \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\phi}} \right) \mathbf{Q}_\phi \mathbf{H} \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\phi}} \right)^T \quad (6.18)$$

de tal forma que,  $\mathbf{H} \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\phi}} \right)$  é a matriz de derivadas parciais dos quatérnions com relação aos ângulos de Euler.

Com as matrizes de covariância dos quatérnions e do *bias* é possível escrever a matriz completa  $\mathbf{P}_{q,\varepsilon}$  ( $7 \times 7$ ) e  $\mathbf{Q}_{q,\varepsilon}$  ( $7 \times 7$ ), de tal forma que se tenha a redução na ordem dessas matrizes,  $\mathbf{P}_{q,\varepsilon}^r$  ( $6 \times 6$ ) e  $\mathbf{Q}_{q,\varepsilon}^r$  ( $6 \times 6$ ), através das seguintes etapas (GARCIA et al., 2011; LEFFERTS et al., 1982):

$$\mathbf{P}_{q,\varepsilon}^r = \mathbf{S}^T \mathbf{P}_{q,\varepsilon} \mathbf{S} \quad (6.19)$$

$$\mathbf{Q}_{q,\varepsilon}^r = \mathbf{S}^T \mathbf{Q}_{q,\varepsilon} \mathbf{S} \quad (6.20)$$

tal que:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Xi}(\mathbf{q}) & \vdots & \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vdots & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

$$\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

Na etapa de propagação, a matriz de covariância reduzida  $\mathbf{P}_{q,\varepsilon}^{r-}$  propagada no instante  $t_0$  para o instante  $t$  é dada pela integral de Riccati (GARCIA et al., 2011; LEFFERTS et al., 1982).

$$\mathbf{P}_{q,\varepsilon}^{r-}(t) = \boldsymbol{\Phi}^-(t, t_0) \mathbf{P}_{q,\varepsilon}^{r-}(t_0) \boldsymbol{\Phi}^{-T}(t, t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}^-(t, t') \mathbf{G}^-(t') \mathbf{Q}(t') \mathbf{G}^{-T}(t') \boldsymbol{\Phi}^{-T}(t, t') dt' \quad (6.23)$$

sendo que as matrizes  $\boldsymbol{\Phi}^-(t, t_0)$  e  $\mathbf{G}^-(t)$  são dadas por:

$$\Phi^-(t, t_0) = \begin{pmatrix} \Lambda(t, t_0) & \vdots & \mathbf{K}(t, t_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vdots & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{G}^-(t) \equiv \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{I}_{3 \times 3} & \vdots & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \vdots & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

com

$$\Lambda(t, t_0) = \Xi^T(\mathbf{q}(t))\Phi_q(t, t_0)\Xi(\mathbf{q}(t_0)) \quad (6.26)$$

$$\mathbf{K}(t, t_0) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \Lambda(t, t') dt' \quad (6.27)$$

Na etapa de atualização, a matriz de covariância reduzida  $\mathbf{P}_{q,\varepsilon}^{r-}$  de tal forma que é necessário definir as matrizes auxiliares  $\tilde{\mathbf{H}}_k$  ( $1 \times 6$ ) e  $\tilde{\mathbf{K}}_k$  ( $6 \times 1$ ), de acordo com (LEFFERTS et al., 1982):

$$\tilde{\mathbf{H}}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{S}(\mathbf{q}_k^-) \quad (6.28)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_k = \tilde{\mathbf{P}}_k \tilde{\mathbf{H}}_k^T [\tilde{\mathbf{H}}_k \tilde{\mathbf{P}}_k \tilde{\mathbf{H}}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1} \quad (6.29)$$

tal que  $\tilde{\mathbf{H}}_k$  é a matriz de sensibilidade relacionada aos quatérnions e a matriz de covariância estimada e ganho de Kalman são descritos por (LEFFERTS et al., 1982):

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I}_{6 \times 6} - \tilde{\mathbf{K}}_k \tilde{\mathbf{H}}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (6.30)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{S}(\mathbf{q}_k^-) \tilde{\mathbf{K}}_k \quad (6.31)$$

Assim, as etapas da redução da matriz de covariância associada ao erro do estado e da matriz de covariância associada ao ruído do processo são essenciais para que o Filtro de Kalman Estendido funcione corretamente. Nesse contexto, na formulação do algoritmo do FKE não é necessário computar a matriz de covariância completa

$\mathbf{P}_{q,\varepsilon}$  ( $7 \times 7$ ), já que a matriz de covariância reduzida  $\mathbf{P}_{q,\varepsilon}^r$  ( $6 \times 6$ ) é utilizada na etapa de propagação e atualização do filtro (GARCIA et al., 2011). Além disso, como os quatérnions não possuem descrição física imediata, é necessário converter a covariância associada para os ângulos de Euler para conseguir uma perspectiva física mais evidente da interferência das covariâncias nos resultados da estimação.

## 7 RESULTADOS

Neste capítulo são retratados os resultados obtidos para a estimação de atitude e do *bias* dos giros a partir do Filtro de Kalman Estendido (FKE), quando os quatérnions são considerados para representar a atitude. Nesse trabalho são utilizados dados simulados fornecidos pelo propagador desenvolvido no *software* MATLAB por Carrara (2015) denominado PROPAT que fornece informações da atitude e da órbita de um satélite do tipo CBERS. A implementação do Filtro de Kalman Estendido foi realizada no *software* MATLAB.

Conforme apresentado nos capítulos anteriores, o sistema dinâmico não linear é dado pela Equação 6.12 e utilizando as Equações 4.2, 4.9, 4.13, 4.14, 5.27, 5.28 obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_\omega & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix} + \mathbf{w} \quad (7.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} \arctan \left( \frac{-(S_{0y} - \psi S_{0x} + \phi S_{0z})}{(S_{0x} + \psi S_{0y} - \theta S_{0z}) \cos 60^\circ + (S_{0z} - \phi S_{0y} - \theta S_{0z}) \cos 150^\circ} \right) \\ 24^\circ + \arctan \left( \frac{S_{0x} + \psi S_{0y} - \theta S_{0z}}{S_{0z} - \phi S_{0y} - \theta S_{0z}} \right) \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} + \mathbf{v}_k \quad (7.2)$$

Ressaltando que o vetor de estado é composto pelas componentes dos quatérnions e pelo *bias* dos giros,  $\boldsymbol{\Omega}_\omega$  é a matriz antissimétrica transposta  $4 \times 4$  da velocidade angular  $\omega$ ,  $\mathbf{w}$  é o ruído do processo,  $S_x$ ,  $S_y$  e  $S_z$  são as componentes do vetor unitário associado ao vetor solar no Referencial do Satélite e  $\mathbf{v}_k$  é o ruído das medidas.

### 7.1 Dados simulados para 1000 observações

Nesta seção é feita uma análise das matrizes de covariância que atuam no Filtro de Kalman Estendido para um conjunto de 1000 observações.

#### 7.1.1 Análise da interferência da matriz de covariância do vetor de estado inicial

Nessa subseção é feita uma análise da interferência da matriz de covariância do vetor de estado inicial ( $\mathbf{P}_0$ ) nos resultados da estimação de atitude e do *bias* do giro. Nesta primeira análise, usa-se uma taxa de amostragem de 0,1 s para 100 s de observação.

A Tabela mostra as condições iniciais tomadas como referência e nomeada como Condição 1<sup>1</sup>.

Tabela 7.1 - Condições iniciais de referência (Condição 1)

Variável	Valor
$\mathbf{x}_0$	$(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 5,76 \ 222,92 \ 2,68)^T$
$\mathbf{P}_0$	$diag(0,25; 0,25; 0,25; 1,0; 1,0; 1,0)$
$\mathbf{Q}$	$diag(2,5; 2,5; 2,5; 0,1; 0,1; 2,5 \times 10^{-2}) \times 10^{-3}$
$\mathbf{R}$	$diag(0,36; 0,36; 0,0036; 0,0036)$

Para analisar a dinâmica  $\mathbf{P}_0$ , altera-se o valor dos ruídos relacionados a diagonal da matriz. Nessa perspectiva, altera-se todos os valores da diagonal multiplicando por 100 (Condição 2) e depois altera-se todos os valores da diagonal dividindo por 100 (Condição 3). As Figuras 7.1 e 7.2 apresentam a estimação dos ângulos de atitude e dos *bias* de giros usando o FKE e as três condições estabelecidas.

Os resíduos são importantes para analisar a precisão do FKE, pois são os resíduos que fornecem as características de convergência do filtro. A Figura 7.3 apresenta os resíduos dos dois Sensores Solares Digitais (DSS), para o FKE com as Condições 1, 2 e 3.

A Tabela 7.2 mostra o valor médio dos resíduos do DSS para cada uma das condições do FKE apresentado na Figura 7.3.

Tabela 7.2 - Média e desvio padrão estatístico dos resíduos referente aos dois DSS para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações

	$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_0 \cdot 100$	$\mathbf{P}_0 \div 100$
Res. DSS <sub>1</sub> (°)	$0,0732 \pm 1,1069$	$0,1248 \pm 1,3006$	$0,0934 \pm 1,0590$
Res. DSS <sub>2</sub> (°)	$0,0554 \pm 1,0739$	$0,1808 \pm 1,0085$	$0,0939 \pm 1,1363$

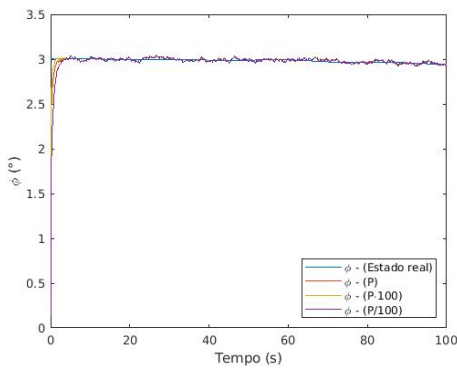
O desvio padrão dos resíduos é calculado por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (\bar{\mathbf{y}}_k - \bar{\mathbf{y}})^2} \quad (7.3)$$

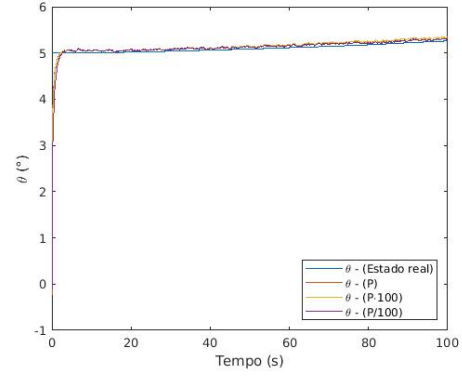
<sup>1</sup>Para o vetor  $\mathbf{x}_0$ , os três primeiros elementos estão em *grau* e os outros três elementos estão em *grau/hora*, para as matrizes  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{Q}$  os três primeiros elementos estão em *grau*<sup>2</sup> os outros três elementos estão em *grau*<sup>2</sup>/*hora*<sup>2</sup>, e finalmente, para a matriz  $\mathbf{R}$  todos os elementos estão em *grau*<sup>2</sup>.



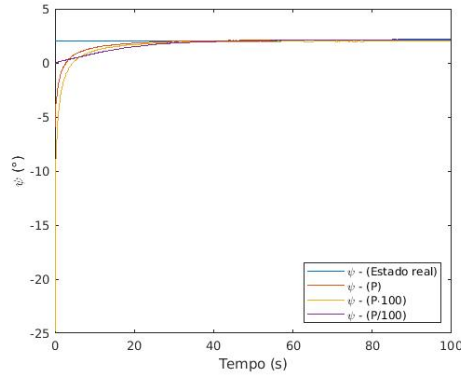
Figura 7.1 - Estimação de atitude para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações



(a) Estimação do ângulo *roll*



(b) Estimação do ângulo *pitch*



(c) Estimação do ângulo *yaw*

Fonte: Autor

em que  $\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \bar{\mathbf{y}}_k$  e  $M$  é o número total de estimativas.

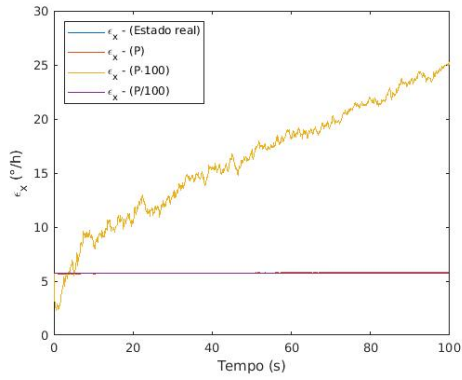
Denota-se que o filtro está convergindo quando os resíduos possuem média próximo à zero. Os resíduos com a Condição 1 e com Condição 3 possuem uma média perto de zero, entretanto para a Condição 2 a média dos resíduos é cerca de 1,70 e 3,26 vezes maior em comparação com a Condição 1 dos DSS, como pode ser observado na Tabela 7.2

A seguir, na Figura 7.4, apresenta-se os resíduos dos dois Sensores de Terra Infravermelho (IRES), para o FKE com as Condições 1, 2 e 3.

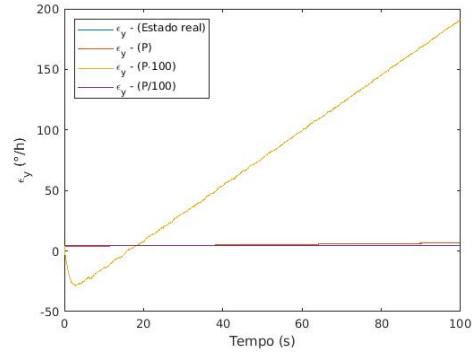
A Tabela 7.3 mostra o valor médio dos resíduos do DSS para cada uma das condições do FKE apresentado na Figura 7.4.

Os resíduos dos IRES são, geralmente, mais precisos do que quando comparados

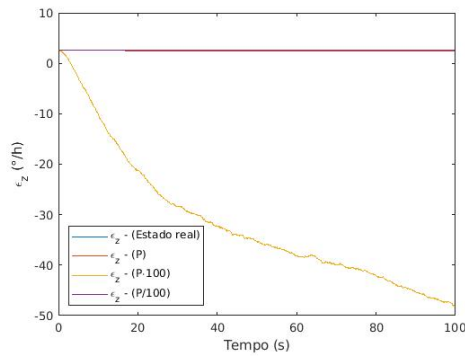
Figura 7.2 - Estimação do *bias* dos giros para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações



(a) Estimação do *bias* no eixo x



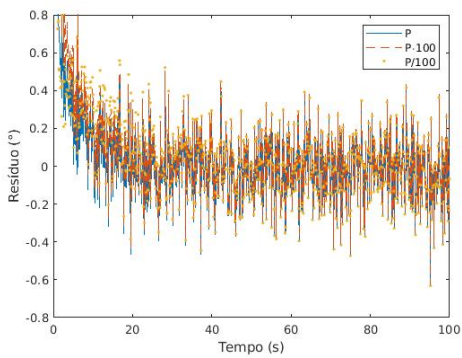
(b) Estimação do *bias* no eixo y



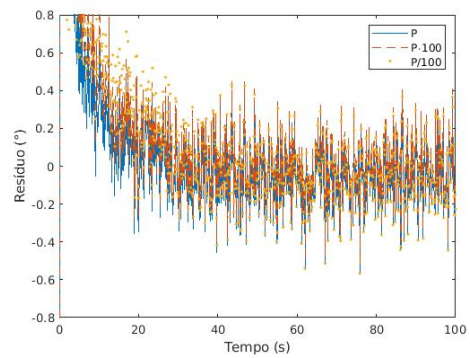
(c) Estimação do *bias* no eixo z

Fonte: Autor

Figura 7.3 - Resíduos dos DSS para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações



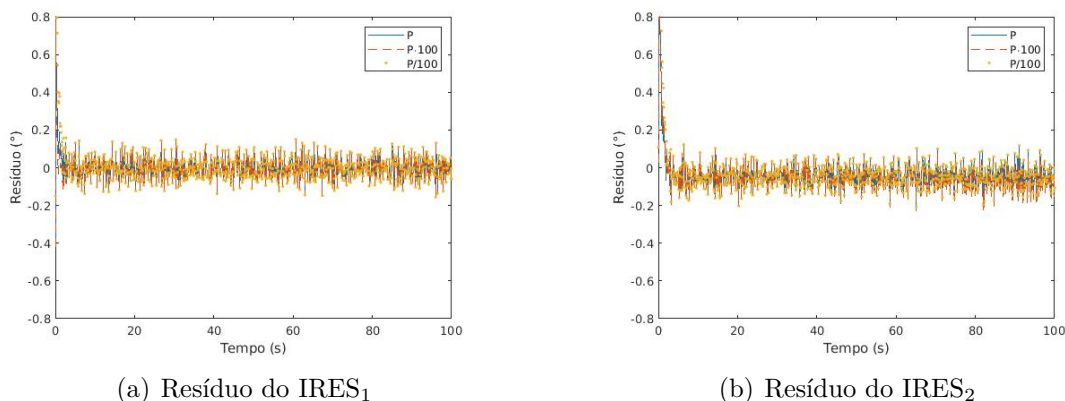
(a) Resíduo do DSS<sub>1</sub>



(b) Resíduo do DSS<sub>2</sub>

Fonte: Autor

Figura 7.4 - Resíduos dos IRES para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações



Fonte: Autor

Tabela 7.3 - Média e desvio padrão estatístico dos resíduos referente aos dois IRES para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações

	$P_0$	$P_0 \cdot 100$	$P_0 \div 100$
Res. IRES <sub>1</sub> (°)	$0,0021 \pm 0,0785$	$-0,0019 \pm 0,0686$	$0,0086 \pm 0,1168$
Res. IRES <sub>2</sub> (°)	$-0,0327 \pm 0,1342$	$-0,0468 \pm 0,1414$	$-0,0249 \pm 0,1972$

com os resíduos dos DSS, porque o IRES fornece as medidas diretas dos ângulos de atitude de  $\phi$  e  $\theta$ . Nota-se que a média dos resíduos dos IRES é de cerca de 34,85 e 1,69 vezes menor em comparação ao DSS para a Condição 1, como pode ser observado na Tabela 7.3.

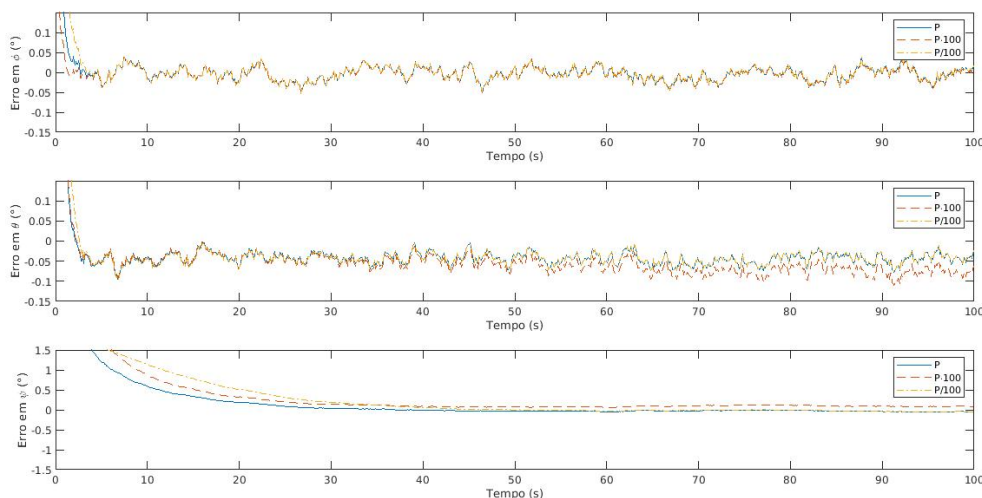
Além disso, é possível fazer a análise da precisão do FKE através da variação da matriz de covariância dos estados iniciais, o erro  $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$ , deve ser calculado que é a diferença entre o estado verdadeiro e o estado estimado. Na Figura 7.5, apresenta-se o erro da estimação de atitude para o FKE com as Condições 1, 2 e 3. O erro da estimação de atitude apresentado na Figura 7.5 está representado juntamente com o desvio padrão dos respectivos ângulos de atitude.

A Tabela 7.4 apresenta o valor médio e o desvio padrão para o erro da estimação de atitude, presente na Figura 7.5.

O desvio padrão do erro da estimação do estado é calculada por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (\tilde{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}})^2} \quad (7.4)$$

Figura 7.5 - Estimação de erro de atitude para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações



Fonte: Autor

Tabela 7.4 - Média e desvio padrão estatístico dos erros referente à atitude para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações

	$P_0$	$P_0 \cdot 100$	$P_0 \div 100$
Erro em $\phi$ ( $^\circ$ )	$0,0045 \pm 0,1025$	$4,36 \times 10^{-4} \pm 0,0935$	$0,0109 \pm 0,1395$
Erro em $\theta$ ( $^\circ$ )	$-0,0262 \pm 0,2063$	$-0,0403 \pm 0,2069$	$-0,0184 \pm 0,2490$
Erro em $\psi$ ( $^\circ$ )	$0,2145 \pm 0,7430$	$0,4565 \pm 1,4684$	$0,2723 \pm 0,5102$

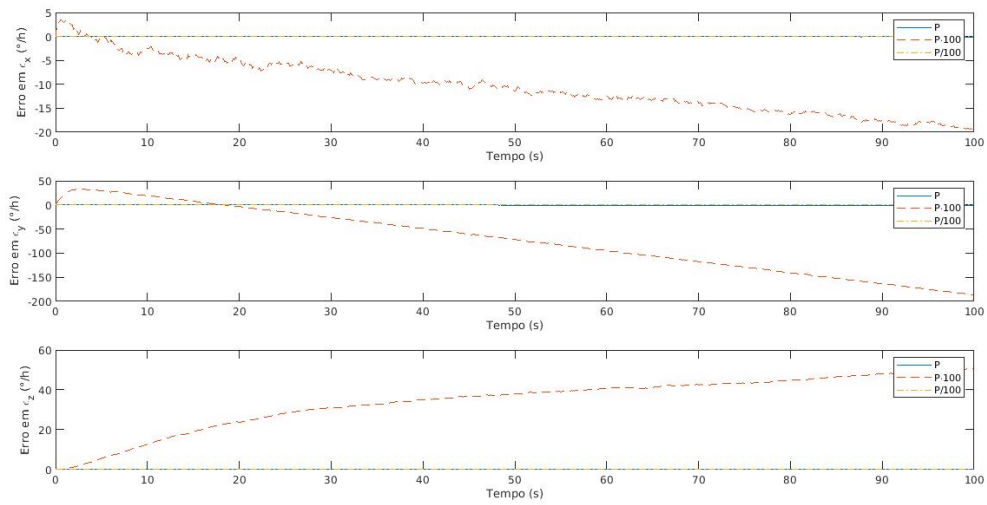
tal que  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}_k$  e  $M$  é o número total de estimativas.

Analisando a Tabela 7.4, pode-se observar que os resultados médios sofrem alterações em relação a mudança nos valores de  $P_0$ , nota-se que o desvio padrão para o ângulo *yaw* com  $P_0 \cdot 100$  é o maior em comparação com as outras condições e que o ângulo *roll* possui um erro em média de 0,17% para as três condições.

A seguir, na Figura 7.6, apresenta-se o erro da estimação do *bias* do erro com as condições anteriormente estabelecidas. A Tabela 7.5 apresenta o valor médio e o desvio padrão para a estimação do erro de atitude presente na Figura 7.6.

A partir da Tabela 7.5 e Figura 7.6, nota-se que para a alteração da matriz de covariância dos estados iniciais multiplicada por cem, o filtro torna-se muito impreciso. Ainda em relação aos *bias* dos giros, nota-se que com a condição inicial e com os elementos da matriz de covariância dos estados iniciais dividida por cem o erro é da

Figura 7.6 - Estimação de erro dos *bias* dos giros para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações



Fonte: Autor

Tabela 7.5 - Média e desvio padrão estatístico dos erros referente à estimação dos *bias* dos giros para Condições 1, 2, 3 para 1000 observações

	$P_0$	$P_0 \cdot 100$	$P_0 \div 100$
Erro em $\varepsilon_x$ ( $^\circ/h$ )	$-0,0010 \pm 0,0465$	$-10,4569 \pm 5,4618$	$0,0021 \pm 7,4 \times 10^{-4}$
Erro em $\varepsilon_y$ ( $^\circ/h$ )	$-0,4158 \pm 0,8112$	$-72,4260 \pm 65,1947$	$0,6043 \pm 0,0174$
Erro em $\varepsilon_z$ ( $^\circ/h$ )	$0,2012 \pm 0,0612$	$34,1678 \pm 13,0006$	$0,0052 \pm 0,0018$

ordem de -0,0188% e 0,0366% para o *bias* no eixo x, entretanto para os eixos y e z, o erro relativo do **bias** foi de cerca de 8,6095% e 7,5104% para a Condição 1.

A fim de fazer uma análise mais robusta, são analisados os erros relativos de cada estimação, ou seja, para a atitude e para o *bias* em comparação com os valores reais obtidos via PROPAT. A Tabela 7.6 apresenta os valores de erro relativo para a atitude e para os *bias* de giro para as Condições 1, 2 e 3.

A partir da análise dos erros relativos para as Condições 1, 2 e 3 é possível analisar a precisão do filtro para as determinadas condições estabelecidas anteriormente. Nota-se que para o ângulo *yaw*, o erro relativo é elevado e que o filtro não é tão preciso quanto comparado com os ângulos *roll* e *pitch*, tal fato provavelmente é explicado por *yaw* ser obtido de maneira indireta pelos sensores o que deve favorecer o aparecimento de mais erros. Ademais, nota-se que os erros relativos para os *bias*

Tabela 7.6 - Erro relativo da atitude e do *bias* dos giros em comparação com os valores reais para as Condições 1, 2 e 3 para 1000 observações

	$P_0$	$P_0 \cdot 100$	$P_0 \div 100$
Erro relativo de $\phi$	0,1509%	0,0146%	0,3671%
Erro relativo de $\theta$	-0,5155%	-0,7904%	-0,3624%
Erro relativo de $\psi$	10,4262%	22,1899%	13,2360%
Erro relativo de $\varepsilon_x$	-0,0188%	-181,5439 %	0,0366%
Erro relativo de $\varepsilon_y$	-8,6095%	-1499,5030%	12,5115%
Erro relativo de $\varepsilon_z$	7,5104%	1274,9249%	0,1974%

são elevados o que mostra que o filtro não atingiu a convergência desejada, sendo necessário novos ajustes das condições iniciais de referência.

### 7.1.2 Análise da interferência da matriz de covariância do ruído do processo

Nessa subseção, é feita uma análise da interferência da matriz de covariância do ruído do processo ( $\mathbf{Q}$ ). Nesta primeira análise, usa-se uma taxa de amostragem de 0,1 s para 100 s de observação. Para estimar a atitude do satélite, são feitas algumas conversões de parâmetros de atitude dos ângulos de Euler para os quatérnios. As condições iniciais utilizadas foram as mesmas da Subseção 7.1.1 (Condição 1).

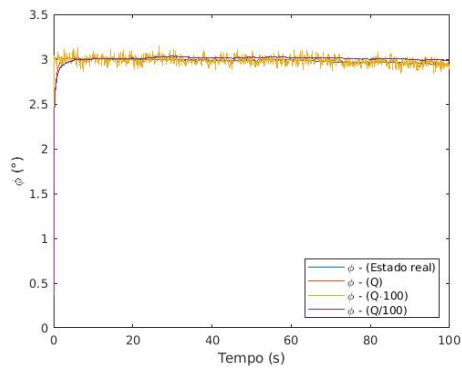
Para analisar a dinâmica da matriz de covariância do ruído do processo  $\mathbf{Q}$ , altera-se o valor dos ruídos relacionados a diagonal da matriz. Nessa perspectiva, altera-se o todos os valores da diagonal multiplicando por 100 (Condição 4), inicialmente, e depois altera-se todos os valores da diagonal dividindo por 100 (Condição 5). A Figura 7.7 apresenta a estimação dos ângulos de atitude usando o FKE e as três condições estabelecidas.

A Figura 7.8 apresenta os resíduos dos Sensores Solares Digitais (DSS) para as Condições 1, 4 e 5.

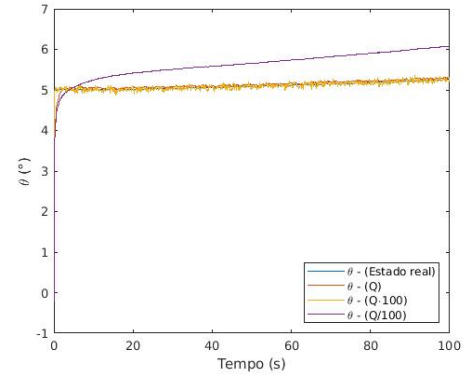
A Tabela 7.7 mostra o valor médio dos resíduos do DSS para cada uma das condições do FKE apresentado na Figura 7.8.

Observa-se que os filtros com a Condição 1 e 4 possuem uma média perto de zero, entretanto para o DSS<sub>2</sub> com a Condição 5, a média do resíduo não é tão próximo a zero quanto as outras duas condições. A Figura 7.9 apresenta os resíduos dos dois Sensores de Terra Infravermelho (IRES), para o FKE com as Condições 1, 4 e 5.

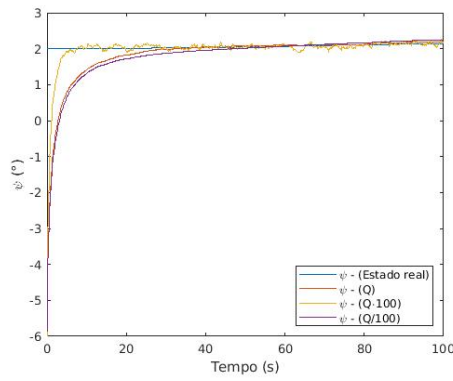
Figura 7.7 - Estimação de atitude para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações



(a) Estimação do ângulo *roll*

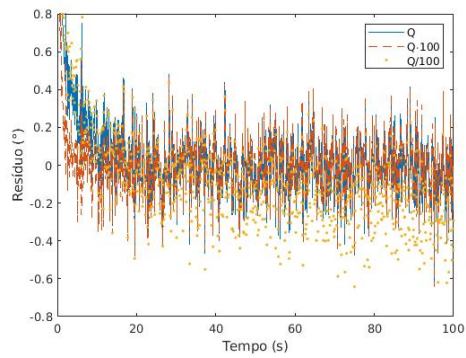


(b) Estimação do ângulo *pitch*

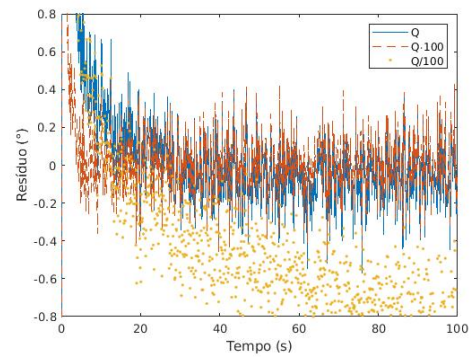


(c) Estimação do ângulo *yaw*

Figura 7.8 - Resíduos dos DSS para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações



(a) Resíduo do DSS<sub>1</sub>



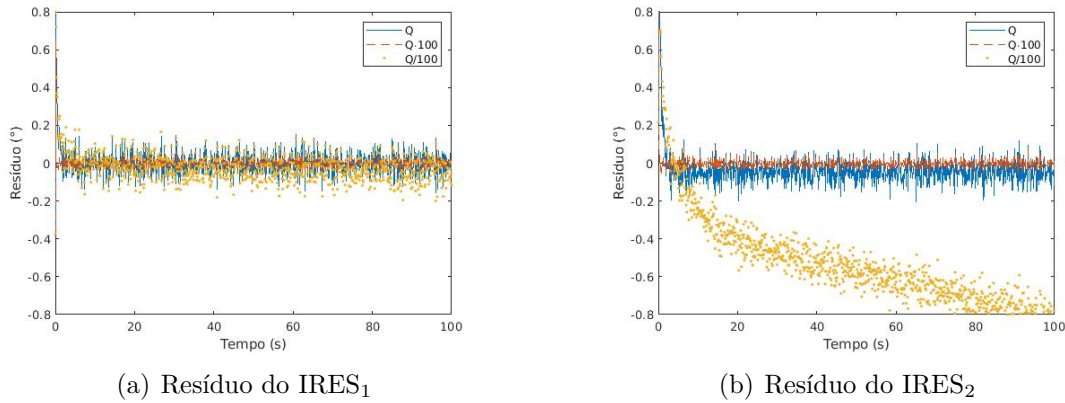
(b) Resíduo do DSS<sub>2</sub>

Fonte: Autor

Tabela 7.7 - Média e desvio padrão estatístico dos resíduos referente aos dois DSS para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações

	$Q$	$Q \cdot 100$	$Q \div 100$
Res. DSS <sub>1</sub> (°)	$0,0732 \pm 1,1069$	$0,0420 \pm 1,0926$	$-0,0236 \pm 1,1209$
Res. DSS <sub>2</sub> (°)	$0,0554 \pm 1,0739$	$0,0095 \pm 0,9973$	$-0,3864 \pm 1,1494$

Figura 7.9 - Resíduos dos IRES para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações



Fonte: Autor

A Tabela 7.8 mostra o valor médio dos resíduos do DSS para cada uma das condições do FKE apresentado na Figura 7.9.

Tabela 7.8 - Média e desvio padrão estatístico dos resíduos referente aos dois IRES para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações

	$Q$	$Q \cdot 100$	$Q \div 100$
Res. IRES <sub>1</sub> (°)	$0,0021 \pm 0,0785$	$3,10 \times 10^{-4} \pm 0,0324$	$-0,0197 \pm 0,0876$
Res. IRES <sub>2</sub> (°)	$-0,0327 \pm 0,1342$	$-7,41 \times 10^{-4} \pm 0,0506$	$-0,5237 \pm 0,2805$

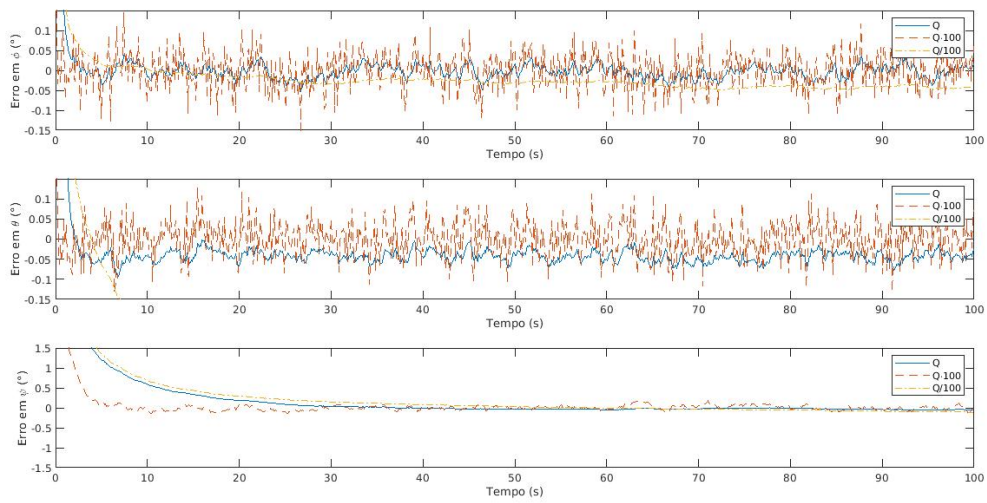
Nota-se que os resíduos com as Condições 1 e 5 convergem, quando essas condições são comparadas com a condição de que os elementos da matriz de covariância do ruído do processo é dividida por 100.

Na Figura 7.10, apresenta-se o erro da estimação de atitude para o FKE com as Condições 1, 4 e 5.

A Tabela 7.9 apresenta o valor médio e o desvio padrão para a estimação do erro de atitude presente na Figura 7.10.



Figura 7.10 - Estimação de erro de atitude para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações



Fonte: Autor

Tabela 7.9 - Média e desvio padrão estatístico dos erros referente à estimação de atitude para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações

	$Q$	$Q \cdot 100$	$Q \div 100$
Erro em $\phi$ ( $^\circ$ )	$0,0045 \pm 0,1025$	$0,0026 \pm 0,0936$	$-0,0173 \pm 0,1068$
Erro em $\theta$ ( $^\circ$ )	$-0,0262 \pm 0,2063$	$0,0057 \pm 0,1763$	$-0,5172 \pm 0,3274$
Erro em $\psi$ ( $^\circ$ )	$0,2145 \pm 0,7430$	$0,0777 \pm 0,5442$	$0,2589 \pm 0,7667$

Na Tabela 7.10 apresentam-se os valores de erro relativo para a atitude para as Condições 1, 4 e 5.

Tabela 7.10 - Erro relativo da atitude em comparação com os valores reais para as Condições 1, 4 e 5 para 1000 observações

	$Q$	$Q \cdot 100$	$Q \div 100$
Erro relativo de $\phi$	0,1509%	0,0894%	-0,5815%
Erro relativo de $\theta$	-0,5155%	0,1131%	-10,1438%
Erro relativo de $\psi$	10,4262%	3,7807%	12,5859%

A partir da análise dos erros relativos para as Condições 1, 4 e 5 é mais nítido analisar a precisão do filtro para as determinadas condições estabelecidas anteriormente. Nota-se que para a Condição 5, os erros são realmente maiores do que quando comparados com as Condições 1 e 4 Além disso, para a Condição 4, a maioria

dos erros relativos (Tabela 7.10) foram menores do que quando comparados com a Condição 1, o que mostra que essa pode ser uma condição mais precisa. Tal fato ocorre, provavelmente, devido ao aumento do ganho  $\mathbf{K}$  quando há o aumento da matriz de covariância do ruído do processo  $\mathbf{Q}$  o que torna o filtro mais preciso.

### 7.1.3 Análise da interferência da matriz de covariância do ruído da medida

Nessa subseção, é feita uma análise da interferência da matriz de covariância do ruído da medida ( $\mathbf{R}$ ) considerando a Condição adotadas na Subseção 7.1.1 (Condição 1).

Para analisar a dinâmica da matriz de covariância do ruído do processo  $\mathbf{R}$ , altera-se o valor dos ruídos relacionados a diagonal da matriz. Nessa perspectiva, altera-se o todos os valores da diagonal multiplicando por 100 (Condição 6), inicialmente, e depois altera-se todos os valores da diagonal dividindo por 100 (Condição 7). A Figura 7.11 apresenta a estimação dos ângulos de atitude usando o FKE e as três condições estabelecidas.

A Figura 7.12 apresenta os resíduos dos dois Sensores Solares Digitais (DSS) para as Condições 1, 6 e 7.

A Tabela 7.11 mostra o valor médio dos resíduos do DSS para cada uma das condições do FKE apresentado na Figura 7.12.

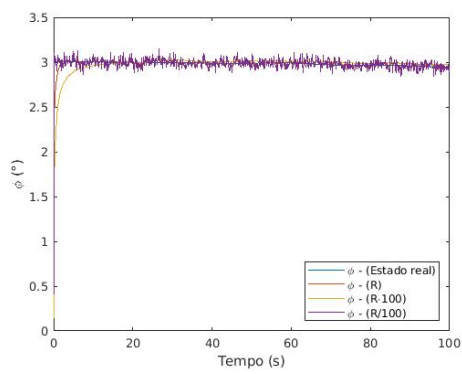
Tabela 7.11 - Média e desvio padrão estatístico dos resíduos referente aos dois DSS para as Condições 1, 6 e 7 para 1000 observações

	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R} \cdot 100$	$\mathbf{R} \div 100$
Res. DSS <sub>1</sub> (°)	0,0732 ± 1,1069	0,1324 ± 1,0682	0,0569 ± 1,2718
Res. DSS <sub>2</sub> (°)	0,0554 ± 1,0739	0,0195 ± 1,1707	0,0431 ± 0,7922

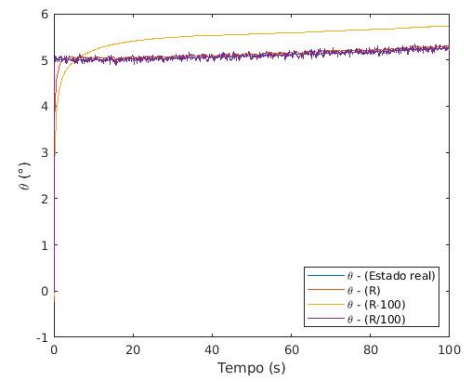
Neste caso, com a mudança da matriz de covariância do ruído da medida nota-se que os resíduos dos DSS não são tão afetados do que quando comparados com alterações nas outras matrizes de covariância. Além disso, para a Condição 7, o resíduo dos DSS é menor do que quando comparado com as outras duas condições, o que implica que o filtro converge de forma mais efetiva para esse caso.

A Figura 7.13 apresenta os resíduos dos Sensores de Terra Infravermelho (IRES), para o FKE com as Condições 1, 6 e 7.

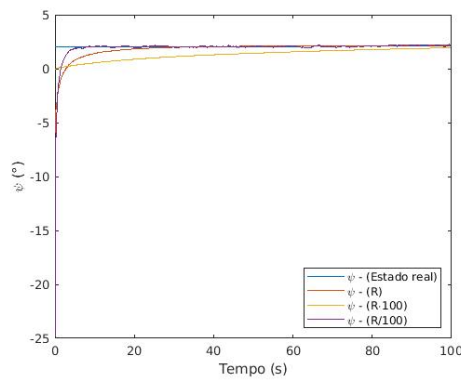
Figura 7.11 - Estimação de atitude para as Condições 1, 6 e 7 para 1000 observações



(a) Estimação do ângulo *roll*



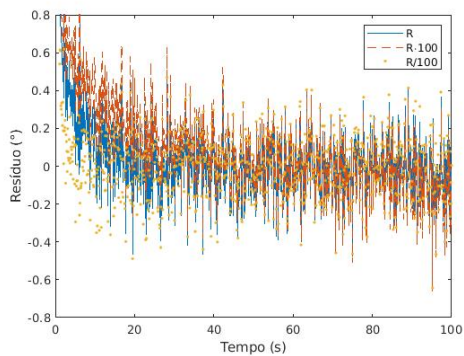
(b) Estimação do ângulo *pitch*



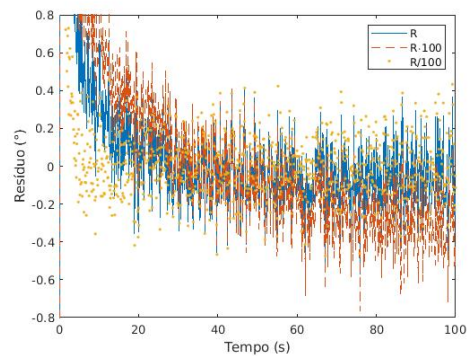
(c) Estimação do ângulo *yaw*

Fonte: Autor

Figura 7.12 - Resíduos dos DSS para as Condições 1, 6 e 7 para 1000 observações



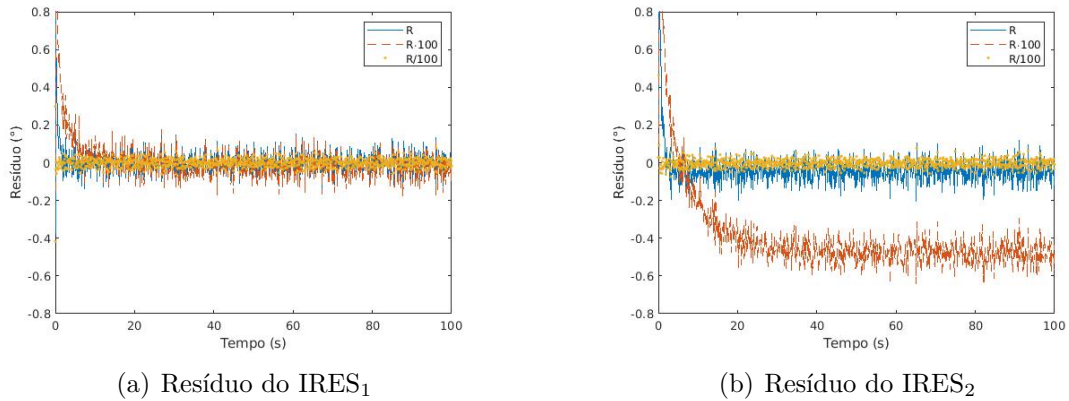
(a) Resíduo do DSS<sub>1</sub>



(b) Resíduo do DSS<sub>2</sub>

Fonte: Autor

Figura 7.13 - Resíduos dos IRES para as Condições 1, 6 e 7 para 1000 observações



Fonte: Autor

A Tabela 7.12 mostra o valor médio dos resíduos do DSS para cada uma das condições do FKE apresentado na Figura 7.13. Identifica-se que os resíduos, assim como no caso dos DSS, são mais próximos a zero para o caso da Condição 7. Além disso, para o IRES<sub>2</sub> os resíduos afastam-se da média zero e, por isso, definimos que o filtro está divergindo da posição ideal, ou seja, média igual a zero.

Tabela 7.12 - Média e desvio padrão estatístico dos resíduos para as Condições 1, 6 e 7

	$R$	$R \cdot 100$	$R \div 100$
Res. IRES <sub>1</sub> (°)	$0,0021 \pm 0,0785$	$0,0070 \pm 0,1378$	$-4,1 \times 10^{-4} \pm 0,0270$
Res. IRES <sub>2</sub> (°)	$-0,0327 \pm 0,1342$	$-0,3822 \pm 0,3020$	$-7,9 \times 10^{-4} \pm 0,0552$

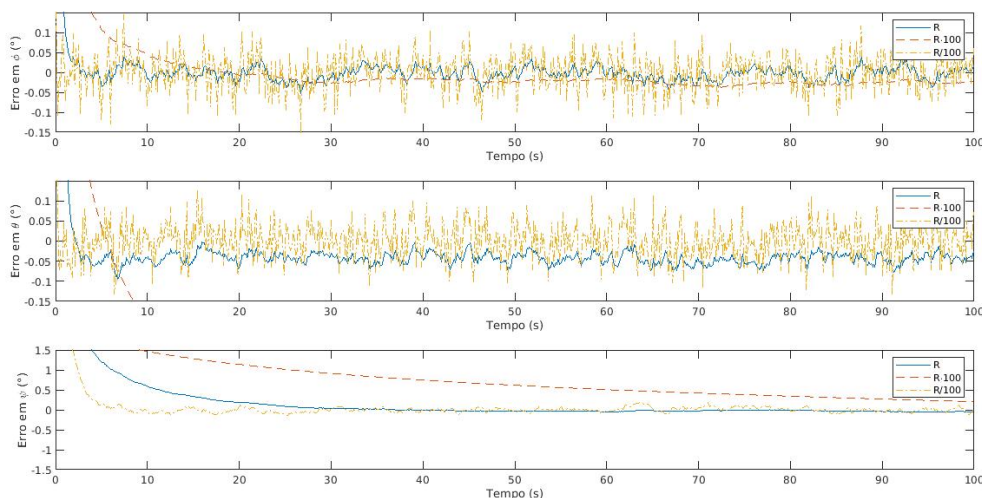
Na Figura 7.14, apresenta-se o erro da estimação de atitude para o FKE com as Condições 1, 6 e 7.

A Tabela 7.13 apresenta o valor médio e o desvio padrão para a estimação do erro de atitude presente na Figura 7.14.

Tabela 7.13 - Média e desvio padrão estatístico dos erros referente à estimação de atitude em relação as Condições 1, 6 e 7 para 1000 observações

	$R$	$R \cdot 100$	$R \div 100$
Erro em $\phi$ (°)	$0,0045 \pm 0,1025$	$0,0093 \pm 0,1554$	$0,0019 \pm 0,0931$
Erro em $\theta$ (°)	$-0,0262 \pm 0,2063$	$-0,3757 \pm 0,3414$	$0,0057 \pm 0,1723$
Erro em $\psi$ (°)	$0,2145 \pm 0,7430$	$0,7463 \pm 0,4538$	$0,1353 \pm 1,1846$

Figura 7.14 - Estimação de erro de atitude para as Condições 1, 6 e 7 para 1000 observações



Fonte: Autor

Com a Tabela 7.13 e Figura 7.14 percebe-se que para a Condição 6, a estimação não é precisa e diverge do dado real para a atitude para o ângulo *pitch*. Além disso, para a Condição 7 os erros, em geral, são menores do que quando comparados com as outras condições estabelecidas para o FKE o que pode ser verificado através da Tabela 7.14.

Tabela 7.14 - Erro relativo da atitude em comparação com os valores reais para as Condições 1, 6 e 7 para 1000 observações

	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R} \cdot 100$	$\mathbf{R} \div 100$
Erro relativo de $\phi$	0,1509%	0,3146%	0,0651%
Erro relativo de $\theta$	-0,5155%	-7,3689%	0,1119%
Erro relativo de $\psi$	10,4262%	36,2755%	6,5800%

Nota-se que as alterações na matriz de covariância do ruído da medida ( $\mathbf{R}$ ) trazem mudanças na sensibilidade do FKE, visto que tanto a multiplicação da matriz  $\mathbf{R}$  tanto a divisão da matriz  $\mathbf{R}$  trazem perspectivas diferentes para a precisão do filtro. Tal fato ocorre porque  $\mathbf{R}$  é inversamente proporcional ao ganho  $\mathbf{K}$  e está relacionada a um fator soma no denominador para a matriz de covariância do vetor estado estimado para o tempo  $\mathbf{P}_k^+$ .

A partir de todas as análises que foram feitas, conclui-se que as matrizes de cova-

riância interferem significamente no processo do Filtro de Kalman Estendido para a estimação de atitude e *bias* dos giros. Além disso, os erros dos *bias* e a implementação do código desenvolvido nesta pesquisa não convergem para as condições impostas.

## 7.2 Dados simulados para 50 observações

O intuito desta seção é analisar o quanto a quantidade de medidas pode influenciar nos resultados da estimação de atitude. Para isso, é desenvolvida uma análise para as matrizes de covariância que atuam no Filtro de Kalman Estendido para um conjunto com 50 observações.

### 7.2.1 Análise da interferência da matriz de covariância dos estados iniciais

Nessa subseção é feita uma análise da interferência da matriz de covariância dos estados iniciais ( $\mathbf{P}_0$ ). As condições analisadas são as mesmas da Subseção 7.1.1, ou seja, as condições 1, 2 e 3. A Figura 7.15 apresenta a estimação dos ângulos de atitude.

A análise dos resíduos para os DSS e IRES não será analisada para uma taxa de amostragem de 1 s para 50 s de observação, porque os resíduos dos sensores demonstram a convergência do FKE.

Na Figura 7.16, apresenta-se o erro da estimação de atitude para o FKE com as Condições 1, 2 e 3.

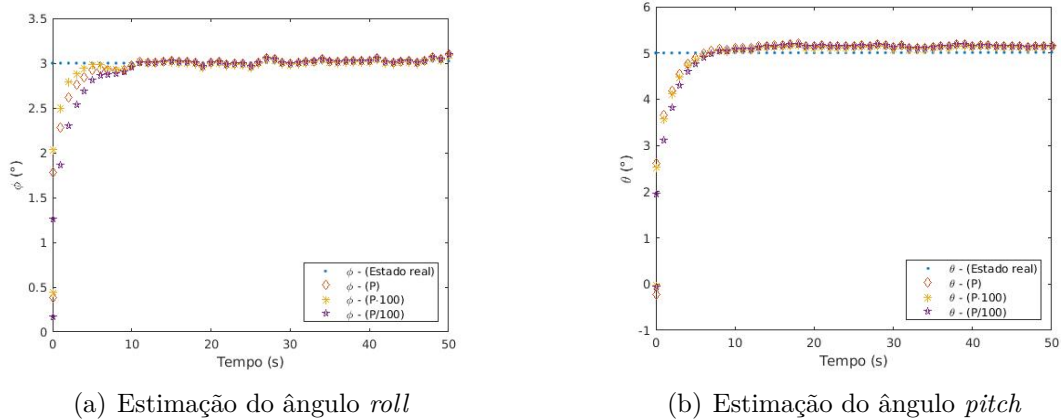
A Tabela 7.15 apresenta o valor médio e o desvio padrão para a estimação do erro de atitude presente na Figura 7.16.

Tabela 7.15 - Média e desvio padrão estatístico dos erros referente à estimação de atitude para as Condições 1, 2 e 3 para 50 observações

	$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{P}_0 \cdot 100$	$\mathbf{P}_0 \div 100$
Erro em $\phi$ ( $^\circ$ )	0,1041 $\pm$ 0,4097	0,0901 $\pm$ 0,3810	0,1453 $\pm$ 0,4877
Erro em $\theta$ ( $^\circ$ )	0,0909 $\pm$ 0,8402	0,1199 $\pm$ 0,8195	0,1341 $\pm$ 0,8912
Erro em $\psi$ ( $^\circ$ )	2,2865 $\pm$ 1,7933	3,9539 $\pm$ 4,5494	1,3948 $\pm$ 0,3873

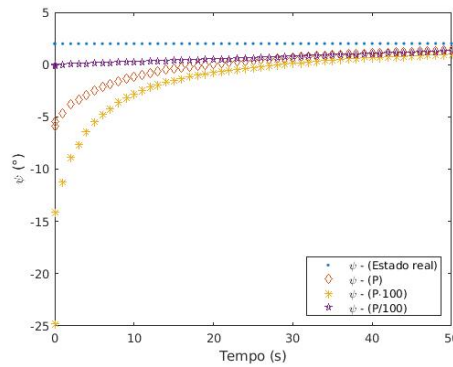
Nota-se que com poucos dados, as médias e os desvios são maiores se comparados ao período de observação com 1000 medidas. Além disso, para o ângulo *yaw* o FKE

Figura 7.15 - Estimação de atitude para as Condições 1, 2 e 3 para 50 observações



(a) Estimação do ângulo *roll*

(b) Estimação do ângulo *pitch*



(c) Estimação do ângulo *yaw*

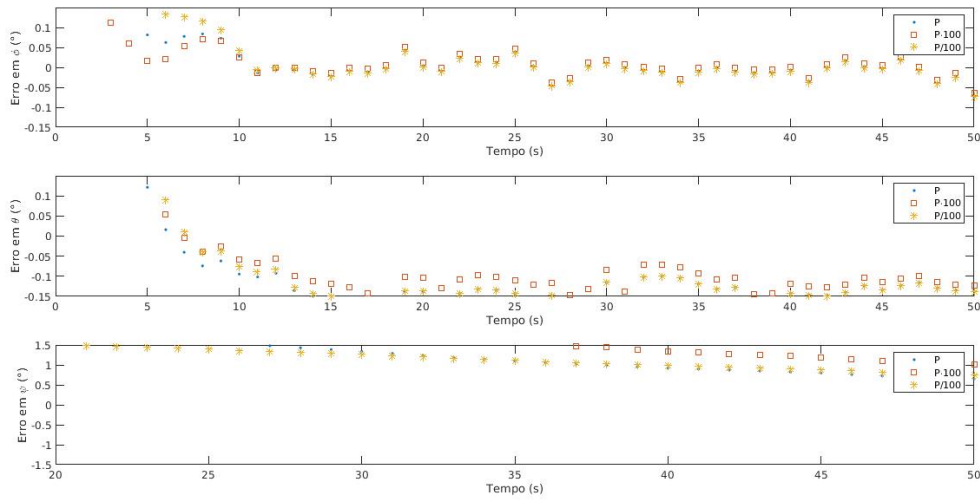
Fonte: Autor

ainda possui uma média e o desvio padrão de erro elevada do que quando comparada para a situação com mais dados e ainda que quando a matriz de covariância dos estados iniciais multiplicada por cem ( $\mathbf{P} \cdot 100$ ) temos que o filtro não convergiu para os dados reais.

Da mesma forma para os dados com 1000 observações, a fim de fazer uma análise mais robusta, são analisados os erros relativos de cada estimação da atitude em comparação com os valores reais obtidos via PROPAT. A Tabela 7.16 apresenta os valores de erro relativo para a atitude para as Condições 1, 2 e 3.

Dessa forma, nota-se, realmente, que os erros são maiores do que quando comparados com as 1000 observações, visto que o filtro não conseguiu atingir um ponto de convergência com base nos dados do PROPAT. Tal fato, está relacionado com as etapas de atualização e propagação o que mostra que quando há mais observações, o sistema é mais preciso do que quando comparado com menos observações.

Figura 7.16 - Estimação de erro de atitude para as Condições 1, 2 e 3 para 50 observações



Fonte: Autor

Tabela 7.16 - Erro relativo da atitude em comparação com os valores reais para as Condições 1, 2 e 3 para 50 observações

	$P_0$	$P_0 \cdot 100$	$P_0 \div 100$
Erro relativo de $\phi$	3,4626%	2,9978%	4,8324%
Erro relativo de $\theta$	1,8172%	2,3967%	2,6790%
Erro relativo de $\psi$	113,8286%	196,8308%	69,4352%

### 7.2.2 Análise da interferência da matriz de covariância do ruído do processo

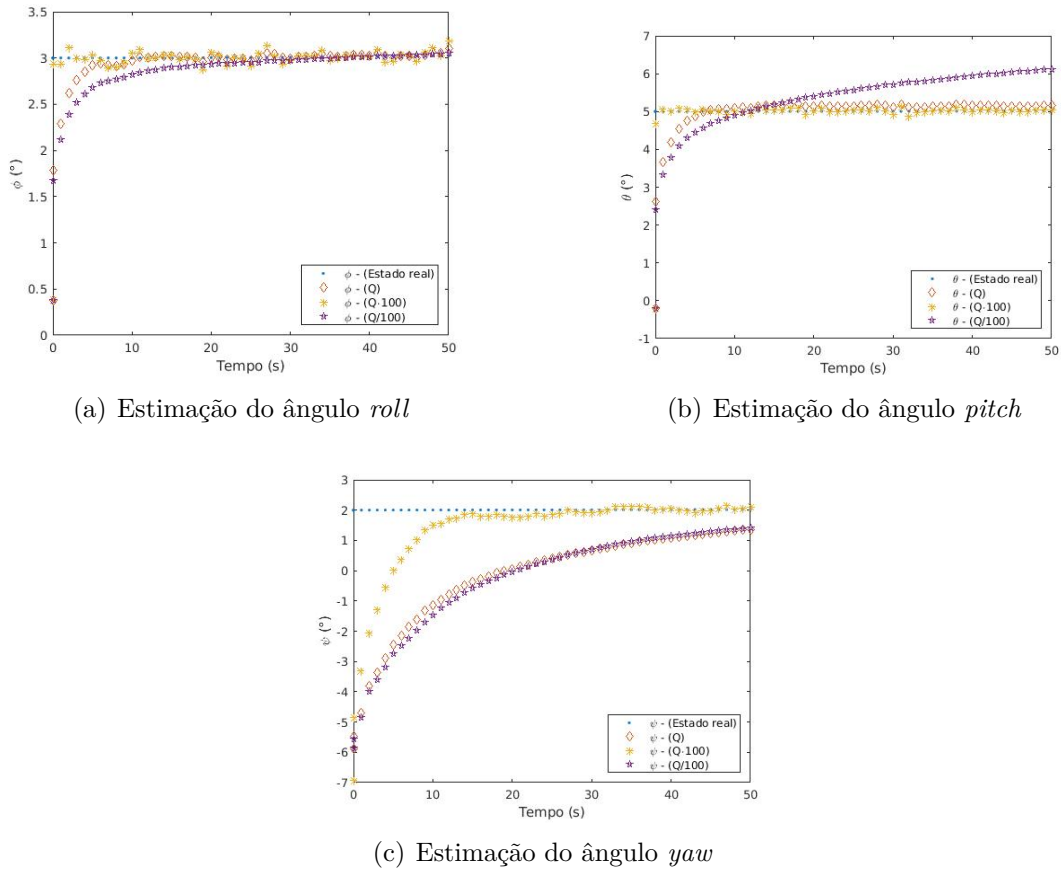
Nessa subseção, é feita uma análise da interferência da matriz de covariância do ruído do processo ( $Q$ ). Para uma taxa de amostragem de 1 s para 50 s de observação, tal que as condições iniciais utilizadas foram as mesmas da Subseção 7.2.1 (Condição 1). A Figura 7.17 apresenta a estimação dos ângulos de atitude.

Para uma melhor análise, na Figura 7.18, apresenta-se o erro da estimação de atitude para o FKE para as Condições 1, 4 e 5. A Tabela 7.17 apresenta o valor médio e o desvio padrão para a estimação do erro de atitude presente na Figura 7.18.

Neste caso, percebe-se que o filtro com a Condição 5 possui uma precisão e uma convergência mais rápida do que quando comparada com as outras duas condições do FKE. Além disso, percebe-se que para o ângulo *yaw* o erro relativo é elevado e



Figura 7.17 - Estimação de atitude para as Condições 1, 4 e 5 para 50 observações



Fonte: Autor

Tabela 7.17 - Média e desvio padrão estatístico dos erros referente à estimação de atitude para as Condições 1, 4 e 5 para 50 observações

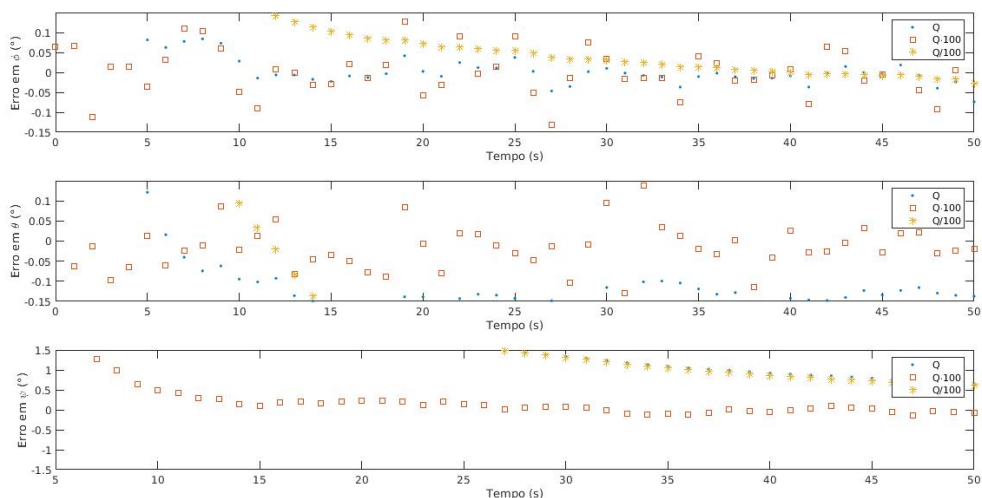
	$Q$	$Q \cdot 100$	$Q \div 100$
Erro em $\phi$ ( $^\circ$ )	$0,1041 \pm 0,4097$	$0,0500 \pm 0,3675$	$0,1796 \pm 0,4197$
Erro em $\theta$ ( $^\circ$ )	$0,0909 \pm 0,8402$	$0,0895 \pm 0,7268$	$-0,2376 \pm 1,0759$
Erro em $\psi$ ( $^\circ$ )	$2,2865 \pm 1,7933$	$0,7857 \pm 1,8113$	$2,3681 \pm 1,8836$

que o filtro não é tão preciso quanto comparado com os ângulos *roll* e *pitch*, tal fato provavelmente é explicado por *yaw* ser obtido de maneira indireta pelos sensores o que deve favorecer o aparecimento de mais erros.

Na Tabela 7.18 apresentam-se os valores de erro relativo para a atitude para as Condições 1, 4 e 5.

Da Tabela 7.16 nota-se que para as Condições 1, 2 e 3, o FKE ainda não atingiu a

Figura 7.18 - Estimação de erro de atitude para as Condições 1, 4 e 5 para 50 observações



Fonte: Autor

Tabela 7.18 - Erro relativo da atitude em comparação com os valores reais para as Condições 1, 4 e 5 para 50 observações

	$Q$	$Q \cdot 100$	$Q \div 100$
Erro relativo de $\phi$	3,4626%	1,6630%	5,9736%
Erro relativo de $\theta$	1,8172%	1,7876%	-4,7472%
Erro relativo de $\psi$	113,8286%	39,1136%	117,8882%

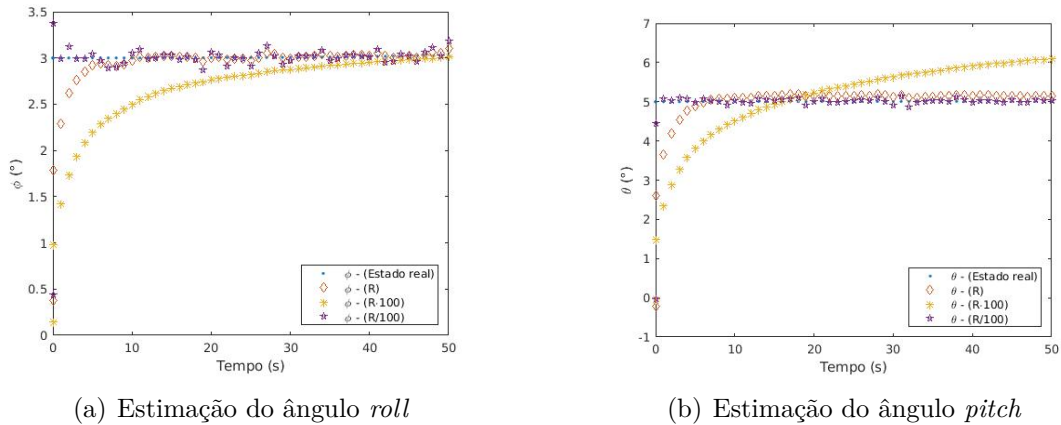
convergência necessária, porque ainda não há dados o suficiente. Além disso, para o ângulo *yaw*, é notável que os erros relativos são altos quando comparados com os dados reais obtidos via PROPAT.

### 7.2.3 Análise da interferência da matriz de covariância do ruído da medida

Nessa subseção, é feita uma análise da interferência da matriz de covariância do ruído da medida ( $R$ ) para uma taxa de amostragem de 1 s para 50 s de observação. As condições iniciais utilizadas foram as mesmas da Subseção 7.2.1 (Condição 1). A Figura 7.19 apresenta a estimação dos ângulos de atitude.

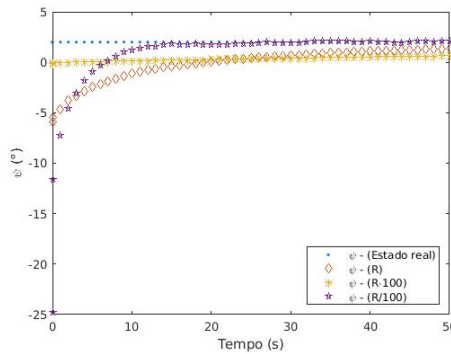
Na Figura 7.20, apresenta-se o erro da estimação de atitude para o FKE com as Condições 1, 6 e 7. A Tabela 7.19 apresenta o valor médio e o desvio padrão para a estimação do erro de atitude presente na Figura 7.20.

Figura 7.19 - Estimação de atitude para as Condições 1, 6 e 7 para 50 observações



(a) Estimação do ângulo *roll*

(b) Estimação do ângulo *pitch*



(c) Estimação do ângulo *yaw*

Fonte: Autor

Tabela 7.19 - Média e desvio padrão estatístico dos erros referente à estimação de atitude em relação as Condições 1, 6 e 7 para 50 observações

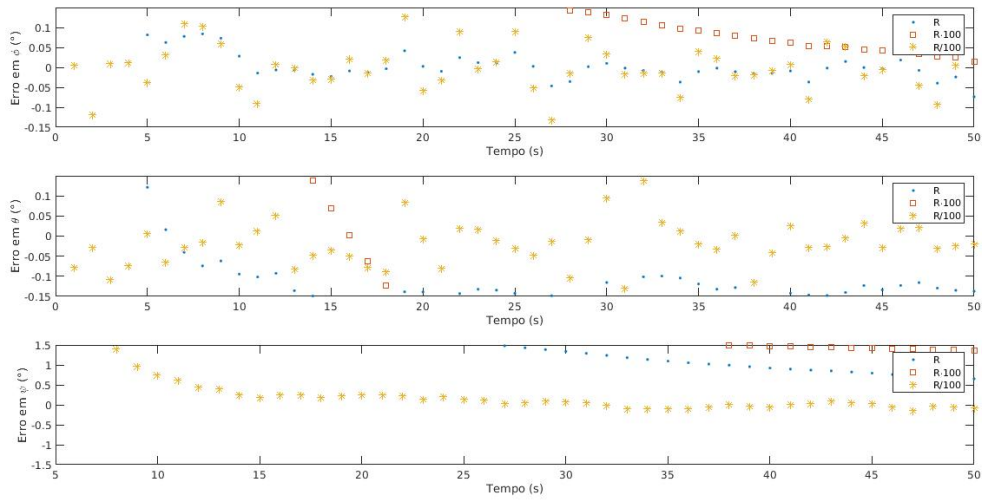
	$R$	$R \cdot 100$	$R \div 100$
Erro em $\phi$ ( $^{\circ}$ )	$0,1041 \pm 0,4097$	$0,3814 \pm 0,5377$	$0,0389 \pm 0,3650$
Erro em $\theta$ ( $^{\circ}$ )	$0,0909 \pm 0,8402$	$-0,0153 \pm 1,2338$	$0,0894 \pm 0,7041$
Erro em $\psi$ ( $^{\circ}$ )	$2,2865 \pm 1,7933$	$1,6752 \pm 0,1997$	$1,5202 \pm 4,3646$

A média e desvio padrão estatístico dos erros para o ângulo *yaw* são mais elevados do que quando comparados com as outras condições. Além disso, na estimação do ângulo *roll* o FKE com a  $R \cdot 100$  demora mais para convergir para o estado real.

Na Tabela 7.20 apresentam-se os valores de erro relativo para a atitude para as Condições 1, 6 e 7.

Dessa forma, a partir de todas as análises que foram feitas, conclui-se que as matrizes

Figura 7.20 - Estimação de erro de atitude para as Condições 1, 6 e 7 para 50 observações



Fonte: Autor

Tabela 7.20 - Erro relativo da atitude em comparação com os valores reais para as Condições 1, 6 e 7 para 50 observações

	$R$	$R \cdot 100$	$R \div 100$
Erro relativo de $\phi$	3,4626%	12,6844%	1,2939%
Erro relativo de $\theta$	1,8172%	-0,3072%	1,7868%
Erro relativo de $\psi$	113,8286%	83,3953%	75,6784%

de covariancia interferem significativamente no processo do Filtro de Kalman Estendido para a estimação de atitude. Ademais, mesmo com menos medidas o FKE mostra-se uma ferramenta muito poderosa, pois as medidas convergem, em alguns casos, convergem para um estado real com uma determinada precisão.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho foi proposto realizar um estudo sobre a interferência das matrizes de covariância do Filtro de Kalman Estendido na estimação da atitude em quatérnions. A importância deste estudo se deve ao fato de que o FKE é um dos filtros mais utilizados no setor aeroespacial e nesse trabalho determina-se a atitude através de um processo estocástico para analisar o impacto das condições iniciais do método.

O Filtro de Kalman Estendido considera o vetor de observação fornecido pelos sensores e corrige o vetor de estado na etapa de atualização. A partir dos dados simulados que foram obtidos através do simulador PROPAT, desenvolvido por Carrara (2015), é possível fixar uma condição inicial e variar as matrizes de covariância do sistema para analisar a sensibilidade do filtro com essas alterações. Além disso, com a variação da taxa de amostragem e tempo de observação para poucos dados, é notável que o FKE apresenta média e desvio padrão estatístico maior do que quando comparada com uma estimativa com muitas medidas.

Em relação a robustez do FKE, nota-se que a alteração das matrizes de covariância do ruído do processo  $\mathbf{Q}$  e matriz de covariância do ruído da medida  $\mathbf{R}$  afetam diretamente os resíduos dos sensores. Essa perspectiva é visível quando analisa-se o  $DSS_2$  e o  $IRES_2$  para a alteração das matrizes mencionadas.

Segundo a teoria, a alteração de qualquer uma das matrizes implica na convergência ou divergência das estimativas de atitude e dos *bias* dos giros. Nesse caso, os *bias* dos giros divergiram em relação ao estado real. É válido ressaltar que as alterações nas matrizes de covariância estão associadas ao ganho de Kalman ( $\mathbf{K}$ ) e a matriz de covariância do vetor estado estimado ( $\mathbf{P}_k^+$ ) e, por isso, essas mudanças nas matrizes implicam um tempo para convergência maior, um erro maior ou até mesmo a divergência total da atitude e do *bias* dos giros, como observado nas Condições 2, 5, 7 para 1000 observações.

### 8.1 Trabalhos futuros

No decorrer deste trabalho, utilizou-se a formulação das equações cinemáticas em quatérnions. Uma desvantagem que é percebida na estruturação do algoritmo é a quantidade do número de conversões dos quatérnions para os ângulos de Euler que são necessárias, pois os sensores DSS e IRES fornecem dados em termos dos ângulos de Euler.

A seguir estão apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Estimar a atitude do satélite utilizando os parâmetros de Rodrigues para representar a atitude e analisar a interferência das matrizes de covariância para esse processo. Os quatérnions possuem algumas desvantagens em comparação aos Parâmetros Modificados de Rodrigues, por exemplo, o FKE possui uma singularidade associada a dimensão da matriz de covariância e o quatérnion possui restrições como o módulo deve ser unitário e que a sua matriz de atitude via quatérnion não é ortogonal.
- Implementação deste tipo de análise em dados reais fornecidos pelo INPE para que sejam definidas matrizes de covariância que determinam a estimativa da atitude com maior precisão.
- Utilização de dados do satélite Amazonia 1, recentemente lançado, que possui uma equação cinemática e um tensor de inércia diferentes do que comparado com um satélite do tipo CBERS. Pode-se utilizar o FKE nesse satélite e comparar os dados com os já desenvolvidos em pesquisas como apresentado em [Garcia et al. \(2011\)](#) e [Silva \(2016\)](#).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, M. P. C. de. **Modelamento de Efeitos de Propagação em Enlaces Satélite de Órbita Baixa**. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2003. 5
- BAR-ITZHACK, I.; DEUTSCHMANN, J.; MARKLEY, F. Quaternion normalization in additive ekf for spacecraft attitude determination. In: **Navigation and Control Conference**. [S.l.: s.n.], 1991. p. 2706. 3
- CARRARA, V. An open source satellite attitude and orbit simulator toolbox for matlab. In: **Proceedings of the 17th International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–12. 1, 31, 53
- CLEMENTS, R.; TAVARES, P.; LIMA, P. Small satellite attitude control based on a kalman filter. In: IEEE. **Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium on Intelligent Control. Held jointly with the 8th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (Cat. No. 00CH37147)**. [S.l.], 2000. p. 79–84.
- FOSBURY, A. Satellite position and attitude estimation using an extended kalman filter. In: **AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit**. [S.l.: s.n.], 2007. p. 6660.
- FUMING, H.; KUGA, H. Cbers simulator mathematical models. **CBTT Project, CBTT/2000/MM/001**, 1999. 8, 9, 10, 15
- GARCIA, R. V.; KUGA, H.; ZANARDI, M. Filtro não-linear de kalman sigma-ponto com algoritmo unscented aplicado a estimativa dinâmica da atitude de satélites artificiais. **Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos/SP**, 2011. 3, 6, 8, 9, 10, 11, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 27, 28, 30, 54
- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. 1960. 22
- LAVIOLA, J. J. A comparison of unscented and extended kalman filtering for estimating quaternion motion. In: IEEE. **Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003**. [S.l.], 2003. v. 3, p. 2435–2440.
- LEFFERTS, E. J.; MARKLEY, F. L.; SHUSTER, M. D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 5, n. 5, p. 417–429, 1982. 3, 22, 25, 27, 28, 29

- MARKLEY, F. L. Attitude error representations for kalman filtering. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 26, n. 2, p. 311–317, 2003. 3
- MARKLEY, F. L.; CRASSIDIS, J. L. **Fundamentals of spacecraft attitude determination and control**. [S.l.]: Springer, 2014. 1, 22
- RIBEIRO, G. A. X.; SILVA, W. R.; CANDIOTO, K. C. G. **attitude-parameters**. Zenodo, 2021. Disponível em: <<https://zenodo.org/record/5767547>>. 4
- ROCHA, F. P. et al. Aplicação do filtro de kalman estendido para estimação de populações em modelos epidemiológicos. [sn], 2019. 23
- SCHAUB, H.; JUNKINS, J. L. **Analytical mechanics of space systems**. [S.l.]: Aiaa, 2003. 13, 14, 15, 17, 18
- SCHMIDT, S. F. The kalman filter-its recognition and development for aerospace applications. **Journal of Guidance and Control**, v. 4, n. 1, p. 4–7, 1981. 3, 22
- SHEPPERD, S. W. Quaternion from rotation matrix. **Journal of guidance and control**, v. 1, n. 3, p. 223–224, 1978. 18
- SHUSTER, M. D. et al. A survey of attitude representations. **Navigation**, v. 8, n. 9, p. 439–517, 1993. 18
- SILVA, W.; GARCIA, R.; PARDAL, P.; KUGA, H.; ZANARDI, M. Filtro de partículas rao-blackwellized para estimação de atitude de satélites artificiais usando dados simulados. 11 2019. 20
- SILVA, W. R. Filtro h-infinito estendido de segunda ordem e filtro de partículas regularizado com “roughening” aplicados na estimação de atitude de satélites artificiais. 2016. 4, 8, 10, 11, 26, 54
- SIMON, D. **Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006. 23, 24, 25
- WERTZ, J. R. **Spacecraft attitude determination and control**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. 2, 8, 17, 22
- YANG, Y. **Spacecraft Modeling, Attitude Determination, and Control: Quaternion-Based Approach**. [S.l.]: CRC Press, 2019. 4, 22