



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

TRANSFORMADAS WAVELET E FERRAMENTAS ASSOCIADAS APLICADAS À GEOFÍSICA ESPACIAL

Pedro Marcos Mossulin Ferreira

Relatório de Iniciação Científica do
Programa PIBIC, orientado pela
Dra. Margarete Oliveira Domin-
gues e pelo Dr. Luciano Aparecido
Magrini.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/xx/yy>](http://urlib.net/xx/yy)

INPE
São José dos Campos

2021

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6923/6921

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

**COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO
DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):****Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Membros:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Amauri Silva Montes - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espaciais (ETE)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas
(CEA)

Dr. Joaquim José Barroso de Castro - Centro de Tecnologias Espaciais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos
(CPT)

Dr^a Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Duca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação
(SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

TRANSFORMADAS WAVELET E FERRAMENTAS ASSOCIADAS APLICADAS À GEOFÍSICA ESPACIAL

Pedro Marcos Mossulin Ferreira

Relatório de Iniciação Científica do
Programa PIBIC, orientado pela
Dra. Margarete Oliveira Domin-
gues e pelo Dr. Luciano Aparecido
Magrini.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/xx/yy>](http://urlib.net/xx/yy)

INPE
São José dos Campos

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Ferreira, Pedro Marcos Mossulin.

Cutter Transformadas Wavelet e Ferramentas Associadas Aplicadas à Geofísica Espacial / Nome Completo do Autor1; Nome Completo do Autor2. – São José dos Campos : INPE, 2021.

ix + 26 p. ; ()

Dissertação ou Tese (Mestrado ou Doutorado em Nome do Curso) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, AAAA.

Orientador : José da Silva.

1. Palavra chave. 2. Palavra chave 3. Palavra chave. 4. Palavra chave. 5. Palavra chave I. Título.

CDU 000.000



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](#).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](#).

Informar aqui sobre marca registrada (a modificação desta linha deve ser feita no arquivo publicacao.tex).

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar a utilização da transformada *wavelet* contínua como uma ferramenta de análise de dados geo-espaciais. Inicialmente o bolsista teve contato com a parte teórica da análise *wavelet* acompanhando cursos e seminários e estudando alguns artigos e livros fundamentais no tema. Dois estudos iniciais são desenvolvidos nesta iniciação científica como base para o entendimento de futuras aplicações a geofísica. O primeiro é um estudo acerca das propriedades que envolvem a função *wavelet* de Morse, que é uma função analisadora da transformada *wavelet* contínua no domínio frequencial. Essa função *wavelet* é analítica e engloba outras famílias de funções *wavelets*. Estuda-se as propriedades da *wavelet* de Morse a partir de uma investigação numerico-computacioanal que busca entender o efeito causado pela variação dos parâmetros que determinam sua condição de admissibilidade. Nessa etapa verifica-se que a condição de admissibilidade da *wavelet* de Morse tende exponencialmente a zero a quando esses parâmetros que determinam o seu comportamento crescem. O segundo estudo, ainda em desenvolvimento, trata da implementação computacional da transformada *wavelet* contínua a partir de um algoritmo que faz o cálculo da convolução entre função *wavelet* analisadora e da função a ser analisada diretamente no domínio de Fourier. Nesse contexto, a biblioteca FFTw (transformada rápida de Fourier do oeste) é um objeto de estudo, pois ela é um dos algoritmos atuais mais usado em computação de alto desempenho . Para complementar o estudo realizado são também estudadas ferramentas de edição científica como o \LaTeX , ambientes com o Beamer e modelos como o utilizado neste relatório. Além disso, ferramentas de computação científica para a visualização das funções e dados e ambientes de programação em gnu/octave e Python para os algoritmos e um reforço de treinamento em aspectos teóricos de integração também fizeram parte deste primeiro ano de iniciação científica.

Palavras-chave: Funções *Wavelets*. Transformada *Wavelet*. *Wavelet de Morse*.

WAVELET TRANSFORMS AND ASSOCIATED TOOLS APPLIED TO SPATIAL GEOPHYSICS

ABSTRACT

This work aims to study the use of the continuous *wavelet* transform as a tool for the analysis of space data. Initially, the scholarship holder has contact with the theoretical part of the analysis *wavelet*, following courses and seminars, and studying some fundamental articles and books on the subject. Two initial studies are developed in this scientific initiation as a basis for understanding future applications in geophysics. The first is a study about the properties involving the Morse *wavelet* function, which is a *wavelet* analyzer function in frequency domain of the continuous *wavelet* transform. This *wavelet* function is analytic and encompasses other families of *wavelets* functions. The properties of the *Morse wavelet* are studied from a numerical-computational investigation that seeks to understand the effect caused by the variation of the parameters that determine its admissibility condition. In this step it is verified that the admissibility condition of the *Morse wavelet* tends exponentially to zero when these parameters that determine its behavior grow. The second study, still under development, deals with the computational implementation of the continuous *wavelet* transform from an algorithm that calculates the convolution between the *wavelet* analyzing function and the function to be analyzed directly in the Fourier domain. In this context, the FFTw library (fast Fourier transform of the west) is an object of study, as it is one of the current algorithms most used in high-performance computing. To complement the study, scientific editing tools such as L^AT_EX, Beamer slide environment and templates such as the one used in this INPE report are also studied. In addition, scientific computing tools for the visualization of functions, multidimension data, programming environments in gnu/octave and Python for the algorithms, and a reinforcement of training in theoretical aspects of integration are also part of this first year of scientific initiation.

Keywords: Wavelets Functions. Morse Wavelet. Wavelet Transform.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 <i>wavelet</i> de Marr e sua FT	5
2.2 <i>wavelet</i> de Morlet e sua respectiva FT.	6
2.3 O efeito causado pelo incremento do parâmetro γ no comportamento e na resposta em frequência da <i>wavelet</i> de Morse	8
2.4 Resposta em frequência da <i>wavelet</i> de Morse quando $\gamma = 3$	9
3.1 Resultado da investigação realizada em torno dos parâmetros e da condição de admissibilidade da <i>wavelet</i> de Morse	12

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivo Geral	2
1.2 Objetivos Específicos	2
2 FUNÇÕES WAVELET: Marr, Morlet e Morse	3
2.1 Funções <i>Wavelets</i> : definição	3
2.2 <i>Wavelet</i> chapéu mexicano (Marr)	4
2.3 <i>Wavelet</i> de Morlet	5
2.4 <i>Wavelet</i> de Morse	6
3 ADMISSIBILIDADE DA WAVELET DE MORSE	11
3.1 Estratégia de análise	11
3.2 Resultados	11
4 Transformada <i>Wavelet</i> Contínua	13
4.1 Implementação da Transformada <i>Wavelet</i>	14
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	17
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	19
APÊNDICE A - FUNÇÕES DE QUADRADO-INTEGRÁVEIS	21
APÊNDICE B - TRANSFORMADA DE FOURIER.	23

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho sintetiza as pesquisas desenvolvidas na Iniciação Científica do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) do INPE, no período de agosto de 2020 até agosto de 2021, que estuda a transformada wavelet contínua como ferramenta de análise de dados espaciais, além de estudar a implementação computacional dessa transformada.

A Transformada *wavelet* é uma transformada integral que recentemente vem sendo utilizada como uma potente ferramenta de análise de dados. Essa transformada tem como função analisadora as chamadas funções *wavelets* que caracterizam-se por serem localizadas no tempo, idealmente também em frequência, e terem energia finita no sentido do espaço de funções quadrado integráveis. Justifica-se a escolha em estudar essa transformada pelas muitas possibilidades de aplicação e utilização dessa ferramenta na análise de dados.

Inicialmente o bolsista teve contato com a parte teórica da análise *wavelet* acompanhando cursos e seminários e estudando alguns artigos e livros fundamentais no tema. Dois estudos iniciais são desenvolvidos nesta iniciação científica como base para o entendimento de futuras aplicações a geofísica. O primeiro é um estudo acerca das propriedades que envolvem a função *wavelet* de Morse, que é uma função analisadora da transformada *wavelet* contínua no domínio frequencial. Essa função *wavelet* é analítica e engloba outras famílias de funções *wavelets*.

Particularmente este trabalho se propõe a investigar numericamente o efeito causado pela variação dos parâmetros que determinam o comportamento da *wavelet* de Morse na sua condição de admissibilidade. A escolha por essa investigação se dá, pois as características da função *wavelet* analisadora escolhida impactam diretamente o resultado da transformada *wavelet* e a escolha em se estudar especificadamente as características da *wavelet* de Morse se deu pelo fato de: ela ser uma *wavelet* analítica e pela por ela englobar outras famílias de funções *wavelet*.

Além disso este trabalho se propõe ainda estudar a implementação computacional da transformada wavelet contínua (CWT) a partir dos algoritmos que implementam a Transformada Rápida de Fourier (FFT) com uma maior aplicabilidade a computação de alto desempenho.

1.1 Objetivo Geral

Investigar numérica e computacionalmente a aplicação e a implementação da transformada *wavelet* e posteriormente as ferramentas associadas no contexto da análise de dados espaciais.

1.2 Objetivos Específicos

- a) Estudar e caracterizar teoricamente as funções *wavelets* e da transformada *Wavelet*.
- b) Investigar numericamente o efeito causado pela variação dos parâmetros que determinam o comportamento da *wavelet* de Morse e sua condição de admissibilidade.
- c) Estudar a implementação computacional da Transformada *wavelet* a partir de algoritmos que implementam a Transformada Rápida de Fourier, em especial a FFTW (FFT do oeste).

Os capítulos restantes deste relatório estão organizados da seguinte maneira:

- O Capítulo 2: aborda as funções *wavelet* chapéu mexicano (Marr), Morlet e Morse.
- O Capítulo 3: aborda os estudos referentes a condição de admissibilidade da *wavelet* de Morse.
- O Capítulo 4: transformada contínua e algoritmos de implementação da transformada.
- O Capítulo 5: aborda os comentários finais do trabalho, outras atividades realizadas e perspectivas futuras.
- Os Apêndices apresentam uma descrição teórica da transformada de Fourier e de outras ferramentas matemáticas de auxílio ao estudo realizado.

2 FUNÇÕES WAVELET: Marr, Morlet e Morse

Neste capítulo é apresentado em uma perspectiva teórica as funções *wavelets* de Marr, de Morlet e de Morse. Além disso, apresenta-se também um estudo dos efeitos na condição de admissibilidade devido variação de parâmetros da função de *wavelet* de Morse. É importante destacar que neste trabalho funções e sinais são considerados sinônimos. O termo *séries temporais* é utilizado também como sinônimo de sinais, porém, normalmente se refere ao aspecto discreto.

2.1 Funções Wavelets: definição

As funções *wavelets* são famílias de funções pertencentes ao espaço de funções quadrado-integráveis (L^2), ver Apêndice A, que são utilizadas como funções de análise na transformada *wavelet*. Essas funções são caracterizadas por terem um comportamento oscilatório, por serem muito bem localizadas no tempo e em frequência e por terem média nula, sendo essas características o que as torna ferramentas muito úteis na análise de dados (DAUBECHIES, 1992).

Uma função *wavelet* denotada por $\psi(t)$ pode ser definida da seguinte forma:

Definição 2.1. *Se $\psi(t) \in \mathbb{C}$ é uma função wavelet então $\psi(t) \in L^2(\mathbb{C})$ tal que $\psi(t)$ é não nula apenas em conjunto compacto $K \in \mathbb{C}$ e satisfaz as seguintes condições:*

$$A : \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.1)$$

$$B : \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1 \quad (2.2)$$

A condição A é a condição que garante as funções *wavelets* a média nula e o comportamento oscilatório sob o conjunto compacto K e, além disso, em consequência dela é possível inferir para toda função *wavelet* uma condição de admissibilidade (DAUBECHIES, 1992; MAGRINI, 2020b), tal que dado uma função *wavelet* qualquer a sua condição de admissibilidade (C_ψ) é determinada pela equação 2.3:

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \quad (2.3)$$

Em que $\hat{\psi}(\omega)$ é o espectro de potência de Fourier (Apêndice B) da função *wavelet* e

ω é a variável frequencial.

No que diz respeito a transformada *wavelet* a condição de admissibilidade da função *wavelet* analisadora é particularmente importante, pois a transformada *wavelet* enquanto ferramenta matemática permite uma transformada inversa e essa transformada inversa depende diretamente do valor da condição de admissibilidade da função *wavelet* analisadora escolhida (DAUBECHIES, 1992; MAGRINI, 2020b; DOMINGUES et al., 2016).

Outro conceito importante quando se trata de funções *wavelets* é a chamada frequência central. A frequência central permite encontrar a senoide/cossenoide que reproduz a oscilação de maior amplitude da função *wavelet*, mais detalhes em (CASTILHO et al., 2012) e referências citadas.

Definição 2.2. *Se $\psi(t)$ é um função wavelet então se define a sua frequência central, usando a notação ω_c , como sendo a frequência angular que apresenta o espectro de Fourier de maior valor.*

Atualmente existe uma quantidade variada e diversificada de funções *wavelets* com diferentes características, de forma que a escolha de uma delas como função analisadora envolve identificar aquela que melhor se adapta as características do sinal analisado. Três dessas funções são apresentadas a seguir.

2.2 Wavelet chapéu mexicano (Marr)

Uma função *wavelet* muito conhecida é a *wavelet* Chapéu mexicano ou *wavelet* de Marr, ela é conhecida como chapéu mexicano devido a curva que descreve essa função lembrar um chapéu mexicano, conforme Figura 2.1. Ela é uma função real, derivada da função de densidade de probabilidade gaussiana e muito utilizada em estudos em que a localização temporal é mais importante que a localização frequencial, como por exemplo descrito em (DOMINGUES et al., 2016).

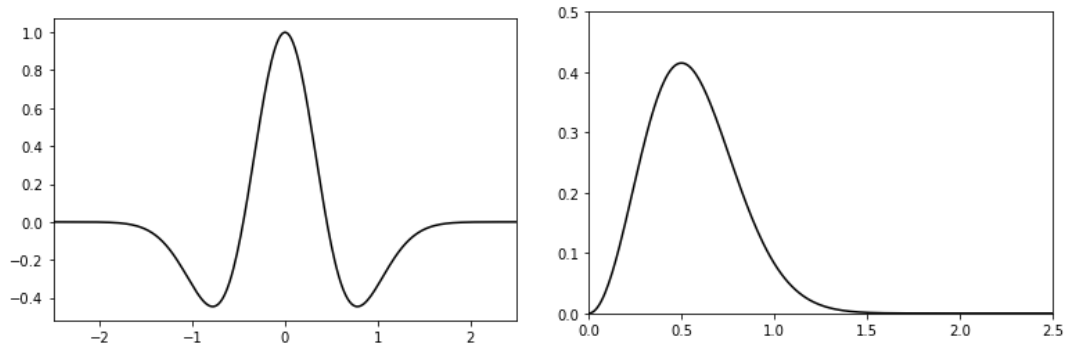
Uma das equações que define a *wavelet* de Marr é:

$$\psi(t) = (1 - 2\pi^2 f_m^2 t^2) e^{-(f_m t)^2} \quad (2.4)$$

sendo f_m o pico de frequência da *wavelet* de forma que a equação 2.4 representa uma forma particular de se representar a *wavelet* de Marr também conhecida como *wavelet* de Ricker.

Na imagem a seguir tem-se a representação da *wavelet* chapéu mexicano tanto no domínio do tempo quanto no da frequência.

Figura 2.1 - *wavelet* de Marr e sua FT



Fonte: Produção dos Autores.

2.3 *Wavelet* de Morlet

Outra função *wavelet* muito conhecida é a *wavelet* de Morlet que é uma função complexa com muitas representações diferentes. Neste trabalho optou-se por escrever a *wavelet* de Morlet da seguinte maneira:

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega_0 t} \quad (2.5)$$

em que ω_0 é um parâmetro adimensional.

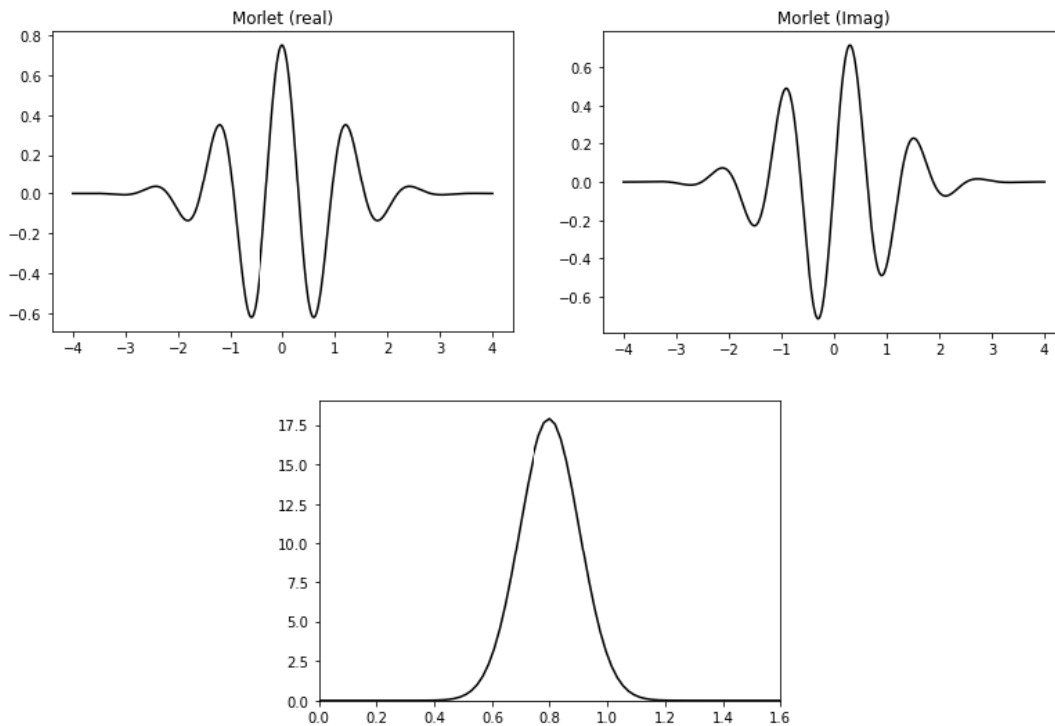
A *wavelet* de Morlet pode não satisfazer estritamente falando a condição de média nula das funções *wavelets*, porém para valores de $\omega_0 > 5$ é possível fazer com que a média da *wavelet* de Morlet seja suficientemente próxima de zero para que ela seja considerada uma função *wavelet*.

Outra característica importante que torna a *wavelet* de Morlet muito utilizada na análise de sinais é o fato de ela ser uma *wavelet* aproximadamente analítica, sendo a analiticidade de uma função *wavelet* uma característica muito importante na análise de sinais, pois funções *wavelets* com essa característica evitam que frequências espúrias negativas interfiram no resultado da análise do sinal, pois *wavelets* analíticas são funções que não apresentam conteúdo frequencial para frequências negativas.

Definição 2.3. Dado uma função *wavelet* $\psi(t)$ qualquer, ela será uma função analítica se $\hat{f}(\omega) = 0$ quando $\omega < 0$.

Na Figura 2.2 tem-se a representação gráfica da curva que descreve a *wavelet* de Morlet e sua respectiva FT é apresentada.

Figura 2.2 - *wavelet* de Morlet e sua respectiva FT.



Fonte: Produção dos Autores.

2.4 Wavelet de Morse

A *wavelet* de Morse é uma função definida diretamente no domínio da frequência e se diferencia das outras funções *wavelets* justamente por ser definida no domínio das frequência. Além disso, diferente da *wavelet* de Morlet que é aproximadamente analítica, a *wavelet* de Morse é uma função exatamente analítica (LILLY; OLHEDE, 2009).

A Equação 2.6 que define a *wavelet* de Morse, usando a notação $\psi_{\beta,\gamma}$ de forma que a notação deixe claro a dependência dessa função em relação aos seus parâmetros,

é:

$$\psi_{\beta,\gamma} = U(\omega) a_{\beta,\gamma} \omega^\beta e^{-\omega^\beta} \quad (2.6)$$

Sendo $U(\omega)$ a função passo unitário, $a_{\beta,\gamma}$ uma constante de normalização definida pela equação 2.7 e β e γ os parâmetros reais que determinam o comportamento da *wavelet* de Morse tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. A constante $a_{\beta,\gamma}$ assim como a função *wavelet* também depende dos valores dos parâmetros β e γ conforme mostra a equação a seguir:

$$a_{\beta,\gamma} = 2 \left(\frac{e\gamma}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\gamma}} \quad (2.7)$$

O fato de a *wavelet* de Morse ser dada em função dos dois parâmetros reais a torna uma função *wavelet* muito interessante no contexto da utilização da WT, pois a variação desses dois parâmetros permite dar a essa *wavelet* uma série de características sem que ela perca a sua analiticidade (LILLY; OLHEDE, 2010). Além disso, através da variação dos parâmetros, a *wavelet* de Morse engloba outras famílias de funções *wavelets* como, por exemplo, as *wavelets* de Cauchy.

Os parâmetros β e γ são responsáveis por determinar o comportamento da *wavelet* de Morse, de forma que o valor atribuído a esses parâmetros determina o quanto a *wavelet* vai ser oscilatória e determina o tamanho do seu suporte compacto. Além disso, o parâmetro γ ainda é responsável por determinar a simetria da resposta em frequência da *wavelet* de Morse (LILLY; OLHEDE, 2009).

As expressões em função dos parâmetros β e γ que descrevem o comportamento da *wavelet* de Morse são:

Suporte Compacto: $\sqrt{\beta\gamma}$

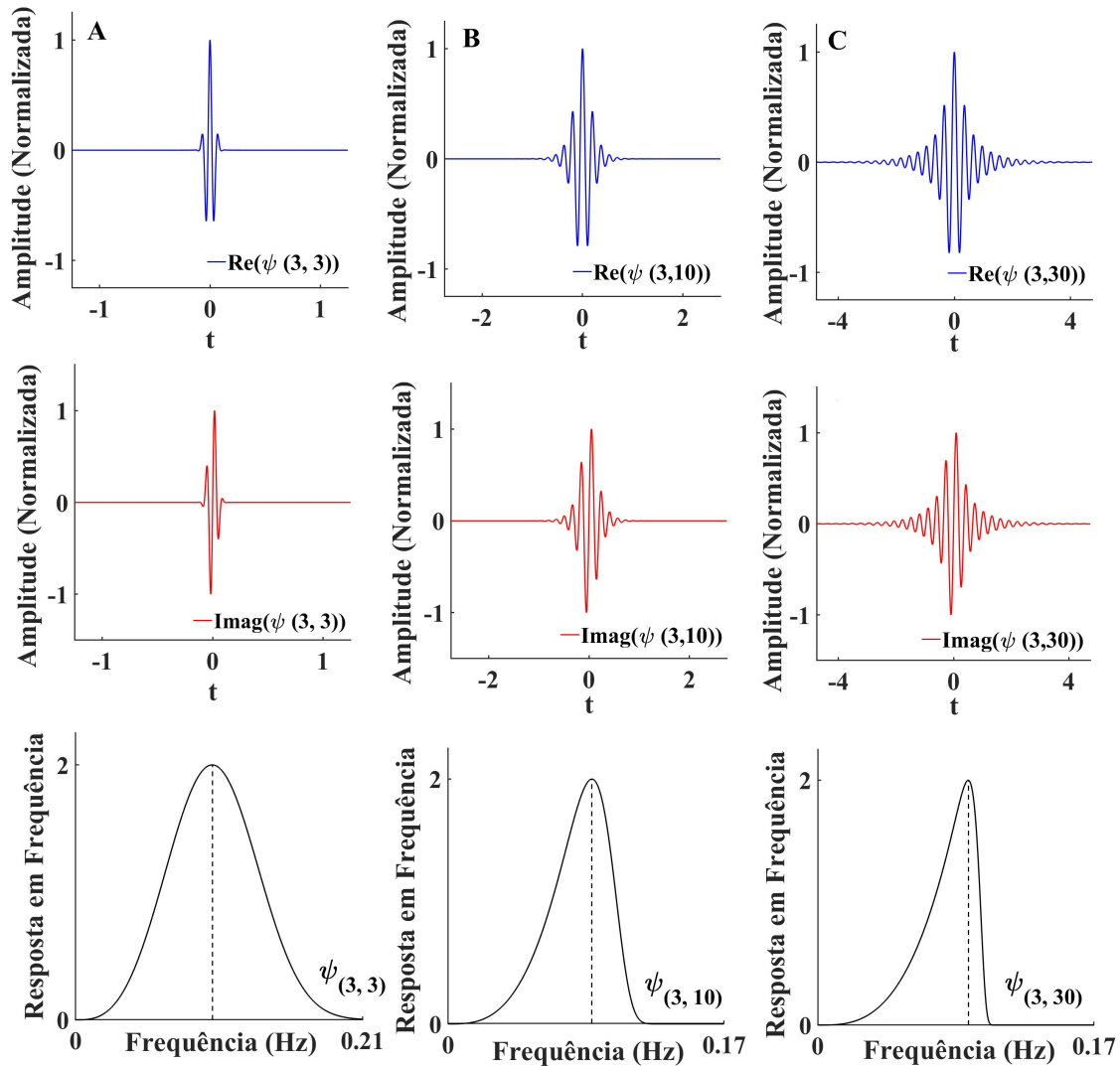
Simetria da Resposta em frequência: $-(3 - \gamma)P_{\beta,\gamma}^2$

Na figura 2.3 é possível observar que a maneira que o γ aumenta a *wavelet* de Morse se torna mais oscilatória no tempo enquanto a sua resposta em frequência fica cada vez mais a esquerda do pico de frequência.

É importante destacar que valores muito pequenos para γ geram *wavelets* muito contraídas dentro do suporte compacto, sendo que em um contexto de utilização

da WT como ferramenta de análise de dados *wavelets* muito contraídas não são interessantes. Temos ainda o destaque para quando $\gamma = 3$ (figura 2.4), pois é quando *wavelet* de Morse tem a sua resposta em frequência simétrica e, para fins práticos, 3 é valor ideal para o parâmetro γ .

Figura 2.3 - O efeito causado pelo incremento do parâmetro γ no comportamento e na resposta em frequência da *wavelet* de Morse

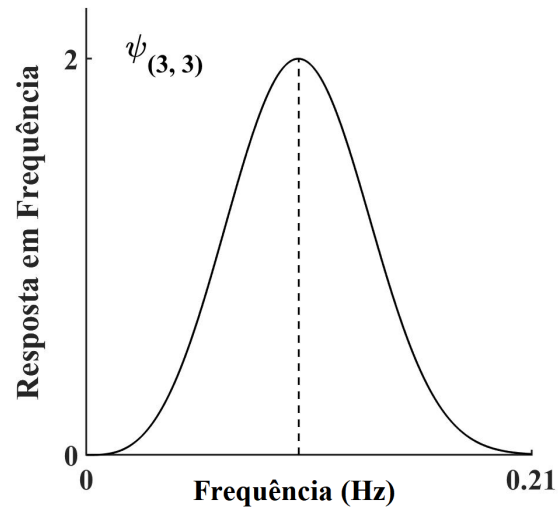


Fonte: Produção dos Autores.

Por fim a analiticidade da *wavelet* de Morse e as características que podem ser atribuídas a ela a partir da variação dos seus parâmetros é o que a torna uma função analisadora da Transformada *Wavelet* com muito potencial e é o que justifica

a escolha deste trabalho em realizar uma investigação em torno dos seus parâmetros e da sua condição de admissibilidade.

Figura 2.4 - Resposta em frequência da *wavelet* de Morse quando $\gamma = 3$



Fonte: Produção dos Autores.

3 ADMISSIBILIDADE DA *WAVELET* DE MORSE

Neste capítulo é apresentado uma investigação numérica realizada em torno dos parâmetros da *wavelet* de Morse e da sua condição de admissibilidade, de forma que é apresentada a metodologia utilizada na pesquisa e os resultados obtidos.

O objetivo da análise é compreender de que forma a variação dos parâmetros β e γ que determinam o comportamento e a resposta em frequência da *wavelet* de Morse influencia no valor da sua condição de admissibilidade.

3.1 Estratégia de análise

A metodologia adotada envolve o conjunto $A = \{3, 10, 20, 50\}$ e o intervalo real $I =]0, 50]$. Em um primeiro estudo o parâmetro β assume os valores do conjunto A enquanto o parâmetro γ variava no intervalo I . No segundo estudo o parâmetro β varia no intervalo I enquanto o parâmetro γ assume os valores do conjunto A .

A escolha do intervalo I possibilita a percepção clara do comportamento da condição de admissibilidade. A escolha do conjunto A verifica se o incremento do parâmetro tomado fixo influencia de alguma forma a variação da condição de admissibilidade em função do parâmetro não fixado.

3.2 Resultados

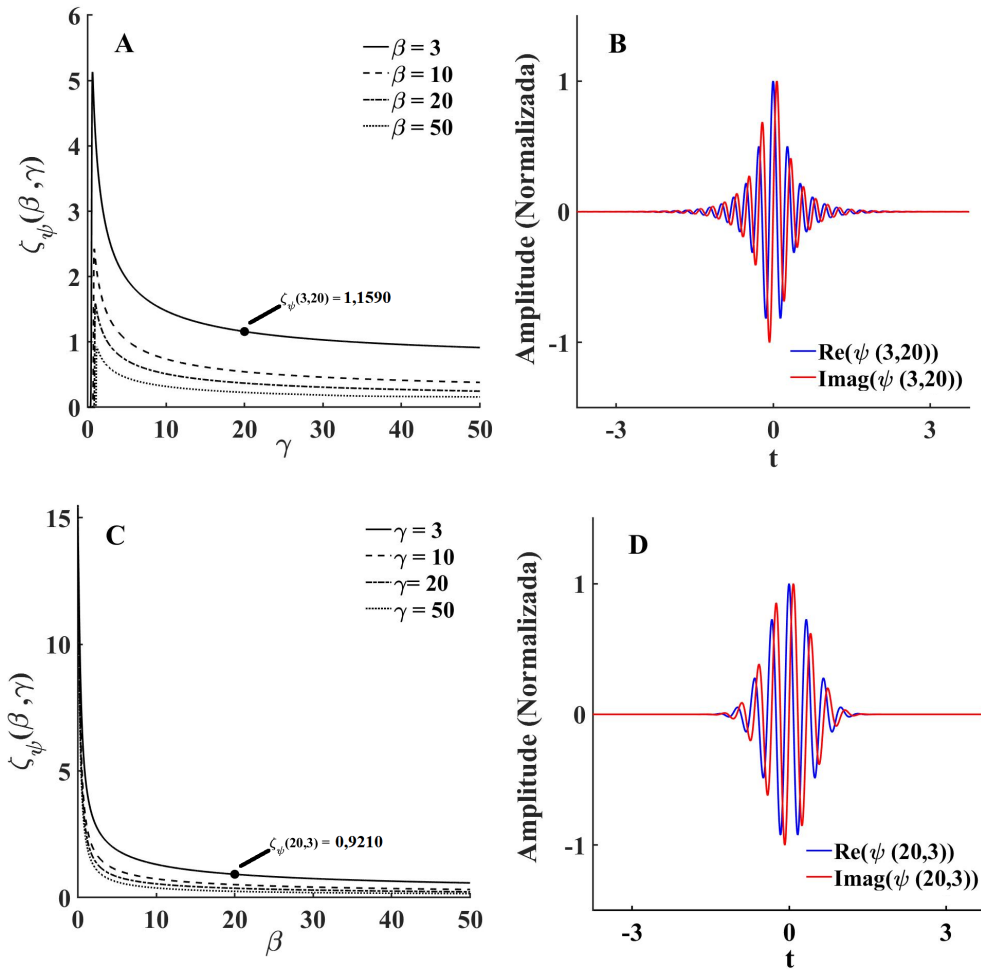
A Figura 3.1 apresenta os resultados. É possível concluir que quando ambos os parâmetros aumentam, a condição de admissibilidade tende exponencialmente a zero, de forma que quanto maior for o valor do parâmetro fixado maior é o decrescimento exponencial.

Tendo em mente que para fins práticos o valor ideal que o parâmetro γ deve assumir é 3, devido a simetria da resposta em frequência, e tendo em mente que a condição de admissibilidade assumindo valores muito próximos de zero pode gerar problemas na hora de se calcular a transformada *wavelet* inversa é possível concluir, a partir daí, que o ideal é que o parâmetro β não assuma valores significativamente grandes caso a *wavelet* de Morse seja utilizada como função analisadora da transformada *wavelet*.

Na Figura 3.1 ainda faz-se destaque aos valores da condição de admissibilidade para os parâmetros β e γ valendo respectivamente (3, 20) e (20, 3) e apresentasse as respectivas *wavelets* geradas a partir desses parâmetros. A escolha por esses

destaques teve o intuito de mostrar que a comutação dos valores atribuídos aos parâmetros geram não só *wavelets* diferentes como também valores diferentes para a condição de admissibilidade.

Figura 3.1 - Resultado da investigação realizada em torno dos parâmetros e da condição de admissibilidade da *wavelet* de Morse



Fonte: Produção dos Autores.

Por fim se reforça a importância da *wavelet* de Morse quando se trata da sua utilização como função analisadora da Transformada *wavelet* devido tanto a possibilidade de fazer a sua resposta em frequência ter um comportamento gaussiano (simétrico) quanto ao fato dela ser uma função *wavelet* analítica, de forma que a investigação realizada auxilia o entendimento das características da *wavelet* de Morse.

4 Transformada *Wavelet* Contínua

A Transformada *Wavelet* Contínua (CWT) é uma transformada integral linear que enquanto ferramenta matemática permite o estudo das frequências de sinais não estacionários, de forma que dado uma função pertencente ao espaço de funções quadrado-integráveis a CWT permite a representação dessa função no plano tempo-escala (DAUBECHIES, 1992). A CWT utiliza como função de análise as já discutidas neste trabalho funções *wavelets*.

Definição 4.1. Dado uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ definimos a sua Transformada *Wavelet* usando a notação $\Psi_f^\psi(a, \tau)$ como:

$$\Psi_f^\psi(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt \quad (4.1)$$

em a e τ são parâmetros reais com $a > 0$, ψ^* representa o complexo conjugado da função *wavelet* analisadora e $\frac{1}{\sqrt{a}}$ é uma constante de normalização.

O parâmetro a da CWT é responsável pela contração ou dilatação da *wavelet* analisadora enquanto o parâmetro τ é responsável pela translação dessa função e a variação desse parâmetro determina as regiões do sinal que serão analisadas (DAUBECHIES, 1992; DOMINGUES et al., 2016).

Os resultados obtidos através da CWT e expressos através da notação $\Psi_f^\psi(a, \tau)$ são chamados de coeficientes *wavelets* e podem ser entendidos como o comprimento da função. Além disso, o valor absoluto elevado ao quadrado desses coeficientes podem ser interpretados como medidas locais de energia (DAUBECHIES, 1992; MAGRINI, 2020a).

Definição 4.2. Definimos uma medida de energia no sentido de L^2 obtida por meio do coeficientes *wavelets* provenientes da CWT da seguinte maneira:

$$E(a, \tau) = |\Psi_f^\psi(a, \tau)|^2 \quad (4.2)$$

As medidas locais de energia (coeficientes *wavelet* em módulo ao quadrado oferecidas pela Equação 4.2) dependem do instante de tempo (τ) em que essas energias foram medidas, e das escalas.

Definição 4.3. O espectro global *wavelet* é definido como a medida total de energia

em cada instante de tempo e pode ser calculado, por meio da seguinte equação:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(a, \tau) d\tau \quad (4.3)$$

Além disso, como já apresentado anteriormente, o valor da condição de admissibilidade de uma função *wavelet* está diretamente relacionado a possibilidade que a transformada realizada admita transformada inversa.

Definição 4.4. Dado a CWT de uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ representada pela notação $W_f^\psi(a, \tau)$, define-se a transformada *wavelet* inversa, usando a notação $IW_f^\psi(a, \tau)$, da seguinte forma:

$$IW_f^\psi(a, \tau) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \Psi_f^\psi(a, \tau) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) \frac{da}{a^2} d\tau \quad (4.4)$$

em que ψ^* representa o complexo conjugado da função *wavelet* escolhida como função analisadora durante o cálculo da transformada da função f e C_ψ é a constante referente a condição de admissibilidade dessa função *wavelet*.

A Equação 4.4 evidencia a questão que *wavelets* que tenham condição de admissibilidade com valor muito próximo de zero podem gerar problemas no cálculo da Transformada *Wavelet* Inversa, *i.e.*, são instáveis e não devem ser usadas.

4.1 Implementação da Transformada *Wavelet*

De um ponto de vista teórico a CWT e FT são transformadas integrais que representam produtos internos do $L^2(\mathbb{C})$ entre a função f e uma função analisadora, no caso da CWT a função *wavelet* é a função analisadora. Assim, uma forma natural de se calcular a transformada *wavelet* é usar um algoritmo de transformada rápida de Fourier (do inglês, *Fast Fourier Transform*, FFT). As FFTs representam a categoria de algoritmos de cálculo de convolução com excelente eficiência computacional. James Cooley e John Tukey são conhecidos pela famosa versão da transformada rápida de Fourier de 1965 (COOLEY; TUKEY, 1965).

A transformada de Fourier mais rápida do oeste (FFTW - Fastest Fourier Transform in the West) é uma biblioteca de subrotinas em C para o cálculo da transformada discreta de Fourier em uma ou mais dimensões, com dados de entrada tanto reais quanto complexos, de tamanho e dimensão arbitrários. O pacote FFTW foi desenvolvido por Frigo e Johnson em 1999, mais detalhes em (FRIGO; JOHNSON, 2005; FRIGO; JOHNSON, 2004).

Existe muitos programas para o cálculo da CWT, tais como Wavelab (<https://statweb.stanford.edu/~wavelab/>) e YAWTB(<https://github.com/jacquesdurden/yawtb>). Está além do escopo deste trabalho discorrer sobre eles ou fazer comparações de desempenho entre eles.

Neste estudo em desenvolvimento pretende-se utilizar a FFTW como ferramenta de cálculo da CWT, como descrito em (BüSSOW, 2007) e estende-lo no futuro para CWTs multidimensionais utilizando computação de alto desempenho.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este primeiro ano de iniciação científica contribuí para a formação em matemática e computação científica do bolsista.

O bolsista iniciou estudos em análise *wavelet*, participou de atividades de pesquisa e seminários, foi exposto a ambientes de computação científica e desenvolveu uma análise numérica da condição de admissibilidade da *wavelet* de Morse que será apresentada no Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional em setembro próximo.

Em futuro próximo, espera-se a implementação computacional da transformada *wavelet* contínua (CWT) a partir dos algoritmos que implementam a FFTw com uma maior aplicabilidade a computação de alto desempenho e posterior aplicação a dados espaciais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BÜSSOW, R. An algorithm for the continuous morlet wavelet transform. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 21, n. 8, p. 2970–2979, 2007. 15
- CASTILHO, J. E.; DOMINGUES, M. O.; MENDES, O.; PAGAMISSE, A. Introdução ao mundo das wavelets. **São Carlos: SBMAC**, 2012. 4
- COOLEY, J.; TUKEY, J. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. **Mathematics of Computation**, v. 19, n. 90, p. 297–301, 1965. 14
- DAUBECHIES, I. **Ten lectures on wavelets**. [S.l.]: Siam, 1992. 3, 4, 13
- DOMINGUES, M.; MENDES, O.; KAIBARA, M.; MENCONI, V.; BERNARDES, E. Explorando a transformada wavelet contínua. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 38, n. 3, 2016. 4, 13
- FRIGO, M.; JOHNSON, S. G. The FFTW web page. **www.fftw.org**, 2004. 14
- _____. The design and implementation of FFTW3. **Proceedings of the IEEE**, IEEE, v. 93, n. 2, p. 216–231, 2005. 14
- LILLY, J. M.; OLHEDE, S. C. **Higher-order properties of analytic wavelets**. 2009. 146-160 p. 6, 7
- _____. **On the analytic wavelet transform**. 2010. 4135–4156 p. 7
- MAGRINI, L. A. **Funções Wavelet e Transformada Wavelet Contínua: Representação Simultânea nos Domínios do Tempo e da Frequência**. 2020. 17-32 p. 13
- MAGRINI, L. A. **Transformadas wavelet na análise de sinais com falhas e na detecção da sincronização das dinâmicas lenta e rápida em sistemas dinâmicos caóticos com múltiplas escalas de tempo**. 271 p. Tese (Doutorado em Computação Aplicação) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, 2020. 3, 4

APÊNDICE A - FUNÇÕES DE QUADRADO-INTEGRÁVEIS

Neste apêndice é apresentada uma introdução ao espaço das funções quadrado-integráveis.

O espaço de funções quadrado-integráveis ou o espaço $L^2(\mathbb{C})$ é definido como:

Definição A.1. *Se $f(t)$ é uma função tal que $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ então:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{A.1})$$

A norma, ou medida, de uma função pertencente ao $L^2(\mathbb{C})$ pode ser definida, usando a notação $\|f(t)\|_{L^2(\mathbb{C})}$, através da expressão (A.1), da seguinte forma:

$$\|f(t)\|_{L^2(\mathbb{C})} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt} \quad (\text{A.2})$$

Definido tanto o espaço de funções quadrado-integráveis como a norma desse espaço é preciso definir agora o produto interno.

Definição A.2. *Sendo as funções f e g quaisquer tal que $f(t)$ e $g(t) \in L^2(\mathbb{C})$, temos que o produto interno entre elas, usando a notação $\langle f(t), g(t) \rangle$ e considerando $g^*(t)$ o complexo conjugado da função $g(t)$, é definido usualmente por:*

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t) dt \quad (\text{A.3})$$

Os espaços de funções são importantes, pois a Transformada de Fourier é, em uma perspectiva teórica, equivalente ao produto interno de funções definido nesses espaços. O espaço de funções quadrado-integráveis, dentre os espaços de funções, é particularmente interessante, pois nele se verifica uma importante propriedade da FT que é a identidade de Parseval.

APÊNDICE B - TRANSFORMADA DE FOURIER

Neste apêndice é apresentada uma introdução à Transformada de Fourier (FT). Sendo a FT uma ferramenta matemática desenvolvida pelo matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) durante seus estudos sobre condução de calor, ela surge dos estudos de Fourier sobre a aproximação de funções periódicas por somas de senos e cossenos. A transformada de Fourier é responsável por decompor ou aproximar uma função geralmente definida no que se chama “domínio do tempo” por suas frequências fundamentais.

Dado funções não periódicas, localizadas no domínio do tempo, a Transformada de Fourier nos permite encontrar as principais frequências dessas funções. De forma genérica, podemos entender a FT como sendo responsável por levar uma função do domínio do tempo para o domínio da frequência, permitindo também, através da transformada Inversa de Fourier (IFT), levar uma função do domínio da frequência para o domínio do tempo. Uma das vantagens da FT e da IFT é que as mudanças de domínio podem ser feitas sem que se percam informações da função no processo.

Definição B.1. *Seja $f(t)$ uma função qualquer, tal que $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ vamos definir a Transformada de Fourier da $f(t)$, usando a notação $\hat{f}(\omega)$, como:*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{(-i\omega t)} dt \quad (\text{B.1})$$

Sendo a variável frequencial o ômega (ω) que é definido no intervalo $[0, 2\pi[$ e $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ uma constante de normalização.

Definido a Transformada de Fourier agora vamos definir a Transformada Inversa de Fourier. Ferramenta que leva uma função do domínio da frequência para o domínio do tempo.

Definição B.2. *Seja $f(t)$ uma função qualquer, tal que $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ e sendo $\hat{f}(\omega)$ a sua transformada de fourier. Vamos definir a Transforma Inversa de Fourier, usando a notação $f(t)$, como:*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{(i\omega t)} d\omega \quad (\text{B.2})$$

Observe que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ aparece novamente como uma constante de normalização, dessa

vez para IFT. No caso $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ é escolhido como constante de normalização para a FT de forma que essa escolha implica que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ seja também constante de normalização para a IFT. De modo geral, a escolha de uma constante de normalização para a Transformada de Fourier determina a constante de normalização para a Transformada Inversa de Fourier.

Determinado as frequências de uma função pertencente ao $L^2(\mathbb{C})$ existe ainda a necessidade de calcular a amplitude dessas frequências ou a energia delas. A partir daí, temos o espectro de potência de Fourier que é justamente a ferramenta que vai nos dar as amplitudes das frequências ou a energia da função e isso depende da norma utilizada para a realização do cálculo da FT.

Definição B.3. *Seja $f(t)$ uma função qualquer pertencente ao espaço $L^2(\mathbb{C})$ e seja $\hat{f}(\omega)$ a sua transformada de Fourier. Vamos definir o espectro de potência de Fourier de $f(t)$, usando a notação $S(\omega)$, como:*

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{B.3})$$

O espectro de potência, nos permite encontrar tanto as amplitudes das frequências que compõem uma função quanto a energia dela, tal que a ideia de energia de função é equivalente a ideia de energia cinética. Por fim uma característica importante da FT é o fato de que na passagem do domínio do tempo para o da frequência ou na passagem da frequência para o tempo a FT preserva a energia da função.

A FT tem muitas propriedades e todas elas são fundamentais para se enxergar a simetria existente entre os domínios do tempo e da frequência. Porém a identidade de Parseval é particularmente importante, pois garante que a norma de uma função se mantém a mesma tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Em síntese, a identidade de Parseval garante que a energia de uma função se mantém independente do domínio em que ela esteja.

Propriedade B.1. *Se $f(t)$ é uma função do $L^2(\mathbb{C})$ e $\hat{f}(\omega)$ é a Transformada de Fourier da função $f(t)$, então:*

$$\|f(t)\|_{\mathbb{L}^2} = \|\hat{f}(\omega)\|_{\mathbb{L}^2} \quad (\text{B.4})$$

Demonstração. Vamos começar mostrando que:

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \langle \hat{f}(\omega), \hat{f}(\omega) \rangle$$

Temos a partir da IFT que a função $f(t)$ é da forma:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{B.5})$$

E temos a partir da TF que $\hat{f}(\omega)$ é da seguinte forma:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{B.6})$$

Substituindo a equação (B.6) na equação (B.5):

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega t} d\omega$$

A partir daí o produto interno da função $f(t)$ com a própria função $f(t)$, definido na equação (A.3) é da forma:

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega \cdot f^*(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Como tanto a função $f(t)$ como $f^*(t)$ são funções contínuas podemos mudar a ordem de integração de forma que:

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{i\omega t} dt \right] d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pela definição da TF:

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \cdot \hat{f}^*(\omega) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pela definição de produto interno:

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \langle \hat{f}(\omega), \hat{f}(\omega) \rangle \quad (\text{B.7})$$

Através da definição de norma (A.2) e da definição de produto interno (A.3) é possível concluir que:

$$\|f(t)\|_{\mathbb{L}^2} = (\langle f(t), f(t) \rangle)^2 \quad (\text{B.8})$$

Então se elevarmos ao quadrado os dois membros da equação (B.7) temos:

$$(\langle f(t), f(t) \rangle)^2 = (\langle \hat{f}(\omega), \hat{f}(\omega) \rangle)^2$$

Por fim da equação (B.8) segue que:

$$\|f(t)\|_{\mathbb{L}^2} = \|\hat{f}(\omega)\|_{\mathbb{L}^2}$$

□