



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**O PROBLEMA RESTRITO DOS TRÊS CORPOS,  
ÓRBITAS DE LISSAJOUS, ÓRBITAS HALO,  
VARIEDADES ESTÁVEIS E TRANSFERÊNCIAS.**

Beatriz Viana Ferreira

Relatório de Iniciação Científica do  
programa PIBIC, orientada pelo  
Prof. Dr. Elbert Einstein Macau e  
Profa. Dra. Cláudia Mesquita

INPE  
São José dos Campos  
2021



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**O PROBLEMA RESTRITO DOS TRÊS CORPOS,  
ÓRBITAS DE LISSAJOUS, ÓRBITAS HALO,  
VARIEDADES ESTÁVEIS E TRANSFERÊNCIAS.**

Beatriz Viana Ferreira

Relatório de Iniciação Científica do  
programa PIBIC, orientada pelo  
Prof. Dr. Elbert Einstein Macau e  
Profa. Dra. Cláudia Mesquita

INPE  
São José dos Campos  
2021

## RESUMO

Este estudo foi iniciado em agosto de 2020 e teve por objetivo estudar o problema dos três corpos, a fim de entender o comportamento das trajetórias de estrelas, planetas e cometas, a partir de algumas informações iniciais, quando estes corpos estão sujeitos apenas a força da atração gravitacional. De forma mais específica, estamos interessados em verificar cascatas de bifurcações que possam resultar em uma dinâmica caótica. Esse problema foi originado no estudo da mecânica celeste e teve uma grande contribuição dos físicos-matemáticos d’Alembert, Leonhard Euler e Poincaré. Para compreendermos o histórico do problema, estudamos inicialmente a dinâmica envolvida quando consideramos dois corpos e alguns resultados importantes que foram derivados desse problema menor. Com isso, vimos detalhadamente alguns tipos de órbitas como elípticas, parabólicas e hiperbólicas, e estudamos o relacionamento de energia associada a cada uma delas para entendermos o comportamento dessas trajetórias antes de estender o estudo em mais variáveis. Além disso, fizemos um estudo da derivação da equação de Kepler e do Teorema de Lambert, ambos nos trazem maneiras de determinar, a partir da energia do corpo, qual tipo de trajetória é realizada. Para dar continuidade a este projeto de iniciação científica estão previstas as seguintes atividades: estender todo o estudo para três corpos; preparação e simulações computacionais deste novo sistema que será trabalhado; análises de bifurcações e previsão de sistemas caóticos.

Palavras-chave: Problema dos dois corpos. Problema dos três corpos. Força gravitacional. Orbitas.

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Ilustração gráfica do problema de dois corpos quando o corpo de massa maior está centrado na origem do sistema. . . . .	2
2.2 Centro de massa para algumas formas geométricas simples. . . . .	3
2.3 Ilustração de uma órbita circular . . . . .	3
2.4 Direção da massa $m$ representada por vetores . . . . .	4
2.5 Movimento de um satélite em torno do centro de massa do sistema. . . . .	7
2.6 Satélite orbitando a Terra . . . . .	9
2.7 Ilustração para o cálculo da função potencial . . . . .	10
2.8 Ilustração para dois corpos que não estão na origem do sistema . . . . .	14
2.9 Ilustração do produto vetorial e magnitude do vetor . . . . .	22
2.10 Ilustração da definição do momento angular . . . . .	23
2.11 Ilustração órbita elíptica . . . . .	25
2.12 Ilustração para o Semi-Latus . . . . .	31
2.13 Ilustração da órbita elíptica . . . . .	31
2.14 Vetores e ângulos da órbita elíptica . . . . .	35
2.15 Ilustração da mudança de coordenada . . . . .	37
2.16 Ilustração para nomenclaturas estabelecidas . . . . .	39
2.17 Ilustração da órbita parabólica . . . . .	41
2.18 Ilustração da órbita hiperbólica . . . . .	44
2.19 Todas as órbitas estudadas a partir da equação polar . . . . .	47
2.20 Construção da ideia de Kepler . . . . .	49
2.21 Construção da ideia de Lambert . . . . .	63
2.22 Localização dos pontos de equilíbrio no problema restrito de três corpos. . . . .	75
2.23 Mapa de contorno para os pontos de Lagrange . . . . .	76
2.24 Ilustrações para oscilador harmônico . . . . .	79
2.25 Ilustrações para oscilador amortecido . . . . .	80
2.26 Trajetória caótica de estado estacionário no plano de fase $(x, \frac{dx}{dt})$ da equação diferencial não linear $\frac{d^2x}{dt^2} + 0.4(dx/dt) - x + x^3 = 0,4sent$ . Este comportamento é típico de tais equações não lineares que têm atratores complexos. . . . .	83
2.27 As localizações do Sol, Marte, Júpiter e aproximadamente 5.000 asteróides em um momento no tempo. A maioria dos asteróides orbita o Sol em um cinturão de $1,5a.u.$ entre as órbitas de Marte e Júpiter. (Cortesia de S. Ferraz-Mello, Universidade de São Paulo.) . . . . .	84

2.28 Imagens capturadas pela espaçonave Voyager 2 fornecem três diferentes  
vistas da forma irregular de Hyperion (cortesia da NASA/Jet Propulsion  
Laboratório.) . . . . . 85

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 DADOS E METODOLOGIA</b> . . . . .	<b>2</b>
2.1 Orbitas Circulares . . . . .	2
2.2 O Problema Geral dos Dois Corpos . . . . .	12
2.3 Órbitas Elípticas . . . . .	25
2.4 Relacionamentos de Energia: Órbitas hiperbólicas e parabólicas . . . . .	38
2.5 Equação de Kepler e Teorema de Lambert . . . . .	48
2.6 O Problema dos Três Corpos e Estabilidade do Sistema Solar . . . . .	72
<b>3 RESULTADOS E CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>86</b>



# 1 INTRODUÇÃO

A necessidade de tentar justificar os acontecimentos naturais ao nosso redor foi um dos principais motivos para os seres humanos criarem teorias a respeito do universo. Acreditou-se por muito tempo que existia uma força mística que regia e administrava tudo ao nosso redor e, além disso, aqueles que tinham ideologia ou questionamentos distintos eram punidos ou até mesmo mortos pela civilização. Com o passar do tempo fomos nos afastando do senso comum e das religiões, o que foi crucial para consolidação de grande parte do conhecimento que temos hoje embasado em observações e resultados baseados em provas matemáticas.

Johannes Kepler era um astrônomo, astrólogo e matemático que descreveu a dinâmica dos corpos, a partir de observações do sistema solar. Nas quais os resultados obtidos com o seu estudo estabelecem o movimento dos planetas, de modo que a lei das órbitas elípticas, lei das áreas e lei dos períodos foram estabelecidas e matematicamente provadas. A partir destes resultados, Newton pode se basear para descrever a interação entre dois corpos, de modo que existam forças relacionadas que agem um sobre o outro.

O estudo desenvolvido neste projeto de iniciação científica ao longo do último ano foi baseado principalmente em formulações estabelecidas por Kepler e Newton, onde foi desenvolvido diversos cálculos a fim de entender os resultados obtidos por eles. Além disso, foi possível definir órbitas de cometas e planetas a partir do conhecimento da energia total do sistema, a fim de compreender toda a dinâmica existente e envolvida no problema dos três corpos, já que sob certas condições pode ser reduzido ao problema em duas variáveis.

O problema dos três corpos começou com as órbitas do Sol, da Terra e da Lua. Isaac Newton, em seu livro *Princípios*, trata do caso de três corpos em movimento na gravidade. No entanto, ele não conseguia explicar matematicamente por que os três corpos celestes tinham uma órbita estável. Desde então, muitos não conseguiram resolver o problema dos três corpos. Em 1890, Henri Poincaré provou ser impossível obter uma solução geral para o problema dos três corpos, que mais tarde se tornou a base da teoria do caos.



## 2 DADOS E METODOLOGIA

Definimos as leis do movimento e a lei universal da gravitação desenvolvidas pela primeira vez por *Isaac Newton*. A combinação dessas duas leis nos permite calcular a órbita de um corpo movendo-se em torno de outro sob a influência da interação gravitacional entre os dois corpos.

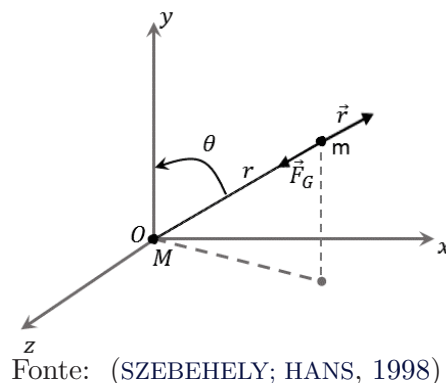
### 2.1 Orbitas Circulares

Devemos assumir por agora que as órbitas circulares são possíveis e estáveis no campo gravitacional definido pela equação (2.1). A *lei da gravitação* é dada por

$$F_G = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}, \quad (2.1)$$

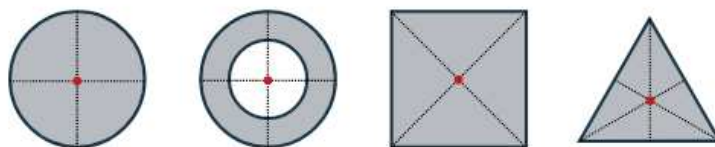
onde  $F_G$  é a força gravitacional entre as massas  $M$  e  $m$ , a unidade vetorial  $\hat{r}$  aponta na mesma direção da linha que une as massas, e  $r$  é a distância entre as massas  $m$  e  $M$ . A situação é ilustrada na figura abaixo

Figura 2.1 - Ilustração gráfica do problema de dois corpos quando o corpo de massa maior está centrado na origem do sistema.



**Definição 2.1.1.** *O centro de massa de um corpo é um ponto que se comporta como se toda a massa do corpo estivesse concentrada sobre ele. Quando um objeto é homogêneo, o centro de massa coincide com o seu centro geométrico. Porém, isso nem sempre ocorre, e o centro de massa não precisa nem mesmo de estar dentro do corpo. (TEIXEIRA, -)*

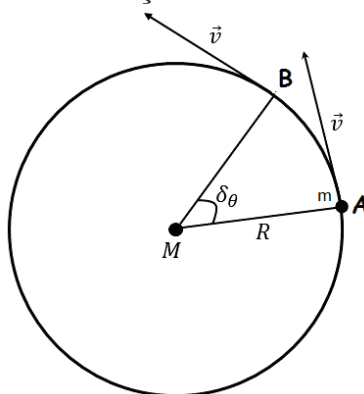
Figura 2.2 - Centro de massa para algumas formas geométricas simples.



Fonte: (KHANACADEMY, 2016)

Inicialmente devemos assumir que as massas  $m$  e  $M$  são centros de massas. Temos que  $G$  é a *constante de gravitação universal* e determina a força do campo gravitacional. Na figura (2.1), assumimos que a massa  $M$  está localizada na origem  $O$  do sistema de coordenadas e que é fixa no espaço. Observe que  $F_G$  aponta para a origem, onde a massa  $M$  está localizada, isso acontece porque a força gravitacional é sempre atrativa e age na direção de uma linha imaginária que liga dois corpos. Além disso, a convenção de sistemas de coordenadas polares requer que o vetor unitário  $\vec{r}$  sempre aponte para longe da origem. Por isso o sinal negativo no lado direito da equação (2.1), porque  $F_G$  e  $\vec{r}$  sempre apontam em sentidos opostos.

Figura 2.3 - Ilustração de uma órbita circular



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

A figura (2.3) mostra a órbita circular que presumimos ser possível neste caso. Assumimos que o raio da órbita circular é  $R$  e que o vetor  $\vec{v}$  é a velocidade da massa  $m$ , localizada no ponto  $A$ , conforme ela se move em torno da massa  $M$  na órbita circular. Existem duas forças agindo sobre a massa  $m$  :

- A força gravitacional que aponta para a massa  $M$ ;

- A força centrífuga experimentada por um objeto viajando em uma órbita circular.

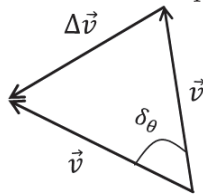
Se as massas  $M$  e  $m$  foram conectados por um fio, então a tensão no fio iria substituir a força gravitacional e também seria equilibrada pela força centrífuga.

A força centrífuga agora pode ser calculada usando a equação

$$\vec{F}_c = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.2)$$

Agora precisamos avaliar a taxa de mudança da velocidade  $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$  que aparece na equação (2.2). Para fazer isso, vamos ver o que acontece com o vetor da velocidade orbital. Já que a força gravitacional definida na equação (2.1) tem massa  $m$  constante e uma vez que o raio do círculo,  $R$ , não muda conforme a massa  $m$  se move em sua órbita, a magnitude do vetor  $\vec{v}$ ,  $|\vec{v}|$ , também deve ser constante. A taxa de variação do vetor velocidade é portanto, determinado apenas pela mudança na direção que  $m$  move-se pela órbita, conforme mostrado na figura (2.4).

Figura 2.4 - Direção da massa  $m$  representada por vetores



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

Se considerarmos apenas ângulos pequenos,  $\delta_\theta$ , nós podemos observar a maneira como o vetor  $\vec{v}$  se comporta observando a figura (2.3), o vetor  $\Delta\vec{v}$  é a mudança na direção do vetor velocidade  $\vec{v}$ .

Observe que este vetor,  $\Delta\vec{v}$ , sempre aponta em direção a massa  $M$  na origem do sistema coordenado.

Utilizando semelhanças de triângulo nas figuras (2.3) e (2.4) temos

$$\frac{d\vec{v}}{v} = \frac{\vec{AB}}{R} \iff \frac{d\vec{v}}{AB} = \frac{\vec{v}}{R} \quad (2.3)$$

logo,

$$\frac{d\vec{v}}{\vec{v} \cdot dt} = \frac{\vec{v}}{R}. \quad (2.4)$$

Sabemos que a aceleração é

$$a = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.5)$$

Substituindo a equação (2.5) na (2.4), temos

$$a_r = \frac{v^2}{R}.$$

A velocidade angular da massa  $m$  é definida como

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

de modo que a força centrífuga pode ser reescrita como

$$F_c = -m|v|\omega\vec{r}$$

e simplesmente escrevendo  $v$  para  $|v|$  e reconhecendo que para uma órbita circular de raio  $R$ , a velocidade  $v$  é

$$v = R\omega \quad (2.6)$$

nós temos que a força centrífuga é

$$F_c = -\frac{mv^2}{R}\vec{r}. \quad (2.7)$$

Igualando as expressões (2.1) e (2.7), temos

$$F_G = F_c$$

$$G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}. \quad (2.8)$$

A equação (2.8) permite a determinação da **velocidade orbital**  $v$  ( magnitude)

como

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}. \quad (2.9)$$

Observe que a massa  $m$  aparece em ambos os lados da equação (2.8), assim a velocidade orbital é uma função que depende apenas do *raio do círculo e da magnitude da massa  $M$* . A equação (2.9) pode ser reescrita em termos da velocidade angular definida na equação (2.6):

$$R\omega = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

e então nós temos

$$R^3\omega^2 = GM. \quad (2.10)$$

A velocidade angular pode estar relacionada ao período da órbita, ou seja, o tempo que leva para executar uma volta completa, logo retomando à definição da velocidade angular,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad (2.11)$$

Sendo assim, integrando de ambos os lados a equação acima, temos

$$\int_0^T \omega dt = \int_0^T \frac{d\theta}{dt} dt, \quad (2.12)$$

como estamos trabalhando com movimento uniforme circular, o período do ângulo é dado por  $2\pi$ , logo temos

$$\int_0^T \omega dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{dt} dt \implies \omega T = 2\pi \quad (2.13)$$

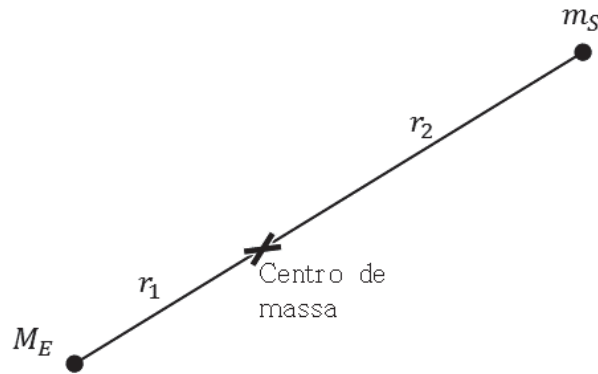
onde  $T$  é definido como o *período orbital*. Substituindo a equação (2.13) em (2.10) temos

$$R^3 = T^2 \left( \frac{GM}{4\pi^2} \right). \quad (2.14)$$

Esta expressão é a *terceira lei do movimento planetário*, conforme declarado por Kepler para o caso especial de órbitas circulares. A segunda lei também é preenchida para órbitas circulares, uma vez que a velocidade orbital  $v$  é constante para que *áreas iguais sejam varridas em tempo igual*.

A equação (2.10) é uma boa aproximação para quando consideramos o movimento de um satélite ao redor da Terra em uma forma circular. O resultado aproximado assume que a massa do satélite pode ser negligenciado quando comparado à massa do corpo central. A derivação da relação exata para o movimento circular utiliza a figura (2.5).

Figura 2.5 - Movimento de um satélite em torno do centro de massa do sistema.



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

O satélite e a Terra estão se movendo em torno do centro de massa do Sistema Terra-satélite, uma vez que a massa da Terra é sempre muitas ordens de magnitude maior do que a massa do satélite, o centro de massa do sistema está no centro da Terra para todos os fins práticos. Como outro exemplo interessante, considere uma estrela binária ou um asteróide binário onde duas estrelas ou dois asteróides com massas comparáveis estão girando em torno um do outro. As distâncias do centro de massa são  $r_1$  e  $r_2$ , as massas são  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente. Em nosso problema original,  $m_1 = M_E$  e  $m_2 = m_s$ . As forças que atuam no satélite são equilibrados se

$$m_s \omega^2 r_2 = G \frac{M_E m_s}{r^2}, \quad (2.15)$$

onde  $r = r_1 + r_2$  uma vez que essa é a distância total entre os dois corpos. A equação correspondente para a Terra é

$$M_E \omega^2 r_1 = G \frac{M_E m_s}{r^2}. \quad (2.16)$$

Na primeira equação  $m_s$  e na segunda equação  $M_E$  são cancelados. Uma vez que o

centro de massa é fixo no sistema, temos

$$m_s r_2 = M_E r_1. \quad (2.17)$$

Somando (2.15) e (2.16), temos

$$(r_1 + r_2)\omega^2 = G \frac{M_E + m_s}{r^2}, \quad (2.18)$$

A equação (2.18) pode ser escrita como

$$\omega^2 r^3 = G(M_E + m_s) \quad (2.19)$$

Esta é a forma exata da lei de Kepler para órbitas circulares e nós vemos que a equação obtida anteriormente (2.10) precisa de uma modificação onde em vez da massa da Terra, temos a *soma da massa da Terra e a massa do satélite* no lado direito. Claramente, na dinâmica do satélite isso não faz diferença e, conseqüentemente, a equação (2.10) é correta. Por outro lado, se estudarmos corpos girando em torno uns dos outros com massas comparáveis, a equação (2.18) deve ser usada. Para avaliar a aproximação, a lei de Kepler pode ser escrita como

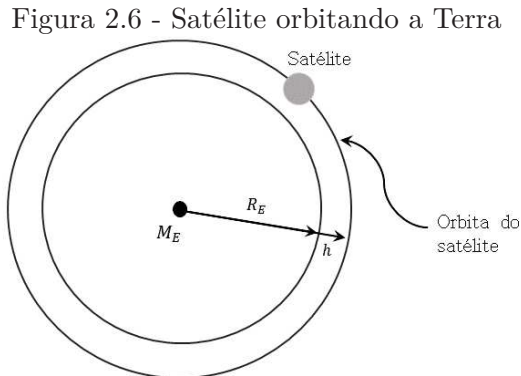
$$\omega^2 r^3 = GM_E \left(1 + \frac{m_s}{M_E}\right)$$

Se a massa do satélite é de uma tonelada, a proporção  $\frac{m_s}{M_E}$  torna-se da ordem de  $10^{-22}$ , que é o erro cometido quando o termo  $\frac{m_s}{M_E}$  é negligenciado.

Um satélite orbitando a Terra geralmente orbita a uma altitude que é substancialmente menor que o raio da Terra, esta situação é ilustrada na figura (2.6). Para uma missão típica de ônibus espacial, por exemplo, a altitude orbital  $h$  pode ser 480 km em comparação com o raio da Terra de 6.370 km. Sob essas condições, não é óbvio que a massa da Terra pode ser considerada como um ponto de massa  $M$  que usamos para derivar as propriedades circulares orbitais. O que devemos mostrar é que para um corpo aproximadamente esférico e simétrico como a Terra, a massa da Terra pode ser considerada como um ponto de massa localizada no centro da Terra.

Para provar este teorema, devemos primeiro introduzir o conceito de função potencial. A função potencial está relacionada à *energia potencial* que um objeto

tem em um campo gravitacional. Considere a situação mostrada na figura (2.6).



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

Qual é o trabalho necessário para mover a massa  $m$  de  $r_1$  para  $r_2$ ?

Temos pela definição de trabalho é

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr. \quad (2.20)$$

Agora, substituindo a equação (2.1) na (2.20) resulta

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_1}^{r_2} \left[ -\frac{GmM}{r^2} \right] dr = GmM \int_{r_1}^{r_2} \left[ -\frac{1}{r^2} \right] dr \\ &= GmM \left[ \frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = GmM \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right), \end{aligned}$$

assim,

$$W = GmM \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (2.21)$$

Observe que o trabalho é sempre negativo ao se afastar, ou seja, quando aumentamos  $r$  e positivo ao se aproximar. A partir da equação (2.21), segue-se que pode associar a cada ponto do campo gravitacional uma energia potencial  $V_g$

$$V_g = \frac{GmM}{r}, \quad (2.22)$$

de modo que o trabalho feito para mover a massa  $m$  de  $r_1$  para  $r_2$  é dada pela



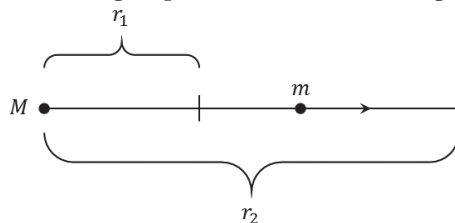
diferença entre as funções potenciais avaliadas nos pontos  $r_1$  e  $r_2$ .

$$W = V_g(r_2) - V_g(r_1).$$

A função potencial é extremamente útil porque é um escalar ao invés de um vetor, a força gravitacional  $F_g$  (vetor) é sempre o gradiente da função potencial:

$$\vec{F}_g = \text{grad}V_g$$

Figura 2.7 - Ilustração para o cálculo da função potencial



Fonte: Victor G. Szebehely e Hans Marks, Adventures in Celestial Mechanics

A energia cinética é dada por

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.23)$$

e essa quantidade é constante, pois a velocidade orbital é constante. A energia potencial é definida na equação (2.22). Se começarmos, por exemplo, com um satélite na superfície da Terra e queremos colocá-lo em uma órbita com um raio  $r$  medido a partir do centro da Terra, então o trabalho (energia) que deve ser gasto para levar o satélite de massa  $m$  ao ponto  $r$  é

$$W = GmM_E \left( \frac{1}{R_E} - \frac{1}{r} \right), \quad (2.24)$$

onde  $M_E$  é a massa da Terra ( $5,98 \times 10^{24}$  kg) e  $R_E$  é o raio de Terra (6371 km). Observe que  $W$  é sempre positivo. A energia total do satélite é então a soma da energia cinética e da energia potencial:

$$E_r = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{GmM_E}{R_E} - \frac{GmM_E}{r}. \quad (2.25)$$

O segundo termo à direita é uma constante que representa o potencial energético do objeto quando ele está localizado na superfície da Terra. Desde o ponto zero da escala de energia é arbitrário, podemos considerá-lo como relativo para a superfície da Terra. Assim, a energia total pode ser reescrita como

$$E_\tau = E'_k + \frac{GmM_E}{R_E} \quad (2.26)$$

e, portanto, em relação à superfície da Terra,

$$E_\tau = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_E}{r}. \quad (2.27)$$

Esta é uma relação geral que deverá ser válida para todas órbitas. Para as órbitas circulares que estamos considerando, podemos usar equação (2.9) com a velocidade orbital do satélite no raio  $r$ :

$$v^2 = \frac{GM_E}{r}$$

então

$$\begin{aligned} E_\tau &= \frac{1}{2} \frac{GmM_E}{r} - \frac{GmM_E}{r} \\ E_\tau &= -\frac{1}{2} \frac{GmM_E}{r} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Observe que a energia total depende apenas do raio  $r$  e que é sempre negativo nas condições descritas. Devemos mostrar no subcapítulos recentes que a equação (2.27) é uma relação geral válida para qualquer órbita e essa equação (2.28) também é válida para qualquer órbita com alguma modificação da definição do raio.

## 2.2 O Problema Geral dos Dois Corpos

Na subseção anterior, vimos o caso especial de órbitas circulares e algumas aplicações práticas importantes. Elas são interessantes porque muitas órbitas, tanto na mecânica celeste quanto no movimento de satélites artificiais em torno da Terra são quase circulares.

As órbitas circulares são permitidas e estas são um caso especial da classe geral de órbitas características de corpos que se movem de acordo com a *lei da atração gravitacional* e a lei do movimento de Newton. Podemos escrevermos a lei da gravitação estabelecida por Newton:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}, \quad (2.29)$$

que é uma equação vetorial que define a força  $F$  atuando entre as duas massas  $m$  e  $M$  separadas pela distância  $r$ . A equação diz que a força gravitacional é proporcional ao produto das duas massas e que é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas, e que aponta ao longo da linha que une as duas massas, que é indicado pelo vetor unitário  $\hat{r}$ . A constante de proporcionalidade  $G$  é chamada a *constante gravitacional*, ( $G = 6,672 \times 10^{-11} m^3/kg s^2$ ) e é uma das constantes universais da natureza. O sinal negativo que aparece na equação (2.29) é uma convenção matemática adicionado para indicar que a força gravitacional entre as duas massas é sempre atrativa.

A segunda lei de Newton pode ser escrita como

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.30)$$

para quando temos uma massa constante.

**Definição 2.2.1. *Momento linear*** ou também conhecida como *quantidade de movimento*, é uma grandeza essencial para o estudo da transferência de movimento em sistemas com dois ou mais corpos onde ocorrem colisões ou quaisquer formas de interação entre os corpos. Sendo calculada pelo produto de sua massa com seu vetor velocidade. (HELERBROCK, -)

A equação (2.30) diz que a mudança no *momento*,  $m\vec{v}$ , de um corpo é proporcional à força imposta,  $\vec{F}$ , multiplicado pelo intervalo de tempo  $dt$  durante o qual a força atua. A velocidade do corpo,  $\vec{v}$ , também é um vetor, e pode ser escrito da seguinte

forma em termos do vetor posição  $\vec{r}$  do corpo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.31)$$

A combinação das equações (2.30) e (2.31) leva a

$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad (2.32)$$

que é dada pela segunda lei do movimento de Newton. A primeira lei do movimento é uma consequência da equação (2.32) para o caso  $\vec{F} = 0$ . A terceira lei do movimento é uma declaração de impulso.

Ao combinar as equações (2.29) e (2.32), obtemos a equação que governa o movimento geral de dois corpos interagindo por meio de uma força gravitacional:

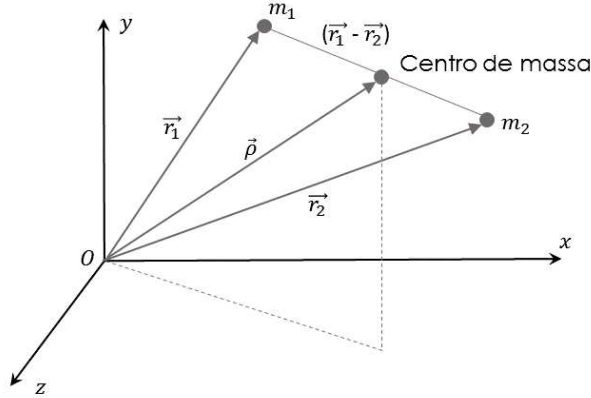
$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GmM}{r^2} \hat{r} \quad (2.33)$$

O sistema de coordenadas em que a equação (2.33) descrita é algo obscuro. Na verdade, as três variáveis que definem o movimento dos dois corpos são da magnitude do vetor  $\vec{r}$  e dos dois ângulos que definem a direção do vetor unitário  $\hat{r}$ . Essas variáveis serão tratadas com mais detalhes quando as soluções reais da equação (2.33) forem desenvolvidas. Além de ser uma equação vetorial, a equação (2.33) também é não linear. A diferença das equações não lineares é que geralmente não podem ser resolvidas por métodos analíticos. Por sorte, verifica-se que a equação (2.33) é integrável, ou seja, existe uma maneira de obter integrais exatas desta equação que permitem soluções. Se não fosse por isso, Newton não poderia ter estabelecido a teoria das órbitas no século *XVII*. Teríamos que esperar até o advento dos computadores de alta velocidade para a obtenção de soluções numéricas.

A figura (2.8) é simplesmente uma extensão da figura (2.1), em que usa uma origem arbitrária para o sistema de coordenadas no ponto  $O$ , em vez do centro de massa do sistema. Assim temos ilustrada duas massas,  $m_1$  e  $m_2$ , localizadas em  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  no sistema de coordenadas com a origem no ponto  $O$ .

A fim de examinar a natureza da equação (2.33) em mais detalhes, vale a pena olhar para a equação em termos das variáveis mostradas na figura (2.8). O sistema de coordenadas cartesianas ilustrado é um sistema de referência que será

Figura 2.8 - Ilustração para dois corpos que não estão na origem do sistema



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

empregado para escrever as equações das órbitas em coordenadas cartesianas e polares.

A equação (2.33) agora pode ser reescrito para definir a força exercida na massa  $m_1$  pela massa  $m_2$ :

$$\vec{F}_{12} = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \quad (2.34)$$

$$= -\frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (r_1 - r_2). \quad (2.35)$$

A força na massa  $m_2$  proveniente da  $m_1$  será igual e oposta a  $F_{12}$ :

$$-F_{12} = F_{21} \quad (2.36)$$

$$= m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \quad (2.37)$$

$$= \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (r_1 - r_2) \quad (2.38)$$

Somando as equações (2.34) e (2.36) temos

$$\begin{aligned} F_{12} + F_{21} &= F_{12} - F_{12} \\ &= m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \\ &= -\frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (r_1 - r_2) + \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (r_1 - r_2) \end{aligned}$$

$$\implies m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = 0 \quad (2.39)$$

Integrando a equação (2.39) obtemos

$$m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} = P \quad (2.40)$$

onde  $P$  é uma constante com as dimensões de um vetor de momento.

**Definição 2.2.2.** Para um sistema que consiste em uma coleção de massas (partículas)  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  e cada massa tem seu vetor posição  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ , o vetor posição do centro de massa do sistema é então definida como:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{M},$$

onde  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ . De modo que qualquer vetor de posição é definido em termos de seus componentes  $x, y$  e  $z$ , o vetor de posição do centro de massa pode ser definido como:

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm} \hat{i} + y_{cm} \hat{j} + z_{cm} \hat{k}.$$

(ALZHRANI, -)

Isto pode estar relacionada à velocidade do centro de massa do sistema de duas massas,  $m_1$  e  $m_2$ , como segue pela definição do centro de massa, nós ter

$$(m_1 + m_2)\rho = m_1 r_1 + m_2 r_2,$$

onde o vetor  $\rho$  é a posição do centro de massa, conforme definido na figura (2.8). Podemos reescrever a equação (2.40) da seguinte forma:

$$P = \frac{d}{dt}(m_1 r_1 + m_2 r_2) = (m_1 + m_2) \frac{d\rho}{dt}$$

onde  $d\rho/dt$  é a velocidade do centro de massa,  $V_{CM}$  :

$$V_{CM} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{P}{m_1 + m_2}.$$

Note que a velocidade é constante, isso significa que não há forças atuando no

centro de massa. Assim, podemos entender o problema dos dois corpos, olhando apenas para o movimento relativo das duas massas em relação ao centro de massa.

Tendo estabelecido o ponto em que estamos lidando apenas com o movimento das duas massas, podemos agora reescrever a equação do movimento em termos do vetor  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , que é a variável que descreve o movimento. Subtraindo a (2.34) da (2.36) resulta

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{-G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (2.41)$$

ou seja,

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (2.42)$$

A equação (2.42) é a expressão fundamental que define o movimento das massas  $m_1$  e  $m_2$  em relação umas às outras sob a influência de forças gravitacionais. Pode ser visto que a equação (2.42) tem a mesma forma da equação (2.33), referindo-se à figura (2.1), onde o vetor  $\rho$  é igual a zero. Também fica claro na figura (2.1) que a magnitude do vetor  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  é  $r_1 + r_2$ , ou

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = r_1 + r_2 \quad (2.43)$$

A posição da massa  $m_1$  em relação ao sistema de coordenadas da figura 2.1 é  $\vec{r}_1$ . Multiplicando a equação (2.42) por  $m_1$  e, em seguida, usando a equação (2.43), obtemos

$$m_1 \frac{d^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)m_1}{(r_1 + r_2)^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Observe também que o vetor  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  pode ser reescrito da seguinte forma:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = (r_1 + r_2)\hat{r}, \quad (2.44)$$

onde  $\hat{r}$  é o vetor unitário que define a direção do vetor  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Assim, podemos escrever

$$m_1 \frac{d^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)m_1}{(r_1 + r_2)^2} \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{(r_1 + r_2)} = -\frac{G(m_1 + m_2)m_1}{(r_1 + r_2)^2} \hat{r} \quad (2.45)$$

A partir da definição do centro de massa na figura (2.3), temos

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \text{ ou } r_2 = \frac{m_1}{m_2} r_1. \quad (2.46)$$

Substituindo a equação (2.46) em (2.45) resulta

$$m_1 \frac{d^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{dt^2} = \frac{-Gm_1(m_1 + m_2)}{[r_1 + (m_1/m_2)r_1]^2} \hat{r} \quad (2.47)$$

$$= \frac{-Gm_1(m_1 + m_2)}{\left[r_1 \left(\frac{m_2}{m_2} + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)\right)\right]^2} \hat{r} \quad (2.48)$$

$$= \frac{-Gm_1(m_1 + m_2)}{\left[\frac{m_2}{m_2} + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)\right]^2 r_1^2} \hat{r} \quad (2.49)$$

$$= -\frac{Gm_1 m_2^2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\hat{r}}{r_1^2} \quad (2.50)$$

$$= -\frac{Gm_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)} \frac{\hat{r}}{r_1^2}. \quad (2.51)$$

Esta equação tem precisamente a mesma formação da equação (2.33) se a quantidade  $M$  nessa equação for definida como  $M_R$ :

$$M_R = \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} \quad (2.52)$$

**Definição 2.2.3. *Massa reduzida:*** *o problema da gravitação de dois corpos em torno do respectivo centro de massa pode formalmente ser convertido em um problema de corpo único - com "massa reduzida" - gravitando em torno de um referencial (inercial) situado onde se encontrava o outro corpo, este último substituído por um campo de força central adequado.*

Desta forma, iremos assumir  $M_R$  como sendo a *massa reduzida do sistema* se o movimento de  $m_1$  for considerado e, então, utilizando um argumento análogo a massa reduzida para  $m_2$  será dada por

$$M_R = \frac{m_1^2}{m_1 + m_2}.$$



## Equação do movimento

Temos que a equação do movimento para a massa  $m_1$  é

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = - \frac{Gm_1 M_R(\text{massa}_{m_1})}{r_1^2} \hat{r} \quad (2.53)$$

e para a massa  $m_2$ ,

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = - \frac{Gm_2 M_R(\text{massa}_{m_2})}{r_2^2} \hat{r} \quad (2.54)$$

Observe que a massa reduzida  $M_R$  é sempre menor do que  $m_2$  ou  $m_1$ , dependendo de qual massa está sendo considerada. Se uma das massas é muito maior que a outra, resulta uma importante simplificação. Se nós assumirmos que  $m_2 \gg m_1$ , então a massa reduzida do sistema é

$$M_R \approx m_2 \quad (2.55)$$

A equação de movimento para  $m_1$  torna-se então

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = - \frac{Gm_1 m_2}{r_1^2} \hat{r}. \quad (2.56)$$

Desta forma, fazendo as manipulações algébricas necessárias na equação (2.47), obtemos a equação (2.56) que por sua vez é a mesma equação da força gravitacional com  $m = m_1$  e  $M = m_2$ .

A aproximação de que  $m_2 \gg m_1$  assume essencialmente que o centro de massa está localizada em  $m_2$ . Sendo esta uma aproximação muito útil porque se aplica a muitos casos práticos. Terra movendo-se em torno do Sol, da Lua movendo-se ao redor da Terra, e um satélite artificial se movendo ao redor do Sol todos ajustam-se a aproximação de que  $m_2 \gg m_1$ .

Existem dois outros resultados importantes que decorrem das equações de movimento para  $m_1$  ou  $m_2$ : (2.53) e (2.54). Vamos assumir que a massa  $m_1$  é a massa que consideramos estar se movendo, de modo que a equação do movimento é

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_1 M_R}{r_1^2} \hat{r}_1$$

ou

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = -\frac{Gm_1 M_R}{r_1^3} r_1 \quad (2.57)$$

Para encontrarmos a equação da energia devemos fazer seguintes processos:

- a) Multiplique ambos os lados da equação (2.57) pelo vetor velocidade da massa 1, ou seja,  $\left(\frac{d\vec{r}_1}{dt}\right)$ :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} = -\frac{Gm_1 M_R}{r_1^3} r_1 \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt}. \quad (2.58)$$

Esta equação é uma equação escalar que pode ser simplificada pelo seguinte procedimento,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1) = \vec{r}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \vec{r}_1 = 2\vec{r}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} \quad (2.59)$$

e da mesma forma,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} \right) = 2 \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \quad (2.60)$$

- b) Usando o resultado obtido na equação (2.60), temos

$$\frac{m_1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} \right) = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \quad (2.61)$$

- c) Para reescrever o lado direito da equação (2.57), precisamos olhar para a variável  $r_1$  e seus derivados. Especificamente,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r_1} \right) = -\frac{1}{r_1^2} \frac{dr_1}{dt} \quad (2.62)$$

Temos que relacionar isso ao vetor  $\vec{r}_1$  escrevendo

$$\vec{r}_1 = (r_1 \cdot \vec{r}_1)^{1/2} \quad (2.63)$$

então,

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1)^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1)^{1/2}} 2\vec{r}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} \quad (2.64)$$

e

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{1}{r_1} \vec{r}_1 \frac{dr_1}{dt} \quad (2.65)$$

Portanto, a equação (2.62) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r_1} \right) = -\frac{1}{r_1^3} \vec{r}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} \quad (2.66)$$

d) Substituindo (2.66) no lado direito de (2.58), obtemos

$$m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = Gm_1 M_R \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r_1} \right) \quad (2.67)$$

e) O lado esquerdo da equação (2.67) pode ser reescrito usando a equação (2.61), o que produz

$$\frac{m_1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} \right) = Gm_1 M_R \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r_1} \right) \quad (2.68)$$

f) Ao integrar a equação (2.68), teremos

$$\frac{Gm_1 M_R}{r_1} = \frac{1}{2} m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} + K \quad (2.69)$$

onde  $K$  é uma constante de integração.

g) O lado esquerdo da equação (2.69) pode ser simplificado pela escrita

$$v_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \quad (2.70)$$

que é o vetor de velocidade da massa  $m_1$ . Substituindo (2.70) em (2.69), obtemos

$$\frac{Gm_1 M_R}{r_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + K \quad (2.71)$$

## Equação da energia

A equação (2.71) é chamada de *equação de energia*. Em um sistema de dois corpos tal como o que está sendo considerado, a energia total é conservada desde

que não haja mecanismo dissipativo que mudaria a energia total. Assim,  $K$  está relacionado com a energia total da seguinte forma:

$$E_T = -K \quad (2.72)$$

então,

$$E_T = \underbrace{\frac{1}{2}m_1v_1^2}_{\text{Energia cinética}} + \underbrace{\left(-\frac{Gm_1M_R}{r_1}\right)}_{\text{Energia potêncial}} \quad (2.73)$$

Esta equação define a energia potencial entre  $m_1$  e  $M_R$  separados por uma distância  $r_1$  como na equação (2.27). Observe que a energia total  $E_T$  que resulta das condições iniciais do movimento podem ser positivas ou negativas. Isso será mostrado posteriormente que o tipo de órbita executada pela massa depende da energia total  $E_T$ .

Há uma segunda constante do movimento que também é importante. Isto também pode ser derivado da equação (2.57). Começamos formando o produto vetorial de ambos os lados dessa equação com o vetor posição  $\vec{r}_1$  da massa  $m_1$ :

$$\vec{r}_1 \times m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{r}_1 \times \left(-\frac{Gm_1M_R}{r_1^3}\vec{r}_1\right) \quad (2.74)$$

Por causa das propriedades do produto vetorial, o lado direito da equação (2.74) é zero. O lado esquerdo da equação pode ser reescrito usando a regra da cadeia para produtos de vetores:

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_1}{dt} \right) = \underbrace{\frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \frac{d\vec{r}_1}{dt}}_{=0} + \vec{r}_1 \times \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \quad (2.75)$$

Como o primeiro termo no lado direito é zero da equação (2.74), então temos

$$m_1 \frac{d}{dt} \left( \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_1}{dt} \right) = 0 \quad (2.76)$$

Integrar esta equação produz

$$m_1 r_1 \times \frac{d\vec{r}_1}{dt} = L \quad (2.77)$$

onde a constante de integração é o vetor  $L$ .

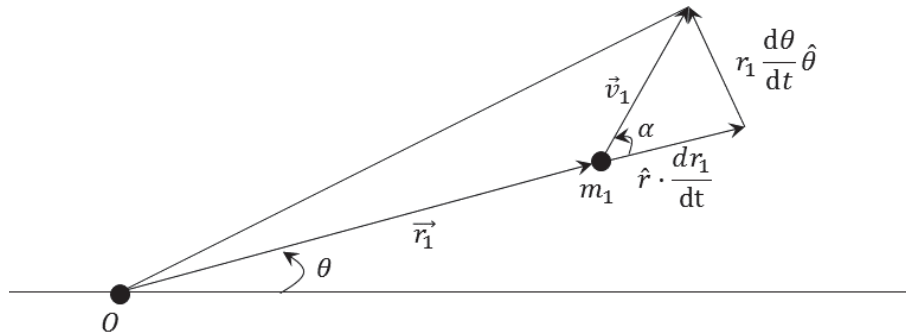
O primeiro ponto sobre o resultado expresso na equação (2.77) é que o vetor  $L$  tem magnitude e direção constantes. O último define um plano (perpendicular à direção de  $L$ ) em que o movimento das massas  $m_1$  e  $m_2$  ocorrem. Assim, o movimento ocorre em duas em vez de três dimensões. Tendo estabelecido este ponto, é útil para descrever o movimento de  $m_1$  e a origem  $O$  em termos de coordenadas polares. Observe que o vetor  $d\vec{r}_1/dt$  é a velocidade da massa  $m_1$  em relação a  $O$ :

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \quad (2.78)$$

A figura (2.9) define o sistema de coordenadas polares em termos das variáveis  $r$  e  $\theta$ . A equação (2.77) agora pode ser reescrita como

$$m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 = L \implies m_1 (\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) = L \quad (2.79)$$

Figura 2.9 - Ilustração do produto vetorial e magnitude do vetor



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

Da figura (2.9) e da definição do produto vetorial, temos que a magnitude do vetor  $\vec{r}_1 \times \vec{v}_1$ ,

$$|\vec{r}_1 \times \vec{v}_1| = r_1 v_1 \sin \alpha \quad (2.80)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre  $\vec{r}_1$  e  $\vec{v}_1$ . Além disso, a partir da geometria da figura (2.9),

temos

$$v_1 \sin \alpha = r_1 \frac{d\theta}{dt} \quad (2.81)$$

onde  $v_1 = |\vec{v}_1|$ , e  $r_1 = |\vec{r}_1|$ . Usando as equações (2.78) e (2.80), podemos reescrever a equação (2.77) como

$$\vec{L} = m_1 r_1^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{l} \quad (2.82)$$

**Definição 2.2.4.** *Em mecânica, o momento de inércia, ou momento de inércia de massa, expressa o grau de dificuldade em se alterar o estado de movimento de um corpo em rotação. Quanto maior for o momento de inércia de um corpo, mais difícil será girá-lo ou alterar sua rotação. (TEIXEIRA, )*

**Definição de momento de inércia (uma partícula)**

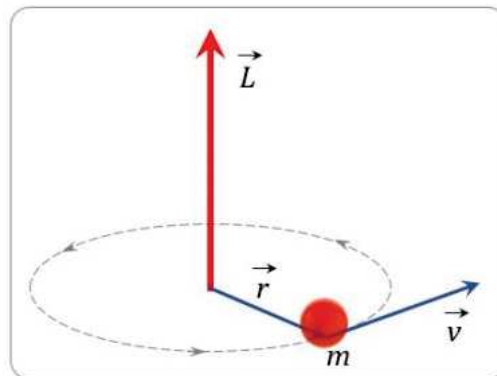
$$I = mr^2$$

A quantidade  $m_1 r_1^2$  é o momento de inércia do ponto de massa  $m_1$  em movimento em torno da origem e  $d\theta/dt$  é a velocidade angular.

$$L = I\omega \hat{l}$$

Assim, temos que  $L$  é o vetor angular do momento e  $\hat{l}$  é o vetor unitário que define a direção em qual aponta. Este resultado afirma que o momento angular, junto com a energia total, também é uma constante do movimento para um sistema geral de duas massas interagindo por meio da força da gravidade.

Figura 2.10 - Ilustração da definição do momento angular



Fonte: (MADEIRA, 2019)

A conservação do momento angular é o resultado do fato de que a força gravitacional aponta na direção da linha que une as duas massas. Assim, a força gravitacional não pode exercer qualquer torque que possa mudar o movimento do momento angular porque o braço do momento é sempre zero.

### 2.3 Órbitas Elípticas

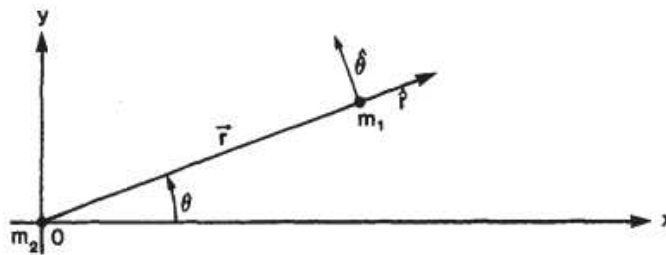
Mostraremos que dois corpos se movendo em torno de seu centro comum de massa executam órbitas elípticas sob certas condições. Desta forma, iniciando a equação (2.56):

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2}{r_1^2} \hat{r} \quad (2.83)$$

onde  $\vec{r}_1$  é definida na figura (2.8) e o vetor da unidade  $\hat{r}$  aponta na direção definida pela linha que une  $m_1$  e  $m_2$ .

Para encontrar uma solução da equação vetorial (2.83), vamos nos referir ao sistema de coordenadas definido na figura (2.11). A massa  $m_2$  é considerada como sendo a origem do sistema de coordenadas. Essa suposição simplifica a derivação e podemos dizer que  $m_2$  representa a massa reduzida como definida na equação (2.52).

Figura 2.11 - Ilustração órbita elíptica



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

A órbita a ser determinada será executada em torno do origem do sistema de coordenadas mostrado na figura (2.11). Para simplificar as coisas, vamos chamar a massa de teste de  $m$  e a massa na origem é  $M$ . A equação a ser resolvida é então

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GmM}{r^2} \hat{r} \quad (2.84)$$

equação (2.84) define o comportamento do vetor  $\vec{r}$  em função do tempo. A fim primeiro de determinar a forma da órbita, queremos eliminar a variável tempo e reescrever a equação que descreve a órbita em termos das variáveis  $r$  e  $\theta$  descritas no sistema de coordenadas da figura (2.11). Para calcular a segunda derivada à



esquerda da equação (2.84), começamos com a identidade

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad (2.85)$$

onde  $r$  é a magnitude do vetor . A primeira derivada com respeito ao tempo é

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\hat{r}}{dt} + \hat{r}\frac{dr}{dt} \quad (2.86)$$

A segunda derivada é

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = r\frac{d^2\hat{r}}{dt^2} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{d\hat{r}}{dt}\frac{dr}{dt} + \hat{r}\frac{d^2r}{dt^2} \quad (2.87)$$

Devemos agora olhar para o comportamento dos vetores da unidade  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$  como funções do tempo. A magnitude dos vetores da unidade claramente permanece constante assim precisamos nos preocupar apenas com as mudanças na direção dos vetores unidade. Uma vez que ambos os vetores da unidade estão ligados ao vetor , como mostrado em figura (2.11), eles vão girar em torno da origem do sistema de coordenadas com a velocidade angular  $\frac{d\theta}{dt}$  do vetor . A partir da figura (2.11), pode ser visto que o vetor unidade  $\hat{r}$  muda na direção  $\hat{\theta}$  com uma taxa igual a velocidade angular de :

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \hat{\theta}\frac{d\theta}{dt} \quad (2.88)$$

O vetor da unidade  $\hat{\theta}$  também mudará, mas irá girar em uma direção em que ele sempre apontará para a origem do sistema de coordenadas:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\hat{r}\frac{d\theta}{dt} \quad (2.89)$$

O sinal negativo na equação (2.89) reflete o fato de que a mudança no vetor da unidade  $\hat{\theta}$  sempre aponta para a origem  $O$ . A segunda derivada do vetor da unidade  $\hat{r}$  da equação (2.88) é

$$\frac{d^2\hat{r}}{dt^2} = \frac{d\hat{\theta}}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \hat{\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\hat{r}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \hat{\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2.90)$$

Usando equações (2.90) e (2.88) para reescrever a equação (2.87), obtemos

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\hat{r}r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \hat{\theta}r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\hat{\theta}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \hat{r}\frac{d^2r}{dt^2}$$

$$= \hat{r} \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \hat{\theta} \left( r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \quad (2.91)$$

Toda a equação de movimento (2.84) agora pode ser escrita usando equação (2.91):

$$\hat{r} \left[ m \frac{d^2 r}{dt^2} - mr \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{GmM}{r^2} \right] + \hat{\theta} \left( mr \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2m \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \quad (2.92)$$

Esta equação contém o tempo como uma variável e é ainda uma equação vetorial.

A equação (2.92) agora pode ser simplificada usando o fato de que o vetor de momento angular  $L$  definido na equação (2.77) é uma constante tanto na magnitude quanto na direção. A magnitude do vetor  $L$  é dada pela equação (2.82) como

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (2.93)$$

Se agora tomarmos a derivada de tempo de  $L$ , nós obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= 2mr \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + mr^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = r \left( 2m \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + mr \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) = 0 \\ \implies 2m \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + mr \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.94)$$

Desta forma, temos que a (2.94) é igual ao segundo termo na equação (2.92) para que o componente  $\hat{\theta}$  desapareça. Portanto, o componente  $\hat{r}$  deve também desaparecer, o que temos

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} - mr \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{GmM}{r^2} = 0 \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \implies m \frac{d^2 r}{dt^2} - \underbrace{\frac{mr^3}{=1}}_{=1} mr \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{GmM}{r^2} &= m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{mr^3} \left[ \underbrace{m^2 r^4 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2}_{=L^2} \right] + \frac{GmM}{r^2} = 0 \\ \implies m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{GmM}{r^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.96)$$

A equação (2.96) define como a magnitude do vetor  $L$  se comporta em função do tempo. Nós já dissemos que, inicialmente, estaremos interessados não na dinâmica, mas na geometria da órbita de massa  $m$  no campo gravitacional da massa  $M$

localizado no ponto  $O$ .

Note que a equação (2.96) continua em função do tempo, mas precisaremos converter para a equação em função do ângulo. Portanto,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (2.97)$$

usando o momento angular (2.93). A segunda derivada é

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{2L}{mr^3} \frac{dr}{dt} \frac{dr}{d\theta} + \frac{L}{mr^2} \frac{d^2r}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.98)$$

Usando as Equações (2.93) e (2.97) para avaliar  $\frac{d\theta}{dt}$  e  $\frac{dr}{dt}$  em termos de  $r$  e  $\theta$ , nós obtemos

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{2L^2}{m^2r^5} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2r^4} \frac{d^2r}{d\theta^2} \quad (2.99)$$

Substituindo as expressões (2.93) e (2.99) na equação (2.95), obtemos uma equação que expressa  $r$  como uma função de  $\theta$ :

$$\frac{L^2}{mr^4} \frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2L^2}{mr^5} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{GmM}{r^2} = 0 \quad (2.100)$$

$$\implies \frac{L^2}{mr^2} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{r} + \frac{Gm^2M}{L^2} \right] = 0$$

$$\implies \frac{1}{r^2} \frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{r} + \frac{Gm^2M}{L^2} = 0 \quad (2.101)$$

Esta é uma equação diferencial não linear. De modo que equações não lineares deste tipo não têm soluções gerais que podem ser expressas como funções analíticas simples. Felizmente, há uma transformação simples de variáveis que permite uma solução analítica exata da equação (2.101):

$$r = \frac{1}{u} \quad (2.102)$$

As derivadas de  $r$  em relação a  $\theta$  agora podem ser calculados em termos de  $u$  e  $\theta$  usando a equação (2.102):

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \quad (2.103)$$

e a segunda derivada é

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} = \frac{2}{u^3} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (2.104)$$

Usando Equações (2.104), (2.103) e (2.102) em (2.101), temos

$$u^2 \left[ \frac{2}{u^3} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \right] - 2u^3 \left[ \frac{1}{u^4} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 \right] - u + \left( \frac{Gm^2 M}{L^2} \right) = 0 \quad (2.105)$$

Através de algumas manipulações algébricas, a equação (2.105) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm^2 M}{L^2} \quad (2.106)$$

A equação (2.106) tem a mesma forma que a equação descrevendo um simples oscilador harmônico. As soluções da equação (2.106) podem, portanto, ser expressas como simples função trigonométricas. Especificamente, a solução de (2.106) é

$$u = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{Gm^2 M}{L} \quad (2.107)$$

que pode ser facilmente verificado ao diferenciar equação (2.107) duas vezes.

Em termos das variáveis reais que descrevem a geometria da órbita,  $r$  e  $\theta$ , nós temos

$$\frac{1}{r} = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{Gm^2 M}{L} \quad (2.108)$$

onde  $A$  e  $\theta_0$  são as constantes de integração que foram trazidas da solução (2.107). Mostraremos em breve que essas constantes têm significados físicos específicos. A equação (2.108) pode ser reescrita como

$$r = \frac{1}{A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{Gm^2 M}{L}} \quad (2.109)$$

e, a fim de ver claramente a interpretação física das constantes que aparecem (2.109), reescrevemos a equação como

$$r = \frac{\frac{L^2}{Gm^2 M}}{\left( \frac{AL^2}{Gm^2 M} \right) \cos(\theta - \theta_0) + 1} \quad (2.110)$$

A forma usual para esta equação é

$$r = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_0) + 1} \quad (2.111)$$

onde a quantidade  $p$  é definida como

$$p = \frac{L^2}{Gm^2M} \quad (2.112)$$

e  $e$  é dado como

$$e = \frac{AL^2}{Gm^2M} = Ap \quad (2.113)$$

Mostraremos que a órbita definida pela equação (2.111) define uma elipse nas coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ .

Temos que  $e$ , também conhecida como *excentricidade da elipse* depende de  $p$ , mas também da constante de integração  $A$ , que define as condições iniciais do movimento da massa  $m$ . A segunda constante de integração,  $\theta_0$ , define a orientação do eixo principal da órbita em relação a um eixo externo arbitrário.

No caso em que a excentricidade seja zero, equação (2.111) reduz a

$$r = p, \quad (2.114)$$

que é a equação de um círculo com o raio  $p$ . Agora, podemos usar a equação (2.112) para escrever

$$r = p = \frac{L^2}{Gm^2M}. \quad (2.115)$$

O momento angular  $L$  de uma massa em uma órbita circular em movimento com raio  $r$  é

$$L = mrv \quad (2.116)$$

onde  $v$  é a velocidade da massa na órbita. Combinando (2.116) e (2.115), podemos calcular a velocidade da massa  $m$  movendo-se em uma órbita circular de raio  $r$  em torno da massa  $M$  como

$$v^2 = \frac{GM}{r} \quad (2.117)$$

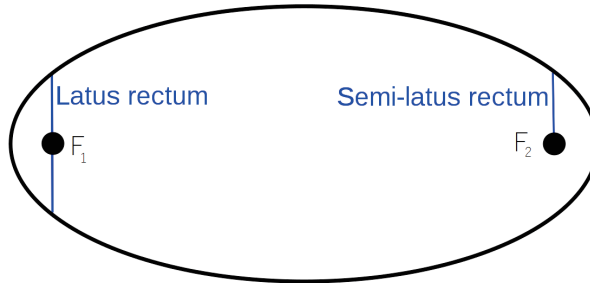
ou

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (2.118)$$

Esta é precisamente a mesma expressão que encontramos para órbitas circulares. A quantidade  $p$  é chamada de *reto semi-latus* da elipse no caso em que a excentricidade da órbita não é zero.

**Definição 2.3.1.** O *latus recto* é a corda paralela à diretriz e que passa por um foco; sua metade do comprimento é o *reto semi-latus*.

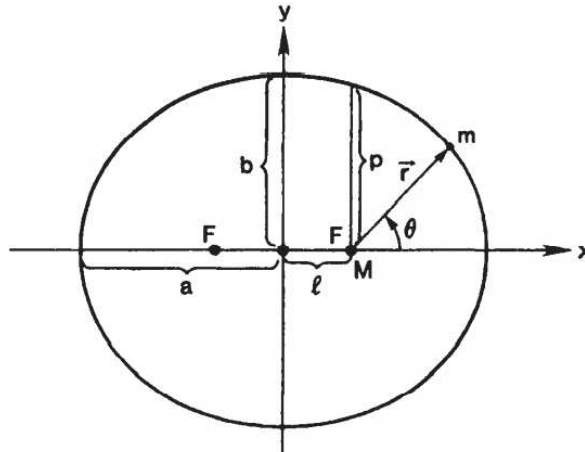
Figura 2.12 - Ilustração para o Semi-Latus



Fonte: (WIKIPEDIA, 2020)

Agora é importante relacionar as quantidades físicas  $G$ ,  $m$  e  $M$  ao parâmetros que definem a órbita elíptica. Para fazer isso, vamos nos referir a figura (2.13). Neste desenho, escolhemos o eixo principal da elipse para estar sob o eixo  $x$ . Isso significa que definimos a constante de integração  $\theta_0$  igual a zero.

Figura 2.13 - Ilustração da órbita elíptica



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

A massa  $M$  está localizada em um foco,  $F$ , da elipse e a massa de teste  $m$  sob a órbita. A origem do sistema de coordenadas utilizado para descrever o movimento também está no foco  $F$  em que a massa  $M$  está localizada. O comprimento  $l$  é a distância do foco para o centro da elipse, o comprimento  $a$  é chamado de *eixo*

*semimaior*, e  $b$  é o *eixo semimenor*.

A partir da figura (2.13) agora é possível derivar as seguintes relações usando equação (2.111) com  $\theta_0$  igual a zero

$$a + l = \frac{p}{l - e} \quad a - l = \frac{p}{l + e} \quad (2.119)$$

Combinando essas equações produz

$$2a = \frac{p}{l - e} + \frac{p}{l + e} = \frac{2p}{l - e^2}$$

ou

$$a = \frac{p}{l - e^2} \quad (2.120)$$

Além disso, subtraindo equações (2.118), temos

$$2l = \frac{p}{l - e} - \frac{p}{l + e} = \frac{2pe}{l - e^2} \quad (2.121)$$

Combinando este resultado com a equação (2.119) rende:

$$l = ae \quad (2.122)$$

Ambos são relacionamentos úteis. Vamos agora mostrar que a equação da elipse em coordenadas polares (2.111) é idêntico à equação familiar para a elipse nas coordenadas cartesianas quando a transformação apropriada é feita:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad (2.123)$$

Substituir (2.123) em equação (2.111), com  $\theta_0 = 0$ , resultaria no equação de uma elipse em um sistema de coordenadas com a origem no foco à direita da elipse:

$$p = r + e r \cos \theta \quad (2.124)$$

ou usando (2.122)

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} + ex \quad (2.125)$$

Reescrever esta equação rende

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2pex + e^2 x^2 \quad (2.126)$$

ou

$$x^2(1 - e^2) + y^2 + 2pex = p^2 \quad (2.127)$$

Completando o quadrado no lado esquerdo desta equação e, em seguida, fazendo algum rendimento de álgebra

$$\left(x + \frac{pe}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2} \quad (2.128)$$

Devemos agora mover a origem do sistema de coordenadas para o centro da elipse, que é realizada pela transformação

$$x' = x + l = x + ae = x + \frac{pe}{1 - e^2} \quad (2.129)$$

Substituindo (2.129) em (2.128) rendimentos

$$x'^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2} \quad (2.130)$$

e manipulando esta equação para torná-lo idêntico à forma do equação da elipse em coordenadas cartesianas rende

$$\frac{x'^2}{p^2/(1 - e^2)^2} + \frac{y^2}{p^2/(1 - e^2)} = 1 \quad (2.131)$$

que é a mesma forma padrão da equação cartesiana:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.132)$$

Comparando equações (2.131) e (2.132), vemos que

$$a^2 = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2} \text{ ou } a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (2.133)$$

Isso é idêntico à relação (2.119) derivada das propriedades geométricas da elipse. Além disso, comparando (2.132) e (2.131), nós temos

$$b^2 = \frac{p^2}{1 - e^2} \text{ ou } b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (2.134)$$



A relação entre  $a$  e  $b$  é, portanto,

$$a = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (2.135)$$

Nós agora fizemos a conexão entre as propriedades geométricas da elipse e as quantidades físicas que definem a órbita.

Provando que a órbita de uma massa  $m$  movendo-se em torno de uma massa fixa  $M$  é uma elipse, provamos a primeira lei de Kepler de movimento planetário. Também mostramos que as outras duas leis são válidas para órbitas circulares. Devemos agora mostrar que as leis de Kepler se mantêm para as órbitas elípticas gerais que desenvolvemos nesta subseção.

Para isso, devemos olhar não apenas para as propriedades geométricas da elipse, mas também para a dinâmica do objeto que se move na órbita elíptica. Isso significa que temos que reintroduzir a variável tempo nas equações.

A segunda lei de Kepler, a *lei das áreas*, segue da figura (2.14). A área  $\Delta A$  do segmento identificado na figura (2.14) é definida como

$$\Delta A = \frac{1}{2}(r^2 \Delta \theta) \quad (2.136)$$

ou na notação de cálculo diferencial, isso se torna

$$dA = \frac{1}{2}(r^2 d\theta). \quad (2.137)$$

Agora dividindo cada lado por  $dt$ , temos

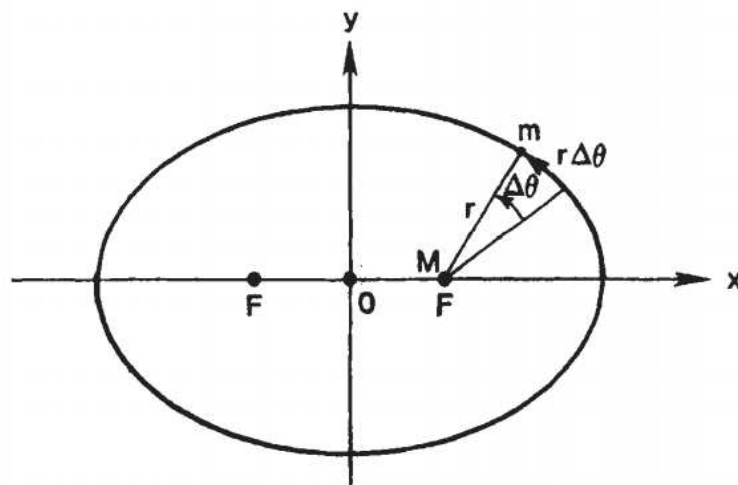
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (2.138)$$

O termo  $r^2 d\theta/dt$  no lado direito, quando multiplicado por  $m$ , é o angular momento que definimos como a constante  $L$ :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{L}{m} = \text{const} \quad (2.139)$$

A partir (2.139) pode-se ver que o  $dA$  é sempre proporcional ao  $dt$  para que áreas iguais sejam varridas em tempos iguais.

Figura 2.14 - Vetores e ângulos da órbita elíptica



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

A terceira lei de Kepler segue de uma comparação geométrica das propriedades da elipse e da dinâmica do movimento da órbita do objeto. A área de uma elipse pode ser expressa da seguinte forma em termos dos eixos semimaior e semimenor:

$$A = \pi ab \quad (2.140)$$

A equação de integração (2.138) resulta em

$$\int_0^A dA = A = \pi ab = \frac{1}{2} \frac{L}{m} \int_0^T dt = \frac{1}{2} \frac{L}{m} T$$

onde  $T$  é o tempo que leva a partícula para dar a volta na elipse:

$$2\pi ab = \frac{L}{m} T \quad (2.141)$$

Da equação (2.135), temos

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

De forma que

$$2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{L}{M} T \quad (2.142)$$

Agora temos que eliminar  $\sqrt{1 - e^2}$  para qualquer elipse. Elevando ambos os lados

de (2.142)

$$4\pi^2 a^4 (1 - e^2) = \frac{L^2}{M^2} T^2 \quad (2.143)$$

Agora,

$$1 - e^2 = \frac{p}{a} \quad (2.144)$$

e  $p$  é definida como

$$p = \frac{L^2}{Gm^2 M} \quad (2.145)$$

e usando (2.146) na equação (2.143) rende

$$4\pi^2 a^4 \frac{L^2}{aGm^2 M} = \frac{L^2}{m^2} T^2 \quad (2.146)$$

ou, reorganizando

$$a^3 = \frac{GM}{4\pi^2} T^2 \quad (2.147)$$

Esta é a terceira lei de Kepler.

Note que esta equação tem exatamente a mesma forma da equação (2.14), que é a terceira lei, derivada de órbitas circulares. A única diferença é que o raio  $R$  do círculo é substituído pelo eixo semimaior da elipse.

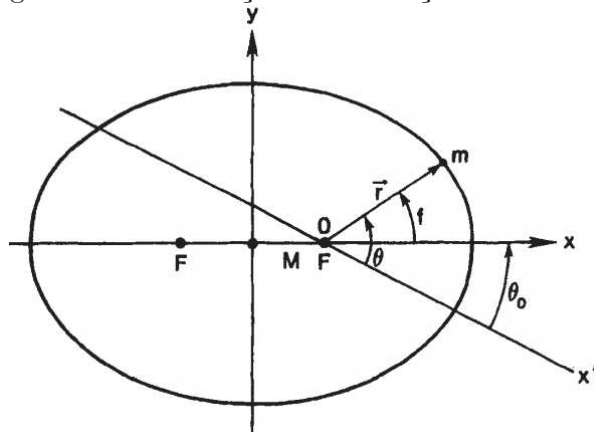
Há um ponto final que precisa ser enfatizado. Em situações orbitais complexas, às vezes acontece que o sistema de coordenadas em que a elipse foi definida não é o mesmo que o sistema de coordenadas em que todo o problema é tratado. Nesse caso,  $\theta_0$ , não é zero e há uma convenção que é usada para descrever a situação, que é ilustrada em figura (2.15). A origem do sistema de coordenadas está no foco direito. O eixo  $x$  é o eixo coincidente com o eixo principal da elipse. O ângulo  $\theta_0$ , é o ângulo entre  $x$  e  $x'$ . Uma vez que  $x'$  é o sistema de coordenadas em que o problema deve ser resolvido, na variável  $\theta_0$  é medida a partir do eixo  $x'$ , O ângulo entre o eixo  $x$  e o vetor  $r$  é chamado  $f$ , a verdadeira anomalia. É claro, pela figura 2.15 que

$$f = \theta - \theta_0 \quad (2.148)$$

Em tal situação, a verdadeira anomalia é a variável na equação para a elipse:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (2.149)$$

Figura 2.15 - Ilustração da mudança de coordenada



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

Isso será útil para estudar movimentos complexos de satélites em órbita em torno da Terra.

## 2.4 Relacionamentos de Energia: Órbitas hiperbólicas e parabólicas

Nos subseções anteriores, examinamos o comportamento de duas massas movendo-se em torno uma da outra sob a influência da força gravitacional. Além disso, vimos as propriedades geométricas da elipse e provamos as três leis do movimento planetário de Kepler ao tratar também a dinâmica dos objetos que se movem em órbitas elípticas. Finalmente, derivamos a relação entre a energia cinética e potencial de um objeto em movimento em uma órbita circular. O objetivo desta subção é estender todas essas considerações a outros tipos de órbitas de dois corpos permitidas pelas equações do movimento e pela lei da gravidade. Essas órbitas são as *parábolas* e *hipérbolas*.

Começaremos examinando as relações de energia em uma órbita elíptica. Já mostramos que a energia total de dois objetos movendo-se sob a influência da gravidade é constante. Nós também mostramos que, no caso de órbitas circulares, a energia cinética e a energia potencial são constantes porque a velocidade orbital e a raio são constantes. Usando a expressão para a velocidade orbital em um órbita circular (2.9), foi possível escrever a energia total de uma massa  $m$  movendo-se em torno de uma massa  $M$  em um raio  $R$  como

$$E_T = -\frac{GmM}{2R} \quad (2.150)$$

Devemos agora estender essas considerações para órbitas elípticas e calcular a energia total da massa  $m$  movendo-se em torno da massa  $M$  em uma órbita, como o mostrado na figura (2.16).

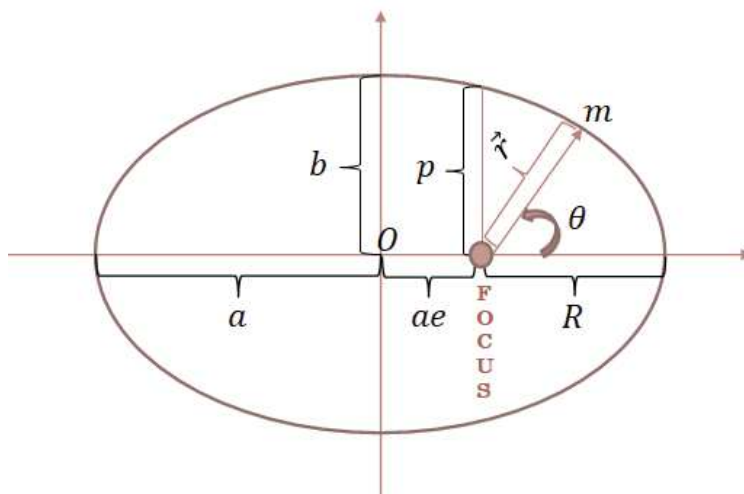
A energia total da massa  $m$  pode ser escrito, de acordo com a equação (2.73), como

$$E_T = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} \quad (2.151)$$

Nesse caso, a energia cinética e a energia potencial não são mais constantes, eles mudam conforme a massa se move ao redor da órbita. Para calcular a energia total da partícula em órbita, usamos a conservação de momento angular na órbita. Para fazer isso, lembramos que o ângulo o momento é dado pela equação (2.78):

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad (2.152)$$

Figura 2.16 - Ilustração para nomenclaturas estabelecidas



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

Quando os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  são perpendiculares entre si, a magnitude do vetor de momento angular  $\vec{L}$  é dado como

$$\vec{L} = |\vec{L}| = mrv \quad (2.153)$$

Existem apenas dois lugares ao longo da órbita elíptica onde  $\vec{v}$  e  $\vec{r}$  são perpendiculares, no perigeu e no apogeu. No apogeu, temos

$$L = mv_A(a + ae) = mv_Aa(1 + e) \quad (2.154)$$

desde que

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (2.155)$$

nós temos

$$L = mv_A \frac{p}{1 - e}. \quad (2.156)$$

O momento angular está relacionado ao semi-latus reto  $p$  da elipse do seguinte modo:

$$p = \frac{L^2}{GMm^2} \quad (2.157)$$

A partir das relações (2.155) - (2.157) podemos calcular  $v_A$  a velocidade em apogeu:

$$v_A^2 = \frac{L^2}{m^2} \frac{(1 - e)^2}{p^2} = \frac{GM(1 - e)^2}{p} = \frac{GM}{a} \frac{1 - e}{1 + e} \quad (2.158)$$

Usando a equação (2.151), podemos escrever, para a energia total no apogeu,

$$E_T = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GmM}{r_A} = \frac{1}{2} \frac{GmM}{a} \frac{1-e}{1+e} - \frac{GmM}{a(1+e)} \quad (2.159)$$

onde a relação  $r_A = a(1+e)$  foi empregada. Quando a equação (2.159) é simplificado, obtemos

$$E_T = -\frac{GmM}{2a} \quad (2.160)$$

A energia total da partícula,  $m$ , movendo-se ao longo da órbita elíptica é uma constante que depende apenas do semieixo maior da elipse. A energia total é sempre negativa e tem exatamente a mesma forma funcional que equação (2.28), a energia total de uma partícula movendo-se em uma órbita circular, exceto que  $r$ , o raio do círculo, é substituído por  $a$ , o semieixo maior.

A equação de uma elipse em coordenadas polares é dada pela equação (2.149) e se parece com

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (2.161)$$

onde assumimos que o ângulo  $\theta_0$  é zero. Se a excentricidade  $e$  da órbita é maior que zero, mas menor que unidade, então  $r$  permanece finito, não importa qual seja o valor do ângulo  $\theta$ . Essas órbitas são chamados de limitadas, pois só podem ocupar um espaço finito. O fato de que a energia total para órbitas limitadas (elipses e círculos) acaba sendo sempre negativo não é surpreendente. Se o corpo em órbita (massa  $m$ ) mudou de sua órbita para um ponto infinitamente longe de  $M$ , e sem energia cinética, o trabalho teria que ser feito no corpo. Este trabalho equivale precisamente à energia total do corpo ( $m$ ) em sua órbita, e seria adicionado a essa energia para que, no estado final, a energia total do corpo seja zero, isto é, a energia cinética desaparece porque  $v_\infty$  é zero, e a energia potencial também desaparece porque a distância ao centro de força se torna infinita. No caso de  $e = 0$ , então a equação (2.161) torna-se

$$r = p \quad (2.162)$$

e a órbita é um círculo, e é a mais simples das órbitas. Agora mostramos que um círculo é na verdade, uma órbita permitida. E se  $e = 1$ ? Neste caso, a equação da

órbita é

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta} \quad (2.163)$$

Quando o ângulo  $\theta$  é igual a zero, temos

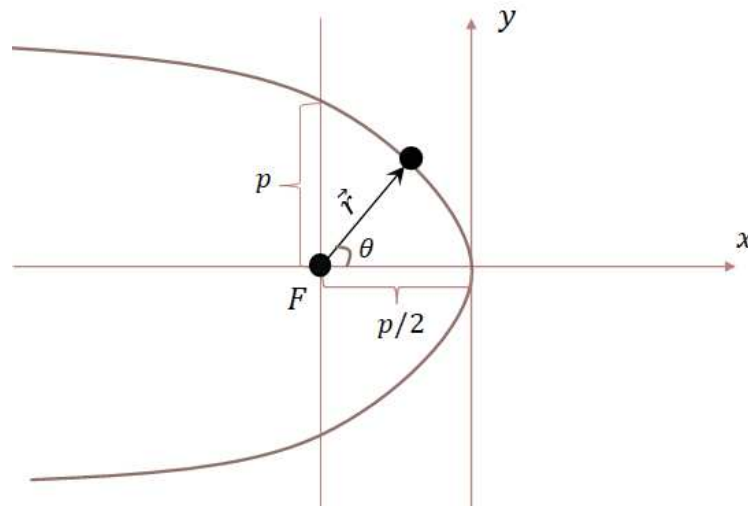
$$r = \frac{1}{2}p \quad (2.164)$$

Por outro lado, se o ângulo  $\theta$  for igual a  $\pi(180^\circ)$ , então  $r$  tende ao infinito.

Finalmente, quando  $\theta = \frac{1}{2}\pi$ , temos

$$r \approx p \quad (2.165)$$

Figura 2.17 - Ilustração da órbita parabólica



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

A figura (2.17) mostra o tipo de órbita que essas considerações implicam. Para ver como seria essa órbita, vamos examinar algumas transformações

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad (2.166)$$

Substituindo essas equações em (2.163) temos

$$r + r\cos\theta = p \quad (2.167)$$



ou

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p - x \quad (2.168)$$

onde usamos as equações (2.154). Elevando ao quadrado ambos os lados

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2xp + x^2 \quad (2.169)$$

que quando simplificado se torna

$$y^2 = p^2 - 2xp \quad (2.170)$$

Se fizermos a transformação,

$$-x' = x - \frac{1}{2}p \quad (2.171)$$

nós obtemos

$$x' = \frac{y^2}{2p} \quad (2.172)$$

Esta é a equação da parábola mostrada na figura (2.17).

Agora, devemos olhar o que está implícito em uma excentricidade igual à unidade. Uma maneira de ver isso é dizer que a parábola que desenhamos na figura (2.16) é o caso extremo de uma elipse. Voltando à figura (2.13), podemos comparar isso com a parábola mostrada na figura (2.17). Vemos primeiro que a origem do sistema de coordenadas cartesianas que descreve a parábola na equação (2.158) é o que seria o foco da elipse na figura (2.13). Além disso, a partir das equações que relacionam as quantidades de  $a$  e  $b$  para a elipse, temos

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \text{ e } b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (2.173)$$

É claro a partir dessas equações tanto para  $a$  quanto  $b$  se tornam infinitos se  $e = 1$ . Voltando à figura (2.17), é como se a elipse mostrada na figura (2.17) fosse "esticada" de modo que tanto o semieixo maior quanto o semiminor move-se infinitamente para a esquerda. Além disso,  $b$  também se torna infinitamente longa. Finalmente, o centro da elipse, ponto  $O$ , move-se infinitamente para a esquerda. Uma vez que o semieixo maior vai para o infinito, a energia total de um corpo que move-se em órbita parabólica é zero, de acordo com a equação (2.160). Se a massa  $m$  se mover em uma órbita parabólica, a condição dinâmica que descreve o

movimento é que a energia potencial da massa é sempre precisamente igual à energia cinética:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{r} \quad (2.174)$$

Devido à natureza exata da condição em (2.174), é muito difícil para alcançar órbitas que se ajustam precisamente a uma parábola. Passamos agora a um estudo dos casos em que a excentricidade é maior do que a unidade ( $e > 1$ ). Se nós olharmos para a equação (2.161), então há um ângulo  $\theta = \alpha$  para o qual  $r$  vai para infinito quando esta condição for atendida:

$$1 + e\cos\alpha = 0 \quad \cos\alpha = -\frac{1}{e} \quad (2.175)$$

Observe que a implicação da equação (2.175) é que

$$\alpha > \frac{1}{2}\pi \quad (2.176)$$

porque é somente quando essa condição é satisfeita que o cosseno do ângulo é negativo. Além disso, quando  $\theta = 0$ , temos

$$r = \frac{p}{1 + e} \quad (2.177)$$

e quando  $\theta = \frac{1}{2}\pi$ , temos

$$r = p \quad (2.178)$$

As condições (2.177) e (2.178) junto com (2.161) agora nos permitem construir uma imagem da órbita (2.18). Esta imagem mostra que não pode haver ângulos maiores que  $\alpha$ , para os quais existem soluções de (2.161). A linha reta faz com que o ângulo  $\alpha$  com o eixo  $x$  se aproxime cada vez mais da órbita conforme  $r$  se torna cada vez maior. Essa linha é chamada *assíntota*, e no caso da parábola, não há assíntota.

Agora, vamos olhar para a equação de energia

$$E_T = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad (2.179)$$



Quadrado de ambos os lados da equação (2.181) resulta

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2pex + e^2x^2 \quad (2.183)$$

Para reescrever a equação (2.183) em termos de  $x^2$  e  $y^2$  apenas, uma transformação de coordenadas é necessária. Note as figuras (2.16) e (2.18) e veja a quantidade de casos da órbita da figura (2.16) que é o análogo ao do semieixo maior da elipse. No caso da elipse, é a distância do centro da elipse,  $O$ , ao ponto  $P$ . Não há um centro natural na órbita da figura (2.18), pois a órbita não é fechada. Uma escolha possível seria ver se o ponto em que a assíntota cruza o eixo  $x$  é uma origem apropriada.

Olhe para a equação (2.183) novamente e veja o que pode ser feito:

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = p^2 - 2pex \quad (2.184)$$

e isso pode ser reescrito como

$$x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p(p - 2ex)}{1 - e^2} \quad (2.185)$$

Agora, lembrando que para a hipérbole  $e > 1$  temos

$$x^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{p(2ex - p)}{e^2 - 1} \quad (2.186)$$

Deste modo, precisamos fazer uma transformação da coordenada  $x$  para eliminar o termo linear. Isso pode ser feito completando o quadrado em (2.186), o que leva à seguinte forma final:

$$\left(x - \frac{pe}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{p^2}{e^2 - 1^2} \quad (2.187)$$

A partir da equação (2.187), fica claro o que a transformação necessária deve parecer com

$$x' = x - \frac{pe}{e^2 - 1} \quad (2.188)$$

Logo, a equação da hipérbole é

$$x'^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{p^2}{e^2 - 1^2} \quad (2.189)$$

ou no formato

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.190)$$

nós temos

$$\frac{x'^2}{p^2/(e^2 - 1)^2} - \frac{y^2}{p^2(e^2 - 1)} = 1 \quad (2.191)$$

Portanto, temos as relações para as quantidades  $a^2$  e  $b^2$  na equação padrão para a hipérbole:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{p^2}{(e^2 - 1)^2} \text{ ou } a = \pm \frac{p}{e^2 - 1} \\ b^2 &= \frac{p^2}{e^2 - 1} \text{ ou } b = \pm \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} \end{aligned} \quad (2.192)$$

Observe que essas relações são semelhantes as que foram derivadas para a elipse, equação (2.173). No entanto, a forma funcional da relação de energia para as órbitas hiperbólicas são iguais as da elipse. Mas há uma diferença crítica: ao contrário das órbitas elípticas, as órbitas hiperbólicas são "ilimitadas", ou seja, o corpo (massa  $m$ ) em órbita pode mover-se para infinitamente longe do centro de força (massa  $M$ ), e pode até ter uma velocidade residual no infinito,  $v_\infty$ . Como a energia potencial desaparece à medida que  $r$  se aproxima do infinito, a energia total no infinito é, portanto,

$$E_T = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \quad (2.193)$$

Esta quantidade é sempre positiva e, uma vez que a energia é conservada, o total da energia da massa  $m$  movendo-se na órbita hiperbólica é sempre positiva. Já estabelecemos a forma funcional da energia total, pois para a hipérbole será a mesma que encontramos para elipse. Para obter uma energia positiva significa, matematicamente, usar o negativo ao invés do positivo na raiz quadrada da equação (2.192) para determinar a quantidade  $a$ . Assim, temos, para a hipérbole,

$$E_T = \frac{GMm}{2a} \quad (2.194)$$

Finalmente, é intuitivo olhar para o que acontece com a excentricidade  $e$  da hipérbole que varia da unidade ao infinito, e que pode assumir uma gama de valores. Para valores de  $e$  tendendo para a unidade (e não pode ser igual à unidade já que temos uma parábola), obtemos aproximadamente

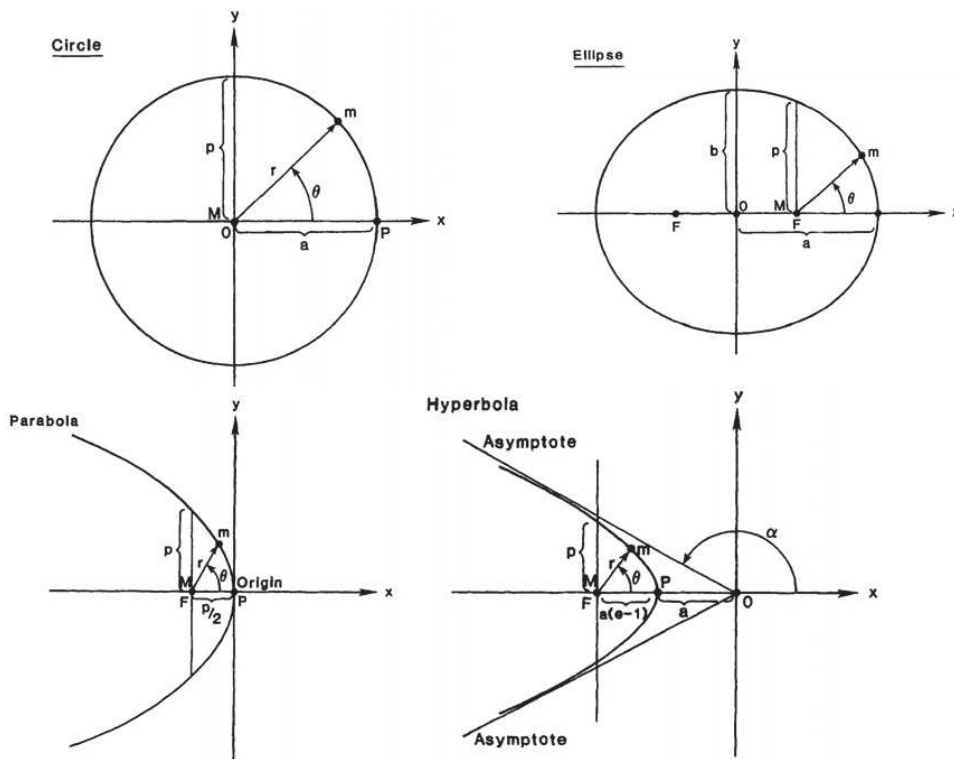
$$\cos\alpha \approx -1$$

de modo que  $\alpha \approx \pi$ . Isso significa que a hipérbole degenera em uma linha reta ao longo do eixo  $x$  do sistema de coordenadas cartesianas. Além disso, tende ao infinito negativo, o que significa que a energia total tende a zero. Assim, a figura se torna uma parábola degenerada. Para valores de  $e$  tendendo em direção ao infinito, nós temos

$$\cos\alpha = 0$$

o que significa que  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ .

Figura 2.19 - Todas as órbitas estudadas a partir da equação polar



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

Além disso, neste caso,  $a$  tende a zero para que a energia total se torna muito grande, tendendo ao infinito. Assim, a órbita tende a uma linha reta coincidente com o eixo cartesiano do sistema de coordenadas. Desta forma, encontramos que o círculo e a parábola são casos muito especiais para os quais  $e = 0$  e  $e = 1$ , respectivamente. As elipses têm  $0 < e < 1$  e as hipérboles têm  $e > 1$ . A figura (2.19) ilustra esses nuances.

## 2.5 Equação de Kepler e Teorema de Lambert

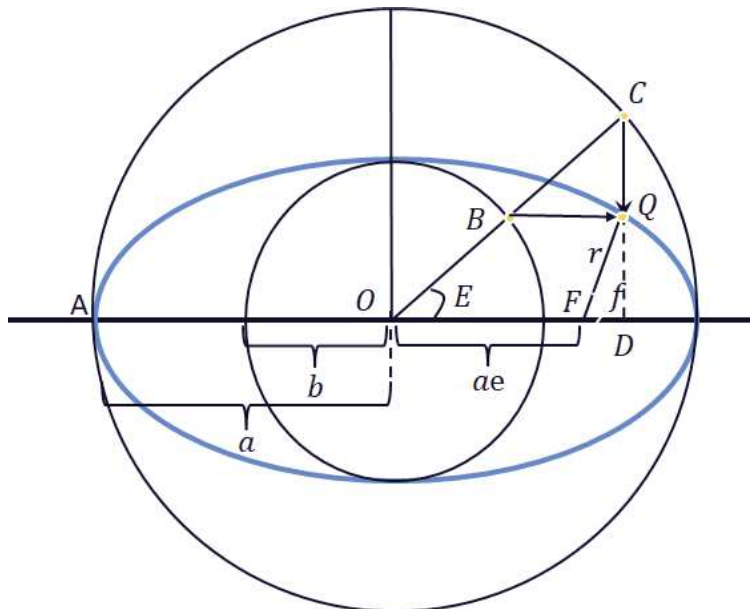
Até este ponto, temos nos preocupado com o problema de determinar as propriedades geométricas das órbitas dos corpos que se movem um em relação ao outro sob a influência da atração gravitacional mútua. Nós mostramos que círculos, elipses, parábolas e hipérbolas são todas trajetórias orbitais controladas. Também vimos a dinâmica, ou seja, o comportamento do sistema de dois corpos quando a variável tempo é introduzida, e mostramos que tanto o momento angular quanto a energia total do sistema de dois corpos são constantes do movimento. Finalmente, mostramos que As leis de Kepler do movimento planetário seguem a lei de gravidade e as leis de movimento de Newton. Tendo desenvolvido esses resultados, nós agora podemos considerar o problema mais difícil e mais importante determinando que tipo de órbita é executada por um corpo se movendo sob a influência da gravidade em torno do outro a partir de medições diretas da posição do corpo em vários momentos. Este é, obviamente, o problema que Kepler resolveu pela primeira vez em 1609 quando, usou cálculos manuais dolorosamente tediosos e as medidas soberbas de Tycho Brahe, estabeleceu suas famosas leis.

O problema que queremos resolver pode ser declarado da seguinte forma: Dadas as medidas certas da posição de um corpo em movimento no campo gravitacional de outro em vários momentos, como determinar a órbita? Nós devemos mostrar que se a posição do corpo,  $r_1$ , em relação a alguma coordenada do sistema é medida no tempo  $t_1$ , e novamente em  $r_2$  no tempo  $t_2$ , então é possível para determinar com exclusividade a órbita que o corpo executa. Isto é essencialmente o mesmo problema resolvido pelo Kepler. No entanto, temos técnicas muito mais poderosas e elegantes hoje para fazer isso. Lembra-se, Kepler fez seu trabalho quase 80 anos antes da invenção do cálculo diferencial. Existem duas relações que são úteis para determinar orbitas usando medições da posição de um objeto em órbita várias vezes. Um deles é chamado de equação de Kepler, e o outro é um teorema desenvolvido em 1761 por J. H. Lambert. A única diferença entre as duas equações que resultam é essencialmente a escolha da origem do sistema de coordenada em que são feitas as medições para determinar as órbitas. Em ambos os casos, duas quantidades devem ser determinadas a partir das medições. A excentricidade da órbita elíptica,  $e$ , e o semieixo maior  $a$ . Nós devemos considerar as órbitas elípticas e hiperbólicas, e iremos derivar as relações para ambos os tipos. Na verdade, os métodos a serem descritos aqui foram primeiro trabalhados para descobrir se as órbitas de vários cometas que passam perto do Sol eram elípticas (fechados ou limitados) ou hiperbólicos (não limitado).

## Derivação da equação de Kepler

A ideia essencial por trás da equação de Kepler é uma extensão da terceira lei, que afirma que o quadrado do período orbital de um corpo se move em uma órbita elíptica é proporcional ao cubo do semieixo maior ( $a$ ) da elipse. Esta relação foi derivada da integração do ângulo da equação do momento em torno de toda a órbita elíptica. Se nós estamos interessados em determinar que tipo de órbita um corpo executa a partir das medições feitas, então as equações do momento angular expressas em termos de parâmetros orbitais são integradas apenas sobre um segmento finito da órbita. Desta forma, as relações desejadas entre os momentos em que as medições são feitas e a posição do corpo na órbita pode ser derivada.

Figura 2.20 - Construção da ideia de Kepler



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

A fim de cumprir o objetivo delineado no parágrafo anterior, é útil examinar a figura (2.20). Isso ilustra outra maneira de construir uma elipse, colocando-a entre dois círculos, um com um raio  $a$ , o semieixo maior, e outro com um raio  $b$ , o semieixo menor. A elipse é então gerada traçando o ponto  $Q$  de tal forma que o relacionamento

$$\frac{a}{b} = \frac{CD}{OD} \quad (2.195)$$



é sempre preservado. É claro a partir desta condição que o segmento de reta  $BQ$  é paralelo ao segmento de reta  $OD$ . Existem dois ângulos que são importantes na definição do problema que está sendo considerado. Um ângulo é o  $\theta$ , que define o ângulo que o segmento de reta  $r$  faz com o eixo  $x$ . Se o eixo principal da elipse não for colinear com o eixo  $x$  da reta temos que

$$f = \theta - \theta_0 \quad (2.196)$$

na definição da equação da elipse. Aqui,  $\theta_0$  é o ângulo entre o eixo principal da elipse e o eixo  $x$  do sistema de coordenadas, e o ângulo  $f$  é chamada de *verdadeira anomalia*. O ângulo  $E$  na figura (2.20) é chamado de *anomalia excêntrica* e é o ângulo entre a linha  $OC$  e o eixo maior da elipse. Acontece que a integração da equação do momento angular que parte ao redor da órbita elíptica produz uma relação entre a variável de tempo  $t$  e a anomalia excêntrica  $E$ , e é essa relação que derivaremos agora.

Devemos começar com a equação que descreve uma elipse em coordenadas polares:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (2.197)$$

dada na equação (2.149). Deste modo, devemos usar a verdadeira anomalia, em vez do ângulo polar  $\theta$ , a fim de preservar a possibilidade do eixo principal da órbita elíptica poder não ser colinear com o eixo  $x$  do sistema de coordenadas usado para descrever o problema. Da geometria da figura (2.20). Nós podemos escrever

$$r^2 = (QD)^2 + (FD)^2 \quad (2.198)$$

Além disso, da figura (2.20), temos

$$a \cos E = ae + FD$$

ou

$$FD = a \cos E - ae \quad (2.199)$$

e

$$QD = b \sin E = a \sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (2.200)$$

Substituindo as equações (2.199) e (2.200) na equação (2.198) temos que

$$\begin{aligned} r^2 &= (a \sqrt{1 - e^2} \sin E)^2 + (a \cos E - ae)^2 \\ &= a^2(1 - e^2) \sin^2 E + a^2 \cos^2 E - 2a^2 e \cos E + (ae)^2 \\ &= a^2[(1 - e^2) \sin^2 E + \cos^2 E - 2e \cos E + e^2] \\ &= a^2[-e^2 \sin^2 E - 2e \cos E + e^2 + 1] \\ &= a^2[e^2(-\sin^2 E + 1) - 2e \cos E + 1] \\ &= a^2[e^2(\cos^2 E) - 2e \cos E + 1] \\ &= a^2[1 - e \cos E]^2 \end{aligned} \quad (2.201)$$

de modo que,

$$b = a \sqrt{1 - e^2} \quad (2.202)$$

então temos,

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (2.203)$$

Esta equação representa a equação da elipse mostrada na figura (2.20) em termos da anomalia excêntrica  $E$ .

Agora estamos prontos para estabelecer a relação entre o tempo variável  $t$  e a anomalia excêntrica  $E$  usando a relação do momento angular definida nas equações (2.93) e (2.148):

$$mr^2 \frac{df}{dt} = L \quad (2.204)$$

onde  $L$  é o momento angular é uma constante do movimento. Lembre-se de que quando essa equação foi integrada ao redor de toda a órbita da elipse ( $E$  ou  $\theta$  ou  $f$  está indo de 0 a  $2\pi$ ), a relação resultante era a terceira lei de Kepler do movimento

planetário. O que faremos agora é integrar a equação (2.204) apenas uma parte do caminho ao redor da órbita, a fim de derivar o relacionamento desejado. Usando a equação (2.146), vamos começar com o relacionamento

$$\frac{L^2}{m^2} = GMa(1 - e^2) \quad (2.205)$$

onde as massas  $m$  e  $M$  estão localizadas nos pontos  $Q$  e  $F$ , respectivamente, na figura (2.20). Reescrevendo a equação (2.205) usando (2.204), obtemos

$$r^2 \frac{df}{dt} = \sqrt{GMa(1 - e^2)} \quad (2.206)$$

Reescrevendo a equação (2.206) em termos da anomalia excêntrica  $E$  e usando equação (2.203) dá

$$a^2(1 - e \cos E)^2 \frac{df}{dE} \frac{dE}{dt} = \sqrt{GMa(1 - e^2)} \quad (2.207)$$

A integral que precisa ser avaliada agora pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_0^{E_0} a^2(1 - e \cos E)^2 \frac{df}{dE} dE = \int_0^{t_0} \sqrt{GMa(1 - e^2)} dt \quad (2.208)$$

Como já afirmamos, as integrais aqui não são avaliadas em torno do órbita inteira, mas apenas para a anomalia excêntrica (ângulo)  $E_0$ , que corresponde a posição do corpo de massa  $m$  no momento  $t_0$ . A fim de avaliar a integral no lado esquerdo da equação (2.208), uma expressão para  $\frac{df}{dE}$  deve ser obtido. Comparando as equações para a órbita elíptica em termos do ângulo  $f$  [equação (2.197)] e do ângulo  $E$  [equação (2.203)], a seguinte relação pode ser derivada:

$$\cos f = \frac{e - \cos E}{e \cos E - 1} \quad (2.209)$$

É um procedimento complicado, mas direto para calcular a derivada desejada ( $\frac{df}{dE}$ ) a equação (2.209), e o resultado é

$$\frac{df}{dE} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e \cos E - 1} \quad (2.210)$$

Substituindo a equação (2.210) na integral (2.208) resulta

$$\int_0^{E_0} a^2(\operatorname{ecos}E - 1)\sqrt{1 - e^2}dE = \int_0^{t_0} \sqrt{GMa(1 - e^2)}dt \quad (2.211)$$

onde os limites de integração são tais que a anomalia excêntrica é zero em  $t = 0$  e  $E_0$  quando  $t = t_0$ . Reorganizando os termos e avaliando a integral produz a equação

$$E_0 - e\sin E_0 = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}t_0 \quad (2.212)$$

Usando a equação (2.147), que é a terceira lei de Kepler do movimento planetário, podemos escrever

$$\sqrt{\frac{GM}{a^3}} = \frac{2\pi}{T} \quad (2.213)$$

onde  $T$  é o período da massa  $m$  na execução da órbita elíptica mostrada na figura (2.20). Portanto,

$$t_0 = \frac{T}{2\pi}(E_0 - e\sin E_0) \quad (2.214)$$

Isso é chamado de *equação de Kepler*. Se a condição inicial não for escolhida, mas a taxa em que o intervalo de tempo para o ângulo  $E$  muda de  $E_1$  para  $E_2$  é  $t_2 - t_1$ , então a equação (2.214) pode ser reescrita como

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{2\pi}[(E_2 - E_1) - e(\sin E_2 - \sin E_1)] \quad (2.215)$$

Esta equação diz que os parâmetros que descrevem uma órbita elíptica são a excentricidade  $e$ , e o semieixo maior, pode ser determinado exclusivamente fazendo duas medições. O primeiro é uma medição do perímetro orbital  $T$ , que determina o semieixo maior  $a$ . O segundo é uma medida do intervalo de tempo  $t_2 - t_1$  que leva o objeto na órbita para se mover através do ângulo  $E_2 - E_1$ . Esta medição determina  $e$ , a excentricidade da elipse.

A equação de Kepler é transcendental e, portanto, não tem solução. Para obter alguns insights físicos sobre como a equação funciona, nós vamos olhar para a aproximação em que o ângulo  $E_0$  mede a partir do eixo principal da elipse mostrada na figura (2.20) é muito pequeno. Naquilo caso, podemos usar a aproximação que

$$E_0 \approx \sin E_0$$

e, portanto, temos, da equação de Kepler (2.214), que

$$E_0 \approx \frac{2\pi t_0}{T(1-e)} \quad (2.216)$$

Esta equação ilustra o ponto que ( para ângulos pequenos,  $E_0$ ) dado um intervalo de tempo  $t_0$ , o ângulo  $E_0$  será maior para grandes valores de excentricidade  $e$ . Isso leva à conclusão correta de que quanto maior a excentricidade de uma órbita elíptica, maior a velocidade do objeto orbital no perigeu da órbita.

A parte da equação de Kepler que contém o ângulo  $E_0$  é frequentemente chamada a *anomalia média*:

$$\frac{2\pi t_0}{T} = E_0 - e \sin E_0 = l \quad (2.217)$$

Juntamente com os outros dois ângulos,  $f$  e  $E$ , que foram previamente definidos como anomalias, as três anomalias são mostradas na tabela 7.1.

Tabela 2.1 - Anomalias

SÍMBOLO	TERMINOLOGIA	DESCRIÇÃO	DISTÂNCIA RADIAL
$f$	A verdadeira anomalia	Ângulo do foco da Elipse	$a(1 - e^2)/(1 + e \cos f)$
$E$	Anomalia Excêntrica	Ângulo do centro da Elipse	$a(1 - e \cos E)$
$l$	Anomalia média	$(2\pi/T)(t_2 - t_1)$	

Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

Vimos que, no caso de órbitas elípticas, a equação de Kepler é derivado a partir da conservação do momento angular. O momento angular também é conservado no caso de órbitas hiperbólicas, de modo que uma versão da equação de Kepler para tais órbitas também pode ser desenvolvida. O ramo esquerdo do representante da

hipérbole reencontra a órbita governada por uma massa  $M$  localizada em  $F$ . O centro da hipérbole está em  $O$  e o pericentro em  $P$ . A distância entre o centro e o pericentro é  $a$ , que é o semieixo maior. Observe a analogia com órbitas elípticas como mostrado nas figuras (2.11) e (2.20). O semieixo maior  $a = PO$ , e a distância  $OF = ae$  para ambos os tipos de órbitas. A distância do pericentro para uma hipérbole é  $FP = a\sqrt{e^2 - 1}$ , mas para uma elipse é  $a(1 - e)$ . O semieixo menor é  $b = a\sqrt{e^2 - 1}$  para uma hipérbole e  $a\sqrt{1 - e^2}$  para uma elipse. Observe que, para uma **elipse**, a soma das distâncias dos focos é  $2a$ , e para uma **hipérbole**, a diferença entre essas distâncias é  $2a$ . Para exemplo, a distância  $F'P$  é  $ae + a = a(e + 1)$ , e a distância  $FP$  é  $a(e - 1)$ . A diferença é  $2a$ . Da mesma forma, o comprimento do semi-latus reto é  $FQ = p$ . A distância do ponto  $Q$  de  $F'$  é  $QF' = \sqrt{p^2 + (2ae)^2}$ . A fim de verificar a fórmula dada anteriormente para  $p$ , escrevemos

$$QF' - QF = 2a$$

ou

$$\sqrt{p^2 + 4e^2a^2} - p = 2a$$

com  $p = a(e^2 - 1)$ .

O ângulo das assíntotas pode ser obtido encontrando o ângulo  $f_0$  da equação  $1 + e\cos f_0 = 0$ , pois isso corresponde a  $r \rightarrow \infty$ . A solução é

$$f_0 = \arccos\left(\frac{-1}{e}\right)$$

e portanto,  $\alpha = \pi - f_0$  ou  $\alpha = \arccos(1/e)$ . Observe que este ângulo também pode ser obtido como  $\alpha = \arctan(b/a) = \arctan\sqrt{e^2 - 1}$ .

Uma quantidade análoga à anomalia excêntrica  $E$  deve agora ser definida a fim de derivar a equação de Kepler para órbitas hiperbólicas. Para fazer para isso, precisamos introduzir o *conceito de senos e cossenos hiperbólicos*. Dentro do caso das órbitas elípticas, a equação da órbita em coordenação cartesianas é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.218}$$

Usando a geometria mostrada na figura (2.20), vamos escrever uma forma

paramétrica da equação (2.218) em termos de  $E$ :

$$x = a \cos E \quad y = b \sin E \quad (2.219)$$

As expressões para  $\sin E$  e  $\cos E$  podem ser reescritas em termos de expoentes das funções:

$$\cos E = \frac{1}{2}(e^{iE} + e^{-iE})$$

e

$$\sin E = \frac{e^{iE} - e^{-iE}}{2i} \quad (2.220)$$

Pode-se mostrar que as funções complexas definidas nas equações (2.220) obedecer às relações exatas que definem as funções trigonométricas.

Os senos e cossenos hiperbólicos (**chamados  $\sinh$  e  $\cosh$** ) podem ser definidos por analogia, usando a equação para uma hipérbole em coordenadas cartesianas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.221)$$

com

$$x = a \cosh F \quad y = b \sinh F \quad (2.222)$$

onde  $F$  é a anomalia excêntrica hiperbólica. Os senos hiperbólicos e cossenos também podem ser expressos em termos de funções exponenciais:

$$\cosh F = \frac{1}{2}(e^F + e^{-F})$$

e

$$\sinh F = \frac{1}{2}(e^F - e^{-F}) \quad (2.223)$$

A relação entre a anomalia excêntrica hiperbólica  $F$  e a verdadeira anomalia  $f$  [correspondente à equação (2.203)] é dado por

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos f} = a(e \cosh F - 1) \quad (2.224)$$

que pode ser obtido quando as projeções do ponto na hipérbole nos eixos  $x$  e  $y$  são avaliados usando

$$r \cos f = a(e - a \cosh F)$$

e

$$r \sin f = a \sqrt{e^2 - 1} \sinh F$$

Outra forma de relação entre  $f$  e  $F$  é

$$\tan\left(\frac{1}{2}f\right) = \left(\frac{e+1}{e-1}\right)^{\frac{1}{2}} \tanh\left(\frac{1}{2}F\right) \quad (2.225)$$

mostrando semelhança com a relação correspondente aplicável a órbitas elípticas.

Como esperado, a **anomalia excêntrica para hipérboles** está relacionada a uma área, assim como no caso do movimento elíptico, é um ângulo ou arco.

Considere as áreas formadas pelas linhas  $OP$  e  $OS$  e pela curva que representa o hipérbole entre  $P$  e  $S$ . Então a anomalia excêntrica é dada por

$$F = 2 \frac{\text{Area}(POS)}{a^2}$$

A equação de Kepler agora pode ser derivada para órbitas hiperbólicas de uma maneira semelhante ao usado para as órbitas elípticas. Começamos com as equações (2.204) e (2.205), e então, usando (2.224) da mesma maneira que para a elipse e integrando parte do caminho ao longo da hipérbole, obtemos

$$(t_2 - t_1) = \frac{T}{2\pi} [e(\sinh F_2 - \sinh F_1) - (F_2 - F_1)] \quad (2.226)$$

O parâmetro  $T$  é dado por  $2\pi\sqrt{a^3/GM}$ , que ainda é válido, embora um corpo que se move em uma órbita hiperbólica não tem “período” no sentido usual.

Um caso particularmente interessante é a órbita parabólica para a qual a excentricidade é precisamente igual a 1. A equação polar da parábola é

$$r = \frac{p}{1 + \cos f} = \frac{p}{1 + \cos \theta} \quad (2.227)$$

onde assumimos que  $\theta_0 = 0$ . Mais uma vez, a conservação do momento angular permite a derivação de uma equação análoga a equação de Kepler. O ponto  $P$  na figura (2.17) é chamado de “pericentro” da parábola. Nesse ponto, o momento angular é dado como

$$L = mv_p r_p = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (2.228)$$

onde  $v_p$  é a velocidade da massa  $m$  no pericentro. Da figura (2.17), temos  $r_p = \frac{1}{2}p$ . A velocidade no pericentro,  $v_p$ , pode ser calculada usando o fato de que a energia



total da massa  $m$  na órbita é sempre zero, então a energia cinética é sempre precisamente igual à energia potencial. No pericentro

$$\frac{1}{2}mv_p^2 = \frac{GmM}{r_p} = \frac{2GmM}{p} \quad (2.229)$$

então,

$$v_p = 2\sqrt{\frac{GM}{p}}$$

e o momento angular é

$$L = m\sqrt{GMp} = mr^2\frac{d\theta}{dt} \quad (2.230)$$

e reescrever esta equação para que possa ser integrada parcialmente, temos

$$\sqrt{GMp} \int_{t_0}^t dt = p^2 \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + \cos\theta)^2} \quad (2.231)$$

integrando a equação (2.231) produz

$$\sqrt{GMp}(t - t_0) = p^2 \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + \cos\theta)^2} \quad (2.232)$$

onde  $t = t_0$  e  $\theta = 0$  correspondem a passagem do pericentro. A integral no lado direito pode ser avaliada considerando que  $(1 + \cos\theta)^2 = 4\cos^4(\frac{1}{2}\theta)$  e essa

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\cos^4 x} dx$$

então

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{2}\tan^3 x + \tan x$$

Consequentemente, o tempo decorrido nas órbitas parabólicas torna-se

$$2\sqrt{\frac{GM}{p^3}}(t - t_0) = \tan\left(\frac{1}{2}\theta\right) + \frac{1}{3}\tan^3\left(\frac{1}{2}\theta\right) \quad (2.233)$$

Observe a semelhança entre a expressão para a anomalia média para órbitas elípticas  $l = 2\pi(t - t_0)$  e equação (2.233). Para órbitas elípticas,  $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$  e agora o semi-latus reto assume o papel do eixo principal. Uma vez que a solução de equações cúbicas é conhecida de forma explícita, a dependência do tempo da verdadeira anomalia e, conseqüentemente, a dependência funcional da distância radial no tempo, pode ser dada em formulário fechado. A equação (2.233) é conhecida como equação de Barker e foi publicada por Euler em 1743.

A equação (2.233) mostra que, como  $\theta \rightarrow \pi$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Além disso,  $p = 2rp$  relação para uma elipse é satisfeita quando  $a(1 - e^2) = 2a(1 - e)$  ou quando  $1 - e^2 = 0$ , o que dá  $e = 1$  conforme esperado. O mesmo processo de limite se aplica a órbitas hiperbólicas.

Observe que o termo  $\tan(\frac{1}{2}\theta)$  também pode ser usado para expressar a distância, e a equação (2.227) pode ser escrita como

$$r = \frac{1}{2}p \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{1}{2}\theta \right) \right] \quad (2.234)$$

Esta derivação é concluída com uma observação sobre o limite  $e \rightarrow 1$  para seções cônicas. As órbitas parabólicas, além da condição  $e = 1$ , também devem satisfazer o requisito  $a \rightarrow \infty$ . Se o comprimento do semieixo maior for finito e  $e = 1$ , temos órbitas elípticas e hiperbólicas planas (em linha reta) como mencionado antes, uma vez que o comprimento do eixo semiminor e o comprimento do reto semi-latus torna-se zero.

Outra nota consideravelmente interesse é que as órbitas parabólicas exibem um propriedade singular. Com isso, queremos dizer que todas as órbitas para as quais a energia total é negativa ( $E_T < 0$ ) são elipses, e todas as órbitas para as quais o energia é positiva ( $E_T > 0$ ) são hipérboles, mas apenas um valor especial da energia ( $E_T = 0$ ) resulta em órbitas parabólicas. Este fato tem algumas interessantes consequências práticas e teóricas. Desde as condições iniciais geralmente não são conhecidos exatamente em problemas práticos, raramente acontece que a constante de energia é exatamente zero. O mesmo se aplica ao caso quando a natureza da órbita é estabelecida por observações, que apenas aproximações para a energia. Em outras palavras, em vez de existência de zero, podemos ter pequenos valores positivos ou pequenos valores negativos para a energia da órbita real de dois corpos. A situação fica ainda mais complicado quando os valores das constantes físicas que entram na equação da energia são consideradas. Uma vez que os valores das constantes de gravidade e da massa central são conhecidas apenas aproximadamente (dentro dos limites de erro), a energia total calculada também será uma aproximação. Nós concluir que, para casos importantes, a constante da energia é determinada apenas por aproximações. Quando este valor está próximo de zero, a órbita pode ser uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole. A fim de encontrar o natureza da órbita, várias outras observações são necessárias, mas mesmo assim a órbita frequentemente permanece indeterminada.

Além desses aspectos práticos, existe instabilidade quando pequenas mudanças nas condições iniciais resultam em órbitas muito diferentes. É o caso de órbitas para as quais a constante de energia é próxima de zero, já que um pequeno aumento na velocidade resultará em uma órbita de escape (hiperbólica) e uma pequena redução da velocidade dá uma órbita elíptica. Tal caso pode nos levar ao problema de imprevisibilidade de órbitas. A situação é significativamente complicada se algumas outras forças entrarem no sistema além daquelas consideradas no problema de dois corpos, como o arrasto (o que tornará a órbita mais lenta), propulsão (o que pode mudar a energia para um valor positivo ou negativo), perturbações devido a outros corpos, e assim por diante.

Por essas razões teóricas, as órbitas parabólicas são de especial interesse, porque elas representam exemplos de órbitas não previsíveis. Na prática a significância é limitada, uma vez que existem apenas para um valor altamente especial da energia.

A equação de Kepler (2.214) é escrita em termos da variável  $E$ , a anomalia cêntrica, que é um ângulo medido a partir do centro geométrico de a elipse mostrada na figura (2.20). Às vezes, existem variáveis melhores que pode ser usado para a determinação prática de órbitas e a técnica de desenvolver as transformações de uma dessas variáveis, outra é chamado de regularização. O objetivo dessas transformações costumam ser eliminar as singularidades das equações de movimento. A aparência de singularidades é geralmente devido ao fato de que a lei da força gravitacional introduz os termos do quadrado inverso nas equações de movimento. Quando as distâncias tornam-se pequenas, esses termos dominam e a precisão pode se tornar questionável.

Na mecânica de órbitas, é claro, as distâncias nunca chegam a zero, pois a colisão (ou impacto) ocorre antes de  $r = 0$ , devido ao tamanho finito dos corpos envolvidos. No entanto, a precisão do cálculo é reduzida em aproximações, mesmo quando o processo de integração numérica permite o uso de intervalos de tempos menores. A introdução de novas variáveis devidamente selecionadas regulariza as equações de movimento, e a precisão pode ser mantida. Tanto as anomalias verdadeiras quanto as excêntricas são variáveis de regularização, e a transformação que as introduz são expressas como

$$df = \frac{L}{m} \frac{dt}{r^2} \quad (2.235)$$

e

$$dE = a \frac{2\pi}{T} \frac{dt}{r} \quad (2.236)$$

A primeira relação, como vimos, é idêntica à conservação do momento angular (2.228), e o segundo segue a equação de Kepler usando (2.215). Considerando as equações acima, que introduzem as anomalias verdadeira e o excêntrica como novas variáveis independentes, a origem da regularização poderia ser atribuída para Kepler. Ele certamente não tinha ideia de regularização, especialmente porque, para ele, cálculo e equações diferenciais não eram conhecidas. Além disso, o interesse de Kepler na dinâmica do sistema solar excluíram abordagens próximas. No entanto, o uso da anomalia excêntrica introduzida em sua equação nos permite aumentar a precisão de nossas integrações numéricas. Podemos considerar isso uma demonstração de um verdadeiro gênio, ou mais uma vez, podemos celebrar o poder da combinação de dois campos, o do trabalho de Kepler para descrever os movimentos planetários e nossos esforços para calcular trajetórias precisas da Terra à Lua. Desde o trabalho de Kepler, o assunto da regularização se tornou popular. Euler usou-o para estudar os movimentos em linha reta no problema de dois corpos. Levi-Civita regularizou o problema restrito de três corpos em 1903. Stumpff (1949) e Herrick (1965) usaram basicamente a mesma ideia quando introduziram o conceito de variáveis universais.

As transformações acima da variável independente podem ser generalizado para

$$ds = A \frac{dt}{r^m} \quad (2.237)$$

ou

$$ds = \frac{dt}{f(r)} \quad (2.238)$$

onde  $A$  e  $m$  são constantes.

Uma anomalia introduzida recentemente é conhecida como anomalia intermediária, que é dado por  $m = \frac{3}{2}$ . Observe que  $m = 1$  fornece a anomalia excêntrica e  $m = 2$  a anomalia verdadeira. Em geral, as transformações de tempo acima introduzem novas variáveis independentes que são frequentemente denotadas por  $s$ . Quando a integração das equações diferenciais de movimento é realizada usando  $s$  como a variável independente, o método é frequentemente chamado de integração.

As transformações acima, de um ponto de vista numérico, podem ser considerados regulamentos na etapa analítica, uma vez que a medida que a distância  $r$  diminui e

ocorrem aproximações ou colisões, a etapa de tempo deve ser reduzida. Considerando as equações de transformação acima, isso significa que a etapa de integração usando  $r$  será reduzida, mas o tamanho da etapa usando  $s$  pode ser mantido constante. A transformação regula automaticamente e analiticamente o tamanho do passo.

O uso de regularização na dinâmica do espaço torna-se obrigatório em aproximações ocorrendo nas partidas, chegadas e órbita assistida pela gravidade e, em geral, quando cálculos de órbita com alta precisão são necessários. Na mecânica celeste, o cálculo preciso das órbitas cometárias também exige regularização.

## DERIVAÇÃO DO TEOREMA DE LAMBERT

Em 1761, **J. H. Lambert** desenvolveu outra fórmula que pode ser usada para estabelecer os parâmetros ou órbitas de certas medições feitas a partir de Terra. A motivação original era determinar as órbitas dos cometas, e agora é conhecido como **teorema de Lambert**. Mais recentemente, o teorema de Lambert tem sido usado para calcular as órbitas de várias espaçonaves, incluindo as missões interplanetárias da Voyager, que exigiram determinados parâmetros orbitais muito precisos para a espaçonave executar sobrevoos de planetas externos. Lembre-se de que Netuno está quase 40 vezes mais longe do Sol do que a Terra. A espaçonave Apollo também foi guiada para seu locais de pouso na Lua usando o Programa de Orientação Lambert.

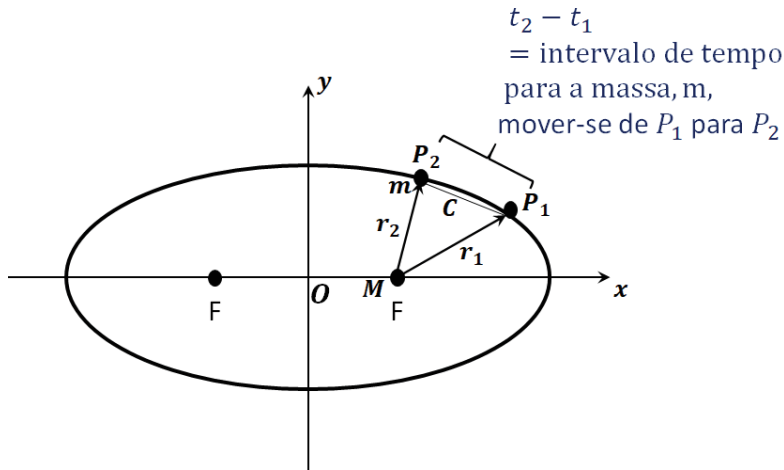
O teorema de Lambert pode ser derivado da equação de Kepler (2.215), é genericamente o mesmo tipo de relacionamento. No caso da equação de Kepler, um intervalo de tempo entre duas posições de um corpo em uma órbita é verificado, bem como o valor da anomalia excêntrica nesses dois momentos. A anomalia excêntrica é um ângulo medido a partir do centro geométrico da órbita. O uso deste sistema de coordenadas às vezes é inconveniente, e a virtude do teorema de Lambert é que as medições que devem ser feita para determinar os parâmetros orbitais podem ser realizados a partir do foco da órbita elíptica, que é mais conveniente para certas aplicações. A figura (2.21) mostra a situação geométrica. O corpo em órbita se move do ponto  $P_1$  para o ponto  $P_2$  no intervalo de tempo  $t_2 - t_1$ . Teorema de Lambert afirma que o intervalo de tempo depende de dois parâmetros, a soma  $r_1 + r_2$  e o comprimento da corda  $C$ , conforme definido na figura (2.21). Por sua vez,  $r_1 + r_2$  e  $C$  podem estar relacionado com a excentricidade  $e$  e o semieixo maior da elipse. Nós começaremos a derivação do teorema de Lambert a partir da equação de Kepler. Nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , a equação de Kepler assume a forma

$$t_1 = \frac{T}{2\pi}(E_1 - e \sin E_1) \quad (2.239)$$

e

$$t_2 = \frac{T}{2\pi}(E_2 - e \sin E_2) \quad (2.240)$$

Figura 2.21 - Construção da ideia de Lambert



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

A diferença do tempo  $t_2 - t_1$  é uma das grandezas medidas. Equações (2.239) e (2.240) representam a dinâmica do movimento. Voltando à geometria da órbita mostrada na figura (2.21), podemos escrever as seguintes equações para  $r_1, r_2$  e  $C$  :

$$r_1 = a(1 - \cos E_1) \quad (2.241)$$

$$r_2 = a(1 - \cos E_2) \quad (2.242)$$

$$C^2 = a^2(\cos E_2 - \cos E_1)^2 + a^2(1 - e^2)(\sin E_2 - \sin E_1)^2 \quad (2.243)$$

A equação (2.243) pode ser derivada referindo-se à figura 2.20. Em termos de eixos  $x$  e  $y$  do sistema de coordenadas, podemos escrever

$$x = ae + FD = a\cos E \quad y = QD\sin E = b\sin E \quad (2.244)$$

porque na 2.20 pode-se ver que  $QD = BM$ . Em termos do sistema de ordenadas no foco da elipse,

$$x - ae = FD = a\cos E - ae = a(\cos E - e) \quad (2.245)$$

O comprimento da corda que queremos pode ser derivado observando a figura (2.21):

$$C^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad (2.246)$$

Usando (2.244) e (2.245), temos, de (2.246),

$$C^2 = a^2(\cos E_2 - \cos E_1)^2 + b^2(\sin E_2 - \sin E_1)^2 \quad (2.247)$$

e, então  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ , nós temos

$$C^2 = a^2(\cos E_2 - \cos E_1)^2 + a^2(1 - e^2)(\sin E_2 - \sin E_1)^2 \quad (2.248)$$

que é idêntico a (2.243).

Tendo feito isso, podemos agora prosseguir com o restante da derivação definindo  $r_1$  e  $r_2$  em termos dos ângulos  $E_1$  e  $E_2$ . Usando equações (2.241) e (2.242), temos

$$r_1 + r_2 = a(1 - e\cos E_1) + a(1 - e\cos E_2)$$

ou

$$r_1 + r_2 = 2a \left[ 1 - \frac{1}{2}e(\cos E_2 + \cos E_1) \right]$$

Usando as fórmulas familiares de meio-ângulo para funções trigonométricas, nós pode escrever

$$\cos E_2 + \cos E_1 = 2 \cos \left[ \frac{1}{2}(E_2 + E_1) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(E_2 - E_1) \right] \quad (2.249)$$

então

$$r_1 + r_2 = 2a \left\{ 1 - e \cos \left[ \frac{1}{2}(E_2 + E_1) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(E_2 - E_1) \right] \right\} \quad (2.250)$$

Esta equação, juntamente com a expressão para o comprimento da corda  $C$ , equação (2.248), resulta de uma análise da geometria da órbita elíptica.

Voltaremos agora aos relacionamentos dinâmicos (isto é, dependentes do tempo) para o restante da derivação. Das equações de Kepler em  $P_1$  (2.239) e  $P_2$  (2.240), podemos escrever

$$(t_2 - t_1) = \frac{T}{2\pi} [(E_2 - E_1) - e(\sin E_2 - \sin E_1)] \quad (2.251)$$

e usando a fórmula do ângulo metade

$$(\sin E_2 - \sin E_1) = 2 \cos \left[ \frac{1}{2}(E_2 + E_1) \right] \sin \left[ \frac{1}{2}(E_2 - E_1) \right] \quad (2.252)$$

nós podemos reescrever a equação de Kepler da seguinte forma:

$$(t_2 - t_1) = \frac{T}{2\pi} \left\{ (E_2 - E_1) - 2e \sin \left[ \frac{1}{2}(E_2 + E_1) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(E_2 - E_1) \right] \right\} \quad (2.253)$$

A equação (2.253) representa a quantidade medida a partir da dinâmica do sistema, isto é, o asteróide, cometa ou nave espacial em movimento. As quantidades garantidas da geometria da elipse da equação (2.234) são para a soma de  $r_1$  e  $r_2$  e a equação (2.248) para o comprimento da corda  $C$ . O último também pode ser reescrito usando as fórmulas de meio-ângulo

$$C^2 = 4a^2 \sin^2 \left[ \frac{1}{2}(E_2 - E_1) \right] \left\{ 1 - e^2 \cos^2 \left[ \frac{1}{2}(E_2 - E_1) \right] \right\} \quad (2.254)$$

As Equações (2.254), (2.253) e (2.250) agora podem ser resolvidas para mostrar a teorema. O que queremos fazer é eliminar as anomalias excêntricas  $E_1$  e  $E_2$  porque



são construções. O objetivo é escrever a diferença de tempo  $t_2 - t_1$ , em termos das quantidades medidas  $r_1, r_2$  e  $C$ . Para simplificar as expressões, fazemos a seguinte mudança de variáveis

$$x = e \cos \left[ \frac{1}{2}(E_2 - E_1) \right] \quad y = \frac{1}{2}(E_2 - E_1) \quad (2.255)$$

Usando estes, podemos reescrever as equações (2.253), (2.250) e (2.254) como segue abaixo:

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{2\pi}(2y - 2x \sin y) \quad (2.256)$$

$$r_1 + r_2 = 2a(1 - x \cos y) \quad (2.257)$$

$$C^2 = 4a^2 \sin^2 y (1 - x^2) \quad (2.258)$$

Agora precisamos eliminar as quantidades  $x$  e  $y$  das equações acima. Das Equações (2.257) e (2.258), podemos escrever

$$r_1 + r_2 + C = 2a \left( 1 - x \cos y + \sqrt{1 - x^2} \sin y \right) \quad (2.259)$$

$$r_1 + r_2 - C = 2a \left( 1 - x \cos y - \sqrt{1 - x^2} \sin y \right) \quad (2.260)$$

Uma nova mudança de variável permite uma solução

$$x = \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \quad y = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (2.261)$$

para que possamos reescrever as equações (2.259) e (2.260) da seguinte forma:

$$r_1+r_2+C = 2a \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right] + \sin \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \sin \left[ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right] \right\} \quad (2.262)$$

$$r_1+r_2-C = 2a \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right] - \sin \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \sin \left[ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right] \right\} \quad (2.263)$$

Agora aplicamos as seguintes fórmulas de meio-ângulo:

$$\cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right] = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \beta \quad (2.264)$$

e

$$\sin \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \sin \left[ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right] = \frac{1}{2} \cos \beta - \frac{1}{2} \cos \alpha \quad (2.265)$$

Usando essas fórmulas nas equações (2.262) e (2.263), obtemos

$$r_1 + r_2 + C = 2a(1 - \cos \alpha) = 4a \sin^2 \left( \frac{1}{2} \alpha \right) \quad (2.266)$$

e

$$r_1 + r_2 - C = 2a(1 - \cos \beta) = 4a \sin^2 \left( \frac{1}{2} \beta \right) \quad (2.267)$$

Reescrevendo a equação (2.256) em termos das variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  definidas em equações (2.261), temos

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{2\pi} \left\{ (\alpha - \beta) - 2 \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \sin \left[ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right] \right\} \quad (2.268)$$

e aplicando a fórmula do meio-ângulo,

$$2 \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \sin \left[ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right] = \sin \alpha - \sin \beta \quad (2.269)$$

nos podemos escrever

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{2\pi}[(\alpha - \beta) - (\sin\alpha - \sin\beta)] \quad (2.270)$$

onde na equação (2.270) os parâmetros  $a$  e  $p$  são definidos como segue das equações (2.266) e (2.267):

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{r_1 + r_2 + C}{a} \right)^{1/2} \quad (2.271)$$

e

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{r_1 + r_2 - C}{a} \right)^{1/2} \quad (2.272)$$

A partir das relações que foram derivadas aqui, pode-se ver que o intervalo de tempo  $t_2 - t_1$  depende de  $a$ ,  $r_1 + r_2$  e  $C$ . A equação (2.270) é chamada de **teorema de Lambert** junto com as definições de  $a$  e  $P$  nas equações (2.271) e (2.272). Assim como no caso da equação de Kepler, o teorema de Lambert é uma equação transcendental. Portanto, técnicas iterativas devem ser aplicadas para resolver os parâmetros da órbita no caso geral.

Uma aplicação simples do teorema de Lambert é quando assumimos que em  $P_1$  na figura (2.21) a anomalia verdadeira  $f_1$  é zero e em  $P_2$  está  $\frac{\pi}{2}$ . No caso

$$r_1 = a(1 - e) \quad (2.273)$$

e

$$r_2 = a(1 - e^2) = p \quad (2.274)$$

e o comprimento do acorde  $C$  é dado como

$$C = a(1 - e)\sqrt{2 + 2e + e^2} \quad (2.275)$$

A partir dessas equações, podemos avaliar  $\alpha$  e  $\beta$  para substituição no teorema de Lambert (2.270). Quando essa manipulação é realizada, temos, o intervalo de tempo,

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{2\pi} \left( \arccos e - e\sqrt{1 - e^2} \right) \quad (2.276)$$

Assim, temos duas equações, (2.275) e (2.276), a partir das quais podemos determinar os parâmetros orbitais. Mais uma vez, eles devem ser resolvidos numericamente porque (2.276) é uma equação transcendental.

Uma formulação semelhante pode ser derivada para órbitas hiperbólicas. Os parâmetros iniciais é a soma das distâncias radiais, o comprimento da corda e o semieixo maior da hipérbole. As distâncias radiais da equação (2.197) são

$$r_1 = a(ecoshF_1 - 1) \quad (2.277)$$

e

$$r_2 = a(ecoshF_2 - 1) \quad (2.278)$$

Os termos  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  e  $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$  usados para o problema elíptico agora são as funções hiperbólicas correspondentes:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{r_1 + r_2 + C}{a} \right)^{1/2} \quad (2.279)$$

e

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{r_1 + r_2 - C}{a} \right)^{1/2} \quad (2.280)$$

A equação de Kepler para órbitas hiperbólicas [equação 2.199)] torna-se

$$\frac{2\pi}{T}(t_2 - t_1) = e(\sinh F_2 - \sinh F_1) - (F_2 - F_1) \quad (2.281)$$

e o comprimento do acorde agora pode ser escrito como

$$C = a[(cosh F_2 - cosh F_1)^2 + (e^2 - 1)(\sinh F_2 - \sinh F_1)^2]^{1/2} \quad (2.282)$$

O teorema de Lambert para órbitas hiperbólicas torna-se

$$\frac{2\pi}{T}(t_2 - t_1) = \sinh \gamma - \sinh \delta - (\gamma - \delta) \quad (2.283)$$

O teorema de Lambert para órbitas parabólicas foi dado por Newton e por Euler. A derivação é direta e faz uso do fato de que uma parábola pode ser considerada

como uma elipse “esticada” para a qual o semieixo maior  $a$  torna-se infinito. Portanto, é possível usar pequenos ângulos para aproximações de  $\alpha$  e  $\beta$ , o que elimina os termos transcendentais em equação (2.270).

As equações (2.271) e (2.272) agora podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{r_1 + r_2 + C}{a} \right)^{1/2} \approx \frac{\alpha}{2} \\ \alpha &\approx \left( \frac{r_1 + r_2 + C}{a} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.284)$$

e

$$\begin{aligned} \sin \frac{\beta}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{r_1 + r_2 - C}{a} \right)^{1/2} \approx \frac{\beta}{2} \\ \beta &\approx \left( \frac{r_1 + r_2 - C}{a} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.285)$$

As equações (2.284) e (2.285) agora podem ser usadas para avaliar a expressão para Teorema de Lambert, (2.270). Para fazer isso, é necessário usar o próximo termo nas expansões de  $\sin \alpha$  e  $\sin \beta$ . Caso contrário, um resultado nulo é obtido:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{6} \alpha^4 \quad (2.286)$$

e

$$\sin \beta = \beta - \frac{1}{6} \beta^4 \quad (2.287)$$

Substituindo as expressões (2.286) e (2.287) na equação (2.270) resulta

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{2\pi} \left( \frac{\alpha^3}{6} - \frac{\beta^3}{6} \right) \quad (2.288)$$

ou, reorganizando os termos e usando as expressões (2.284) e (2.285),

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{12\pi} \left[ \left( \frac{r_1 + r_2 + C}{a} \right)^{3/2} - \left( \frac{r_1 + r_2 - C}{a} \right)^{3/2} \right] \quad (2.289)$$

Finalmente, uma vez que uma órbita parabólica tem um período “infinito”  $T$  e um

período finito semieixo maior  $a$ , podemos usar a terceira lei de Kepler para chegar ao resultado final, reconhecendo que a razão

$$\frac{T}{2\pi} \frac{1}{a^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{GM}} \quad (2.290)$$

permanece constante, não importa o quão esticada a elipse se torne. Assim, o diferença de tempo na equação (2.290) torna-se

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{6\sqrt{GM}} [(r_1 + r_2 + C)^{3/2} - (r_1 + r_2 - C)^{3/2}] \quad (2.291)$$

O sinal do segundo termo torna-se positivo se o ângulo entre  $r_1$  e  $r_2$  é maior que  $180^\circ$ , e é negativo, conforme dado na equação (2.284), quando  $f_2 - f_1 < 180^\circ$

Em conclusão, notamos que o teorema de Lambert também pode ser usado para determinar o raio de curvatura da órbita e, desta forma, encontrar se um planeta é superior ou inferior, isto é, se a Terra ou o planeta está mais próximo do sol.

## 2.6 O Problema dos Três Corpos e Estabilidade do Sistema Solar

A definição básica e original do problema dos três corpos é dado por três pontos de massas (ou simetria esférica de corpos) que se atraem gravitacionalmente em um determinado conjunto de condições iniciais.

Além da exposição do problema, podemos dizer que a moção ocorre em três dimensões, e não há restrições para as massas, as posições e as velocidades iniciais. Sem realmente escrever as equações do movimento, podemos esperar três equações diferenciais de segunda ordem para os três vetores de posição dos três corpos, formando um sistema  $2 \times 3 \times 3 = 18$ . A energia é conservada uma vez que é um sistema conservador, o momento angular é conservado uma vez que não há momentos atuando e o centro de massa dos três corpos se movem com velocidade constante. Não é difícil escrever as equações de movimento para o problema geral de três corpos. Uma vez as equações estão disponíveis, as integrais de energia, momento angular e o movimento do centro de massa podem ser derivados. Os métodos usados para fazer isso são as mesmas apresentadas nas subseções anteriores. Essas integrais são suficientes para resolver o problema de dois corpos, mas não são suficientes para o problema de três corpos, porque há muitas variáveis que devem ser consideradas para resolver o problema.

Isaac Newton foi uma das primeiras pessoas a investigar o problema de três corpos formados pelo Sol, Terra e Lua. Mais tarde, ele lembrou que "minha cabeça nunca doeu, mas com meus estudos da Lua", porque a matemática envolvida era muito difícil. Ele também reclamou que pensar no problema o mantinha acordado à noite. Apesar dessas aflições, Newton foi finalmente capaz de desenvolver métodos para calcular o movimento do perigeu da órbita da Lua dentro de 8% do valor observado (1687).

Seguindo Newton, vários matemáticos proeminentes atacaram o problema fazendo aproximações que permitiam soluções matemáticas fechadas. Em 1760, Leonhard Euler desenvolveu soluções para um caso especial do problema de três corpos em que dois dos três corpos são fixados no espaço e o terceiro se move em seu campo gravitacional. Este problema pode ser resolvido por funções elípticas, e é útil porque, entre outras coisas, esta aproximação pode muito bem representar o movimento de uma nave espacial Apollo no campo gravitacional da Terra e da Lua. Em 1772, Euler também propôs o uso de um sinódico rotativo, sistema de coordenadas para aproximar, por exemplo, o movimento quase circular da Lua em torno da Terra. Isso permite aproximações mais precisas do movimento dos corpos

no campo gravitacional da Terra e da Lua. Essas ideias foram generalizadas no que é chamado de *problema restrito de três corpos*. Neste caso geral, dois dos três corpos têm uma massa muito maior que a do terceiro corpo. Como resultado, o movimento das duas massas maiores não serão influenciadas pelo terceiro corpo, mas os corpos maiores governarão o movimento do corpo menor. Um bom exemplo de importância prática imediata é o sistema que consiste na Terra, Lua, e uma sonda espacial viajando em uma trajetória lunar. As massas dos órgãos participantes estão aproximadamente na proporção

$$m_E : m_M : m_p \approx 100 : 1 : 10^{-19}$$

onde  $m_E$ ,  $m_M$  e  $m_p$  são as massas da Terra, da Lua e de 6.000 kg sonda. Se as forças forem calculadas, podemos ver que o efeito da sonda na Terra é de 16 ordens de magnitude menor que o efeito da Lua na Terra. Além disso, o efeito da Terra na Lua é de 16 ordens de magnitude maior do que o efeito da sonda na lua. Podemos continuar essas avaliações de força relativa (usando apenas efeitos de dois corpos) e encontrar o efeito da Terra e da Lua na sonda enquanto ela viaja da Terra à Lua. Quando está nas proximidades da Terra, o efeito da Lua pode ser negligenciado, uma vez que é o mesmo da Terra. Quando o sonda está perto da Lua, o efeito da Terra é maior do que o efeito da Lua.

Se o modelo do problema restrito for aplicado a uma grande "Sonda", como para a Lua influenciada pela Terra e pelo Sol, a Lua tem  $10^{-16}$  ordens de magnitude negligenciada, tornando-se  $10^{-2}$ . Portanto, o problema restrito deve ser usado apenas como uma primeira aproximação para estabelecer a órbita da Lua.

A ideia essencial do problema restrito é que podemos separar o movimento dos dois grandes corpos (muitas vezes chamados de primários) e resolver este problema de dois corpos primeiro, sem considerar o terceiro corpo menor. Depois o problema de dois corpos é resolvido, investigamos o movimento do corpo menor (conhecido) no campo gravitacional dos dois grandes corpos. Em muitos problemas de interesse na dinâmica do espaço, as primárias movem-se em círculos aproximados (Terra e Lua, Sol e Júpiter, etc.). Isso resulta na forma mais simples do problema, conhecida como *problema circular restrito de três corpos*.

É importante reconhecer que o problema restrito de três corpos está intimamente relacionado à teoria das perturbações. De modo que é possível calcular pequenas mudanças no comportamento de um sistema de corpo duplo usando o movimento de dois corpos como uma primeira aproximação e calculando as pequenas



mudanças no movimento devido a um terceiro corpo, ou outra pequena perturbação. No problema restrito de três corpos, consideramos dois grandes corpos fixos um em relação ao outro, isto é, os de primeira ordem e, em seguida, o movimento do terceiro corpo "pequeno" no campo gravitacional dos outros dois corpos.

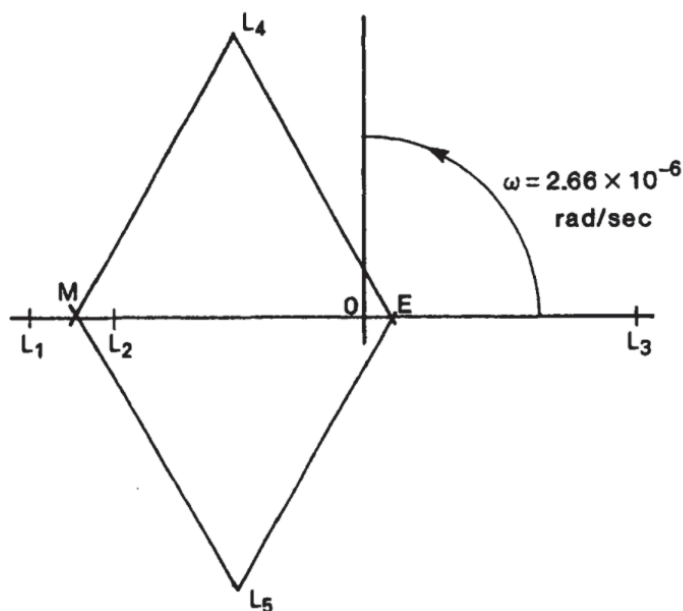
No final da década de 1770, o ilustre matemático francês Joseph Louis Lagrange se dedicou ao tratamento do problema restrito dos três corpos. Quando as primárias se movem em círculos, ele descobriu que existem cinco pontos no plano de seu movimento onde as forças que atuam em uma sonda são equilibradas. Essas forças gravitacionais de atrações das grandes massas na sonda e a força centrífuga agindo na sonda girando com os primários. Este sistema giratório é conhecido como sistema sinódico, no qual as primárias são fixadas. Em um fixo sistema inercial denominado sistema sideral, as primárias se movem em círculos. Três dos pontos de equilíbrio estão localizadas na linha que conecta as primárias e dois pontos formam triângulos equiláteros com as primárias. Os três pontos colineares são instáveis e os dois pontos triangulares são estáveis para pequenas proporções de massa. Isso significa que se forças externas estão agindo na sonda, que é colocada em qualquer um dos pontos de equilíbrio colinear, a sonda partirá. Uma sonda colocada nos pontos triangulares irá entrar em equilíbrio invés de escapar, desde que a proporção de massa dos primários seja menor que 0,0385. Os pontos triangulares, portanto, também são chamados de pontos de liberação. (A liberação é um movimento oscilatório em torno de um ponto de equilíbrio.) Por causa de seu descobridor, os pontos de equilíbrio também são conhecidos como pontos de Lagrange. A condição de estabilidade dos pontos triangulares (isto é, a pequena proporção de massa dos primários) é satisfeita para sistemas de interesse na dinâmica espacial. Por exemplo, para o sistema Terra-Lua, o valor do parâmetro de massa é 0,012. A instabilidade das localizações colineares pode ser contrabalançada por sistemas de propulsão de manutenção de estação. A figura (2.22) mostra as localizações dos cinco pontos de equilíbrio para o Sistema Terra-Lua.

Alguns dos valores numéricos que descrevem este sistema são

$$m_E = 5.97 \times 10^{24} kg \quad m_M = 7.35 \times 10^{22} kg$$

$$EM = 384.4 \times 10^3 km \quad OE \approx 0.012 \times EM$$

Figura 2.22 - Localização dos pontos de equilíbrio no problema restrito de três corpos.



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

$$ML_1 \approx ML_2 \approx 0.16 \times EM \quad EL_3 \approx EM$$

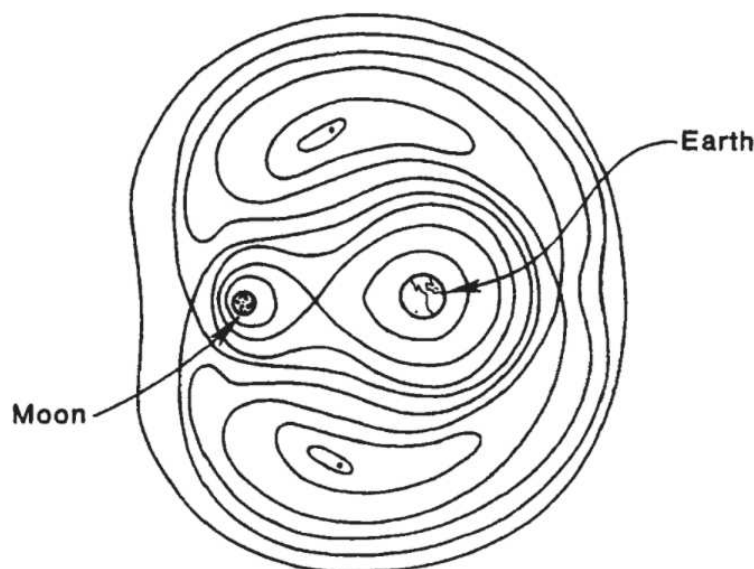
O primeiro e o segundo pontos de calibração colineares ( $L_1$  e  $L_2$ ) estão localizados em 16 % da distância Terra-Lua, e o terceiro ( $L_3$ ) é aproximadamente simétrico à localização da Lua. Para os pontos triangulares, temos

$$EL_4 = ML_4 = EL_5 = ML_5 = EM$$

Para deixar claro como esses pontos de equilíbrio são criados, a figura (2.23) mostra os equipotenciais gravitacionais que ilustram como os chamados pontos de Lagrange surgem. Este diagrama mostra uma maneira de exibir os campos gravitacionais combinados de dois objetos massivos. Cada linha representa um contorno equipotencial, ao longo do qual um pequeno objeto sentiria a mesma força total. O mapa de contorno resultante serve como um mapa topográfico, mostrando "colinas" e "vales" no campo de força. Qualquer pequeno objeto neste campo sentirá uma força puxando-o na direção de "descida".

A diferença básica e importante entre os problemas de dois e três corpos é que o primeiro é integrável, mas o último não. O conceito um tanto complicado de

Figura 2.23 - Mapa de contorno para os pontos de Lagrange



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

integrabilidade está associado aos nomes de H. Bruns (1887) e Henri Poincaré (1890), e geralmente se refere a disponibilidade de soluções analíticas geralmente válidas. Para qualquer conjunto de condições iniciais, podemos prever o comportamento quantitativo e qualitativo do problema de dois corpos. Este não é o caso do problema de três corpos. Se uma solução analítica é desejada para um determinado conjunto de condições iniciais para o problema dos três corpos, esta solução é geralmente expressa por série infinita. Se a série convergir por qualquer período de tempo, temos uma solução analítica para um determinado conjunto de condições iniciais. Mudando a condição inicial, a solução pode mudar completamente e as séries podem divergir. Essa solução, conseqüentemente, não tem validade geral. Além disso, soluções dadas por séries infinitas (mesmo quando convergem) não oferecem uma imagem qualitativa. Para o problema de dois corpos, as condições iniciais vão nos dizer a natureza qualitativa da solução, como o tipo de órbita os corpos seguirão: circulares, elípticas, parabólicas ou hiperbólicas. Isso não é o caso do problema de três corpos, onde as propriedades qualitativas da solução geralmente não são conhecidas.

Outra representação do conceito de integrabilidade é que o sistema tem um número suficiente de invariantes válidas e relações independentes (integrais) entre as variáveis para que as soluções analíticas possam ser obtidas. A ideia de integrabilidade não é simples e não pertencem a um livro introdutório, no entanto,

sua importância justifica a breve descrição acima.

Como nota adicional, o leitor é lembrado de dois conceitos, já mencionados, de algum interesse. Em primeiro lugar, recorde-se que a dependência temporal das variáveis na solução do problema de dois corpos não pode ser expressa por funções de forma fechada, como fica claro pela equação de Kepler. Esse fato não significa que esse problema não seja integrável. A segunda observação está relacionada à capacidade de resolução de um problema dinâmico versus sua integrabilidade. Que pode significar uma solução especial obtida por integração numérica, válida por um determinado tempo. Essas soluções, de fato, existem e podem ser obtidas para o problema de três corpos. Como com o passar do tempo, a solução especial perderá sua precisão e validade. Não é assim para o problema de dois corpos. Se as condições iniciais indicarem um solução elíptica, os dois corpos participantes permanecerão em suas órbitas para sempre.

A prova de Henri Poincaré de que o problema geral de três corpos interagindo por meio de forças gravitacionais não tem solução matemática "fechada" foi apenas o primeiro passo. O que foi realmente importante é que ele se perguntou quais afirmações podem ser feitas sobre o movimento do sistema mesmo que não existam soluções analíticas. Ao empregar o conceito de espaço de fase, Poincaré desenvolveu um engenhoso método para rastrear o comportamento do problema de três corpos para muitas razões de massa e condições iniciais diferentes. Ao realizar esses cálculos, ele fez a surpreendente descoberta que já mencionamos brevemente. Para um determinado conjunto de condições iniciais, os três corpos (representados por seu "movimento" no espaço de fase) executam um movimento periódico, que pode ser previsto para sempre pelas equações diferenciais governantes. Para um conjunto ligeiramente diferente de condições iniciais, no entanto, a trajetória resultante pode ser muito diferente. Às vezes, o novo conjunto de condições iniciais produziu uma trajetória que era previsível pelas equações governantes. Nas outras vezes, a trajetória calculada por Poincaré representava um comportamento "caótico" que não poderia ser previsto pelas equações originais. Ele era portanto, confrontado com o paradoxo de que um sistema como os três corpos interagindo através de um campo gravitacional podem ser representados por um conjunto completamente determinístico de equações (equações gravitacionais de Newton, neste caso), mas que em certos casos o comportamento do sistema não poderia ser previsto.

Um simples experimento mental pode ser usado para ilustrar isto. Imagine uma haste rígida presa a uma barra com um rolamento sem atrito. Quando em repouso,

a haste pende verticalmente, mas quando a extremidade inferior recebe um empurro, a haste começa a se mover. Se o impulso inicial confere uma velocidade angular à haste abaixo de um certo valor crítico, ela oscilará como um pêndulo. Acima desse valor crítico, ele irá "ultrapassar o topo" e girar em torno do rolamento. A diferença entre as condições iniciais, ou seja, o impulso inicial, que leva a dois resultados totalmente diferentes, pode ser muito pequena. Se a haste for substituída por uma corda com um peso na ponta, então existe uma terceira possibilidade. Além do movimento e rotação do pêndulo, existem valores do impulso inicial para os quais a velocidade é tal que a força centrífuga é muito pequena para manter a tensão na corda quando o peso está próximo ao topo do círculo. Portanto, o peso cai e o a corda o interrompe quando é esticado novamente. O movimento subsequente é não previsível, mas bastante caótico. As propriedades do problema de três corpos que descrevemos são características de todos os sistemas governados por equações não lineares,

Devemos usar o oscilador harmônico simples novamente para descrever nos termos mais elementares o que acontece no caso de dinâmica não linear. O resultado fundamental da aplicação de computadores de alta velocidade à solução de equações diferenciais não lineares é o que Poincaré já havia vislumbrado em seus primeiros trabalhos sobre o problema dos três corpos. Pode ser afirmado da seguinte forma: Equações diferenciais não lineares do tipo que estamos considerando aqui são determinísticos. Isso significa que eles expressam uma relação definida entre as variáveis. Existem duas classes de soluções de tais equações. Uma, chamada de soluções especiais, tem expressões de forma fechada, como a solução das equações para órbitas elípticas e hiperbólicas no caso do problema de dois corpos. No entanto, existe outra classe de soluções que não permite uma previsão precisa do comportamento do sistema. Em suma, essas soluções satisfazem as equações, mas eles não são determinados e, como vimos, essas soluções dependem da sensibilidade nas condições iniciais que são impostas ao sistema.

O oscilador harmônico linear é o sistema dinâmico mais simples. Isto é regido pela equação

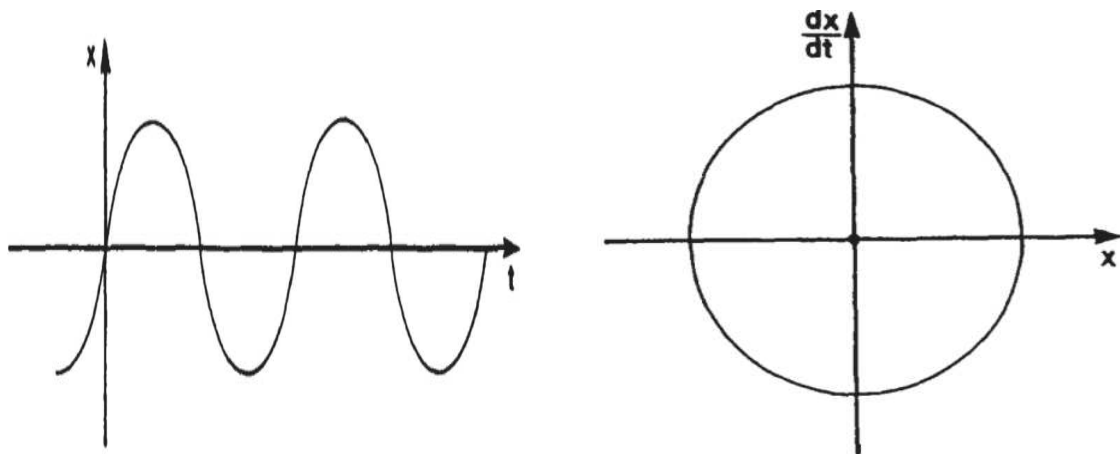
$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (2.292)$$

e leva a oscilações sinusoidais, conforme mostrado na figura (2.24). Uma massa em uma mola em um campo gravitacional se comporta como um oscilador harmônico linear. Se em vez da distância versus tempo ou descrição da série temporal

mostrada em no diagrama, adotarmos o espaço de fase com distância ao longo de um eixo e velocidade ao longo do outro, então o oscilador harmônico linear descreve um círculo como mostrado na . Este círculo é chamado de diagrama de espaço de fase do movimento. Se um termo dissipativo for adicionado à equação (2.22), então se parece com isso:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + l \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Figura 2.24 - Ilustrações para oscilador harmônico



(a) Oscilação sinoidal.

(b) Diagrama de fase de uma oscilação sinoidal.

Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

O resultado desse movimento é mostrado nas figuras (2.6). A fase do diagrama de espaço do oscilador amortecido às vezes é chamado de atrator, porque o movimento faz com que o ponto no espaço de fase à medida que se move seja atraídos para a origem do sistema de coordenadas.

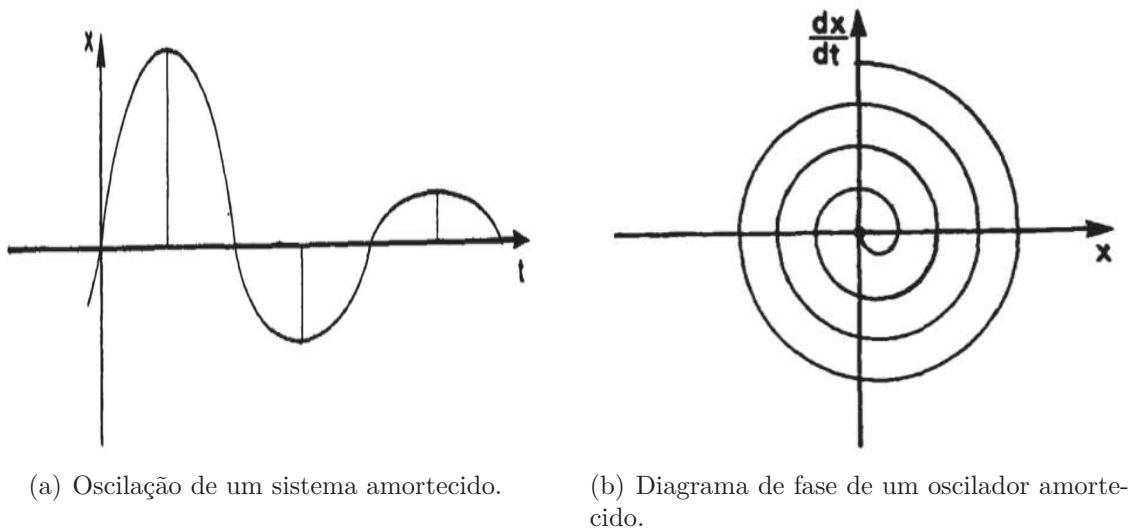
Essa mesma ideia também pode ser aplicada a movimentos não lineares. Tome, para exemplo, a equação não linear

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x^3 = B \cos t$$

Também podemos representar graficamente uma série temporal para esta equação que é mais complicada do que a série temporal para movimento harmônico linear.

Um exemplo é mostrado na figura (2.6). Em vez de movimento circular, agora vemos o diagrama mais complexo, mas o que é interessante é que o movimento no espaço de fase tem uma "ordem" muito definida. Ao invés de mover-se aleatoriamente no espaço de fase, o ponto que descreve o comportamento dinâmico do sistema executa órbitas específicas. Estas órbitas nunca fecham-se, uma vez que o movimento não é periódico, mas eles têm um padrão bem definido. Além disso, o padrão depende de como o movimento foi iniciado. Em outras palavras, depende das condições iniciais impostas na equação.

Figura 2.25 - Ilustrações para oscilador amortecido

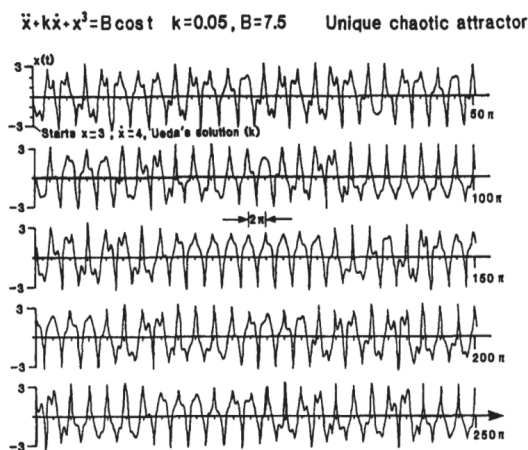


Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

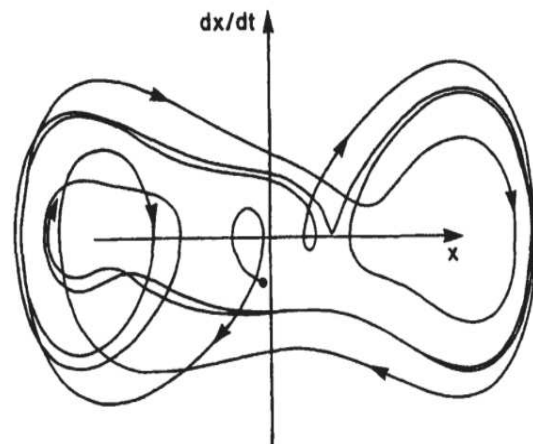
Edward Lorenz, que foi um dos primeiros a estudar equações não lineares em computadores poderosos, chamados de atratores estranhos a esses padrões, e são os atratores estranhos que parecem indicar que existe, de fato, um ordem subjacente nos movimentos caóticos de sistemas não lineares. O que Lorenz descobriu, ao explorar o espaço de solução de equações não lineares, que existe um nível de ordem que pode ser demonstrado que apenas depois que a capacidade de realizar um grande número de cálculos numéricos estava em mãos, Lorenz mostrou que as condições iniciais do problema definiam um espaço de solução para as equações que exibiam padrões bastante regulares. Outra maneira de dizer isso é que o espaço de fase ocupado pelas soluções do sistema era bastante limitado e exibia um padrão regular, dependendo de como o cálculo foi iniciado. Lorenz chamou essas

regularidades no espaço de solução da equação de estranhos atratores em torno dos quais as soluções do sistema dinâmico não linear que ele estava considerando pareciam congregar.

O aparecimento dessas novas irregularidades, aliás, desmente a afirmação de que os computadores são apenas ferramentas, ou auxílios computacionais. O fato é que novos e genuínos insights científicos podem surgir de cálculos em grande escala, porque nos permitem explorar o espaço de solução de um sistema não linear que nunca foi capaz de fazer antes. Se olharmos para o trabalho de Johannes Kepler 300 anos atrás, não deveríamos nos surpreender. Quando Kepler cuidadosamente usou as observações de Tycho Brahe da órbita de Marte para derivar as leis do movimento do planeta, ele realmente demonstrou a importância da computação física! É verdade que as lições mais importantes precisam ser reaprendidas de vez em quando.



(c) Séries temporais de uma resposta de estado estacionário.



(d) Trajetória caótica de estado estacionário no plano de fase  $(x, \frac{dx}{dt})$  do equação diferencial não linear  $\frac{d^2x}{dt^2} + 0.4(\frac{dx}{dt}) - x + x^3 = 0.4sent$ . Este comportamento é típico de tais equações não lineares que têm atratores complexos deste Gentil.

Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

Voltaremos agora ao problema dos três corpos e mostraremos como é relacionadas com a estabilidade do sistema solar. Seguindo o trabalho de Poincaré no problema dos três corpos, muitas pessoas trabalharam para estabelecer a região do espaço de parâmetros para um determinado problema em que existiam soluções fechadas



bem definidas e aquelas para as quais não existiam. No decorrer desse trabalho, descobriu-se que havia soluções caóticas para o problema dos três corpos em que um dos corpos adquiriu velocidade suficiente para escapar dos outros dois. Isso acontece mesmo quando a energia total de o sistema de três corpos é negativo. O próprio Poincaré estava, é claro, ciente que isso poderia acontecer, e foi esse fenômeno que chamou sua atenção para o problema da instabilidade do sistema solar.

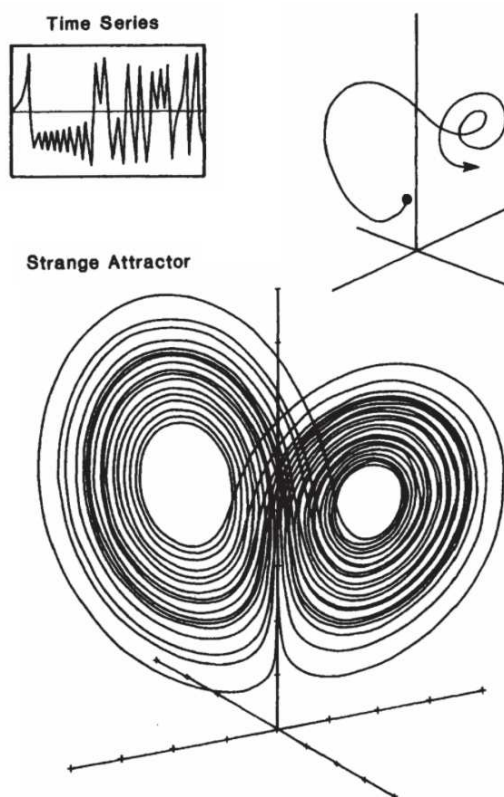
Se um sistema de três corpos com energia total negativa "ejeta" um dos corpos, pode-se dizer que é instável. O que a palavra instável significa neste caso é que o estado final do sistema (dois corpos orbitando um ao outro e um terceiro infinitamente distante) é qualitativamente diferente do estado inicial (três corpos movendo-se em seus campos gravitacionais mútuos). Poincaré, portanto, decidiu visitar o problema de provar que a energia solar o sistema é estável.

No início do século *XIX*, Pierre Simon de Laplace usou a teoria da perturbação para mostrar que o sistema solar é estável. O que ele fez foi tratar o sistema solar como um problema de muitos corpos em que não apenas a ação do Sol nos planetas, mas também os efeitos que os planetas têm sobre uns aos outros foram considerados.

Ele queria mostrar que quaisquer mudanças no movimento dos planetas devido a essas perturbações não levou a divergências seculares (ou seja, "ejeções" de planetas no sistema solar). Desde a maior parte das perturbações causadas por um planeta em outro são de natureza periódica, Laplace desenvolveu soluções usando expansões da série Fourier. Ele conseguiu mostrar que, para as perturbações que considerou, as órbitas dos planetas, em uma boa aproximação, não seriam significativamente alterados. Poincaré estudou o trabalho de Laplace e descobriu que algumas das séries as expansões que Laplace havia usado não eram absolutamente convergentes. Portanto, a conclusão de Laplace de que as órbitas planetárias não mudam substancialmente e, portanto, que o sistema solar é estável não era garantido.

A questão do que "estável" significa em um sistema tão complexo como o sistema solar precisa ser examinado com mais cuidado. Uma definição, como no caso do problema dos três corpos, pode ser a exigência de que o sistema solar não ejete um planeta principal. Recentemente, máquinas de integração numérica muito poderosas foram construídas, programadas para integrar as equações diferenciais detalhadas que descrevem o sistema solar. Usando essas máquinas, foi

Figura 2.26 - Trajetória caótica de estado estacionário no plano de fase  $(x, \frac{dx}{dt})$  da equação diferencial não linear  $\frac{d^2x}{dt^2} + 0.4(dx/dt) - x + x^3 = 0,4sent$ . Este comportamento é típico de tais equações não lineares que têm atratores complexos.



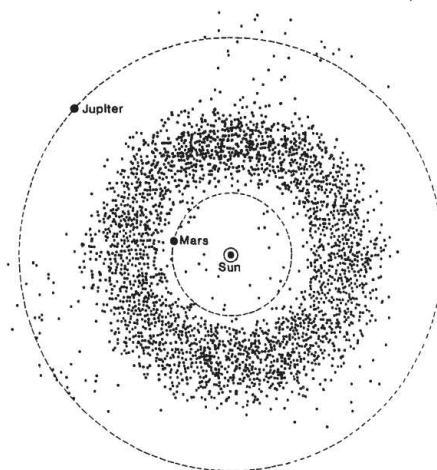
Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

demonstrado que os nove planetas principais executam excursões menores em torno de suas órbitas atuais, mas não há indicação de que a órbita de qualquer planeta ganha energia suficiente para ser ejetada. Nem há qualquer indicação de uma grande mudança nos parâmetros orbitais de qualquer um dos planetas. Como a vida útil estimada do Sol é de cerca de 10 bilhões de anos e a idade do sistema solar é de cerca de 4,5 bilhões de anos, mais tempo de integração não é necessário para mostrar que o sistema solar é estável durante toda a vida útil do Sol. Algum trabalho foi feito já isso indica que se os planetas principais do sistema solar exibem instabilidades, então as taxas de crescimento são muito longas, 20-40 bilhões de anos. Este trabalho foi feito por Jack Wisdom e seus associados no Instituto de Tecnologia da Califórnia.

Existem, é claro, outras maneiras de definir estabilidade. Alguém poderia, por exemplo, procurar evidências de movimento caótico no sistema solar, e se um exemplo é encontrado, então talvez se possa ampliar a definição de estabilidade

para incluir fenômenos que são característicos do movimento caótico. Um exemplo intrigante é o caso dos asteróides que cruzam a Terra. A grande maioria dos cerca de 5.000 asteróides conhecidos executa quase órbitas circulares a uma distância média de cerca de  $2,5a.u.$  do sol. Um pequeno número, no entanto, estão em órbitas suficientemente excêntricas para que eles realmente passam algum tempo dentro da órbita da Terra, daí o termo Travessia da Terra. Em 1857, Kirkwood propôs uma possível explicação para esta observação. Ele examinou cuidadosamente as órbitas de cerca de 50 grandes asteróides e descobriu que asteróides com períodos que apresentam uma simples relação fracionária com a órbita de Júpiter (por exemplo, 3 para 1, 5 para 2, 7 para 3, e 2 para 1) estão faltando. Essas são as chamadas lacunas de Kirkwood.

Figura 2.27 - As localizações do Sol, Marte, Júpiter e aproximadamente 5.000 asteróides em um momento no tempo. A maioria dos asteróides orbita o Sol em um cinturão de  $1,5a.u.$  entre as órbitas de Marte e Júpiter. (Cortesia de S. Ferraz-Mello, Universidade de São Paulo.)



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

Asteróides com períodos tendo relações fracionárias simples com o período de Júpiter experimentarão uma perturbação de suas órbitas sempre na mesma posição na órbita. Kirkwood conjecturou que o efeito acumulativo dessas perturbações eram grandes o suficiente para lançar esses asteróides em altas órbitas excêntricas ao redor do sol. Em 1981, usando os métodos da teoria do caos, Jack Wisdom mostrou que a conjectura de Kirkwood estava correta. Desse modo, podemos dizer que a influência de Júpiter cria um movimento caótico em um certo asteróide que leva a uma instabilidade nessa órbita que faz com que ele assuma um que é

qualitativamente diferente. (Cerca de 5000 asteróides como observado em um momento no tempo é mostrado na figura (2.27).) Pode-se ver que alguns se movem dentro da órbita de Marte, e cerca de meia dúzia destes estão na verdade dentro da órbita da Terra.

Há um caso estabelecido de movimento caótico no sistema solar que foi demonstrado por observação direta e esse é o movimento de queda de um dos satélites de Saturno, Hyperion. Acontece que este satélite não é esfericamente simétrico. Portanto, conforme ele tomba, a intensidade da luz refletida do satélite muda.

Figura 2.28 - Imagens capturadas pela espaçonave Voyager 2 fornecem três diferentes vistas da forma irregular de Hyperion (cortesia da NASA/Jet Propulsion Laboratório.)



Fonte: (SZEBEHELY; HANS, 1998)

O sistema solar é estável? O que mostramos é que não há uma resposta simples a esta pergunta. Não há prova matemática formal, nem método fechado que fornece uma resposta sim ou não. Aproximações numéricas usando um modelo que contém a maioria das principais interações entre os planetas acima e além da influência do Sol mostram que grandes instabilidades, se existirem, têm períodos de crescimento muito longos. Ao mesmo tempo, o sistema solar é muito complexo, com centenas de milhares de corpos menores orbitando ao redor do sol. Foi demonstrado que algumas dessas órbitas às vezes se tornam caóticas e, portanto, instáveis. O sistema solar é incrivelmente complexo e rico em novos problemas a serem descobertos.

### 3 RESULTADOS E CONCLUSÕES

Neste projeto exploramos principalmente o problema dos dois corpos, a partir do livro *Adventures in Celestial Mechanics* dos autores Victor G. Szebehely e Hans Marks (SZEBEHELY; HANS, 1998). De modo que fosse possível compreender as bases e formulações para um problema mais simples e que já foi visto por diversos estudiosos da área. Conforme exposto no desenvolvimento do projeto, o problema dos dois corpos foi muito bem estruturado e resolvido por Newton, ou seja, significa que conseguimos prever o movimento dos corpos interagindo através da força gravitacional. Com base nestes resultados, foi possível definir algumas constantes do movimento e estabelecer relações de energia de um sistema.

O problema de dois corpos pode ser resolvido sem muita dificuldade por equações simples, no entanto, o problema de três corpos não tem uma solução analítica. Todas as soluções encontradas foram obtidos de resultados aproximados. Já um caso especial para esse problema é o conhecido Problema Restrito dos três corpos, onde matemáticos como Euler e Henri Poincaré se propuseram a estudar tal problema. No caso do problema restrito dos três corpos existem os famosos pontos de Lagrange que são posições de equilíbrio no espaço, descoberto por Joseph-Louis em 1772. Este resultado tem uma significativa contribuição para a astronomia, já que nos possibilita posicionar satélites estrategicamente de acordo com a estabilidade de cada ponto.

Finalmente, como possível contribuição para o projeto em trabalhos futuros sugere-se o aprofundamento do problema dos três corpos, além de desenvolvimento de simulações que auxiliarão na visualização de aplicações reais e de um melhor entendimento dos resultados obtidos.

## BIBLIOGRAFIA

ALZHRANI, A. Z. **Chapter 9: Center of Mass and Linear Momentum.** , -. Disponível em: <[https://www.kau.edu.sa/Files/0005866/files/48573\\_ch09.pdf](https://www.kau.edu.sa/Files/0005866/files/48573_ch09.pdf)>. Acesso em: 2021. 15

HELERBROCK, R. **O que é momento linear?** — Brasil Escola, -. Disponível em: <<https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/fisica/o-que-e-momento-linear.htm>>. Acesso em: 2021. 12

KHANACADEMY. **O que é centro de massa?** — Khan Academy, 2016. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/science/physics/linear-momentum/center-of-mass/a/what-is-center-of-mass>>. Acesso em: 2021. 3

MADEIRA, F. **Momento Angular.** — Knoow, 2019. Disponível em: <<https://knoow.net/cienciasexactas/fisica/momento-angular/>>. Acesso em: 2021. 23

SZEBEHELY, V.; HANS, M. **ADVENTURES IN CELESTIAL MECHANICS.** [S.l.]: Die Deutsche Bibliothek, 1998. 2, 3, 4, 7, 9, 14, 22, 25, 31, 35, 37, 39, 41, 44, 47, 49, 54, 63, 75, 76, 79, 80, 81, 83, 84, 85, 86

TEIXEIRA, M. M. **Centro de massa.** — Brasil Escola, -. Disponível em: <<https://brasilescola.uol.com.br/fisica/centro-massa.htm>>. Acesso em: 2021. 2

TEIXEIRA, M. M. **Momento de inércia.** — Pre Para Enem. Disponível em: <<https://www.preparaenem.com/fisica/momento-inercia.htm>>. Acesso em: 2021. 23

WIKIPEDIA. **Ellipse latus rectum.** — Wikipedia, 2020. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/File:Ellipse\\_latus\\_rectum\\_v2.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Ellipse_latus_rectum_v2.svg)>. Acesso em: 2021. 31