



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÕES



sid.inpe.br/mtc-m21d/2021/08.31.02.42-TDI

## BUSCA POR ÓRBITAS EM TORNO DOS PONTOS LAGRANGIANOS EM UM ASTEROIDE TRIPLO E TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS

Leonardo Barbosa Torres dos Santos

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Diogo Merguizo Sanchez, e Priscilla Andressa de Sousa Silva, aprovada em 27 de agosto de 2021.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/45BRU92>>

INPE  
São José dos Campos  
2021

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE  
Coordenação de Ensino, Pesquisa e Extensão (COEPE)  
Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
CEP 12.227-010  
São José dos Campos - SP - Brasil  
Tel.:(012) 3208-6923/7348  
E-mail: pubtc@inpe.br

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):**

**Presidente:**

Dra. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Coordenação-Geral de Ciências da Terra (CGCT)

**Membros:**

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação (CPG)  
Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia, Tecnologia e Ciência Espaciais (CGCE)  
Dr. Rafael Duarte Coelho dos Santos - Coordenação-Geral de Infraestrutura e Pesquisas Aplicadas (CGIP)  
Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon  
Clayton Martins Pereira - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Ivone Martins - Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÕES



sid.inpe.br/mtc-m21d/2021/08.31.02.42-TDI

## BUSCA POR ÓRBITAS EM TORNO DOS PONTOS LAGRANGIANOS EM UM ASTEROIDE TRIPLO E TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS

Leonardo Barbosa Torres dos Santos

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Diogo Merguizo Sanchez, e Priscilla Andressa de Sousa Silva, aprovada em 27 de agosto de 2021.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/45BRU92>>

INPE  
São José dos Campos  
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Santos, Leonardo Barbosa Torres dos.

Sa59b Busca por órbitas em torno dos pontos lagrangianos em um asteroide triplo e transferências orbitais / Leonardo Barbosa Torres dos Santos. – São José dos Campos : INPE, 2021.  
xxxiv + 240 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21d/2021/08.31.02.42-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2021.

Orientadores : Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Diogo Merguizo Sanchez, e Priscilla Andressa de Sousa Silva.

1. Modelo simplificado. 2. Órbitas periódicas. 3. Dinâmica orbital. 4. Trajetórias espacial. 5. Mecânica celeste. I. Título.

CDU 629.782

---



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Página	ix
Parágrafo	Único
Linha	Todas

Onde se lê

Agradeço a meus pais Mario Torres dos Santos e Maria de Fátima Rodrigues Barbosa dos Santos e meus irmãos Leandro Barbosa Torres dos Santos e Dudley Barbosa Torres dos Santos, por me apoiarem nestes anos, por me darem as condições necessárias para alcançar meus objetivos, e pela paciência comigo nos dias mais estressantes vividos ao longo desta caminhada.

Agradeço a meus orientadores, o Doutor Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, o Doutor Diogo Merguizo Sanchez e a Doutora Priscilla Andressa Sousa-Silva, por mostrarem-me os melhores caminhos para desenvolvimento deste trabalho, dando-me os direcionamentos e a liberdade para conduzir o meu trabalho da melhor forma possível e também fornecendo valiosas sugestões sem as quais este trabalho não seria possível. Também sou grato a eles não apenas por seu apoio científico durante todo o período de estudo, mas também por suas atitudes humanas.

Agradeço também a minha noiva Renata Ithamar dos Santos Bastos pelo apoio, compreensão e incentivo em todos os momentos.

Agradeço a meus amigos Alessandra Ferraz, Natasha Camargo, José Batista, Lívia, Allan Kardec, Geraldo Magela, Safwan, Marina Cavalga e em especial a Liana Dias Gonçalves e Luis Marchi, que nunca mediram esforços para me ajudar, pelas valiosas discussões e, acima de tudo, pelas suas amizades.

Agradeço a minha mentora, a Astrofísica, Sueli Viegas por todos os conselhos que tem me dado durante essa longa caminhada.

Agradeço aos meus amigos, com os quais dividi experiências, nervosismos e risadas e ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais pelo apoio institucional.

Agradeço também a agência de fomento pelo o apoio concedido pelas doações do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo subsídio #140500/2017-0.

Por fim, agradeço em especial, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro (Processos nº 2016/14665-2 e nº 2018/06966-8) essencial para realização dessa pesquisa. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Leia-se

Agradeço a meus pais Mario Torres dos Santos e Maria de Fátima Rodrigues Barbosa dos Santos e meus irmãos Leandro Barbosa Torres dos Santos e Dudley Barbosa Torres dos Santos, por me apoiarem nestes anos, por me darem as condições necessárias para alcançar meus objetivos, e pela paciência comigo nos dias mais estressantes vividos ao longo desta caminhada.

Agradeço a meus orientadores, o Doutor Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, o Doutor Diogo Merguizo Sanchez e a Doutora Priscilla Andressa Sousa-Silva, por mostrarem-me os melhores caminhos para desenvolvimento deste trabalho, dando-me os direcionamentos e a liberdade para conduzir o meu trabalho da melhor forma possível e também fornecendo valiosas sugestões sem as quais este trabalho não seria possível. Também sou grato a eles não apenas por seu apoio científico durante todo o período de estudo, mas também por suas atitudes humanas.

Agradeço também a minha noiva Renata Ithamar dos Santos Bastos pelo apoio, compreensão e incentivo em todos os momentos.

Agradeço a meus amigos Alessandra Ferraz, Natasha Camargo, José Batista, Livia, Allan Kardec, Geraldo Magela, Safwan, Marina Cavalga e em especial a Liana Dias Gonçalves e Luis Marchi, que nunca mediram esforços para me ajudar, pelas valiosas discussões e, acima de tudo, pelas suas amizades.

Agradeço a minha mentora, a Astrofísica, Sueli Viegas por todos os conselhos que tem me dado durante essa longa caminhada.

Agradeço aos meus amigos, com os quais dividi experiências, nervosismos e risadas e ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais pelo apoio institucional.

Agradeço também a agência de fomento pelo o apoio concedido pelas doações do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo subsídio #140500/2017-0.

Por fim, agradeço em especial, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro (Processos nº 2016/18418-0 e nº 2018/06966-8) essencial para realização dessa pesquisa. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÕES

## INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

Serviço de Pós-Graduação - SEPGR

**DEFESA FINAL DE TESE DE LEONARDO BARBOSA TORRES DOS SANTOS  
BANCA Nº 222/2021, REG 132764/2017.**

No dia 27 de agosto de 2021, às 14h, por teleconferência, o(a) aluno(a) mencionado(a) acima defendeu seu trabalho final (apresentação oral seguida de arguição) perante uma Banca Examinadora, cujos membros estão listados abaixo. O(A) aluno(a) foi APROVADO(A) pela Banca Examinadora, por unanimidade, em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de Doutor em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle.

**Título: “Busca por órbitas em torno dos pontos lagrangianos em um asteroide triplo e transferências orbitais”.**

**Membros da banca:**

Dra. Maisa de Oliveira Terra – Presidente - ITA

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado – Orientador – INPE

Dr. Diogo Merguizo Sanchez – Orientador - Colégio Cói Araras-SP/Fundamental II

Dra. Priscilla Andressa de Sousa Silva – Orientador - UNESP/São João da Boa Vista.

Dr. Rita de Cássia Domingos – Membro Externo - UNESP/São João da Boa Vista

Dr. Sandro da Silva Fernandes – Membro Externo - ITA



Documento assinado eletronicamente por **Diogo Merguizo sanchez (E), Usuário Externo**, em 30/08/2021, às 09:18 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Priscilla AndRESSA DE SOUSA SILVA (E), Usuário Externo**, em 30/08/2021, às 09:17 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Chefe do Serviço de Pós-Graduação**, em 30/08/2021, às 09:25 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maisa de Oliveira Terra (E), Usuário Externo**, em 30/08/2021, às 10:08 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sandro da Silva Fernandes (E), Usuário Externo**, em 30/08/2021, às 11:26 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rita de Cássia Domingos (E), Usuário Externo**, em 30/08/2021, às 11:54 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <http://sei.mctic.gov.br/verifica.html>,



informando o código verificador **8056485** e o código CRC **FEC44B5E**.

---

**Referência:** Processo nº 01340.005650/2021-96

SEI nº 8056485



*“Nós somos uma maneira do Cosmos conhecer a si mesmo.”*

CARL SAGAN  
em “Cosmo”, 1980



*A meus pais **Mario Torres** e **Maria de Fátima**, a  
meus irmãos **Dudley** e **Leandro (Lando)***



## AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais Mario Torres dos Santos e Maria de Fátima Rodrigues Barbosa dos Santos e meus irmãos Leandro Barbosa Torres dos Santos e Dudley Barbosa Torres dos Santos, por me apoiarem nestes anos, por me darem as condições necessárias para alcançar meus objetivos, e pela paciência comigo nos dias mais estressantes vividos ao longo desta caminhada. Agradeço a meus orientadores, o Doutor Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, o Doutor Diogo Merguizo Sanchez e a Doutora Priscilla Andressa Sousa-Silva, por mostrarem-me os melhores caminhos para desenvolvimento deste trabalho, dando-me os direcionamentos e a liberdade para conduzir o meu trabalho da melhor forma possível e também fornecendo valiosas sugestões sem as quais este trabalho não seria possível. Também sou grato a eles não apenas por seu apoio científico durante todo o período de estudo, mas também por suas atitudes humanas. Agradeço também a minha noiva Renata Ithamar dos Santos Bastos pelo apoio, compreensão e incentivo em todos os momentos. Agradeço a meus amigos Alessandra Ferraz, Natasha Camargo, José Batista, Livia, Allan Kardec, Geraldo Magela, Safwan, Marina Cavalga e em especial a Liana Dias Gonçalves e Luis Marchi, que nunca mediram esforços para me ajudar, pelas valiosas discussões e, acima de tudo, pelas suas amizades. Agradeço a minha mentora, a Astrofísica, Sueli Viegas por todos os conselhos que tem me dado durante essa longa caminhada. Agradeço aos meus amigos, com os quais dividi experiências, nervosismos e risadas. Por fim, agradeço em especial à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelos subsídios #2018/06966-8, #2016/14665-2, #2014/22293-2 e ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais pelo apoio institucional. Agradeço também aos agências de fomento pelo o apoio concedido pelas doações do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelos subsídios #140500/2017-0 e o apoio financeiro do Conselho Nacional para a Melhoria do Ensino Superior (CAPES).



## RESUMO

Este trabalho tem como foco a utilização de uma abordagem do modelo simplificado objetivando compreender o comportamento dinâmico não-linear de uma partícula na vizinhança do campo gravitacional de corpos celestes de formato irregular (asteroides e cometas). Um foco particular é analisar a influência dos principais parâmetros, tais como, velocidade de rotação, forma e distribuição de massa em torno destes pequenos corpos irregulares. A ideia geral é de que, a partir de modelos simplificados, podemos compreender o gradiente gravitacional na vizinhança dos sistemas múltiplos de asteroides, abranger um grande número de sistemas e não apenas um em específico, e ainda assim, gastando muito menos tempo e esforço computacional. Trajetórias particulares podem ser estudadas sob modelos mais precisos (tal como o modelo do poliedro) ao considerar as etapas finais de uma missão real, mas um conhecimento geral do campo de gravidade baseado em um pequeno número de parâmetros é muito útil nos primeiros estágios do projeto de uma missão. Pontos de equilíbrio, curvas de velocidade zero, variedades invariantes, bifurcações, órbitas de Lyapunov planares, órbitas de halo, transferência de baixa energia, órbitas homoclínicas, etc, são apenas meros exemplos do que é abordado nesta tese. Além de investigar órbitas (de maneira genérica), que não podem ser projetadas no clássico problema de dois corpos, nós construímos modelos simplificados que reproduzem a dinâmica de um veículo espacial de maneira mais realista quando comparado aos modelos simplificados existentes na literatura. Isso é conseguido através do método de otimização considerando uma abordagem tridimensional, possibilitando obter resultados mais precisos e dando mais um passo em direção a um cenário mais realista.

Palavras-chave: Modelo simplificado. Órbitas periódicas. Dinâmica orbital. Trajetórias espacial. Mecânica celeste.





# SEARCH FOR ORBITS AROUND LAGRANGIAN POINTS ON A TRIPLE ASTEROID AND ORBITAL TRANSFERS

## ABSTRACT

This work focuses on the use of a simplified model approach aiming to understand the dynamic environment in the vicinity of asteroids and comets. A particular focus is to analyze the influence of the main parameters, such as spin of the asteroid, shape and mass distribution around these small irregular bodies. The general idea is that, from simplified models, we can understand the gravitational gradient in the vicinity of multiple asteroid systems, cover a large number of systems and not just one in particular, and yet, spending less time and effort computational. Of course particular trajectories can be studied under more accurate models when considering the final steps of a real mission, but a general knowledge of the gravity field based in a small number of parameters is very useful in first stages of mission design. Equilibrium points, zero velocity curves, invariant manifolds, bifurcations, planar Lyapunov orbits, halo orbits, low energy transfer, homoclinic orbits, etc., are only mere examples of what is covered in this thesis. In addition to investigating orbits (in a generic way) that cannot be projected in the classic two-body problem, we build simplified models that reproduce the dynamics of a spacecraft in a more realistic scenario when compared to the simplified models existing in the literature. This is achieved through the optimization method considering a three-dimensional approach, making it possible to obtain more accurate results and taking another step towards a more realistic scenario.

Keywords: Simplified model. Periodic orbits. Orbital dynamic. Space trajectories. Celestial mechanics.



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 Figura representativa fornecendo informações sobre os tipos de asteroides binários. . . . .	4
2.1 Imagem representativa da forma geométrica do sistema em estudo (não em escala). . . . .	16
2.2 Distância $r$ da partícula em função do tempo $t$ . . . . .	28
2.3 Solução da equação linearizada de $r$ em função do tempo $t$ . . . . .	30
2.4 Trajetória das condições iniciais do sistema linear utilizando as Equações não lineares. . . . .	30
2.5 Órbita planar em torno do ponto de equilíbrio $L_1$ . . . . .	37
2.6 Órbita planar em torno de $L_1$ (vermelho) e $L_2$ (verde). O corpo $M_2$ está plotado de preto. . . . .	38
2.7 Os corpos primários plotados com asteriscos pretos e a órbita planar em torno de $L_1$ (vermelho) e $L_2$ (verde). . . . .	39
2.8 Órbitas planares em torno dos pontos de equilíbrio $L_1$ (vermelho) e $L_2$ (verde). (a) Órbita planar considerando $d = 0$ (Figura da esquerda). (b) Órbita planar considerando $d = 300$ (Figura do meio). (c) Órbita planar considerando $d = 500$ (Figura da direita). . . . .	40
2.9 Órbitas planares em torno dos pontos de equilíbrio $L_1$ e $L_2$ para várias dimensões do dipolo. (a) Órbita planar considerando $C^* = 3, 10$ . (Figura da esquerda). (b) Ampliação de regiões contendo órbitas planares em torno de $L_1$ (Figura direita). . . . .	40
2.10 Período da órbitas planares em função da dimensão do dipolo. . . . .	41
2.11 Órbita planar em torno do ponto de equilíbrio $L_1$ e curva de velocidade zero. Constante de Jacobi $C^* = 3, 10$ . . . . .	42
2.12 Órbita planar em torno do ponto de equilíbrio $L_2$ e curva de velocidade zero. Constante de Jacobi $C^* = 3, 10$ . . . . .	43
2.13 Família de órbitas planares em torno do ponto de equilíbrio $L_1$ . . . . .	43
2.14 Família de órbitas planares em torno do ponto de equilíbrio $L_2$ . . . . .	44
2.15 Órbita planar em torno dos pontos de equilíbrio $L_1$ e $L_2$ considerando a constante de Jacobi $C^* = 3, 01$ . . . . .	44
2.16 Órbitas planares em torno dos pontos de equilíbrio $L_1$ e $L_2$ . . . . .	45
2.17 Amplitude das órbitas de Lyapunov considerando a constante de Jacobi $C^* = 3, 01$ . . . . .	46
2.18 Período da órbitas planares em função da dimensão do dipolo. . . . .	47

2.19	Órbita planar em torno do ponto de equilíbrio $L_1$ e curva de velocidade zero. Constante de Jacobi $C^* = 3,01$ . . . . .	48
2.20	Órbita planar em torno do ponto de equilíbrio $L_2$ e curva de velocidade zero. Constante de Jacobi $C^* = 3,01$ . . . . .	48
2.21	Família de órbitas planares em torno do ponto de equilíbrio $L_1$ . . . . .	49
2.22	Família de órbitas planares em torno do ponto de equilíbrio $L_2$ . . . . .	49
2.23	Órbitas planares em torno dos pontos de equilíbrio $L_1$ e $L_2$ para diferentes proporções de massa. $C^* = 3,10$ . . . . .	50
2.24	Órbitas planares em torno dos pontos de equilíbrio $L_1$ e $L_2$ para diferentes proporções de massa. $C^* = 3,01$ . . . . .	51
3.1	Coordenadas $x$ dos pontos de equilíbrio $L_1$ , $L_2$ e $L_3$ para diferentes valores de $k$ . . . . .	57
3.2	Órbitas planares em torno do ponto de equilíbrio $L_1$ . . . . .	60
3.3	Índice de estabilidade ( $s_2$ ) em torno $L_1$ considerando $d = 0$ e $\mu^* = 10^{-5}$ . . . . .	61
3.4	Índice de estabilidade ( $s_2$ ) em torno $L_2$ considerando $d = 0$ e $\mu^* = 10^{-5}$ . . . . .	62
3.5	(a) Comportamento dos multiplicadores característicos na primeira bifurcação forquilha em torno de $L_1$ e $L_2$ . (b) Comportamento dos multiplicadores característicos na segunda bifurcação forquilha em torno de $L_1$ e $L_2$ . (c) Comportamento dos multiplicadores característicos que leva à bifurcações de multiplicação de período em torno de $L_1$ e $L_2$ . Nestes casos, consideramos $d = 0$ e $\mu^* = 10^{-5}$ . . . . .	63
3.6	Índice de estabilidade da órbita planar em torno de $L_1$ para diferentes valores de $d$ . . . . .	64
3.7	Índice de estabilidade da órbita planar em torno de $L_2$ para diferentes valores de $d$ . . . . .	65
3.8	Índice de estabilidade ( $s_1$ ) das órbitas planares em torno de $L_1$ para diferentes valores de $d$ e $\mu^*$ . . . . .	65
3.9	Índice de estabilidade ( $s_1$ ) das órbitas planares em torno de $L_2$ para diferentes valores de $d$ e $\mu^*$ . . . . .	66
3.10	Período das órbitas planares em torno de $L_1$ para diferentes valores de $d$ e $\mu^*$ . . . . .	67
3.11	Período das órbitas planares em torno de $L_2$ para diferentes valores de $d$ e $\mu^*$ . . . . .	67
3.12	Constante de Jacobi das órbitas planares em torno de $L_1$ para diferentes valores de $d$ e $\mu^*$ . . . . .	68
3.13	Constante de Jacobi das órbitas planares em torno de $L_2$ para diferentes valores de $d$ e $\mu^*$ . . . . .	68

3.14	Índice de estabilidade ( $s_2$ ) das famílias de órbitas planares e halo em torno de $L_1$ considerando $d = 0$ e $\mu^* = 10^{-5}$ . . . . .	71
3.15	Índice de estabilidade ( $s_2$ ) das famílias de órbitas planares e halo em torno de $L_1$ considerando $d = 0$ e $\mu^* = 10^{-5}$ . . . . .	71
3.16	Índice de estabilidade ( $s_2$ ) das famílias de órbitas planares e halo em torno de $L_2$ considerando $d = 0$ e $\mu^* = 10^{-5}$ . . . . .	72
3.17	Comportamento dos multiplicadores característicos nas period-doubling bifurcation. . . . .	72
3.18	Índice de estabilidade ( $s_1$ ) das órbitas halo em torno de $L_1$ em função de $d$ e $\mu^*$ . . . . .	73
3.19	Índice de estabilidade ( $s_1$ ) das órbitas halo em torno de $L_2$ em função de $d$ e $\mu^*$ . . . . .	74
3.20	Índice de estabilidade das órbitas halo em torno de $L_1$ para diferentes valores de $d$ . . . . .	74
3.21	Índice de estabilidade das órbitas halo em torno de $L_2$ para diferentes valores de $d$ . . . . .	74
3.22	Período das órbitas halo em torno de $L_1$ em função de $d$ e $\mu^*$ . . . . .	75
3.23	Período das órbitas halo em torno de $L_1$ em função de $d$ e $\mu^*$ . . . . .	76
3.24	Constante de Jacobi da órbita halo em torno de $L_1$ em relação a $d$ e $\mu^*$ . . . . .	77
3.25	Constante de Jacobi da órbita halo em torno de $L_2$ em relação a $d$ e $\mu^*$ . . . . .	77
4.1	Imagem representativa do sistema de asteroide estudado. . . . .	83
4.2	Representação gráfica do sistema estudado. . . . .	84
4.3	Sistema de coordenadas para o Problema Restrito Síncrono de quatro corpos. . . . .	85
4.4	Tempo de vida útil na região próxima a $M_2$ (órbitas diretas). O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de $a$ e $e$ . Massa de $M_1 = 99\%$ e massa de $M_2 = 1\%$ da massa total do sistema. A pressão da radiação solar está incluída. . . . .	89
4.5	Tempo de vida útil na região próxima a $M_2$ (órbitas retrógradas). O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de $a$ e $e$ . Massa de $M_1 = 99\%$ e massa de $M_2 = 1\%$ da massa total do sistema. A pressão da radiação solar está incluída. . . . .	90
4.6	Tempo de vida útil na região próxima a $M_2$ (órbitas diretas) e duas trajetórias para uma compreensão mais clara do movimento do veículo espacial. A pressão da radiação solar está incluída. . . . .	90
4.7	Tempo de vida útil na região próxima a $M_2$ (órbitas diretas) e duas trajetórias para uma compreensão mais clara do movimento do veículo espacial. A pressão da radiação solar está incluída. . . . .	91

4.8	Tempo de vida na região próxima a $M_2$ (órbitas diretas). O diagrama mostra a evolução da vida útil da órbita em função de $a$ e $e$ . Massa de $M_1 = 90\%$ e massa de $M_2 = 10\%$ da massa total do sistema. (a) Órbitas diretas. Sem pressão da radiação solar. (b) Órbitas diretas. Com pressão da radiação solar. . . . .	92
4.9	Tempo de vida útil na região próxima a $M_2$ (órbitas diretas) e três trajetórias para uma compreensão mais clara do movimento do veículo espacial. A pressão da radiação solar está incluída. . . . .	93
4.10	Órbitas diretas. Região de colisão com $M_1$ (azul), região de colisão com $M_2$ (vermelho) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). A região branca é a região dentro de $M_2$ . Massa de $M_1 = 90\%$ e massa de $M_2 = 10\%$ . (a) Órbitas diretas. Sem pressão da radiação solar. (b) Órbitas diretas. Com pressão da radiação solar. . . . .	94
4.11	Órbita ejetada do sistema (cor azul) e órbita sobrevivente (cor vermelha). A pressão da radiação solar não é levada em consideração. . . . .	94
4.12	Tempo de vida na região próxima a $M_2$ (órbitas retrógradas). O diagrama mostra a evolução da vida útil da órbita em função de $a$ e $e$ . Massa de $M_1 = 90\%$ e massa de $M_2 = 10\%$ da massa total do sistema. (a) Órbitas retrógradas. Sem pressão da radiação solar. (b) Órbitas retrógradas. Com pressão da radiação solar. . . . .	95
4.13	Tempo de vida na região próxima a $M_2$ (órbitas diretas). O diagrama mostra a evolução da vida útil da órbita em função de $a$ e $e$ . A massa é de $M_1 = 80\%$ e a massa de $M_2 = 20\%$ da massa total do sistema. Pressão de radiação solar está incluída. . . . .	97
4.14	Tempo de vida na região próxima a $M_2$ (órbitas retrógradas). O diagrama mostra a evolução da vida útil da órbita em função de $a$ e $e$ . A massa de $M_1 = 80\%$ e massa de $M_2 = 20\%$ da massa total do sistema. Pressão de radiação solar está incluída. . . . .	98
4.15	Tempo de vida útil na região próxima a $M_2$ (órbitas diretas) e duas trajetórias para uma compreensão mais clara do movimento do veículo espacial. A pressão da radiação solar está incluída. . . . .	99
4.16	Tempo de vida útil na região próxima a $M_2$ (órbitas diretas) e duas trajetórias para uma compreensão mais clara do movimento do veículo espacial. A pressão da radiação solar está incluída. . . . .	99

4.17	Órbitas diretas. Região de colisão com $M_1$ (azul), região de colisão com $M_2$ (vermelho), órbitas que sobreviveram por 500 unidades canônicas (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). Pressão de radiação solar está incluída. A região branca é a região dentro de $M_2$ . Massa de $M_1 = 80\%$ e massa de $M_2 = 20\%$ . . . . .	100
4.18	Órbitas retrógradas. Região de colisão com $M_1$ (azul), região de colisão com $M_2$ (vermelho), órbitas que sobreviveram por 500 unidades canônicas (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). Pressão de radiação solar está incluída. A região branca é a região dentro de $M_2$ . Massa de $M_1 = 80\%$ e massa de $M_2 = 20\%$ . . . . .	100
4.19	Órbitas diretas. Região de colisão com $M_1$ (azul), região de colisão com $M_2$ (vermelho), órbitas que sobreviveram por 500 unidades canônicas (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). Pressão de radiação solar está incluída. A região branca é a região dentro de $M_2$ . Massa de $M_1 = 70\%$ e massa de $M_2 = 30\%$ . . . . .	101
4.20	Órbitas retrógradas. Região de colisão com $M_1$ (azul), região de colisão com $M_2$ (vermelho), as órbitas que sobreviveram por 500 unidades canônicas (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). Pressão de radiação solar está incluída. A região branca é a região dentro de $M_2$ . Massa de $M_1 = 70\%$ e massa de $M_2 = 30\%$ . . . . .	102
4.21	Tempo de vida útil na região próxima a $M_2$ (órbitas diretas) e duas trajetórias para uma compreensão mais clara do movimento do veículo espacial. A pressão da radiação solar está incluída. . . . .	102
4.22	Órbitas diretas. Região de colisão com $M_1$ (azul), região de colisão com $M_2$ (vermelho), as órbitas que sobreviveram por 500 unidades canônicas (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). Pressão de radiação solar está incluída. A região branca é a região dentro de $M_2$ . Massa de $M_1 = 70\%$ e massa de $M_2 = 30\%$ . . . . .	103
4.23	Órbitas retrógradas. Região de colisão com $M_1$ (azul), região de colisão com $M_2$ (vermelho), as órbitas que sobreviveram por 500 unidades canônicas (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). Pressão de radiação solar está incluída. A região branca é a região dentro de $M_2$ . Massa de $M_1 = 70\%$ e massa de $M_2 = 30\%$ . . . . .	103
4.24	Tempo de vida na região próxima a $M_2$ (direciona órbitas). O diagrama mostra a evolução da vida útil da órbita em função de $a$ e $e$ . Massa de $M_1 = 60\%$ e massa de $M_2 = 40\%$ da massa total do sistema. Pressão de radiação solar está incluída. . . . .	104

4.25	Tempo de vida na região próxima a $M_2$ (órbitas retrógradas). O diagrama mostra a evolução da vida útil da órbita em função de $a$ e $e$ . Massa de $M_1 = 60\%$ e massa de $M_2 = 40\%$ da massa total do sistema. Pressão de radiação solar está incluída. . . . .	105
5.1	Imagem representativa da forma geométrica do sistema em estudo (fora de escala). . . . .	110
5.2	Variação dos pontos de equilíbrio colineares em função do tamanho do primário mais massivo. . . . .	113
5.3	Variação dos pontos de equilíbrio colineares em função do tamanho do primário menos massivo. . . . .	114
5.4	Posições dos pontos de equilíbrio colineares ( $L_1$ , $L_2$ and $L_3$ ) para diferentes valores de $\mu^*$ . . . . .	115
5.5	Posições dos pontos de equilíbrio para o sistema estudado (vermelho) e as posições do centro de massa dos corpos primários (preto). . . . .	116
5.6	<i>curvas de velocidade zero</i> . O primeiro ponto de contato ocorre em $C^* = 3,716359670795$ . (a) Curvas de velocidade zero. (b) Aproximação da Figura 5.6 (a), na região no torno de $M_2$ . . . . .	116
5.7	<i>curvas de velocidade zero</i> . O segundo ponto de contato ocorre em $C^* = 3,34813335305$ . (a) Curvas de velocidade zero. (b) Aproximação da Figura 5.7 (a), na região no torno de $M_2$ . . . . .	117
5.8	<i>curvas de velocidade zero</i> . O terceiro ponto de contato ocorre em $C^* = 3,2678562132$ . . . . .	117
5.9	<i>curvas de velocidade zero</i> . O quarto e quinto pontos de contatos ocorrem em $c^* = 2,85925963595$ . . . . .	118
6.1	Imagem dos cinco pontos de Lagrange e as localizações de $M_1$ (vermelho) e $M_2$ (verde). . . . .	125
6.2	Definição de (a) trajetórias prógradas e (b) retrógradas por região. . . . .	127
6.3	Superfície da seção para $C = 4,00$ em torno do sistema YE5 2017. . . . .	128
6.4	Superfície da seção para $C = 4,00$ em torno de $M_1$ (prógrada). . . . .	129
6.5	Superfície da seção para $C = 4,00$ em torno de $M_1$ (retrógrada). . . . .	129
6.6	Superfície da seção para $C = 4,00$ em torno de $M_2$ (prógrada). . . . .	130
6.7	Superfície da seção para $C = 4,00$ em torno de $M_2$ (retrógrada). . . . .	130
6.8	Superfície de seção para $C = 3,4567$ em torno do sistema 2017 YE5. . . . .	131
6.9	Superfície de seção para $C = 3,4567$ em torno de $M_1$ . . . . .	132
6.10	Superfície de seção para $C = 3,4567$ em torno de $M_2$ . . . . .	133
6.11	Superfície de seção para $C = 3,4567$ em torno de $M_1$ . . . . .	134
6.12	Superfície de seção para $C = 2,75$ around 2017 YE5 system. . . . .	135
6.13	Superfície de seção para $C = 2,75$ around $M_1$ (retrógrada). . . . .	136



6.14	Superfície de seção para $C = 3,75$ around $M_2$ (retrógrada). . . . .	137
6.15	Órbita periódica em torno $M_1$ para $C = 5$ (órbita prográda). . . . .	138
6.16	$\Delta V$ necessário para abrir a passagem pelos pontos de equilíbrio $L_1, L_{2/3}$ e $L_{4/5}$ assumindo $C = 5$ . . . . .	139
6.17	$\Delta V$ necessário para abrir a passagem pelos pontos de equilíbrio $L_1, L_{2/3}$ e $L_{4/5}$ assumindo $C = 4,00$ e usando a órbita do período-6. . . . .	140
6.18	Órbita de período-1 em torno de $M_1$ considerando a pressão de radiação solar usando $C = 4,00$ . . . . .	142
6.19	Órbita de período-6 em torno de $M_1$ considerando a pressão de radiação solar usando $C = 4,00$ . . . . .	143
6.20	Manobra bi-impulsiva do ponto de equilíbrio $L_1$ para $L_3$ . . . . .	145
6.21	Exemplo esquemático do método de shooting. . . . .	146
6.22	Ângulo de disparo. . . . .	148
6.23	Transferencia de $L_2$ para $L_1$ , fornecendo o ângulo de disparo vs $\Delta V$ . . . . .	149
6.24	Transferencia de $L_2$ para $L_1$ , fornecendo o tempo de transferência vs $\Delta V$ . . . . .	150
6.25	Trajетórias de um veículo espacial que parte de $L_2$ e alcança $L_1$ . . . . .	151
6.26	Transferencia de $L_2$ para $L_3$ , fornecendo o ângulo de disparo vs $\Delta V$ . . . . .	152
6.27	Transferencia de $L_2$ para $L_3$ , fornecendo o tempo de transferência vs $\Delta V$ . . . . .	152
6.28	Trajетórias de um veículo espacial que parte de $L_2$ e alcança $L_3$ . . . . .	153
6.29	Transferencia de $L_2$ para $L_3$ , fornecendo o ângulo de disparo vs $\Delta V$ . . . . .	154
6.30	Transferencia de $L_2$ para $L_3$ , fornecendo o tempo de transferência vs $\Delta V$ . . . . .	154
6.31	Trajетórias de um veículo espacial que parte de $L_3$ e alcança $L_2$ . . . . .	155
7.1	Modelo do tripolo de massa em rotação. . . . .	159
7.2	Representação esquemática do asteroide modelado por um tripolo. . . . .	161
7.3	Pontos de equilíbrio para um ângulo azimutal de (a) $0^\circ$ e (b) $45^\circ$ . Nos dois casos, $\mu^* = 1/3$ . . . . .	167
7.4	Pontos de equilíbrio separados por regiões de A a E. . . . .	168
7.5	As coordenadas dos pontos de equilíbrio na região A em função de $k$ , $\mu^*$ e $\Phi$ . (a) Posição dos pontos de equilíbrio em $x$ -axis. (b) Posição de equilíbrio dos pontos no eixo $y$ . . . . .	169
7.6	As coordenadas dos pontos de equilíbrio na região B em função de $k$ , $\mu^*$ e $\Phi$ . (a) Posição dos pontos de equilíbrio em $x$ -axis. (b) Posição de equilíbrio dos pontos no eixo $y$ . . . . .	171
7.7	Comportamento dos pontos de equilíbrio no eixo $y$ da região C é uma função dos parâmetros $k, \mu^*$ e $\Phi$ . . . . .	173
7.8	Comportamento dos pontos de equilíbrio no eixo $y$ da região D é uma função dos parâmetros $k, \mu^*$ e $\Phi$ . . . . .	174

7.9	Coordenada $y$ dos pontos de equilíbrio na região $D$ em função de $\Phi$ para $[\mu^*, k] = [1/3, 1]^T$ . . . . .	174
7.10	Influência do ângulo azimutal nas curvas de velocidade zero no plano $xy$ . . . . .	177
7.11	Comportamento da constante de Jacobi nas regiões $A, B, C$ e $D$ , respectivamente, em função do ângulo azimutal. . . . .	179
7.12	Valores da razão de massa ( $\mu^*$ ) versus o ângulo azimutal ( $\Phi$ ) para a condição de estabilidade do ponto de equilíbrio $L_D$ considerando valores diferentes de $k$ . . . . .	180
7.13	Valores da razão de massa ( $\mu^*$ ) versus o ângulo azimutal ( $\Phi$ ) para a condição de estabilidade do ponto de equilíbrio $L_C$ considerando valores diferentes de $k$ . . . . .	183
7.14	Valores de $\mu^*$ versus $\Phi$ para a condição de estabilidade do ponto de equilíbrio $L_D$ ( $E_2$ ) e $L_C$ ( $E_4$ ) para um valor específico de $k$ . . . . .	186
8.1	Tripolo de massa em rotação no $xy$ plano. . . . .	191
8.2	Perspectiva das posições dos corpos M1, M2 e M3 no espaço tridimensional. . . . .	192
8.3	Erro relativo do potencial gravitacional do asteroide 1620 Geographos. . . . .	205
8.4	Erro relativo do potencial gravitacional do asteroide 433 Eros. . . . .	206
8.5	Erro relativo do potencial gravitacional do asteroide 243 Ida. . . . .	207
8.6	Representação gráfica do sistema estudado. . . . .	210
8.7	Gráficos de $a_0$ versus $e_0$ mostrando a evolução da vida útil na região próxima ao asteroide 433 Eros (órbitas diretas 8.7(a) e órbita retrógrada 8.7(b)) desconsiderando a pressão da radiação solar. . . . .	211
8.8	Gráficos de $a_0$ versus $e_0$ mostrando o tempo de vida útil na região próxima ao asteroide Geographos (órbitas diretas 8.8 (a) e órbitas retrógradas 8.8 (b)) considerando a pressão da radiação solar. . . . .	212
8.9	Órbitas diretas 8.9 (a) e órbitas retrógradas 8.9 (b) em torno do asteroide Geographos. Regiões de colisão com o asteroide (azul) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). A região branca representa os locais com condições iniciais dentro do asteroide. . . . .	213
8.10	Gráficos de $a_0$ versus $e_0$ mostrando a evolução da vida útil na região próxima ao asteroide 433 Eros (órbitas diretas 8.7(a) e órbita retrógrada 8.7(b)) considerando a pressão da radiação solar. . . . .	214
8.11	Órbitas diretas 8.11 (a) e órbitas retrógradas 8.11 (b) em torno do asteroide 433 Eros. Regiões de colisão com o asteroide (azul), orbitas que sobrevivem por 365 dias (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). A região branca representa os locais com condições iniciais dentro do asteroide. . . . .	215

8.12	Gráficos de $a_0$ versus $e_0$ mostrando o tempo de vida de uma espaçonave na região próxima ao asteroide 243 Ida (órbitas diretas 8.12(a) e órbitas retrógradas 8.12(b)) considerando a pressão da radiação solar. . . . .	216
8.13	Órbitas diretas 8.13 (a) e órbita retrógrada 8.13 (b) em torno do asteroide 433 Eros. Regiões de colisão com o asteroide (azul), orbitas que sobrevivem por 365 dias (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). A região branca representa os locais com condições iniciais dentro do asteroide. . . . .	217



## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Posição dos pontos de equilíbrio para o sistema estudado ( $\mu^* = 0,005284$ e $d = 0,131440$ ) e também para o sistema considerando os corpos primários como pontos de massa ( $\mu^* = 0,005284$ e $d = 0$ ). . . . .	20
2.2 Autovalores da equação característica do problema síncrono restrito de três corpos usando um modelo de dipolo de massa. . . . .	27
5.1 As posições dos pontos de equilíbrio para o sistema estudado (Alpha-Gamma do sistema 2001SN <sub>263</sub> . . . . .	114
6.1 Localização dos pontos de Lagrange e suas constantes de Jacobi $C$ , em unidade canônica, para o sistema 2017 YE5. . . . .	124
6.2 Condições iniciais das órbitas periódicas para $C = 4,00$ . . . . .	129
6.3 Condições iniciais das órbitas periódicas para $C = 3,45991779618$ . . . . .	135
6.4 Condição inicial da órbita periódica para $C = 5$ . . . . .	138
7.1 Tendências de variação das coordenadas para os pontos de equilíbrio das regiões $A$ e $B$ . . . . .	172
7.2 Tendências de variação das coordenadas para os pontos de equilíbrio das regiões $C$ e $D$ . . . . .	175
7.3 Valores exatos dos autovalores em função dos parâmetros $\Phi$ , $\mu^*$ e $k$ para a região $D$ . . . . .	181
7.4 Os parâmetros ideais para o modelo do tripolo. . . . .	185
8.1 Dados orbitais do Sol em relação ao centro de massa dos asteroides. . . . .	196
8.2 Parâmetros físicos e Mascon dos asteroides 1620 Geographos, 433 Eros and 243 Ida. . . . .	201
8.3 Posição dos pontos de equilíbrio para 1620 Geographos, 433 Eros e 243 Ida. . . . .	201
8.4 Resultados de otimização para o modelo 3D tripole. . . . .	204
8.5 Resultados de otimização para o modelo 2D tripole. . . . .	204
8.6 Elementos keplerianos iniciais. . . . .	208



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CVZ	–	Curva de Velocidade Zero
FEV	–	Faixa Estreita Vermelha
MBA	–	Main Belt Asteroid
MC	–	Mars Crossing Asteroids
NEO	–	Near Earth Orbit
PRCTC	–	Problema Restrito Clássico de Três Corpos
PRQCS	–	Problema Restrito de Quatro Corpos Síncronos
PRS	–	Pressão da Radiação Solar
PRTC	–	Problema Restrito de Três Corpos
S/C	–	Veículo espacial
u. c.	–	Unidade canônica
YORP	–	Efeito Yarkovsky O’Keefe Radzievskii Paddack





## LISTA DE SÍMBOLOS

$\lambda$	–	Autovalor
$\xi$	–	Deslocamento no eixo $x$ do ponto de equilíbrio
$\eta$	–	Deslocamento no eixo $y$ do ponto de equilíbrio
$\nu$	–	viscosidade cinemática
$\mu$	–	Razão de massa no Problema Restrito Clássico de Três Corpos
$\mu^*$	–	Razão de massa utilizada nesta Tese
$C_r$	–	Coefficiente de Refletividade
$\Phi$	–	Ângulo Azimutal
$\Psi$	–	Ângulo de Elevação
$k$	–	Razão de Força
$P_{rad}$	–	Pressão da Radiação Solar
<b>J</b>	–	Índice de Desempenho
$C^*$	–	Constante de Jacobi Modificada
$C$	–	Constante de Jacobi
$\Delta V$	–	Acréscimo de combustível necessário para realizar uma manobra orbital



## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação e objetivo . . . . .	8
1.2 Organização do trabalho . . . . .	9
<b>2 ÓRBITAS PLANARES EM TORNO DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO L1 E L2 NA VIZINHANÇA DE UM SISTEMA BINÁRIO SÍNCRONO DE ASTEROIDES . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1 Introdução . . . . .	14
2.2 Equação do movimento no sistema girante . . . . .	15
2.3 Linearização do problema restrito síncrono de quatro corpos nos pontos de equilíbrio . . . . .	20
2.4 Análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio . . . . .	21
2.5 Computando as órbitas periódicas em torno dos pontos de equilíbrio . . . . .	24
2.6 Metodologia . . . . .	24
2.7 Encontrando as condições iniciais no sistema não linear . . . . .	30
2.8 Matriz de transição de estado . . . . .	31
2.9 Matriz de monodromia . . . . .	33
2.10 Esquema de correção diferencial . . . . .	34
2.11 Retornando para a dinâmica não linear . . . . .	35
2.12 Família de Lyapunov e órbitas Halo . . . . .	37
2.13 Resultados . . . . .	38
2.14 Órbitas de Lyapunov considerando a dimensão do dipolo . . . . .	39
2.15 Órbitas planares variando a razão de massa . . . . .	48
2.16 Considerações . . . . .	50
<b>3 ANÁLISE NUMÉRICA DO MOVIMENTO ORBITAL EM TORNO DE UM SISTEMA BINÁRIO DE ASTEROIDE USANDO O MODELO DO DIPOLO . . . . .</b>	<b>53</b>
3.1 Introdução . . . . .	53
3.2 Equação do movimento . . . . .	54
3.3 Análise de estabilidade do ponto de equilíbrio no espaço tridimensional . . . . .	55
3.4 Pontos de equilíbrio colineares em função da razão entre as acelerações gravitacionais e centrífugas . . . . .	57

3.5	Índice de estabilidade e bifurcações . . . . .	58
3.6	Órbitas periódicas em torno do primeiro e segundo pontos de equilíbrio colineares em função do parâmetro de massa e do tamanho do dipolo . . .	59
3.7	Órbitas planares . . . . .	60
3.8	Influência do parâmetro de massa e o tamanho do dipolo nas órbitas planares . . . . .	64
3.9	Computando as órbitas halo . . . . .	69
3.10	Órbitas halo . . . . .	70
3.11	Conclusão . . . . .	76
<b>4</b>	<b>TEMPO DE VIDA DE UM VEÍCULO ESPACIAL EM TORNO DE UM SISTEMA SÍNCRONO DE ASTEROIDE USANDO O MODELO DO DIPOLO DE MASSA . . . . .</b>	<b>79</b>
4.1	Introdução . . . . .	79
4.2	Pressão da radiação solar . . . . .	79
4.3	A física da pressão da radiação solar . . . . .	80
4.4	Metodologia . . . . .	82
4.5	Equação do movimento centrado no centro de massa do sistema binário .	85
4.6	Investigação numérica . . . . .	87
4.7	Considerações . . . . .	105
<b>5</b>	<b>PONTOS DE EQUILÍBRIO EM TORNO DE UM SISTEMA TOTALMENTE SÍNCRONO . . . . .</b>	<b>109</b>
5.1	Introdução . . . . .	109
5.2	Dinâmica do sistema . . . . .	109
5.3	Resultados . . . . .	112
5.4	Considerações . . . . .	118
<b>6</b>	<b>DINÂMICA DE UM VEÍCULO ESPACIAL EM TORNO DE UM COMETA EXTINTO DA FAMÍLIA DE JÚPITER . . . . .</b>	<b>121</b>
6.1	Introdução . . . . .	121
6.2	Equação do movimento . . . . .	122
6.3	Resultados numéricos . . . . .	124
6.4	Pontos de Lagrange . . . . .	124
6.5	Órbitas periódicas . . . . .	126
6.6	Variação da velocidade necessária para abrir transferências de diferentes regiões . . . . .	137
6.7	Efeito na pressão da radiação solar . . . . .	140

6.8	Transferência entre os pontos colineares . . . . .	144
6.9	Metodologia . . . . .	144
6.10	Problema de valor de contorno . . . . .	145
6.11	Equação do movimento no sistema girante . . . . .	147
6.12	Resultados numéricos . . . . .	149
6.13	Considerações . . . . .	156
<b>7</b>	<b>DINÂMICA EM TORNO DE UM ASTEROIDE MODELADO COMO UM TRIPOLO DE MASSA . . . . .</b>	<b>159</b>
7.1	Introdução . . . . .	159
7.2	Estrutura matemática . . . . .	160
7.2.1	Equação do movimento . . . . .	161
7.2.2	Pontos de equilíbrio . . . . .	164
7.2.3	Análise da estabilidade linear dos pontos de equilíbrio . . . . .	164
7.3	Resultados . . . . .	166
7.3.1	Influência de $[k, \mu^*, \Phi]$ nos pontos de equilíbrio . . . . .	166
7.3.2	Influência do ângulo azimutal nas curvas de velocidade zero . . . . .	174
7.3.3	Condição de estabilidade . . . . .	178
7.4	Aplicação . . . . .	184
7.5	Considerações . . . . .	187
<b>8</b>	<b>UM MODELO DE PARTÍCULAS LIGADAS PARA ASTEROI- DES ALONGADOS COM DISTRIBUIÇÃO DE MASSA TRI- DIMENSIONAL . . . . .</b>	<b>189</b>
8.1	Introdução . . . . .	189
8.2	Dinâmica do movimento . . . . .	191
8.3	Determinação dos parâmetros para o modelo simétrico de ligação tripla de partículas em 2D e 3D . . . . .	198
8.4	Aplicação a asteroides alongados realistas . . . . .	200
8.4.1	Parâmetros da amostra de asteroides alongados . . . . .	200
8.5	Comparação entre o modelo simplificado e o poliédrico . . . . .	203
8.6	Investigação numérica . . . . .	207
8.6.1	Metodologia das simulações numéricas . . . . .	208
8.7	Resultados numéricos . . . . .	210
8.8	Considerações . . . . .	218
<b>9</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>221</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>227</b>



# 1 INTRODUÇÃO

O problema de  $n$  corpos, baseado na segunda lei de Newton e na lei da gravitação universal, está entre os modelos mais gerais para descrever o movimento de uma partícula de massa sujeita ao campo gravitacional de outros  $n - 1$  corpos em um espaço tridimensional. A equação do movimento que rege o movimento dos corpos celestes é descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares, que podem ser determinadas utilizando a mecânica clássica.

Através do uso das leis citadas anteriormente, é possível chegar a uma aproximação considerável com relação ao movimento dos corpos celestes que vagam no Sistema Solar.

Uma análise qualitativa da dinâmica do modelo de  $n$  corpos é bastante complicada e tem sido objeto de estudos aprofundados na área de Mecânica Celeste, onde a maioria dos resultados foi obtido numericamente. Existem duas principais razões que dificultam a compreensão do cenário global. Em primeiro lugar, as equações diferenciais que regem o movimento planetário não possuem solução de forma fechada, exceto em casos raros. Além disso, o movimento muitas vezes pode ser caótico, devido à alta não linearidade da dinâmica.

O projeto preliminar de trajetórias faz parte de toda missão espacial que visa determinar o caminho que um veículo espacial deve seguir de um ponto de partida para um destino especificado. Geralmente, nos estágios iniciais do projeto de uma missão espacial, são utilizados modelos simplificados para avaliar a viabilidade, estimar custos e determinar a trajetória em primeira aproximação. O problema de dois corpos, também conhecido como o problema de Kepler, o modelo mais simples disponível, tem sido amplamente utilizado. Ao longo da maior parte da história, quando se tratava de exploração espacial, os cientistas aeroespaciais usavam o problema dos dois corpos para modelar o movimento de um veículo espacial, já que esse era o modelo mais simples disponível na época. O problema de dois corpos é um modelo bem estabelecido que fornece resultados confiáveis quando aplicada à região do espaço de fase em que a atração de um corpo prevalece sobre os outros. Esse método levou a trajetórias impressionantes de missões como Voyager, Cassini, Juno, entre outras (MEGAN, 2018). Embora a mecânica orbital fosse otimizada visando reduzir o máximo possível o  $\Delta V$ , as missões espaciais ainda exigiam grandes quantidades de combustível para alcançar seus destinos. Devido à ambição e ao desejo dos seres humanos de explorar cada vez mais extensivamente o espaço, a dinâmica tradicional de dois corpos utilizada em missões passadas começou a produzir valores elevados

de  $\Delta V$ , dificultando assim futuras missões espaciais (KOON et al., 2006).

Nas últimas décadas, foi alcançada uma visão muito mais profunda do problema restrito de três corpos (PRTC). Ao levar em consideração um corpo massivo adicional, o veículo espacial (S/C) pode explorar a dinâmica natural do campo vetorial gravitacional de uma maneira mais favorável. Não apenas uma órbita mais próxima da ideal é alcançada, mas novos tipos de soluções surgem como parte do modelo mais realista. Usando essas novas soluções para projetar trajetórias orbitais, missões que seriam impossíveis agora se tornam viáveis, e as extensões de exploração através do sistema solar alcançaram novos níveis.

Existe uma região com uma grande concentração de pequenos corpos celestes entre as órbitas dos planetas Marte e Júpiter, que é comumente conhecida como Cinturão Principal de Asteroides. Além disto, existem asteroides que possuem o afélio no cinturão de asteroide, mas o periélio pode interceptar a órbita de planetas internos. Estes asteroides representam um perigo em potencial para o planeta Terra, devido ao risco de colisão e também têm grande importância científica, pois são uma espécie de laboratório para desvendar como era o Sistema Solar na época de sua formação, pois acredita-se que muitos desses objetos ainda carregam na sua composição elementos que indicariam a composição original do disco formador do sistema solar.

Devido a sua grande importância científica, houve grande interesse, nas últimas décadas, na exploração desses pequenos corpos (asteroides e cometas) que circulam pelo Sistema Solar (PAMELA; MISRA, 2011). Com a evolução da tecnologia, foi possível observar, nos anos 90, pela primeira vez, uma lua orbitando um asteroide (PAMELA et al., 2013). Até aquela época, acreditava-se que asteroides e cometas eram corpos solitários. Posteriormente, foram encontrados vários sistemas de asteroides duplos e triplos, bem como asteroides com anéis (PAMELA et al., 2013; RIBAS et al., 2014). Embora tenha havido muitas descobertas, somente no século seguinte os veículos espaciais foram enviados para estudar esses novos corpos celestes a distâncias mais curtas. No ano de 2000, o asteroide Eros recebeu em sua superfície o veículo espacial norte-americano *NEAR Shoemaker* (YEOMANS et al., 2000). Em 2003, a sonda japonesa *Hayabusa* coletou e analisou dados do asteroide Itokawa (SANDFORD, 2011). No ano de 2012, a sonda espacial Dawn foi enviada pelos Estados Unidos ao asteroide Vesta, com o objetivo de coletar dados que ajudariam a entender a origem e a formação do Sistema Solar (PAMELA et al., 2013). Em novembro de 2013, a Missão ROSETTA, lançada pela ESA (Agência Espacial Européia), realizou uma conquista histórica: um voo bem sucedido com o pouso suave e inovador da sonda espacial Phi-



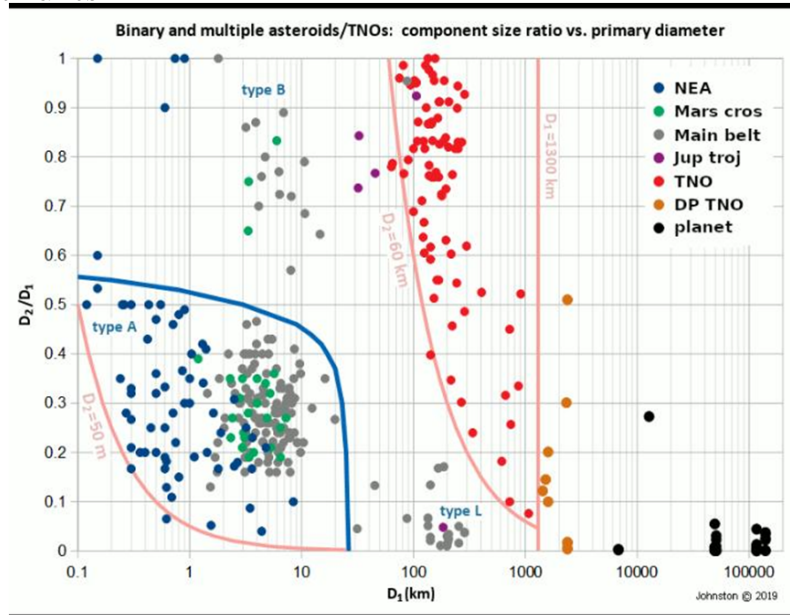
lae no cometa 67P/ChuryumovGerasimenko (PAMELA et al., 2013). A NASA lançou a sonda Osiris-Rex em 2016, na direção do asteroide Bennu (antigo 1999rq36), que chegou ao corpo celeste em 2018. A missão tem o objetivo de coletar dados de asteroides e retornar com amostras coletadas em meados de 2023 (MASSAGO et al., 2017).

Estima-se que cerca de 15% da população de NEAs (Near Earth Asteroids, ou em português, Asteroides Próximos da Terra), com diâmetro maior que 0,3 km, sejam binários (PRAVEC et al., 2006; MARGOT et al., 2015). A maioria desses sistemas binários envolve um corpo primário maior (primário mais massivo) e um corpo secundário pequeno (primário menos massivo) (PRAVEC et al., 2006; ZHANG et al., 2020; PRAVEC; HARRIS, 2007; WALSH et al., 2008). Normalmente os corpos primários mais massivos têm formas esféricas e rotações rápidas. Essas rotações sugerem que o principal mecanismo de formação desses sistemas binários é a fissão de rotação com o efeito YORP como mecanismo de rotação predominante (PADDACK, 1969; PRAVEC; HARRIS, 2007; PRAVEC et al., 2006). O mecanismo físico do efeito YORP se dá através da radiação eletromagnética proveniente do Sol que interage com a superfície de um asteroide ou cometa. Esta interação ocorre da seguinte maneira: a radiação Solar é refletida difusamente pela superfície do asteroide e parte da radiação é absorvida pelo asteroide. A energia absorvida (energia interna) pelo asteroide é emitida em forma de radiação térmica (calor). Sabendo que os fótons possuem momento, cada uma dessas interações produz um impulso na superfície do asteroide, provocando mudanças no momento angular do corpo em relação ao seu centro de massa (PADDACK, 1969).

Existem diversos tipos de sistemas binários de asteroides, que são agrupados de acordo com suas propriedades (rotação, razão das massas e diâmetros) (PRAVEC; HARRIS, 2007). As características desses grupos também sugerem diferentes mecanismos de formação. A Figura 1.1 é o compilamento de várias informações de diferentes artigos e fornece informações sobre o comportamento dinâmico e tamanhos de asteroides que circulam pelo Sistema Solar (PRAVEC, 2005; PRAVEC et al., 2007; AGARWAL et al., 2017; MARGOT et al., 2015). A Figura 1.1 foi retirada do site (<http://www.johnstonsarchive.net/astro/asteroidmoons.html>) por ser bastante didática. Os asteroides do grupo A contêm pequenos binários que passam próximo a Terra (Near Earth Orbit (NEO)), que cruzam a órbita de Marte (Mars Cross) e asteroides do cinturão principal (MBAs), com diâmetros primários menores que 10 km e a razão de diâmetros entre os componentes menores que 0,6. A rotação rápida do primário mais massivo deste grupo apoia a ideia de formação por fissão de rotação.

O Grupo B consiste em pequenos corpos do cinturão principal de asteroide (MBAs) duplamente síncronos com componentes quase do mesmo tamanho e o Grupo L representa grandes MBAs com pequenos satélites (PRAVEC; HARRIS, 2007).

Figura 1.1 - Figura representativa fornecendo informações sobre os tipos de asteroides binários.



Fonte: Johnston (2021).

A maioria dos asteroides do tipo A são sistemas síncronos, ou seja, o período de rotação do corpo secundário é igual ao período orbital em torno do centro de massa do sistema (PRAVEC et al., 2006; PRAVEC et al., 2016). Por outro lado, os asteroides do tipo B são sistemas de asteroides que possuem dimensões semelhantes, com  $D_1/D_2 > 0,6$ , onde  $D_1$  significa diâmetro do primário e  $D_2$  é o diâmetro do secundário. Os objetos binários desse grupo são denominados totalmente síncronos (asteroides duplamente síncronos), isto é, os dois componentes do sistema giram com o período de rotação igual ao período orbital do sistema. Simulações dinâmicas revelaram que muito provavelmente os sistemas binários sofrem um processo caótico de dissipação de energia envolvendo as forças de maré que os fazem evoluir para um sistema síncrono (JACOBSON; SCHEERES, 2011). De acordo com Jacobson e Scheeres (2011), quanto maior a razão entre as massas dos corpos do sistema binário, mais rapidamente pode ser alcançada a sincronização. Isso pode acontecer porque cada membro do sistema exerce forças de maré de mesma proporção um sobre o outro.

Segundo esses autores, os binários totalmente síncronos podem levar cerca de  $10^4$  anos para atingir esse tipo de acoplamento rotação-órbita após a fissão, como já foi observado em alguns sistemas binários (por exemplo, o NEO 69230 Hermes). Esse tempo pode ser menor para o caso de componentes de massas iguais e maior para sistemas com razões de massas de cerca de 0,2. Dessa forma, como a maioria dos sistemas tem razões de massas menores do que 0,6, temos encontrado na literatura uma maior quantidade de sistemas com apenas o componente secundário acoplado com o movimento orbital (PRAVEC et al., 2016).

O estudo desses pequenos corpos e suas peculiaridades fornece informações científicas e tecnológicas importantes, pois sua exploração pode fornecer respostas a aspectos fundamentais, como por exemplo, a composição original do disco formador do Sistema Solar (MERLINE et al., 2002), conforme já mencionado. Um dos campos de aplicação para o estudo de asteroides é a Dinâmica Gravitacional, área na qual são estudados os movimentos dos corpos que compõem o Sistema Solar, considerando sua formação e evolução. Além disso, a exploração de asteroides e seus sistemas é ideal para testar tecnologias importantes, como os experimentos de demonstração em órbita (In-Orbit-Demonstration) (FERRARI et al., 2016).

Um dos tópicos mais relevantes na área de astrodinâmica é o estudo do movimento de um veículo espacial nas proximidades desses sistemas específicos, o que ajuda a projetar futuras missões espaciais. A missão “Asteroid Impact and Deflexion Assessment” (AIDA) é um dos exemplos do estudo de asteroides e é uma parceria entre a ESA e a NASA. Essa missão foi criada com o objetivo de considerar dois projetos diferentes: o Double Asteroid Redirection Test (DART), da NASA, que terá a função de ser o impactor cinético; e Asteroid Impact Mission (AIM), da ESA, que funcionará como um monitor de sistema binário antes e depois do impacto, coletando dados de asteroides e implantando um veículo espacial na superfície do asteroide menor. A exploração científica de pequenos corpos abre um novo horizonte para a atividade industrial na área de mineração de asteroides (SCHEERES et al., 2000).

O desenvolvimento de missões direcionadas a asteroides e cometas permitiu o surgimento de uma área específica de pesquisa em astrodinâmica: o estudo e quantificação da estabilidade e navegabilidade de órbitas de naves espaciais próximas a corpos em rotação irregular (SCHEERES et al., 2000). A exploração de asteroides e cometas é uma tarefa bastante desafiadora, devido ao fato de que cada corpo tem sua própria característica física como forma, densidade, rotação, distribuição de massa, dentre outros. Então, desenvolver uma modelagem matemática do campo gravitacional nas

proximidades desses corpos celestes é uma tarefa bastante complexa. Muitas vezes as características físicas dos asteroides só são descobertas após uma aproximação ou até mesmo após o pouso do veículo espacial na superfície do asteroide (SCHEERES et al., 2000). Devido a isto, é necessário desenvolver as equações de forma flexível, isto é, que abranjam o maior número de parâmetros possível.

Estudos na área de exploração de asteroides são de grande importância e envolvem múltiplas disciplinas, entre elas ciência e tecnologia, controle, mecânica celeste e astronomia. A maioria dos asteroides e cometas tem uma forma irregular. Ao planejar uma missão espacial para visitar esses objetos, surge uma pergunta: “como representar efetivamente o campo gravitacional desses pequenos corpos irregulares?” (ELIPE; LARA, 2003; BARTCZAK; BREITER, 2003). Vários modelos matemáticos foram propostos para superar essa dificuldade. Geralmente, a expansão de harmônicos esféricos é usada para modelar a Terra e outros planetas, pois esses corpos celestes mais massivos (quando comparados aos asteroides) têm uma forma que se assemelha a uma esfera (ELIPE; RIAGUAS, 2003). Por outro lado, quando o corpo não se assemelha com uma esfera, essa expansão não é mais conveniente e, em alguns casos, a convergência não pode ser garantida (ELIPE; RIAGUAS, 2003). Além disso, a expansão de coeficientes de Legendre de baixa ordem geralmente não fornece uma boa aproximação para o movimento de uma partícula, devido ao fato de que os termos de ordem superior podem gerar divergências após várias iterações (RIAGUAS et al., 1999; JIANG; BAOYIN, 2018).

Devido a variedade de corpos irregulares, vários modelos foram criados para representar matematicamente o potencial gravitacional de corpos com formas não esféricas. O foco aqui não é mencionar todos os modelos conhecidos na literatura, mas apenas mencionar os mais relevantes. Um desses modelos é o modelo harmônico elipsoidal, proposto por Hobson (1955) e aprimorado por Pick et al. (1973) (CUI; QIAO, 2014). Existe também o modelo conhecido como Problema Restrito Completo de (Dois ou) Três corpos (SCHEERES, 2004; BELLEROSE; SCHEERES, 2008). A palavra “Completo” significa que a distribuição em massa de um ou de ambos os corpos primários está sendo levada em consideração. Bellerose e Scheeres (2008) aplicou este modelo ao sistema de asteroides binário 1999 KW4 e analisou o movimento de um veículo espacial usando curvas de velocidade zero, pontos de equilíbrio e a constante de Jacobi.

Um modelo amplamente utilizado para representar o campo gravitacional de objetos de forma irregular é o modelo poliédrico (WERNER, 1994; WERNER; SCHEERES,

1997; SCHEERES et al., 2000). Este modelo é considerado um modelo preciso e não apresenta problemas de convergência (SCHEERES et al., 2000). Devido à sua alta precisão, o modelo poliédrico tem sido amplamente utilizado em projetos de missões reais para analisar a dinâmica do veículo espacial perto de asteroides. Como desvantagem, o modelo poliédrico geralmente contém milhares de parâmetros (vértices e faces) necessários para garantir sua alta precisão. Portanto, este modelo requer um alto esforço computacional para realizar as simulações. Além disso, uma investigação sobre propriedades gerais da dinâmica do veículo espacial em função dos parâmetros do modelo se torna muito difícil. Isso ocorre porque, no modelo poliédrico, os parâmetros utilizados se misturam, produzindo uma influência mista no campo gravitacional efetivo dos corpos irregulares dificultando a compreensão de identificar quais os principais parâmetros que mais influenciam na dinâmica de uma partícula na vizinhança desses corpos. Portanto, muitas vezes, é preferível usar modelos simplificados para aproximar a distribuição do potencial de pequenos corpos.

O problema de tempo computacional foi parcialmente resolvido no trabalho de Chanut et al. (2015a), onde os autores reduziram consideravelmente o tempo computacional ( $\sim 30$  vezes) aplicando o modelo gravitacional Mascon, conforme apresentado no trabalho de Geissler et al. (1996), usando uma forma poliédrica buscando modelar o campo gravitacional externo de pequenos corpos celestes. Para mais detalhes sobre esta abordagem, também encaminhamos os leitores para Venditti (2013) e Aljbaae et al. (2017).

Modelos simplificados costumam ser usados para aproximar o campo gravitacional de corpos irregulares, exigindo menos esforço computacional e produzindo resultados consideráveis em um curto período de tempo. Além disso, um modelo simplificado pode frequentemente determinar uma expressão analítica simples para calcular o campo gravitacional de corpos irregulares (YANG et al., 2018). Outra vantagem do uso de um modelo simplificado é que podemos analisar facilmente as consequências de um determinado parâmetro na dinâmica dos asteroides, como, por exemplo, a estabilidade dos pontos de equilíbrio (ZENG et al., 2015; SANTOS et al., 2017a), a distribuição de órbitas periódicas estáveis (LAN et al., 2017), bem como auxiliar no projeto da órbita (WANG et al., 2017) e no controle de feedback (YANG et al., 2017). Além disso, modelos simplificados podem ser usados para determinar as regiões permitidas de “hovering” (YANG et al., 2015). Uma maneira eficaz de analisar a superfície de um asteroide é pairar com o corpo fixo em uma região próxima ao asteroide, onde o veículo espacial mantém sua posição constante em relação ao asteroide. Um ótimo local para colocar um veículo espacial fixo no corpo são os pontos

de equilíbrio, devido ao fato de serem locais que recebem um distúrbio mínimo. [Jiang et al. \(2014\)](#) investigou esse aspecto e classificou os coletores próximos a esses pontos em oito tipos. Essas posições fixas em relação ao corpo podem ser usadas para obter medições precisas de uma região na superfície do asteroide alvo e facilitar as manobras de descida e ascensão de um veículo espacial cuja missão é retornar à Terra com amostras ([BROSCART; SCHEERES, 2005](#)). Tais manobras foram usadas na missão Hayabusa ([SCHEERES, 2004](#)).

Assim, vários modelos simplificados foram propostos para representar matematicamente asteroides irregulares, como os mostrados nas referências ([RIAGUAS et al., 1999](#); [WERNER, 1994](#); [RIAGUAS et al., 2001](#)), que investigaram a dinâmica de uma partícula sob o campo gravitacional de um asteroide modelado como uma linha reta. Outros trabalhos que também investigaram o movimento de uma partícula em torno de pequenos corpos celestes, considerando um modelo simplificado, usaram uma placa plana ([BLESA, 2006](#)), um cubo homogêneo ([LIU et al., 2011b](#)), um elipsoide triaxial ([GABERN et al., 2006](#)), um cubo homogêneo girante ([LIU et al., 2011a](#)), um segmento reto duplo e finito ([JAIN; SINHA, 2014](#)), um dipolo de massa em rotação ([ZENG et al., 2015](#); [SANTOS et al., 2017a](#)), um tripolo de massa em rotação ([LAN et al., 2017](#)), entre outros. Esses trabalhos, mostraram a utilidade de usar modelos simplificados para identificar os principais parâmetros que dominam o movimento de uma partícula em torno de certos sistemas de asteroides.

## 1.1 Motivação e objetivo

Um dos maiores desafios no campo da astrodinâmica que visam explorar asteroides e cometas é derivar modelos matemáticos para compreender a dinâmica de um veículo espacial na vizinhança destes corpos irregulares e alongados. O campo gravitacional que atua no veículo espacial que viaja na vizinhança desses corpos é muito complexo devido ao efeito da rápida rotação dos asteroides e cometas, juntamente com suas formas irregulares.

Devido a este cenário, as perguntas que surgem são: será que é possível encontrar um modelo matemático simplificado, que pode ser utilizado em uma ampla variedade de asteroides binários (ao invés de apenas um sistema em específico), compreender a influência dos principais parâmetros dos asteroides na dinâmica de uma partícula na vizinhança destes pequenos corpos celestes e ainda assim obter resultados próximos aos de modelos de alta fidelidade usando menos tempo e esforço computacional ?

Esta tese utiliza a abordagem matemática de modelos simplificados objetivando

explorar de que maneira os principais parâmetros de um sistema simples ou binário de asteroide influenciam no ambiente dinâmico na vizinhança destes corpos. Além de realizar um estudo de forma genérica buscando compreender, também buscamos criar modelos simplificados, que representam o campo gravitacional de uma classe de asteroides de maneira mais confiável, quando comparados a modelos existentes na literatura e assim, dando mais um passo a um cenário mais realista. Neste último estudo, utilizamos o método de otimização para encontrar os parâmetros ótimos do modelo simplificado aplicados em sistemas de asteroides específicos.

Trajетórias particulares podem ser estudadas sob modelos mais precisos ao considerar as etapas finais de uma missão real, mas um conhecimento geral do campo gravitacional baseado em um pequeno número de parâmetros é muito útil nos primeiros estágios do projeto de uma missão.

## 1.2 Organização do trabalho

O Capítulo 2 utiliza o Problema Restrito Síncrono de Quatro Corpos no sistema de referência girante para buscar por órbitas planares em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$ . Ao linearizar as equações de movimento, é possível obter os autovetores e autovalores, e com esses valores, é possível determinar as estimativas iniciais para encontrar órbitas planares em torno dos pontos de equilíbrio pelo método de Newton. Em seguida, uma família de órbitas é construída em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$ . O estudo é realizado modificando alguns parâmetros, tais como a razão de massa do sistema e a dimensão do corpo secundário. O principal objetivo deste Capítulo é investigar de que forma esses parâmetros influenciam nas órbitas planares.

No Capítulo 3 buscamos realizar um estudo mais geral em relação ao Capítulo 2. Além de analisar as órbitas periódicas planares, buscamos por órbitas halo, calculamos a estabilidade dessas órbitas bem como investigamos a relação que existe entre o período, estabilidade e contante de Jacobi dessas órbitas periódicas em função da razão de massa e da dimensão do corpo secundário. Este Capítulo busca analisar os asteroides do tipo A, onde a maioria são asteroides do tipo NEO (Near Earth Asteroid) e que tem o movimento síncrono do corpo secundário em torno do centro de massa do sistema.

O Capítulo 4 é uma extensão dos Capítulos 2 e 3, em que utilizamos as equações do Problema Restrito Síncrono de Quatro Corpos (PRSQC) para modelar um sistema de asteroides binário no sistema inercial. O principal objetivo deste trabalho é construir grades de condições iniciais, que relacionam semi-eixo maior e excentricidade,

a fim de quantificar a vida útil de um veículo espacial quando liberado próximo ao corpo menos massivo do sistema binário (modelado como um dipolo de massa em rotação) em função da razão de massa do sistema. Realizamos uma análise do tempo de vida do veículo espacial considerando várias razões de massa de um sistema binário de asteroides e investigamos o comportamento de um veículo espacial nas proximidades desse sistema. Analisamos órbitas diretas e retrógradas. Este estudo investiga órbitas que sobrevivem por, aproximadamente, um ano. Neste trabalho, levamos em consideração as forças gravitacionais do sistema binário de asteroides e a pressão de radiação solar (PRS). O intuito é buscar regiões onde as órbitas diretas e retrógradas de um veículo espacial sobrevivem ao longo do tempo de integração (um ano) quando a pressão da radiação solar é levada em consideração.

O Capítulo 5 analisa os asteroides do tipo B, em que o movimento orbital de cada asteroide em torno de seu próprio eixo é igual ao movimento de translação do sistema em torno do centro de massa. Sendo assim, é denominado aqui que estes sistemas são totalmente síncronos. O objetivo deste Capítulo é investigar de que maneira a razão de massa e a dimensão dos corpos primários influenciam nas posições dos pontos de equilíbrio e nas curvas de velocidade zero. Este problema é denominado de problema restrito totalmente síncrono de cinco corpos. Para realizar esta tarefa, é necessário obter as equações de movimento de uma partícula de massa infinitesimal viajando na vizinhança de um sistema composto por dois outros corpos massivos. Os dois corpos massivos (primários) são assumidos como tendo formas irregulares e são modelado como um dipolo de massa em rotação.

Ainda pensando nos asteroides tipo B, no Capítulo 6 realizamos trabalhos aplicados a um sistema binário em específico, conhecido como 2017 YE5. A ideia principal deste Capítulo é analisar a dinâmica de um veículo espacial que se encontra na vizinhança desse sistema binário de asteroide. Neste Capítulo nós calculamos a posição dos pontos de equilíbrio, a constante de Jacobi necessária para abrir os canais de transportes que surgem em torno desses pontos de equilíbrio, bem como calculamos as órbitas periódicas do sistema utilizando como ferramenta a seção de Poincaré. Finalmente calculamos o  $\Delta V$  necessário para realizar uma transferência de um ponto de equilíbrio para outro deste sistema.

O Capítulo 7 busca compreender o ambiente dinâmico e complexo nas proximidades de asteroides irregulares que possuem uma forma arqueada a partir de modelos simplificados. Neste Capítulo assumimos o modelo simplificado denominado de modelo do tripolo em rotação, baseado na existência de três pontos de massa conectados



entre si por hastes com determinado comprimentos e massas desprezíveis. O principal objetivo deste Capítulo é entender de que maneira os principais parâmetros (distribuição de massa, forma e velocidade angular) influenciam no surgimento, posição e na estabilidade dos pontos de equilíbrio, tal como na topologia das curvas de velocidade zero. Todo conceito obtido teoricamente é então aplicado em alguns sistemas reais, tais como, asteroides 8567, 243 Ida e 433 Eros e também em Fobos, um dos satélites naturais de Marte.

O último Capítulo desta Tese (Capítulo 8) busca desenvolver um modelo simplificado para descrever os campos gravitacionais de asteroides alongados arqueados. A relação entre o modelo simplificado e o asteroide real é construído baseado nas localizações dos pontos de equilíbrio. O modelo proposto consiste em representar um asteroide alongado usando um sistema de partículas triplas conectadas no espaço tridimensional. Este modelo é uma extensão dos modelos anteriores disponíveis na literatura que se concentra apenas em modelos planares. Um método de otimização não linear é usado para determinar os parâmetros de nosso modelo, minimizando os erros de todos os pontos de equilíbrio externos em relação às soluções calculadas com um modelo mais realista, o modelo do poliedro. O modelo considerado neste artigo é então aplicado a três asteroides reais irregulares 1620 Geographos, 433 Eros e 243 Ida.



## 2 ÓRBITAS PLANARES EM TORNO DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO L1 E L2 NA VIZINHANÇA DE UM SISTEMA BINÁRIO SÍNCRONO DE ASTEROIDES

Este Capítulo fornece uma breve revisão da literatura a respeito do modelo simplificado que utilizamos neste Capítulo e nos três que sucedem, e aborda as equações do movimento do problema restrito síncrono de quatro corpos (PRS4C). O PRS4C é utilizado para representar a força gravitacional na vizinhança de um sistema binário síncrono de asteroides, onde o primário menos massivo é considerado como um corpo alongado irregular. O problema é restrito porque a massa de um dos corpos (neste caso, o veículo espacial) é desprezível. Supõe-se também que o período de rotação do asteroide com forma irregular em torno de seu próprio eixo e o período de translação desses asteroides em torno do centro de massa do sistema sejam os mesmos, suportando o nome Problema Restrito Síncrono de Quatro Corpos. Este trabalho foi baseado nos asteroides tipo A. Os resultados encontrados neste Capítulo e nos dois que sucedem este, utilizamos o modelo baseado no dipolo de massa em rotação, inicialmente introduzida por Chermnykh (1987) e também estudado por Kokoriev e Kirpichnikov (1988) e Kirpichnikov e Kokoriev (1988). Supõe-se neste modelo que o campo gravitacional de duas massas localizadas no eixo de simetria do corpo está muito próximo do campo gravitacional de um corpo axialmente simétrico.

O modelo do dipolo de massa em rotação aplicado em asteroides alongados foi desenvolvido por Zeng et al. (2015). Estudos mais recentes de Zeng et al. (2016a) utilizaram um modelo dipolo aprimorado levando em conta o achatamento de ambos os corpos primários. Zeng et al. (2016b) encontraram até 13 pontos de equilíbrio no plano  $xy$ , devido à forma não esférica dos corpos primários. Zeng et al. (2016b) também analisou essas trajetórias e estudou os efeitos do sobrevoo de forma analítica, encontrando uma relação interessante entre o sobrevoo e a integral de Jacobi. (ZENG et al., 2016) investigou as propriedades dinâmicas nas proximidades de um corpo alongado (usando o modelo dipolo) para investigar a influência da razão de força ( $k$ ), a razão de massa ( $\mu$ ) e a forma oblata ( $A_2$ ) dos primários na distribuição dos pontos de equilíbrio no plano  $xy$ . Por meio dessa análise dinâmica, (ZENG et al., 2016) observou que os pontos de equilíbrio não colineares existem apenas para  $0,37 < k < 2,07$ , e esses equilíbrios não dependem de  $\mu$ . Em Zeng et al. (2016a), a influência dos parâmetros  $k$ ,  $\mu$  e  $A_2$  (achatamento do segundo primário) nas posições dos pontos de equilíbrio fora do plano e na estrutura topológica das curvas de velocidade zero foram analisadas. Zeng et al. (2016a) observou que a forma oblata do segundo primário influencia muito a distribuição dos pontos de equilíbrio fora do plano. Esses

trabalhos, entre outros, mostraram que, usando modelos simplificados, é possível identificar os principais parâmetros que governam a dinâmica em torno de certos sistemas de asteroides (SANTOS et al., 2017a; SANTOS et al., 2017b; ZENG et al., 2018).

O objetivo deste Capítulo é procurar órbitas em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  do PRS4C. A partir das equações de movimento de um sistema binário de asteroides, onde um dos asteroides é modelado como um dipolo de massa em rotação, buscamos determinar as condições iniciais das órbitas de Lyapunov. O estudo é realizado modificando a razão de massa do sistema e a dimensão do corpo modelado como um do dipolo de massa. Ao linearizar as equações de movimento, é possível obter os autovetores e os autovalores e, com esses valores, é possível determinar as estimativas iniciais para encontrar órbitas periódicas ao redor dos pontos de equilíbrio. Uma vez encontradas as condições iniciais, será possível, através de métodos numéricos iterativos, encontrar uma solução para o problema não linearizado através do método de Newton. Em seguida, uma família de órbitas é construída em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$ .

O trabalho desenvolvido neste Capítulo foi apresentado na American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) ocorrido em Salt Lake City, na cidade de Utah (USA), 2018, e publicado na Advances in the Astronautical Sciences conforme pode ser verificado através da referência (SANTOS et al., 2018).

## 2.1 Introdução

O interesse em analisar, investigar e entender a dinâmica de um satélite em torno dos pontos de equilíbrio aumentou nos últimos anos, devido às vantagens que esses pontos oferecem quando se trata de missões espaciais (CANALIAS; MASDEMONT, 2016). Várias missões espaciais próximas aos pontos de equilíbrio colineares foram concluídas, estão em execução ou estão sendo preparadas para o futuro próximo (HECHLER et al., 2008; KNUTSON; HOWELL, 2012). O ISEE-3 foi lançado em 1978 e inseriu um veículo espacial em uma órbita periódica nas proximidades do ponto de equilíbrio  $L_1$  do sistema Sol-Terra, com o objetivo de fazer estudos das interações Terra-Sol (RICHARDSON, 1980). Essa foi o primeiro veículo espacial artificial a ser enviada para um ponto de equilíbrio. Sua principal missão era investigar a estrutura do vento solar nas proximidades da Terra (CANALIAS; MASDEMONT, 2016; HECHLER et al., 2008). Desde então, várias agências espaciais consideraram órbitas periódicas ou quase periódicas ao redor dos pontos de equilíbrio como órbitas-alvo para seu veículo espacial, usado com os satélites SOHO (HUBER et al., 1996), MAP, ACE, Genesis, entre outros, e existem vários projetos futuros que pretendem usar órbi-

tas em torno de pontos de equilíbrio para desenvolver suas missões, como NGST, Herschel-Planck, LUMIO mission, James Webb Space Telescope que substituirá o Telescópio Espacial Hubble e que tem a intenção de orbitar o ponto de equilíbrio  $L_2$  do sistema Sol-Terra (CANALIAS; MASDEMONT, 2016; KNUTSON; HOWELL, 2012; FOLTA, 2004).

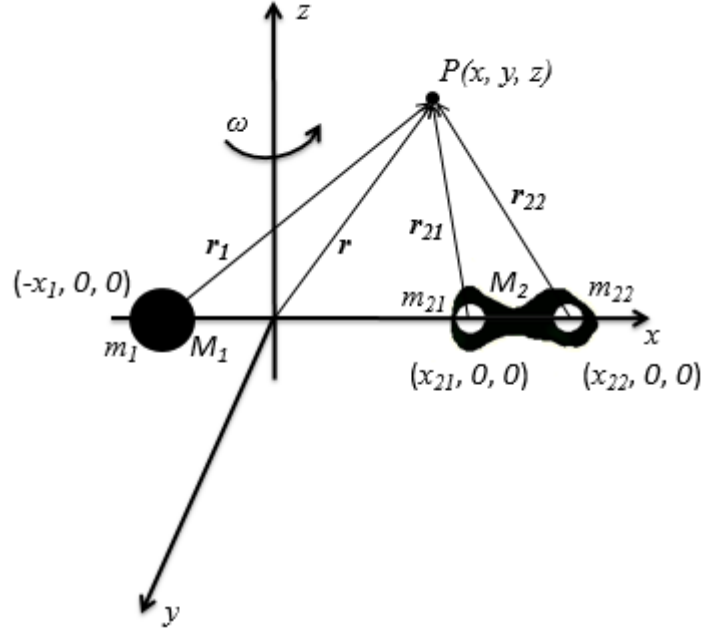
Conforme descrito acima, várias pesquisas contribuíram para uma melhor compreensão do Problema Restrito Circular de Três Corpos, mas a ação de várias perturbações não foram levadas em consideração em muitos desses problemas. O modelo clássico não considera algumas das forças perturbadoras, como a forma irregular de um dos corpos primários, os efeitos de arrasto de Poynting-Robertson e a pressão da radiação solar. Alguns dos trabalhos expressivos no Problema Restrito Circular de Três Corpos foram produzidos por referências como Chernikov (1970), Bhatnagar e Chawla (1979), Sharma (1987), Kunitsyn e Tureshbaev (1985), Lukyanov (1988).

Para a realização deste estudo, utilizamos um modelo baseado no dipolo de massa em rotação, visto de um sistema de coordenadas girante. Considera-se neste modelo que o campo gravitacional de dois corpos de massas pontuais compõe o corpo  $M_2$  (primário menos massivo) e está localizado no eixo de simetria de um asteroide axialmente simétrico, representando dessa maneira como um corpo alongado.

## 2.2 Equação do movimento no sistema girante

Nesse Capítulo, supõe-se que o movimento de uma partícula de massa desprezível ( $P(x, y, z)$ ) seja governado pelas forças gravitacionais dos corpos  $M_1$  e  $M_2$ . O corpo de massa infinitesimal não afeta a dinâmica dos corpos primários. A unidade de distância é normalizada para ser a distância do corpo  $M_1$  até centro de massa do corpo  $M_2$ , que é formado por dois corpos hipotéticos com massas  $m_{21}$  e  $m_{22}$ . O corpo mais massivo do sistema é adotado para ser o ponto com massa  $m_1$ . O corpo menor é modelado como uma massa de dipolo em rotação composta pelas massas  $m_{21}$  e  $m_{22}$ , como mostra a Figura 2.1.

Figura 2.1 - Imagem representativa da forma geométrica do sistema em estudo (não em escala).



Tomando unidades convenientes de massa, tempo e comprimento (unidades canônicas), é possível simplificar as equações de movimento. A origem do sistema de coordenadas girante é definida como o centro de massa do sistema. Neste sistema girante, o primário mais massivo ( $M_1$ ) possui massa  $m_1 = 1 - 2\mu^*$  e está sempre localizado na posição  $x_1 = (-2\mu^*, 0, 0)$ . As massas dos dois corpos hipotéticos que formam o corpo  $M_2$  são  $m_{21} = m_{22} = \mu^*$ , e estão localizadas em  $x_{21} = (-2\mu^* + 1 - d/2, 0, 0)$  e  $x_{22} = (-2\mu^* + 1 + d/2, 0, 0)$ , respectivamente, onde  $d$  é a distância entre os corpos  $m_{21}$  e  $m_{22}$  e  $\mu^*$  é a razão de massa definida por  $\mu^* = \frac{m_{21}}{(m_1 + m_{21} + m_{22})}$ . Nesta análise, consideramos que o período de rotação do corpo menos massivo ( $M_2$ ) em torno de seu eixo principal é igual ao período de translação em torno do centro de massa do sistema em uma órbita circular, tornando o movimento síncrono. A unidade de tempo é definida de modo que o período de rotação do dipolo de massa é igual a  $2\pi$ . A partir das unidades canônicas mencionadas definidas, a função lagrangiana do sistema é dada por 2.1 (BROUCKE, 1969):

$$\mathcal{L}_{rotating}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + (x\dot{y} - y\dot{x})/2 + (x^2 + y^2)/2 + ((1 - 2\mu^*)/r_1 + \mu^*/r_{21} + \mu^*/r_{22}), \quad (2.1)$$

onde

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2}, \quad (2.2)$$

$$r_{21} = \sqrt{(x - x_{21})^2 + (y - y_{21})^2 + z^2}, \quad (2.3)$$

$$r_{22} = \sqrt{(x - x_{22})^2 + (y - y_{22})^2 + z^2}. \quad (2.4)$$

A formulação Hamiltoniana pode ser obtida a partir da formulação Lagrangiana. O momento conjugado ( $p$ ) é dado por

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + y, \quad (2.5)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} - x, \quad (2.6)$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z}. \quad (2.7)$$

onde  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  estão associados ao momento conjugado do veículo espacial em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente.

Usando a transformação de Legendre  $(q, \dot{q}) \xrightarrow{\Delta} (q, p)$  onde  $q, \dot{q}$  são as coordenadas e velocidades da partícula, respectivamente, obtemos

$$\mathcal{H} = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - \mathcal{L}_{rotating}. \quad (2.8)$$

Depois de fazer algumas simplificações matemáticas, é possível encontrar a função Hamiltoniana, que é dada por:

$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2} - \frac{(xp_y - yp_x)}{2} - \left( \frac{1 - 2\mu^*}{r_1} + \frac{\mu^*}{r_{21}} + \frac{\mu^*}{r_{22}} \right). \quad (2.9)$$

Observe que o Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  é uma função das coordenadas e do momento conjugado  $p$  do veículo espacial. Devido ao fato do Hamiltoniano ser independente do tempo, é possível dizer que seu valor é conservado (BENACCHIO, 2007; BROUCKE, 1968; WORTHINGTON, 2012; THORNTON; MARION, 2011). Definimos o potencial efetivo como

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + \left( \frac{1 - 2\mu^*}{r_1} + \frac{\mu^*}{r_{21}} + \frac{\mu^*}{r_{22}} \right). \quad (2.10)$$

Da função Hamiltoniana, dada pela Equação 2.9, é possível determinar as equações de movimento do veículo espacial no sistema de referência girante, dadas por:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \quad (2.11)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y, \quad (2.12)$$

$$\ddot{z} = \Omega_z, \quad (2.13)$$

onde  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$  e  $\Omega_z$  é o gradiente do potencial efetivo em função de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

As Equações 2.11, 2.12 e 2.13 têm a mesma aparência da equação de movimento do problema restrito clássico dos três corpos, que tem sido extensivamente estudado na comunidade científica (MCCUSKEY, 1963; SZEBEHELY, 1967; MOLTON, 1960).

Da mesma maneira que o Problema Restrito Circular de Três Corpos possui uma integral do movimento, denominada de integral de Jacobi (SZEBEHELY, 1967). Esta integral do movimento também existe no problema restrito síncrono de quatro corpos, e é dado por:

$$v^2 = 2\Omega - C^* \quad (2.14)$$

onde  $v$  é a velocidade da partícula e  $C^*$  é uma constante de integração.

**Prova :** Considerando o movimento no espaço  $xyz$  e multiplicando a Equação 2.11 por  $2\dot{x}$ , a Equação 2.12 por  $2\dot{y}$  e a Equação 2.13 por  $2\dot{z}$  e, adicionando todos eles, temos que

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z} = 2\dot{x}\frac{\partial\Omega}{\partial x} + 2\dot{y}\frac{\partial\Omega}{\partial y} + 2\dot{z}\frac{\partial\Omega}{\partial z}, \quad (2.15)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{d(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{dt} = 2\frac{d\Omega}{dt}. \quad (2.16)$$

Integrando a Equação 2.16 em relação ao tempo, nós encontramos que

$$v^2 = 2\Omega - C^*, \quad (2.17)$$

como queríamos demonstrar.

Observe que a Equação 2.14 é uma função que depende da posição da partícula e de uma constante de integração que foi chamada por  $C^*$ , que é parte integrante das equações de movimento.  $C^*$  será denominada de *constante de Jacobi modificada*, para diferenciar da constante de Jacobi utilizada no Problema restrito de três corpos (DUTT; ANILKUMAR, 2014; REN; SHAN, 2014; SZEBEHELY, 1967; MCCUSKEY,



1963). Observe que a Equação 2.14 mostra que, para um determinado valor de  $C^*$ , a velocidade é uma função da posição do corpo. A constante de integração  $C^*$  depende da posição e velocidade iniciais da partícula (MCCUSKEY, 1963). Portanto, quando a constante de integração  $C^*$  é determinada numericamente a partir das condições iniciais, a Equação 2.14 determina o módulo da velocidade do corpo com massa desprezível em todos os pontos do espaço. Inversamente, para uma determinada velocidade, a Equação 2.14 fornece a forma geométrica dos locais onde o corpo pode estar. Em particular, se a velocidade for igual a zero na Equação 2.14, uma região onde a velocidade da partícula é zero será encontrada (MOLTON, 1960), que são denominadas de *Curvas de Velocidade Zero*. Em termos matemáticos, essa curva é definida por  $2\Omega - C^* = 0$  (MCCUSKEY, 1963). Escrevendo esta condição em coordenadas cartesianas, é possível obter a Equação 2.18.

$$\frac{x^2 + y^2}{1} + \frac{2(1 - 2\mu^*)}{r_1} + \frac{2\mu^*}{r_{21}} + \frac{2\mu^*}{r_{22}} = C \quad (2.18)$$

O movimento da partícula só é possível em regiões onde  $2\Omega > C^*$ , caso contrário, o quadrado da velocidade seria negativo, o que é uma impossibilidade física (SZEBEHELY, 1967; MOLTON, 1960; SANTOS et al., 2017a).

Embora semelhantes, as equações de movimento desenvolvidas neste trabalho diferem das do Problema dos Três Corpos Restritos Clássicos pelo pseudo-potencial usado nas Equações 2.11 - 2.13. As soluções de equilíbrio em relação ao sistema girante ocorrem quando a derivada parcial da função de pseudo-potencial é igual a zero, ou seja,  $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0$  e  $\dot{x}$  e  $\dot{y} = 0$ . Essas soluções são conhecidas como pontos de equilíbrio correspondentes a posições fixas no sistema girante, onde existe um equilíbrio entre as forças gravitacionais e centrífugas associadas à rotação do sistema. Essas soluções de equilíbrio fazem com que uma partícula posicionada em um desses pontos se mantenha estacionária em relação ao sistema girante (PUSHPARAJ; SHARMA, 2016).

Para determinar a posição dos pontos de equilíbrio e determinar os autovalores (cálculo de estabilidade), foi considerado  $\mu^* = 0,005284$  e a dimensão do corpo secundário (em unidades canônicas)  $d = 0,131440$ . Esses valores atribuídos a razão de massa e a dimensão do dipolo são baseados no par de asteroides (Alpha-gamma) do sistema triplo, conhecido como 2001SN<sub>263</sub> (SANTOS et al., 2017a). A Tabela 2.1 fornece informações a respeito da localização dos pontos de equilíbrio do sistema estudado e também quando consideramos o PRCTC, para fim de comparação (SAN-

TOS et al., 2017a).

Tabela 2.1 - Posição dos pontos de equilíbrio para o sistema estudado ( $\mu^* = 0,005284$  e  $d = 0,131440$ ) e também para o sistema considerando os corpos primários como pontos de massa ( $\mu^* = 0,005284$  e  $d = 0$ ).

	Posições dos pontos de equilíbrio do sistema estudado ( <i>Alpha - Gamma</i> )		Posições dos pontos de equilíbrio considerando os corpos como ponto de massa	
	$x_0$	$y_0$	$x_0$	$y_0$
$L_1$	0.821830	0	0.845006	0
$L_2$	1.172874	0	1.149257	0
$L_3$	-1.004406	0	-1.004403	0
$L_4$	0.491087	0.865094	0.489432	0.866025
$L_5$	0.491087	-0.865094	0.489432	-0.866025

### 2.3 Linearização do problema restrito síncrono de quatro corpos nos pontos de equilíbrio

Primeiramente vamos relembrar a equação do movimento do Problema restrito síncrono de quatro corpos no espaço.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x + 2v - \frac{(1-2\mu^*)(x-x_1)}{((x-x_1)^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*(x-x_{21})}{((x-x_{21})^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*(x-x_{22})}{((x-x_{22})^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ y - 2u - \frac{(1-2\mu^*)y}{((x-x_1)^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*y}{((x-x_{21})^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*y}{((x-x_{22})^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ -\frac{(1-2\mu^*)z}{((x-x_1)^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*z}{((x-x_{21})^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*z}{((x-x_{22})^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Simplificando a notação, vamos escrever a Equação 2.19 da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 2v + D_x\Omega \\ -2u + D_y\Omega \\ D_z\Omega \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ ,  $u = \dot{x}$ ,  $v = \dot{y}$  e  $w = \dot{z}$  e  $D_x\Omega$  é a derivada parcial de  $\Omega$  em relação a variável  $x$ . A mesma notação é utilizada para as coordenadas  $y$  e  $z$ .

Seja  $\mathbf{x}' = (x, y, z, u, v, w) \in \mathbb{R}^6$  o vetor de estado e  $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$  dado por

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 2v + D_x\Omega \\ -2u + D_y\Omega \\ D_z\Omega \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

então os pontos de equilíbrio  $L_1, L_2, L_3, L_4$  e  $L_5$  são os zeros de  $f(\mathbf{x})$ . A linearização sobre qualquer um desses pontos de equilíbrio é

$$\dot{\mathbf{x}} = D_{L_i}f(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (2.22)$$

onde  $D_{L_i}$  significa que a derivada está sendo computada no ponto de equilíbrio  $L_i$ .

## 2.4 Análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio

Para determinar a estabilidade linear dos pontos de equilíbrio ( $L_k$ ;  $k = 1, 2, 3, 4$  e  $5$ ), é necessário transferir a origem do sistema de coordenadas para a posição dos pontos de equilíbrio  $(x_0, y_0, z_0)$  e, em seguida, linearizar as equações de movimento em torno desses pontos, obtendo os resultados mostrados a seguir.

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \Omega_{xx}(x_0, y_0, z_0)\xi + \Omega_{xy}(x_0, y_0, z_0)\eta + \Omega_{xz}(x_0, y_0, z_0)\zeta \quad (2.23)$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \Omega_{yx}(x_0, y_0, z_0)\xi + \Omega_{yy}(x_0, y_0, z_0)\eta + \Omega_{yz}(x_0, y_0, z_0)\zeta \quad (2.24)$$

$$\ddot{\zeta} = \Omega_{zx}(x_0, y_0, z_0)\xi + \Omega_{zy}(x_0, y_0, z_0)\eta + \Omega_{zz}(x_0, y_0, z_0)\zeta \quad (2.25)$$

Nas Equações 2.23 - 2.25,  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  definem uma vizinhança em torno do ponto de equilíbrio e as derivadas parciais em  $(x_0, y_0, z_0)$  significam que o valor é calculado no ponto de equilíbrio que está sendo analisado. As derivadas parciais são mostradas

nas Equações 2.26 - 2.31.

$$\begin{aligned}
\Omega_{xx} = 1 + & \frac{3(1 - 2\mu^*)(x - x_1)^2}{((x - x_1)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1 - 2\mu^*}{((x - x_1)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
& + \frac{3\mu^*(x - x_{21})^2}{((x - x_{21})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_{21})^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
& + \frac{3\mu^*(x - x_{22})^2}{((x - x_{22})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_{22})^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{yy} = 1 + & \frac{3(1 - 2\mu^*)y^2}{((x - x_1)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1 - 2\mu^*}{((x - x_1)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
& + \frac{3\mu^*y^2}{((x - x_{21})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_{21})^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
& + \frac{3\mu^*y^2}{((x - x_{22})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_{22})^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{zz} = & \frac{3(1 - 2\mu^*)z^2}{((x - x_1)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1 - 2\mu^*}{((x - x_1)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
& + \frac{3\mu^*z^2}{((x - x_{21})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_{21})^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
& + \frac{3\mu^*z^2}{((x - x_{22})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_{22})^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{xy} = \Omega_{yx} = & \frac{3(1 - 2\mu^*)(x - x_1)^2y}{((x - x_1)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{3\mu^*(x - x_{21})^2y}{((x - x_{21})^2 + y^2)^{5/2}} \\
& + \frac{3\mu^*(x - x_{22})y}{((x - x_{22})^2 + y^2)^{5/2}}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{xz} = \Omega_{zx} = & \frac{3(1 - 2\mu^*)(x - x_1)z}{((x - x_1)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{3\mu^*(x - x_{21})z}{((x - x_{21})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\
& + \frac{3\mu^*(x - x_{22})z}{((x - x_{22})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\Omega_{yz} = \Omega_{zy} = \frac{3(1 - 2\mu^*)yz}{((x - x_1)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{3\mu^*yz}{((x - x_{21})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{3\mu^*yz}{((x - x_{22})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad (2.31)$$

Devido ao fato de que os pontos de equilíbrio para o modelo do dipolo de massa em rotação estarem no plano  $xy$ , a Equação 2.25 é desacoplada (ela não depende de  $\xi$  e  $\eta$ ). Substituindo os valores de  $\mu^*$  e  $d$ , a Equação do movimento 2.25 se torna

$$\ddot{\zeta} = -\vartheta\zeta \quad (2.32)$$

em que  $\vartheta$  é uma constante.

A Equação 2.32 mostra que o movimento perpendicular ao plano  $xy$  é periódico com frequência  $\omega = \sqrt{\vartheta}$ . O movimento na direção  $z$  é, portanto, limitado com

$$\zeta = c_3 \cos(\sqrt{\vartheta}t) + c_4 \sin(\sqrt{\vartheta}t) \quad (2.33)$$

onde  $c_3$  e  $c_4$  são constantes de integração.

Agora vamos investigar o movimento no plano  $xy$ . Para determinar a estabilidade do sistema linear, devemos encontrar os autovetores e os autovalores de  $D_x f(\mathbf{x})$ . Lembre-se de que  $\lambda$  é um autovalor se e somente se

$$\det(D_x f(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (2.34)$$

As raízes características não triviais da Equação 2.34 são agora obtidas. É natural escrever a equação característica não triviais da Equação 2.23 e 2.24 da seguinte forma (JIANG, 2015)

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \Omega_{xx}(x_0, y_0) & -2\lambda - \Omega_{xy}(x_0, y_0) \\ 2\lambda - \Omega_{xy}(x_0, y_0) & \lambda^2 - \Omega_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.35)$$

uma vez que  $\Omega_{xz} = \Omega_{yz} = 0$ .

A equação de quarta ordem em  $\lambda$  é dada por:

$$\lambda^4 + (4 - \Omega_{xx}^0 - \Omega_{yy}^0)\lambda^2 + \Omega_{xx}^0\Omega_{yy}^0 - (\Omega_{xy}^0)^2 = 0 \quad (2.36)$$

onde  $\Omega_{xx}^0$  é a abreviação de  $\Omega_{xx}(x_0, y_0)$ . A mesma notação é usada para as outras derivadas parciais.

Um ponto de equilíbrio será linearmente estável se a Equação 2.36, avaliada no ponto de equilíbrio, possuir quatro raízes puramente imaginárias ou raízes complexas com partes reais negativas (KUMARI; KUSHVAH, 2014; ZENG et al., 2016a; MCCUSKEY, 1963).

Utilizando o modelo adotado neste Capítulo, Santos et al. (2017a) mostrou que a linearização sobre os pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  fornece uma estrutura de autovalor do tipo *sela*  $\times$  *centro*  $\times$  *centro* (*saddle*  $\times$  *center*  $\times$  *center*). Isto indica que um par de raízes reais (*sela*),  $\pm\sigma$ , corresponde às variedades unidimensionais na direção estável e uma variedade unidimensional na direção instável. Os outros dois pares de raízes imaginárias, (*centro*  $\times$  *centro*)  $\pm i\nu$  e  $\pm i\omega$ , sugerem que, além do subespaço central ser quadridimensional, existe um comportamento oscilatório nas proximidades do ponto de equilíbrio para o sistema linear (HOWELL, 1984; HAAPALA et al., 2015). Os autovalores centrais correspondem a oscilações no plano  $xy$  ( $\pm i\nu$ ), enquanto que as outras raízes centrais produzem oscilações fora do plano ( $\pm i\omega$ ) (HOWELL, 1984; HAAPALA et al., 2015). Isto sugere que existem órbitas periódicas e quase periódicas em torno desses pontos de equilíbrio e nós tentaremos encontra-las considerando o modelo não linear para o modelo adotado nesta Capítulo. Observe que para todas as direções instáveis existe uma direção estável, e que a taxa de expansão da primeira é exatamente a taxa de contração da segunda. Isso fortalece nossa intuição de que o sistema (que é hamiltoniano) preserva o volume do espaço de fase e portanto é conservativo.

## 2.5 Computando as órbitas periódicas em torno dos pontos de equilíbrio

Na Seção 2.2 foi desenvolvida as equações de movimento de uma partícula sujeita a força gravitacional de um sistema binário de asteroides, e na Seção 2.3 analisamos a dinâmica linear sobre os pontos de equilíbrio. Nesta seção, abordaremos a metodologia utilizada para encontrar as órbitas periódicas em torno dos pontos de equilíbrio a partir das equações linearizadas e, em seguida, com a alteração apropriada das coordenadas, buscamos essas soluções periódicas utilizando o sistema não linear.

## 2.6 Metodologia

É conhecido na literatura que na teoria dos sistemas lineares uma matriz sempre pode ser transformada para a forma canônica da Jordan, em que esta matriz é

diagonalizada por seus autovalores (MORRIS et al., 1974; MEYER; HALL, 1992). Para o sistema de matriz linearizada do Problema restrito síncrono de quatro corpos, em um determinado ponto de equilíbrio, a matriz terá de fato autovalores distintos (MURRAY; DERMOTT, 1999; MIRELES, 2006a). Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (2.37)$$

Para determinar o valor de  $A$ , precisamos fazer

$$A = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.38)$$

em que  $\mathbf{x} = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  e  $\dot{\mathbf{x}}$  é dada pela Equação 2.21.

Diferenciando a Equação 2.38, nós encontramos que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{4,x} & f_{4,y} & f_{4,z} & 0 & 2 & 0 \\ f_{5,x} & f_{5,y} & f_{5,z} & -2 & 0 & 0 \\ f_{6,x} & f_{6,y} & f_{6,z} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

A matriz  $A$  é semelhante a matriz  $D$  se, e somente se, existe uma matriz invertível  $T$  tal que  $A = TDT^{-1}$ . Observe que se  $A$  é semelhante a  $D$  então  $D$  é semelhante a  $A$ .  $T$  é a matriz de transformação linear. Com isso, nós podemos escreve

$$\dot{\mathbf{x}} = TDT^{-1}\mathbf{x} \quad (2.40)$$

em que  $D$  é a matriz diagonalizada dos autovalores e  $T$  é a matriz dos autovetores da matriz  $A$ . A matriz  $D$  é uma matriz diagonal composta pelos autovalores de  $A$ , como mostra a Equação 2.41 (MURRAY; DERMOTT, 1999)

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Seja  $\mathbf{y}$  as variáveis do sistema diagonalizável, então, através da matriz de transformação linear  $T$ , podemos obter o sistema de variáveis no domínio original  $\mathbf{x}$  através

da expressão

$$\mathbf{x} = T\mathbf{y}. \quad (2.42)$$

Considerando a transformação linear invertível  $T^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , temos que

$$\dot{\mathbf{y}} = T^{-1}\dot{\mathbf{x}}. \quad (2.43)$$

A partir daí, podemos manipular as equações algebricamente, conforme mostrado a seguir

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= TDT^{-1}\mathbf{x}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= TD\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

multiplicando  $T^{-1}$  em ambos os lados, temos que

$$\begin{aligned} T^{-1}\dot{\mathbf{x}} &= T^{-1}TD\mathbf{y}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= D\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

ou, alternativamente, na forma de componentes

$$\dot{\mathbf{y}}_i = \lambda_i \mathbf{y}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.46)$$

cujas condições iniciais são dadas por  $\mathbf{y}_0 = T^{-1}\mathbf{x}_0$ . Podemos notar que o último termo da Equação 2.45 é diagonalizado e, conseqüentemente, desacoplado. Portanto, podemos escrever o fluxo da seguinte maneira (MURRAY; DERMOTT, 1999; MIRELES, 2006a).

$$\mathbf{y} = e^{Dt}\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{y}_0. \quad (2.47)$$

Vale a pena ressaltar que essa forma de exponencial só é válida devido ao fato de que consideramos que o sistema é diagonalizado. Transformando esse fluxo de volta nas coordenadas originais, obtemos (MURRAY; DERMOTT, 1999; MIRELES, 2006a)

$$\mathbf{x}(t) = Te^{Dt}T^{-1}\mathbf{x}_0 \quad (2.48)$$

Uma maneira mais simples e útil que também nos ajuda na análise global a partir de um sistema linear é considerar apenas a matriz do sistema  $D$ . Já que esta é



diagonalizada, o seu comportamento dinâmico é facilmente analisado.

Em resumo, os autovalores com  $Re(\lambda) > 0$  dão origem a soluções instáveis,  $Re(\lambda) < 0$  produzem soluções estáveis e, finalmente,  $Re(\lambda) = 0$  geram soluções oscilatórias (MIRELES, 2006a). Então, a partir do sistema  $\mathbf{y}$ , podemos escolher soluções com o comportamento que desejarmos, bastando apenas escolher  $\mathbf{y}_0$  de forma que anule certos modos de vibração e amplifiquem outros. Uma vez que a combinação linear de condições iniciais desejada é encontrada, podemos transformar essas condições iniciais no domínio original, a partir da relação  $\mathbf{x}_0 = T\mathbf{y}_0$ , e a solução transformada terá as mesmas propriedades (provavelmente incorporadas de maneira diferente).

Nós sabemos que a estrutura dos autovalores do sistema linearizado em  $L_1, L_2, L_3, L_4$  e  $L_5$  foram obtidas por Santos et al. (2017b), e são mostradas na Tabela 2.6 para o sistema de asteroide 2001SN<sub>3</sub>63. Embora os autovalores apresentem resultados diferentes para diferentes distribuição de massa dos corpos, sua estrutura (sela  $\times$  centro  $\times$  centro) se mantem.

Tabela 2.2 - Autovalores da equação característica do problema síncrono restrito de três corpos usando um modelo de dipolo de massa.

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$L_1$	-3,5451	3,5451	-2,7275 <i>i</i>	2,7275 <i>i</i>
$L_2$	-2,5784	2,5784	-2,1144 <i>i</i>	2,1144 <i>i</i>
$L_3$	-0,1659	0,1659	-1,0090 <i>i</i>	1,0090 <i>i</i>
$L_4$	0,2759 <i>i</i>	0,2759 <i>i</i>	-0,9611 <i>i</i>	0,96117 <i>i</i>
$L_5$	-0,2759 <i>i</i>	0,2759 <i>i</i>	-0,9611 <i>i</i>	0,96117 <i>i</i>

Fonte: Santos et al. (2017a).

Considere a dinâmica linearizada em torno do ponto de equilíbrio  $L_1$ . Adotaremos as coordenadas  $\mathbf{x} = (\xi; \eta; u; v)$  para as variáveis físicas no sistema linearizado. Para diferenciar, usaremos as coordenadas  $\mathbf{x}' = (x; y; \dot{x}; \dot{y})$  para as variáveis físicas no sistema não linear e, por fim,  $\mathbf{y} = (y_1; y_2; y_3; y_4)$  para as variáveis do sistema diagonalizado.

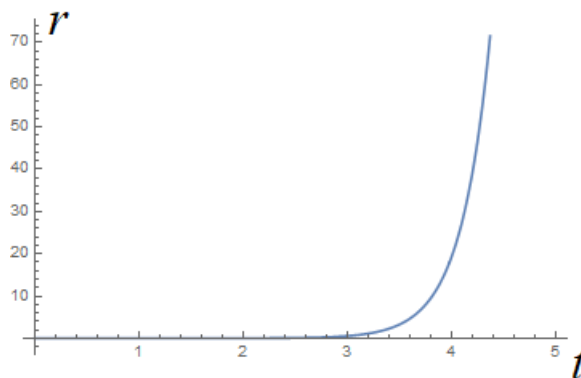
Como dito anteriormente, a dinâmica linearizada no ponto de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  tem uma direção instável e uma direção estável, e um centro bidimensional (quadridimensional no caso espacial) no problema planar, que é a análise que investigaremos.

Vamos agora buscar as condições iniciais para encontrar uma órbita periódica em

torno do ponto de equilíbrio colinear considerando as equações do sistema linearizado.

Se nós especificarmos uma condição inicial qualquer, possivelmente, quando realizarmos a integração numérica, a partícula se afastará rapidamente do ponto de equilíbrio, devido as componentes reais (estável e instável) dominarem o comportamento da partícula, pois estão associados ao crescimento (ou contração) exponencial. Para uma melhor compreensão deste efeito, construímos o gráfico mostrado na Figura 2.2, que mostra o comportamento do deslocamento  $r$  da partícula em função do tempo  $t$ , onde  $r$  é dada pelas soluções da equação linearizada  $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ .

Figura 2.2 - Distância  $r$  da partícula em função do tempo  $t$ .



Agora, suponha que, em vez de especificar uma condição inicial qualquer para o sistema, desejamos encontrar uma órbita em torno do ponto de equilíbrio  $L_1$  (no sistema linearizado) com algum comportamento desejado, como por exemplo, uma órbita periódica. Isto se torna fácil se nós utilizarmos o sistema diagonalizado ( $\mathbf{y}_0$ ) para determinar as condições iniciais.

Como queremos minimizar a componente na direção instável da trajetória não linear, devemos escolher as condições iniciais que correspondem ao movimento harmônico do sistema linear. Vamos começar com um  $\mathbf{y}_0$  inicial de forma que  $\mathbf{y}_0 = (0; 0; y_3; y_4)$ , em que os valores iniciais diferentes de zero podem ser números complexos. Na verdade, se desejamos obter soluções reais nas coordenadas  $x$ , devemos considerar  $y_3$  e  $y_4$  como conjugados complexos. Então, por simplicidade, vamos buscar por valores

complexo conjugados, conforme mostrado a seguir

$$\begin{aligned}y_1(0) &= 0 \\y_2(0) &= 0 \\y_3(0) &= 0,5 \times 10^{-4} \\y_4(0) &= 0,5 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

no sistema diagonalizado. Transformando essas condições de volta as coordenadas originais do sistema linear, a partir das transformação  $\mathbf{x}_0 = T\mathbf{y}_0$ , encontramos que

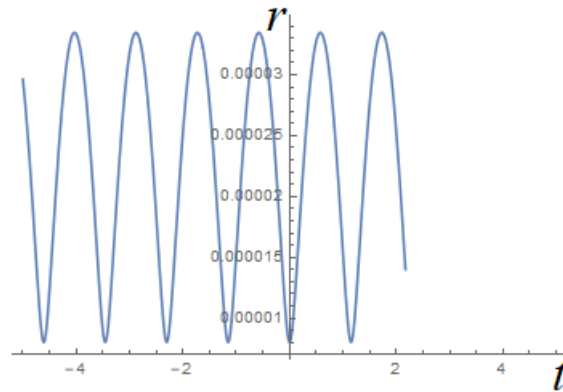
$$\begin{aligned}\xi(0) &= -0.080443788793979 \times 10^{-4} \\ \eta(0) &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ v(0) &= 0.912889566843729 \times 10^{-4}\end{aligned}\tag{2.49}$$

Se desejarmos simular os sistemas lineares e não lineares do mesmo estado físico, devemos lembrar que a origem no sistema linear  $(0; 0; 0; 0)$  corresponde ao ponto  $(L_1; 0; 0; 0)$  no sistema não linear. Então as coordenadas  $\mathbf{x}$  devem ser pensadas como pequenos deslocamentos do ponto de equilíbrio, e as coordenadas  $\mathbf{x}'$  são as variáveis físicas para o problema restrito síncrono de quatro corpos. Com isso, as condições iniciais no sistema não linear são dadas por

$$\begin{aligned}x(0) &= 0.821821955621121 \\ y(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= 0.912889566843729 \times 10^{-4}\end{aligned}\tag{2.50}$$

devido ao fato do ponto de equilíbrio  $L_1$  estar na posição  $x = 0.8218322684714467$ . Essas condições iniciais, conforme mostrada na Equação 2.50, foram escolhidas para anular os autovetores instáveis e estáveis, e fornecem um movimento harmônico ao sistema linear. Utilizando a Equação 2.48, podemos encontrar as soluções temporais do sistema linearizado. Considerando as condições iniciais mostradas na Equação 2.50, o movimento da partícula será oscilatório, conforme mostrada na Figura 2.3.

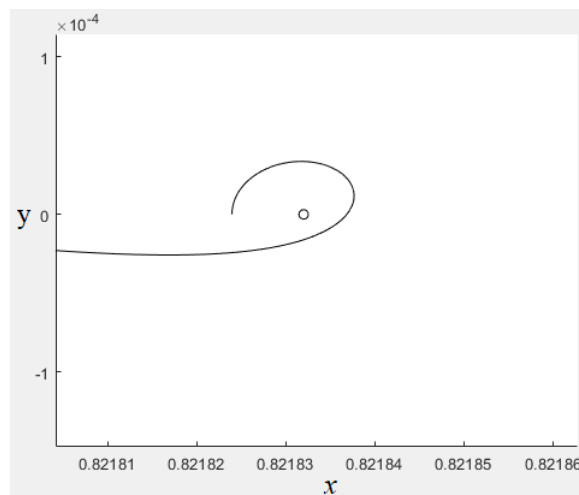
Figura 2.3 - Solução da equação linearizada de  $r$  em função do tempo  $t$ .



## 2.7 Encontrando as condições iniciais no sistema não linear

Agora que sabemos encontrar as condições iniciais que geram soluções periódicas utilizando o sistema linear em torno de qualquer ponto de equilíbrio colinear, o que acontece se nós utilizarmos a mesma condição inicial do sistema linearizado nas nossas equações de movimento não lineares? A Figura 2.4 mostra o resultado quando considerando a mesma condição inicial utilizando o sistema não linear.

Figura 2.4 - Trajetória das condições iniciais do sistema linear utilizando as Equações não lineares.



É possível observar, pela Figura 2.4, que a não linearidade transforma nossa órbita periódica do sistema linear em uma órbita não periódica no sistema não linear. Antes de obtermos uma órbita periódica no problema não linear, vamos primeiro

comentar sobre alguns tópicos importantes para uma melhor compreensão. Assim como no PRCTC, as equações de movimento do PRSQC são invariantes à transformação  $t = -t$ ;  $y = -y$ . Devido a essa invariância, se uma condição inicial arbitrária  $(x_0; y_0; \dot{x}_0; \dot{y}_0)^T$  for integrada para frente no tempo, a trajetória resultante será simétrica, em relação ao eixo  $x$ , da trajetória integrada para trás no tempo a partir da condição inicial  $(x_0; -y_0; -\dot{x}_0; \dot{y}_0^T)$ . Essas informações podem ser conhecidas a partir do teorema do espelho (SZEBEHELY, 1967; MOLTON, 1960). Considerando nosso problema e dizendo isto de outra maneira temos que, se uma partícula cruza perpendicularmente o eixo  $x$  duas vezes (em duas passagens), esta é uma órbita periódica. Então, não precisamos analisar uma órbita inteira para determinar se essa órbita é periódica ou não. Basta apenas realizar a integração numérica por meio período orbital ( $T/2$ ). Observe que a condição inicial que nós encontramos, conforme mostrada na 2.50, fornece que o primeiro cruzamento com o eixo  $x$  é perpendicular. Isto é, se nós temos uma condição inicial de tal forma que  $\mathbf{x}_0' = (x_0; 0; 0; \dot{y}_0)^T$  seja perpendicular ao plano  $xy$ , então se outro cruzamento perpendicular pode ser encontrado,  $\mathbf{x}'(T/2) = (x; 0; 0; \dot{y})^T$ , a órbita será periódica com período  $T$  (BRAKWELL; BROWN, 1979; HOWELL, 1984). Agora vamos abordar dois conceitos importantes, que são a Matriz de transição de estado (State transition Matrix) e a Matriz de Monodromia (Monodromy matrix).

## 2.8 Matriz de transição de estado

Para satisfazer a necessidade de relacionar as mudanças nas condições iniciais no tempo  $t_0$  a um tempo final  $t_f$ , a equação do movimento é reescrita de um conjunto de três equações diferenciais de segunda ordem para um conjunto de seis equações variacionais de primeira ordem, conforme mostrada na Equação 2.38. A matriz da Equação 2.38 é chamada de State Propagation Matrix ( $A(t)$ ) (Matriz Jacobiana) e contém a Hessiana do pseudo potencial, derivada da expansão da serie de Taylor truncada sobre a solução de referência. Em resumo, a matriz  $A$  corresponde à matriz do sistema linearizado em torno de um ponto de equilíbrio.

A solução para a equação variacional mostrada na Equação 2.38 ( $A(t)$ ) é a Matriz de transição de estado (MTE), e é mostrada na Equação 2.51. Esta matriz mapeia variações no estado no tempo  $t_0$  ao estado do tempo  $t$ , refletindo assim a sensibilidade do estado final no tempo  $t$  para perturbações no estado inicial no tempo  $t_0$ . É também chamada de matriz de sensibilidade, pois contém informações sobre as sensibilidades do estado final (no tempo  $t$ ) para variações no estado inicial (no tempo  $t_0$ ). Dada alguma perturbação inicial,  $\delta x(t_0)$ , relativa ao estado inicial de referência

$x_{ref}(t_0)$ , a MTE é tipicamente empregado para prever a variação subsequente do estado final em relação a  $x_{ref}(t_f)$  em um tempo futuro  $t_f$ , ou seja,  $\delta x(t_f)$ . A MTE é uma matriz de derivadas parciais que relaciona os estados, isto é (BOSANAC, 2016; HAAPALA, 2010),

$$\Phi(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mathbf{x}(t_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(t)}{\partial x(t_0)} & \frac{\partial x(t)}{\partial y(t_0)} & \frac{\partial x(t)}{\partial z(t_0)} & \frac{\partial x(t)}{\partial \dot{x}(t_0)} & \frac{\partial x(t)}{\partial \dot{y}(t_0)} & \frac{\partial x(t)}{\partial \dot{z}(t_0)} \\ \frac{\partial y(t)}{\partial x(t_0)} & \frac{\partial y(t)}{\partial y(t_0)} & \frac{\partial y(t)}{\partial z(t_0)} & \frac{\partial y(t)}{\partial \dot{x}(t_0)} & \frac{\partial y(t)}{\partial \dot{y}(t_0)} & \frac{\partial y(t)}{\partial \dot{z}(t_0)} \\ \frac{\partial z(t)}{\partial x(t_0)} & \frac{\partial z(t)}{\partial y(t_0)} & \frac{\partial z(t)}{\partial z(t_0)} & \frac{\partial z(t)}{\partial \dot{x}(t_0)} & \frac{\partial z(t)}{\partial \dot{y}(t_0)} & \frac{\partial z(t)}{\partial \dot{z}(t_0)} \\ \frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial x(t_0)} & \frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial y(t_0)} & \frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial z(t_0)} & \frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial \dot{x}(t_0)} & \frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial \dot{y}(t_0)} & \frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial \dot{z}(t_0)} \\ \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial x(t_0)} & \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial y(t_0)} & \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial z(t_0)} & \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial \dot{x}(t_0)} & \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial \dot{y}(t_0)} & \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial \dot{z}(t_0)} \\ \frac{\partial \dot{z}(t)}{\partial x(t_0)} & \frac{\partial \dot{z}(t)}{\partial y(t_0)} & \frac{\partial \dot{z}(t)}{\partial z(t_0)} & \frac{\partial \dot{z}(t)}{\partial \dot{x}(t_0)} & \frac{\partial \dot{z}(t)}{\partial \dot{y}(t_0)} & \frac{\partial \dot{z}(t)}{\partial \dot{z}(t_0)} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Os elementos da matriz  $\Phi(t, t_0)$  são definidos como  $\phi_{ij}$  de forma que  $\Phi(t, t_0) = \{\phi_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n, n}$ . Juntamente com as seis equações diferenciais não-lineares dadas pela Equação 2.21, os 36 elementos da MTE de primeira ordem são numericamente integrados com uma simulação numérica e usados em vários algoritmos de correção diferencial, que nada mais é do que o método Newton-Rapson. A matriz de transição de estados (MTE) é obtida integrando as equações variacionais de  $t$  até  $t_0$ , conforme ilustrado na Equação 2.52 (BOSANAC, 2016; HAAPALA, 2010).

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, t) \\ \dot{\Phi}(t, t_0) &= A(t)\Phi(t, t_0) \end{aligned} \quad \text{com a condição inicial} \quad \begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}_{6 \times 6} \end{cases} \quad (2.52)$$

A MTE possui as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \Phi(t_0, t_0) &= \mathbf{I} \\ \Phi(t_2, t_0) &= \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) \\ \Phi(t_0, t_1) &= \Phi^{-1}(t_1, t_0) \end{aligned}$$

A MTE é uma ferramenta poderosa no refinamento de trajetórias periódicas e contém informações valiosas sobre a dinâmica e estabilidade que dependem da trajetória. A MTE está associada à resolução de um problema de valor de contorno em dois pontos formulado. Um caso especial dessa matriz é o das trajetórias periódicas, que fornece informações excepcionais sobre os autovetores, como os modos (in)estáveis para trajetórias de variedades hiperbólicas. Em um problema sem solução analítica de forma fechada, a capacidade de prever a resposta de uma solução a mudanças nas condições iniciais é crítica.

A MTE desempenha um papel importante na determinação de uma órbita periódica e de sua estabilidade. É uma parte essencial para o esquema de correção diferencial utilizado para a investigação realizada neste trabalho, que se baseia nas derivadas de um estado final em relação a um determinado estado inicial. A variação de primeira ordem de uma solução de referência  $\mathbf{x}(t)$  é dada pela Equação 2.53

$$\delta\mathbf{x}(t + \delta t) = \Phi(t_0, t)\delta\mathbf{x}(t_0) + \dot{\mathbf{x}}(t)\delta t \quad (2.53)$$

onde  $\delta t$  é a variação no tempo.

A Equação 2.53 deve ser empregada na resolução de um problema de valor de contorno em dois pontos pelo método de Newton Rapson, considerando que o tempo final é livre.

## 2.9 Matriz de monodromia

Outras informações importantes que obtemos a partir da matriz de transição de estado são as propriedades que podemos extrair de uma órbita periódica depois de computar a MTE após um período orbital. Os resultados da MTE que obtemos depois de um período orbital é bastante importante e recebe um nome especial, denominada de Matriz de Monodromia. Dito de outra forma, a matriz de monodromia é simplesmente a matriz de transição de estado após um período orbital, e contém informações sobre a estabilidade de toda a órbita.

$$M = \Phi(t_0 + T; t_0) \quad (2.54)$$

A matriz de monodromia é definida em termos de seis autovalores. Devido à natureza simplética da matriz de monodromia, os autovalores de  $M$  (Equação 2.54) ocorrem em pares recíprocos, como afirmado no Teorema de Lyapunov (YAKUBOVICH; STARZHINSKII, 1975; BOSANAC, 2016).

**Teorema de Lyapunov** *Se  $\lambda_j$  é um autovalor da matriz de monodromia  $\Phi(t_0 + T; t_0)$  de um sistema  $t$ -invariante, então  $\lambda_j^{-1}$  também é um autovalor de  $\Phi(t_0 + T; t_0)$ , com a mesma estrutura de divisores elementares.*

Existem dois autovalores unitários devido à existência da constante de Jacobi e à periodicidade exata da solução (BROUCKE, 1969; ESCRIBANO, 2013).

Um dos autovalores unitários possui um autovetor que aponta na direção do fluxo.

Isto implica que se perturbarmos a órbita na direção tangente a órbita periódica, esta órbita continuará periódica. Isto ocorre devido ao fato de que qualquer ponto em uma órbita periódica é um ponto periódico para o fluxo. (Em qualquer ponto da trajetória, podemos iniciar uma órbita periódica).

O outro autovalor unitário surge devido a um fenômeno menos trivial. O autovetor correspondente a esse autovalor aponta na direção da mudança na energia. Dito de outra forma, todo ponto de um sistema hamiltoniano tem uma energia associada. Isto decorre simplesmente do fato de que o hamiltoniano é conservado ao longo de trajetórias. Devido ao sistema ser conservativo, a energia ao longo da trajetória desse ponto é constante, mas essa normalmente não será a única órbita com uma determinada energia (MIRELES, 2006b; BOSANAC, 2016; MEYER; HALL, 1992).

Os autovalores restantes descrevem a dinâmica de uma partícula próxima à órbita (em primeira ordem). Uma vez que a matriz de monodromia é uma matriz real, seus autovalores são reais (ou complexos, que aparecem em pares conjugados complexos no círculo unitário), (ESCRIBANO, 2013).

Os autovalores de  $M$  no plano, para o modelo adotado neste trabalho, ocorrem da seguinte forma,  $(1, 1, \lambda_1, 1/\lambda_1, \lambda_2$  e  $1/\lambda_2)$ , implicando que os autovalores reais são recíprocos. No plano, encontramos que existe um autovalor muito grande ( $\lambda_1$ ) e um muito pequeno ( $1/\lambda_1$ ). Os autovetores correspondentes aos autovalores com  $\lambda > 1$  sugerem que existe uma variedade instável (expansão) e, conseqüentemente (devido ao par recíproco), existem autovalores com  $\lambda < 1$ , que sugerem variedades estáveis (contração).

## 2.10 Esquema de correção diferencial

Esta Seção trata de descrever um problema de valor de contorno em dois pontos com o tempo livre, cuja solução é obtida pelo método Newton-Rapson, conforme descrito por Brakwell e Brown (1979).

A busca por órbitas periódicas simétricas no plano  $xy$  se traduz na busca de trajetórias com dois cruzamentos perpendiculares ao eixo  $x$ , isto é  $y_0 = \dot{x}_0 = 0$  e  $y_{T/2} = \dot{x}_{T/2} = 0$ .

A primeira condição ( $\mathbf{x}_0' = (x_0; 0; 0; \dot{y}_0)^T$ ) já é satisfeita, pois encontramos as condições iniciais que iniciam as órbitas perpendiculares ao eixo  $x$ . A outra condição ( $\mathbf{x}'(T/2) = (x; 0; 0; \dot{y})^T$ ) é direcionada por meio de um esquema de correção diferencial baseado em variações de primeira ordem, conforme mostrado na Equ-



ção 2.53. Os parâmetros que procuramos são  $(x_0; \dot{y}_0; T/2)$ , que denominaremos de variáveis livres. É desejável ajustar esses três parâmetros para conduzir a órbita em direção a um cruzamento perpendicular, de modo que as condições de periodicidade sejam conhecidas. A variação de uma dada órbita inicial de referência,  $\mathbf{x}_0' = (x_0; 0; 0; \dot{y}_0)^T$ , é inserida na Equação 2.53 para fornecer o estado final perturbado no tempo  $T/2$  (BRAKWELL; BROWN, 1979; RUSSELL, 2006; BOSANAC, 2012),

$$\begin{bmatrix} \delta y_{T/2} \\ \delta \dot{x}_{T/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(T/2)}{\partial x(t_0)} & \frac{\partial x(T/2)}{\partial y(t_0)} & \dot{y}_{T/2} \\ \frac{\partial \dot{y}(T/2)}{\partial x(t_0)} & \frac{\partial \dot{y}(T/2)}{\partial y(t_0)} & \ddot{x}_{T/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta \dot{y}_0 \\ \delta t \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Para que o sistema de Equações 2.55 se torne completamente determinado, a correção deve ser aplicada a apenas dois parâmetros. Como queremos manter fixo o valor de  $x_0$ , então o esquema de correção diferencial é obtido buscando soluções com a mesma posição de cruzamento  $x$  (ou seja,  $\delta x_0 = 0$ ) e considerando que a órbita de referência termine com alguns valores próximos de zero para  $y_{T/2}$  e  $\dot{x}_{T/2}$ . Isto é, basta apenas ajustar a velocidade inicial ( $\dot{y}$ ) e o tempo  $T/2$  que estamos integrando. Com objetivo de zerá-los para a órbita corrigida,  $\delta y_{T/2}$  e  $\delta \dot{x}_{T/2}$  são definidos como  $-y_{T/2}$  e  $-\dot{x}_{T/2}$ , respectivamente (BRAKWELL; BROWN, 1979; RUSSELL, 2006; BOSANAC, 2012; BOSANAC, 2016). A solução para as incógnitas fornece a forma final da correção diferencial usada neste estudo quando procuramos órbitas simétricas em relação ao eixo  $x$ ,

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{y}_0 \\ \delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{x\dot{y}} & \dot{y}_{T/2} \\ \Phi_{\dot{y}\dot{y}} & \ddot{x}_{T/2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta y_{T/2} \\ \delta \dot{x}_{T/2} \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

onde consideramos  $\Phi_{mn}(T/2, 0) = \frac{\partial x_m(T/2)}{\partial x_n(t_0)}$ . Como a correção decorre de uma linearização, as condições iniciais da órbita devem estar na vizinhança da solução buscada, e com isso a Equação 2.56 é válida, desde que seja fornecida uma trajetória de referência quase axissimétrica. Por isso a importância de encontrar as condições iniciais no sistema linearizado (que pode ser obtida analiticamente) e usá-las como condição inicial para buscar a órbita periódica no sistema não linear (RUSSELL, 2006; MIRELES, 2006b; HOWELL, 1984).

## 2.11 Retornando para a dinâmica não linear

Vamos retomar agora nosso raciocínio. Nós vimos como determinar as condições iniciais de posição e velocidade no sistema linear, conforme explicado na Seção 2.6. Nós encontramos as condições iniciais que fornecem um movimento harmônico no

sistema linear conforme mostrada na Equação 2.50.

Observe que ainda não determinamos a nossa estimativa inicial do período da órbita (ou meio período),  $T/2$ , e isto deve ser determinado. A estimativa inicial que utilizamos para meio período da órbita ( $T/2$ ), foi obtida da seguinte forma. Nós integramos os dados iniciais encontrados utilizando o sistema não linear, conforme mostrado na Figura 2.4. A trajetória resultante se move na direção positiva de  $y$ , se afastando do eixo  $x$ . Foi identificado o tempo em que a partícula leva para retornar ao eixo  $x$ . O momento em que isso ocorre é  $T/2$ . Fazendo isto, descobrimos que no tempo  $T/2 = 1,45$ ,  $y(T/2) = 1,9839 \times 10^{-4}$ . Agora, nós temos todas as condições necessárias para iniciar o método de Newton-Rapson. Sabendo que nosso estado inicial é perpendicular ao eixo  $x$  e que nosso estado final não é perpendicular, mas próximo a ele, podemos usar o esquema de correção diferencial para conduzir nosso estado final em direção a um cruzamento perpendicular do eixo  $x$ , que teria os estados finais  $\dot{x} = 0$  e  $y = 0$ .

Depois de 14 iterações, nós encontramos as condições iniciais do sistema não linear, dadas por

$$\begin{aligned}\dot{y} &= 3,4873969820 \times 10^{-5}, \\ T/2 &= 1,151799448654493\end{aligned}\tag{2.57}$$

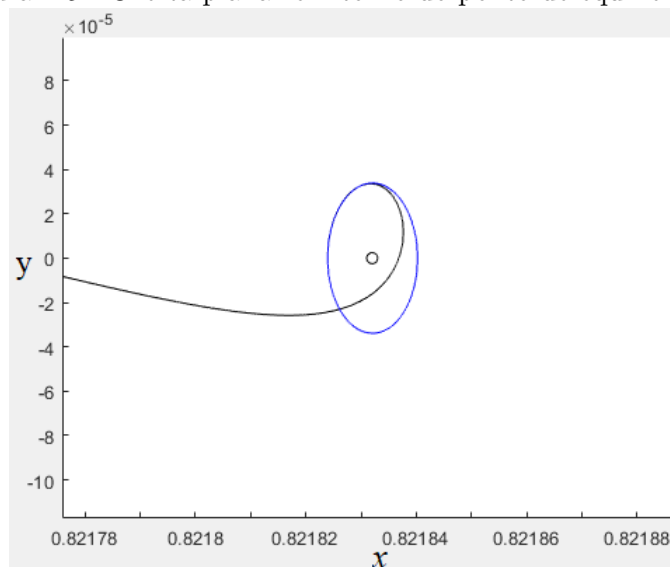
que nos fornece a condição inicial

$$\begin{aligned}x(0) &= 0,821821955621121 \\ y(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= 0,000034873969820\end{aligned}\tag{2.58}$$

e o período  $T$  é dado por  $2T/2 = 2,303598897308985$ .

Integramos essas condições iniciais durante esse período e a órbita é mostrada na Figura 2.5. Os resultados mostram que realmente encontramos a órbita de Lyapunov (órbita planar). A energia da órbita planar mostrada na Figura 2.5 é  $C_{planar} = 3,201731105540248$ .

Figura 2.5 - Órbita planar em torno do ponto de equilíbrio  $L_1$ .



Podemos observar na Figura 2.5 duas trajetórias. A trajetória preta é o caminho seguido pelo veículo espacial utilizando as condições iniciais encontradas considerando o sistema linear. Por outro lado, a trajetória azul é a órbita que um veículo espacial faria com as condições iniciais encontradas pelo programa utilizando o método descrito nesta Seção.

## 2.12 Família de Lyapunov e órbitas Halo

Se a matriz de monodromia de uma órbita periódica possuir exatamente dois autovalores unitários, esta órbita é denominada de elementar (MEYER; HALL, 1992; MIRELES, 2006b). Para uma órbita periódica, temos o seguinte teorema.

**Teorema do cilindro** *Uma órbita periódica elementar de um sistema hamiltoniano reside em um cilindro suave de soluções periódicas parametrizadas pela integral hamiltoniana.*

Depois de encontrar uma órbita de Lyapunov (ou Halo) e observar que ela é uma órbita elementar, ou seja, possui exatamente dois autovalores unitários, podemos usar essa informação como um ponto de partida para se mover ao longo do cilindro. Neste trabalho, nós usamos as condições iniciais da primeira órbita de Lyapunov encontrada, conforme mostrada na Seção 2.11, como ponto de partida para encontrar uma nova órbita de Lyapunov considerando um pequeno acréscimo na componente  $x$ , onde consideramos o acréscimo de  $\Delta x = 0,0001$ . Se encontrarmos outra órbita de Lyapunov aqui, iteramos o processo. Dessa maneira, calculamos o cilindro a partir

do teorema.

### 2.13 Resultados

As condições iniciais obtidas para o sistema em estudo, usando a razão de massa de  $\mu^* = 0,005284$ , considerando o caso clássico  $d = 0$ , são:

i) Para a órbita de Lyapunov em torno de  $L_1$ , quando  $d = 0$ , é

$$\mathbf{x}_{0L_1} = [0,89696483, 0, 0, -0,3370635541809143]^T$$

com um período orbital de 3,083 unidades canônicas.

ii) Para a órbita de Lyapunov em torno de  $L_2$ , quando  $d = 0$ , é

$$\mathbf{x}_{0L_1} = [1,18638324, 0, 0, -0,2609113622544423]^T$$

com um período orbital de 3,54 unidades canônicas.

As órbitas planares em torno de  $L_1$  e  $L_2$  são mostradas nas Figuras 2.6 e 2.7, em vermelho e verde, respectivamente.

Figura 2.6 - Órbita planar em torno de  $L_1$  (vermelho) e  $L_2$  (verde). O corpo  $M_2$  está plotado de preto.

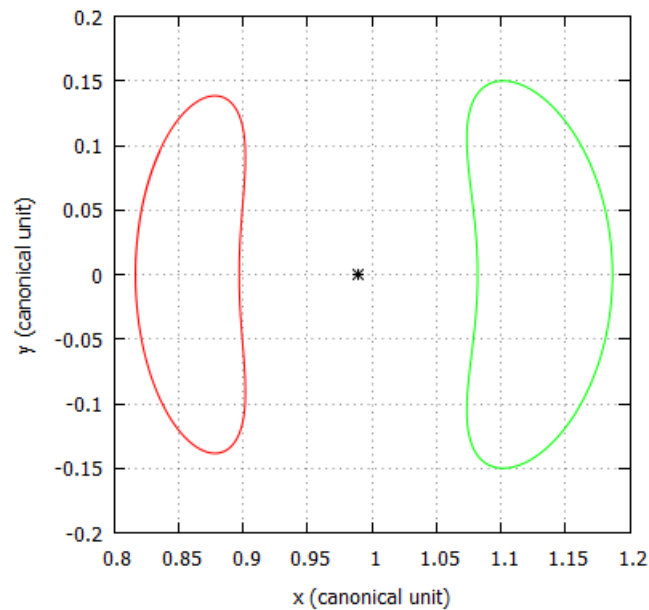
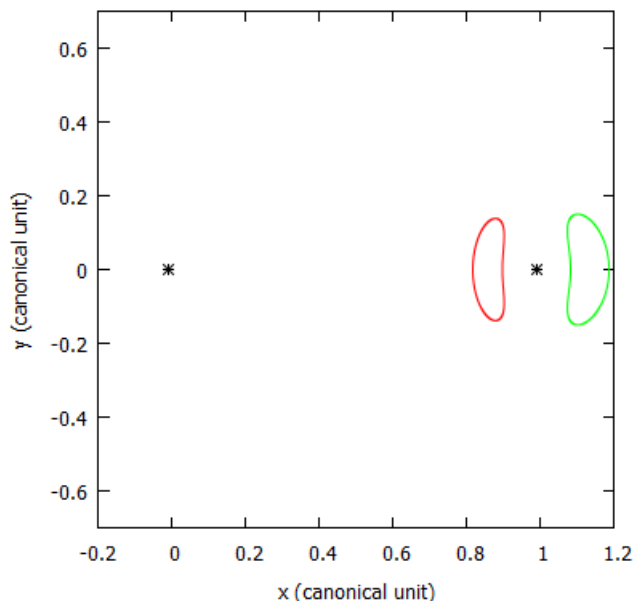


Figura 2.7 - Os corpos primários plotados com asteriscos pretos e a órbita planar em torno de  $L_1$  (vermelho) e  $L_2$  (verde).



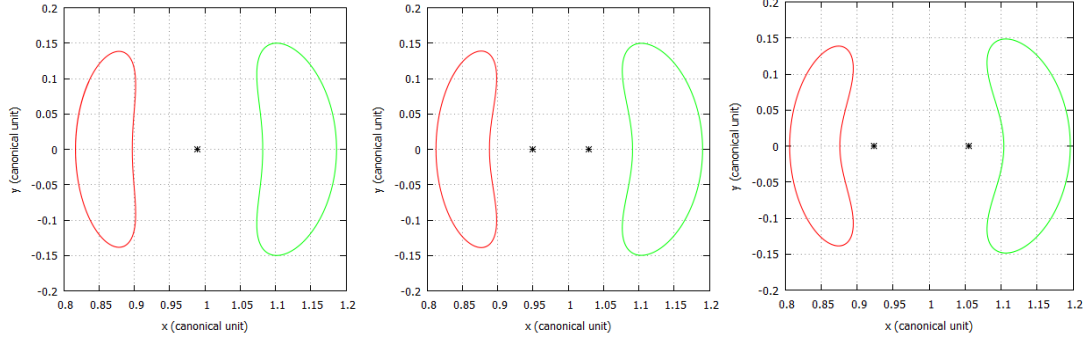
## 2.14 Órbitas de Lyapunov considerando a dimensão do dipolo

Alguns resultados numéricos foram obtidos considerando  $d \neq 0$  do corpo  $M_2$  e assumindo  $\mu^* = 0,005284$ . Este valor adotado corresponde a razão de massa do sistema Alpha-Gamma do sistema de asteroide 2001SN<sub>263</sub>. Foram assumidos vários valores da dimensão  $d$  de  $M_2$ , modificando a dimensão do dipolo de massa em rotação de 0 a 500 metros, usando um passo de 100 metros. A proposta dessa variação é entender como a dimensão do dipolo influencia as órbitas planares próximo de  $M_2$ , isto é, ao redor dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$ .

Os resultados mostrados aqui foram obtidos para  $C^* = 3, 10$ , para o qual os gargalos em torno de  $L_1$  e  $L_2$  estão abertos. Com as condições iniciais corretas, foi possível encontrar órbitas de Lyapunov em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  (vermelho) e  $L_2$  (verde), como mostrado na Figura 2.8. Todas as trajetórias orbitam no sentido horário.

A Figura 2.8 mostra que, à medida que aumentamos a dimensão do dipolo de massa, as órbitas planares se tornam mais deformadas, cada vez mais se assemelhando a uma forma de rim. Observe que a dimensão do dipolo praticamente não altera a amplitude da órbita planar. Na Figura 2.8 (a), a dimensão do dipolo é zero, ou seja, o corpo  $M_2$  é modelado como um ponto de massa.

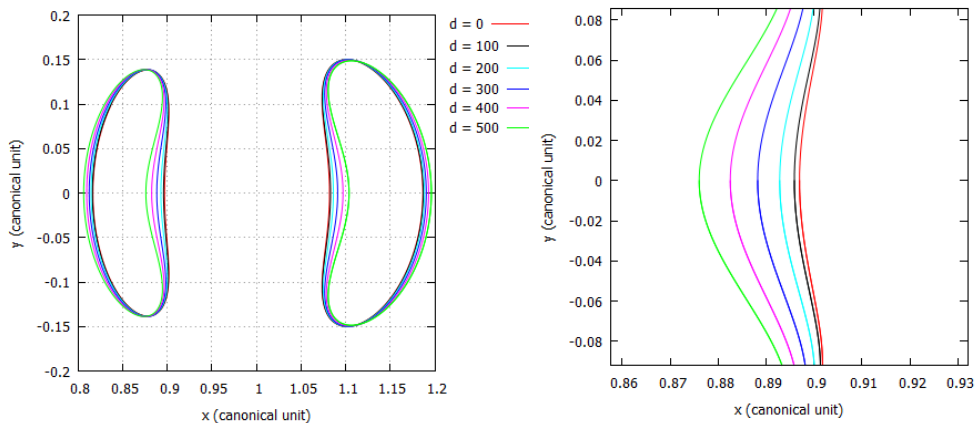
Figura 2.8 - Órbitas planares em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  (vermelho) e  $L_2$  (verde). (a) Órbita planar considerando  $d = 0$  (Figura da esquerda). (b) Órbita planar considerando  $d = 300$  (Figura do meio). (c) Órbita planar considerando  $d = 500$  (Figura da direita).



Na Figura 2.8 (b), a dimensão do dipolo é de 300 metros e, finalmente, na figura 2.8 (c), a dimensão do dipolo é de 500 metros.

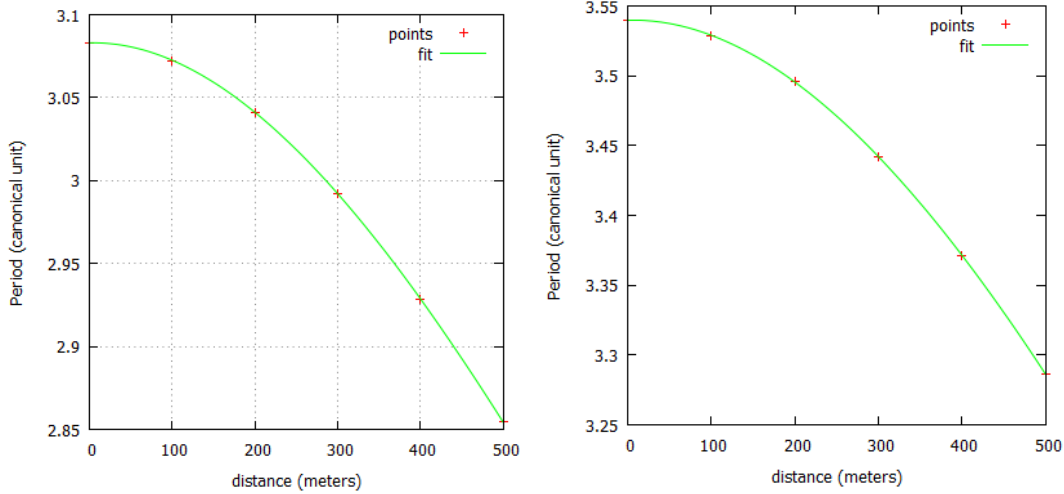
A Figura 2.9 (a) mostra as órbitas planares em torno dos pontos  $L_1$  e  $L_2$ . A legenda no lado superior direito relaciona a dimensão do dipolo (em metros) com a cor da órbita. Quando a órbita planar é verde, por exemplo, isso implica que a dimensão do dipolo é de 500 metros. A Figura 2.9 (b) é uma aproximação da órbita planar em torno de  $L_1$ , que é o ponto de equilíbrio mais próximo do dipolo. Podemos verificar através da Figura 2.9 (b) que, à medida que aumentamos a dimensão do dipolo, a órbita se torna mais deformada.

Figura 2.9 - Órbitas planares em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  para várias dimensões do dipolo. (a) Órbita planar considerando  $C^* = 3,10$ . (Figura da esquerda). (b) Ampliação de regiões contendo órbitas planares em torno de  $L_1$  (Figura direita).



Embora a dimensão do dipolo não afete consideravelmente a amplitude da órbita, ela influencia o período da órbita. À medida que a distância dos corpos que formam o dipolo aumenta, para  $C^* = 3, 10$ , o período orbital das órbitas planares em torno do ponto de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  diminui, conforme mostrado na Figura 2.10 (a) e (b), respectivamente.

Figura 2.10 - Período da órbitas planares em função da dimensão do dipolo.



(a) Período da órbita planar em função da dimensão do dipolo para o ponto de equilíbrio  $L_1$  usando a constante de Jacobi  $C^* = 3, 10$ . (Figura da esquerda). (b) Período da órbita planar em função da dimensão do dipolo para o ponto de equilíbrio  $L_2$  usando a constante de Jacobi  $C^* = 3, 10$  (Figura direita).

Observamos que a amplitude da órbita planar em torno de  $L_1$  é menor em relação à amplitude em torno de  $L_2$ , o que torna seu período menor, devido ao fato da partícula descrever uma trajetória menor.

O ajuste da curva foi realizado para encontrar uma expressão analítica relacionando o período das órbitas planares em função da dimensão do dipolo, considerando  $C^* = 3, 10$ . A expressão analítica encontrada no ajuste da curva para o período orbital em função da dimensão do dipolo em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  foi um polinômio de terceiro grau, conforme mostrado nas Equações 2.59 e 2.60, respectivamente.

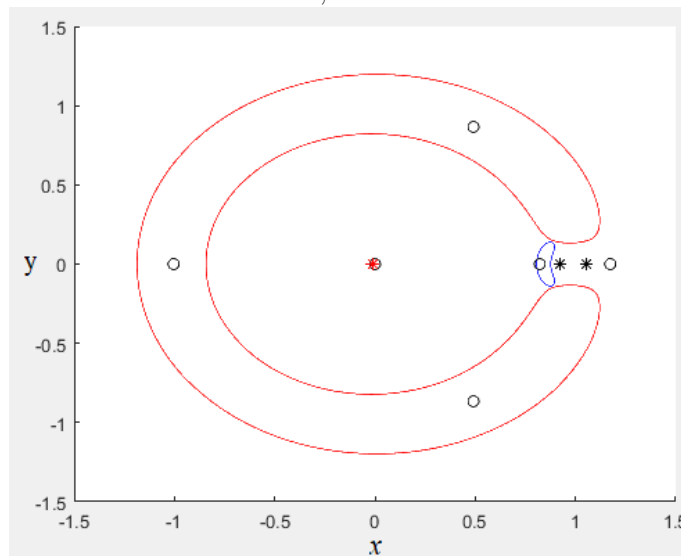
$$T_{L_1}^{3,10} = 5,52 \times 10^{-10}d^3 - 1,21 \times 10^{-6}d^2 + 1,21 \times 10^{-5}d + 3,08 \quad (2.59)$$

$$T_{L_2}^{3,10} = 4,54 \times 10^{-10}d^3 - 1,27 \times 10^{-6}d^2 + 1,53 \times 10^{-5}d + 3,54 \quad (2.60)$$

O índice superior e inferior do período  $T$  indica a constante de Jacobi usada para esta expressão e o ponto de equilíbrio relacionado, respectivamente.

As Figuras 2.11 e 2.12 mostram as curvas de velocidade zero (CVZ), uma órbita planar (azul) em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente, o corpo primário mais massivo modelado como um ponto de massa (asterisco vermelho), o primário menos massivo modelado como um dipolo de massa em rotação (asterisco preto) e as posições dos pontos de equilíbrio (círculos). As constantes de Jacobi correspondentes a essas figuras são  $C^* = 3, 10$ , para as quais os pescoços em torno de  $L_1$  e  $L_2$  estão abertos. Para obter esses resultados mostrados nas Figuras 2.11 e 2.12, nós adotamos que a dimensão do dipolo é de 500 metros e a razão de massa  $\mu^* = 0,005284$ .

Figura 2.11 - Órbita planar em torno do ponto de equilíbrio  $L_1$  e curva de velocidade zero. Constante de Jacobi  $C^* = 3, 10$ .



A partir das órbitas planares encontradas, usando uma estratégia de continuação abordada na seção 2.12, foi possível encontrar famílias de órbitas em torno dos pontos de equilíbrio em estudo. Essas famílias de órbitas planares são mostradas nas Figuras 2.13 e 2.14. O programa utilizado foi baseado no software desenvolvido por JD Mireles James, com algumas modificações feitas para se adequar ao sistema em estudo (MIRELES, 2006a; MIRELES, 2006b). Uma família de órbitas foi construída em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$ , como mostrado nas Figuras 2.13 e 2.14, respectivamente.



Figura 2.12 - Órbita planar em torno do ponto de equilíbrio  $L_2$  e curva de velocidade zero. Constante de Jacobi  $C^* = 3, 10$ .

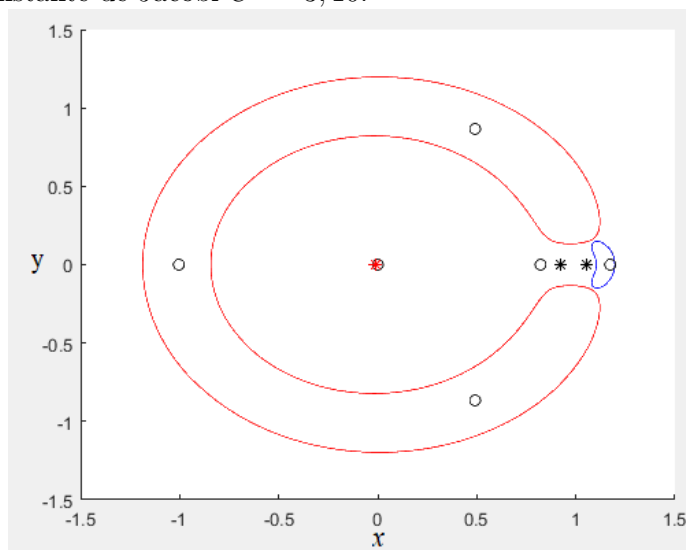
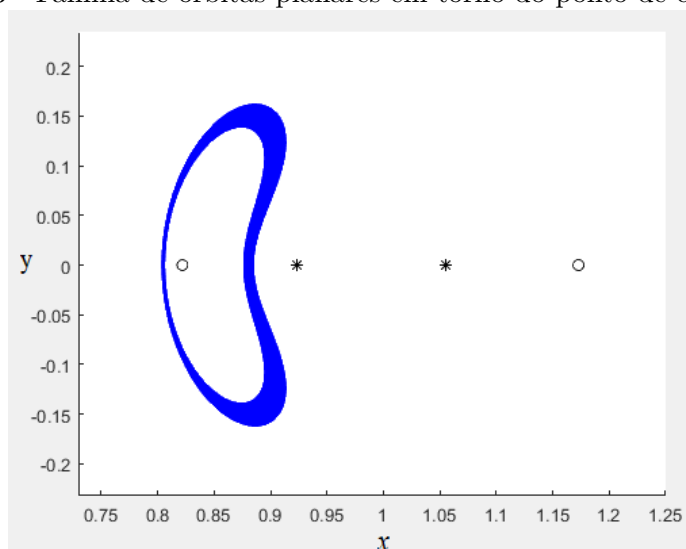
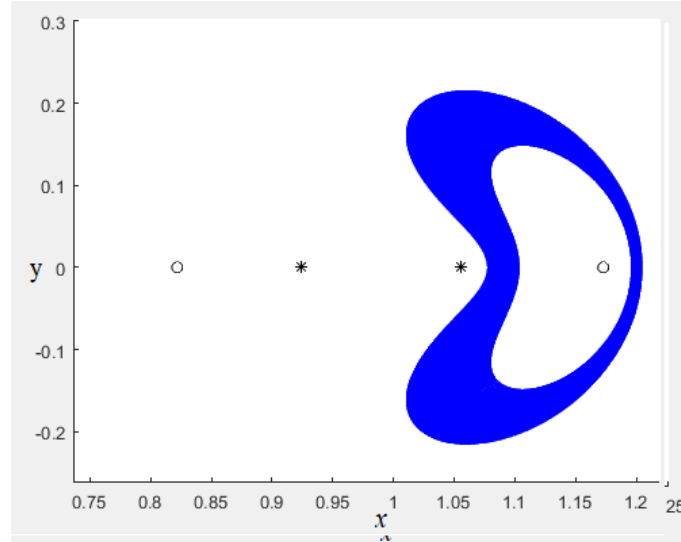


Figura 2.13 - Família de órbitas planares em torno do ponto de equilíbrio  $L_1$ .



Pode ser visto, nas Figuras 2.13 e 2.14, que, à medida que aumentamos a amplitude das órbitas planares, elas se aproximam do corpo primário menos massivo, fazendo com que as órbitas se tornem cada vez mais deformadas, assumindo uma forma de rim. Se a forma alongada do primário menos massivo não fosse levada em consideração, essas órbitas seriam menos deformadas e a partícula de massa infinitesimal seguiria outra trajetória. Os asteriscos pretos, próximos aos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$ , são os corpos das massas  $m_{21}$  e  $m_{22}$ , respectivamente, que formam o dipolo de massa.

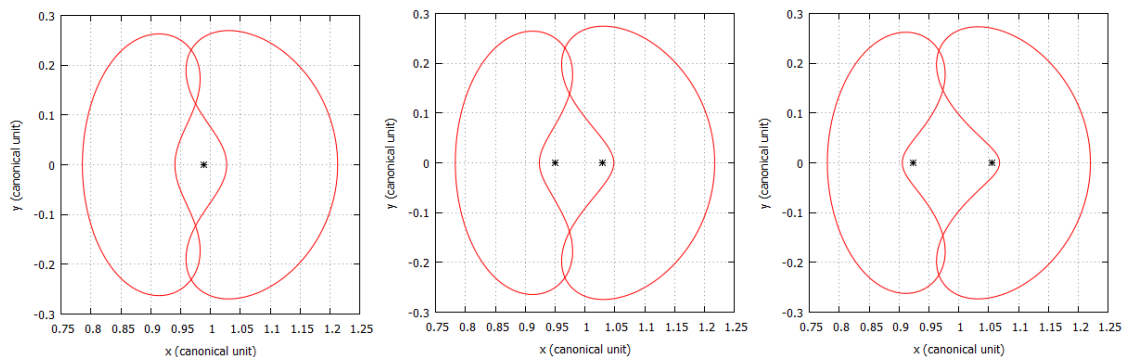
Figura 2.14 - Família de órbitas planares em torno do ponto de equilíbrio  $L_2$ .



Os círculos são as posições dos pontos de equilíbrio  $L_1$  (lado esquerdo) e  $L_2$  (lado direito).

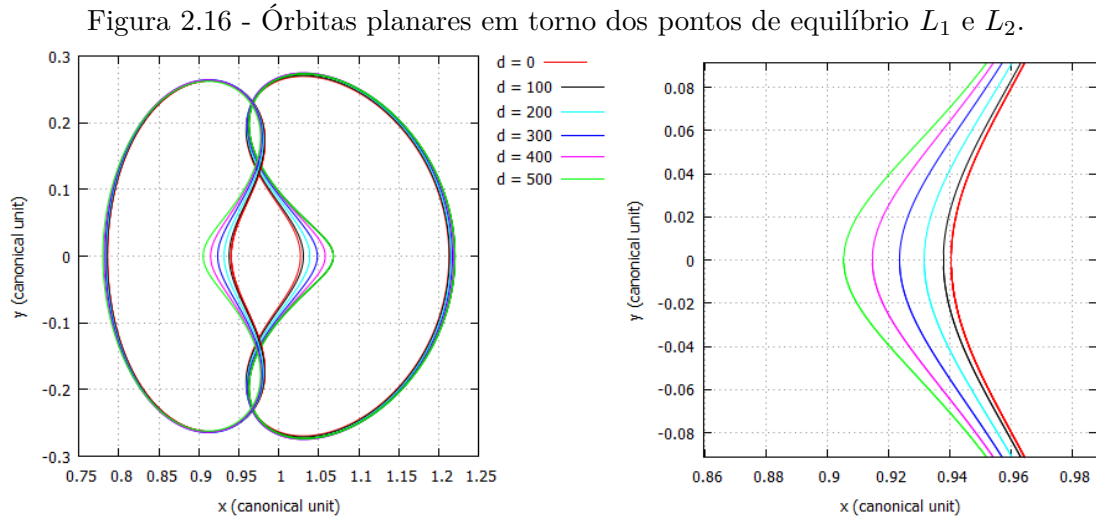
Ao diminuir a constante de Jacobi para  $C^* = 3,01$ , as regiões proibidas diminuem, aumentando assim as regiões onde o movimento do veículo espacial é permitido. Os resultados mostrados aqui foram obtidos usando  $C^* = 3,01$ . Com as condições iniciais corretas, foi possível encontrar as órbitas planares em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  considerando a constante de Jacobi  $C^* = 3,01$ , como mostra a Figura 2.15.

Figura 2.15 - Órbita planar em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  considerando a constante de Jacobi  $C^* = 3,01$ .



(a) Órbita planar considerando  $d = 0$  (Figura da esquerda). (b) Órbita planar considerando  $d = 300$  (Figura do meio). (c) Órbita planar considerando  $d = 500$  (Figura da direita.)

Observamos que, quando a constante de Jacobi diminui, há um aumento de energia, fazendo com que a amplitude da órbita se torne cada vez maior. Na Figura 2.15 (a), a dimensão do dipolo é zero, ou seja, o corpo  $M_2$  é modelado como um ponto de massa. Na Figura 2.15 (b), a dimensão do dipolo é de 300 metros e, finalmente, na Figura 2.15 (c), a dimensão do dipolo é de 500 metros.



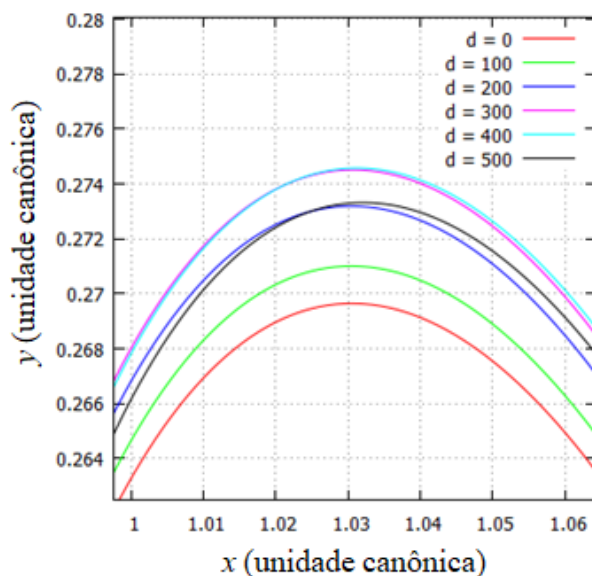
(a) Família de órbitas planares considerando  $C^* = 3,01$  (Figura da esquerda). (b) Aproximação na órbita planar em torno de  $L_1$  (Figura direita).

A Figura 2.16 (a) mostra as órbitas planares em torno dos pontos  $L_1$  e  $L_2$  considerando a constante de Jacobi  $C^* = 3,01$ . A legenda no lado superior direito relaciona a dimensão do dipolo (em metros) com a cor da órbita. Quando a órbita planar é rosa, por exemplo, isso implica que a dimensão do dipolo é de 400 metros. A Figura 2.16 (b) é uma aproximação em torno da órbita planar na vizinhança de  $L_1$ . Verificamos que, à medida que aumentamos a dimensão do dipolo, a órbita se torna mais deformada.

Para entender como a amplitude dessas órbitas se comportam em função do tamanho do dipolo, a região superior das órbitas ao redor do ponto de equilíbrio  $L_2$  foi ampliada e mostrada na Figura 2.17.

Podemos ver que a amplitude da órbita difere muito pouco à medida que mudamos a dimensão do dipolo, isto é, a medida que o primário menos massivo se torna cada vez mais alongado. A variação da amplitude é de 0,004967 unidades canônicas, o que equivale a 18,89 metros.

Figura 2.17 - Amplitude das órbitas de Lyapunov considerando a constante de Jacobi  $C^* = 3,01$ .

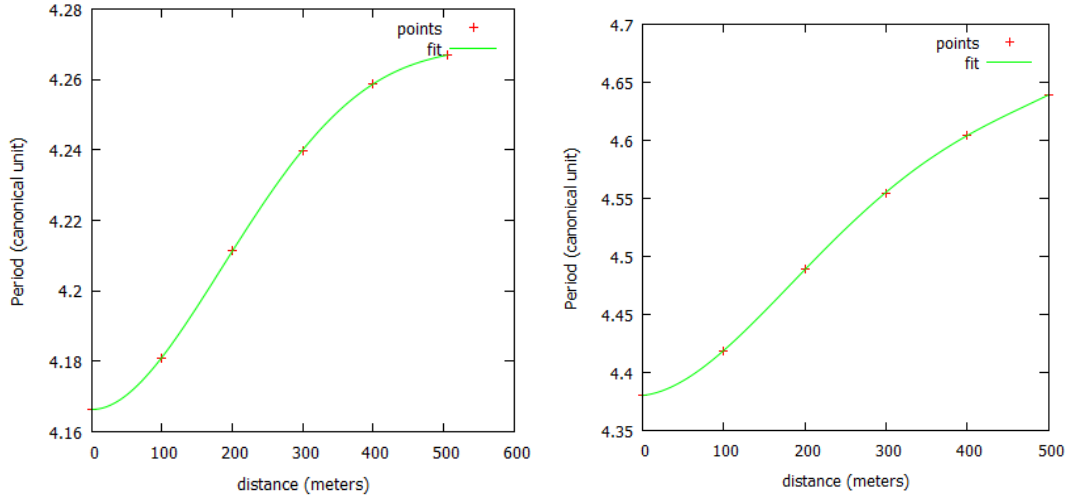


Observe que, nesse caso, o período da órbita se torna maior à medida que aumentamos a dimensão do dipolo. Isso se deve ao fato de que, quando a energia do veículo espacial aumenta, a órbita se torna cada vez mais deformada à medida que aumentamos a dimensão do dipolo. À medida que a órbita se torna mais deformada, o caminho percorrido pelo veículo espacial se torna maior, aumentando seu período orbital. Embora quando a partícula esteja perto do dipolo a aceleração seja maior, porque o campo gravitacional é mais intenso, o desvio que a partícula sofre é considerável, tornando o tempo necessário para concluir um período relevante. Isso pode ser observado observando as figuras 2.18 (a) e 2.18 (b).

O período da órbita em torno de  $L_2$  é maior porque sua amplitude é maior em relação à órbita planar em torno de  $L_1$ . O ajuste da curva foi realizado para encontrar uma expressão analítica relacionando o período das órbitas planares com a dimensão do dipolo, considerando  $C^* = 3,01$ . A expressão analítica encontrada no ajuste da curva para o período orbital em função da dimensão do dipolo em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  foi um polinômio de quarto grau, conforme mostrado nas Equações 2.61 e 2.62, respectivamente.

$$T_{L_1}^{3,01} = 3,33 \times 10^{-12} d^4 - 4,78 \times 10^{-9} d^3 + 1,96 \times 10^{-6} d^2 + 3,08 - 4,45 \times 10^{-6} d + 4,16 \quad (2.61)$$

Figura 2.18 - Período da órbitas planares em função da dimensão do dipolo.



(a) Para o ponto de equilíbrio  $L_1$  usando a constante de Jacobi  $C^* = 3,01$ . (Figura da esquerda). (b) Para o ponto de equilíbrio  $L_2$  usando a constante de Jacobi  $C^* = 3,01$  (Figura direita).

$$T_{L_2}^{3,01} = 7,92 \times 10^{-12}d^4 - 1,04 \times 10^{-8}d^3 + 4,13 \times 10^{-6}d^2 + 6,93 - 4,45 \times 10^{-5}d + 4,38 \quad (2.62)$$

O índice superior e inferior do período  $T$  indica a constante de Jacobi usada para esta expressão e o ponto de equilíbrio relacionado, respectivamente.

As Figuras 2.19 e 2.20 mostram as curvas de velocidade zero (CVZ) quando a dimensão do dipolo é de 500 metros e a razão de massa do sistema é  $\mu^* = 0,005284$ . As Figuras 2.11 e 2.12 mostram a órbita planar (azul) em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente, o primário mais massivo (asterisco vermelho), o primário menos massivo (asterisco preto) e as posições dos pontos de equilíbrio (círculos). A constante de Jacobi relacionada a essas figuras é  $C^* = 3,01$ .

Devido à diminuição da constante de Jacobi em relação aos casos anteriores (Figuras 2.11 e 2.12), a energia fica maior, tornando áreas proibidas cada vez menor, como podemos ver nas Figuras 2.19 e 2.20 .

Da mesma forma que fizemos anteriormente, nós encontramos famílias de órbitas em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$ . Essas famílias de órbitas planares são mostradas nas Figuras 2.21 e 2.22. Uma família de órbitas foi construída em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$ , como mostrado nas Figuras 2.21 e 2.22, respectivamente.

Figura 2.19 - Órbita planar em torno do ponto de equilíbrio  $L_1$  e curva de velocidade zero. Constante de Jacobi  $C^* = 3,01$ .

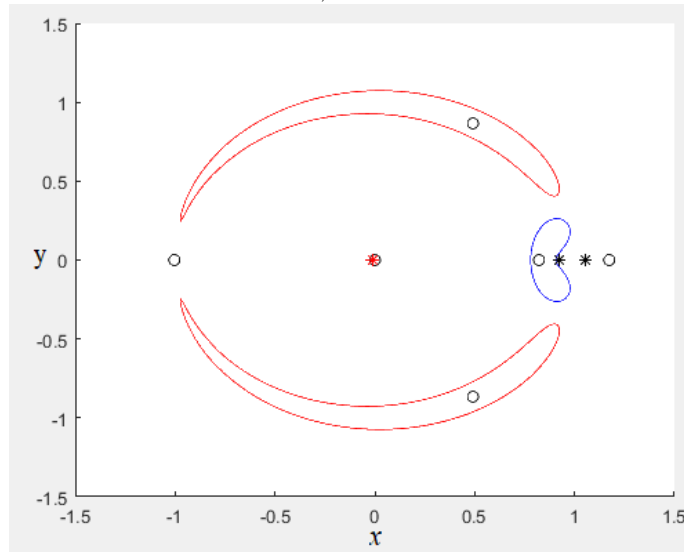
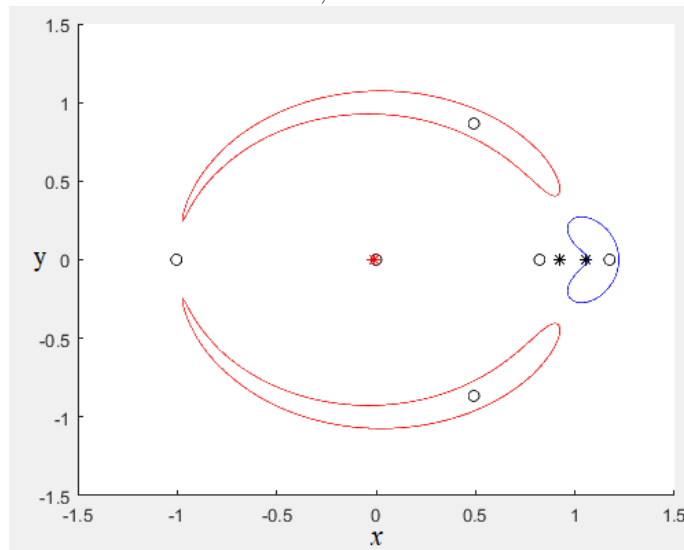


Figura 2.20 - Órbita planar em torno do ponto de equilíbrio  $L_2$  e curva de velocidade zero. Constante de Jacobi  $C^* = 3,01$ .



## 2.15 Órbitas planares variando a razão de massa

Nesta seção, o trabalho consiste em investigar as órbitas planares quando mantemos a dimensão do dipolo de massa em rotação constante e modificamos a razão de massa do sistema. A dimensão do dipolo é mantida constante no valor  $d = 250$  metros.

Figura 2.21 - Família de órbitas planares em torno do ponto de equilíbrio  $L_1$ .

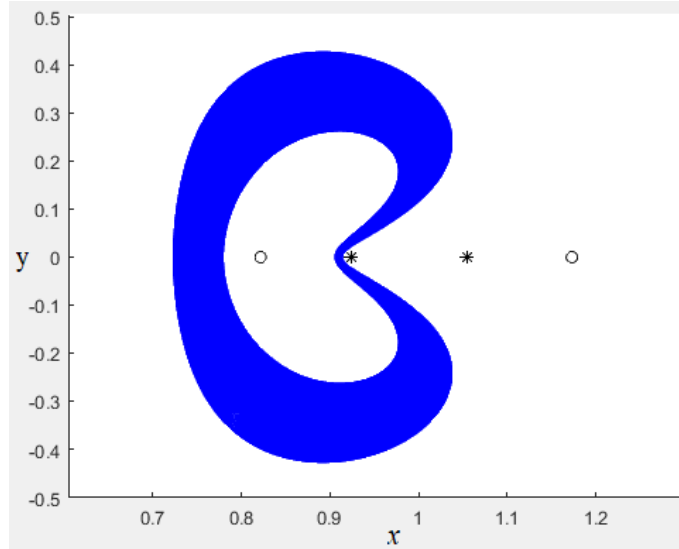
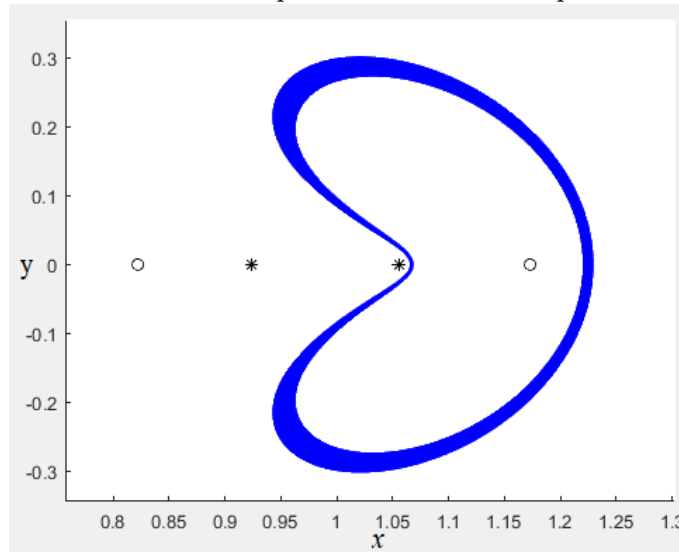


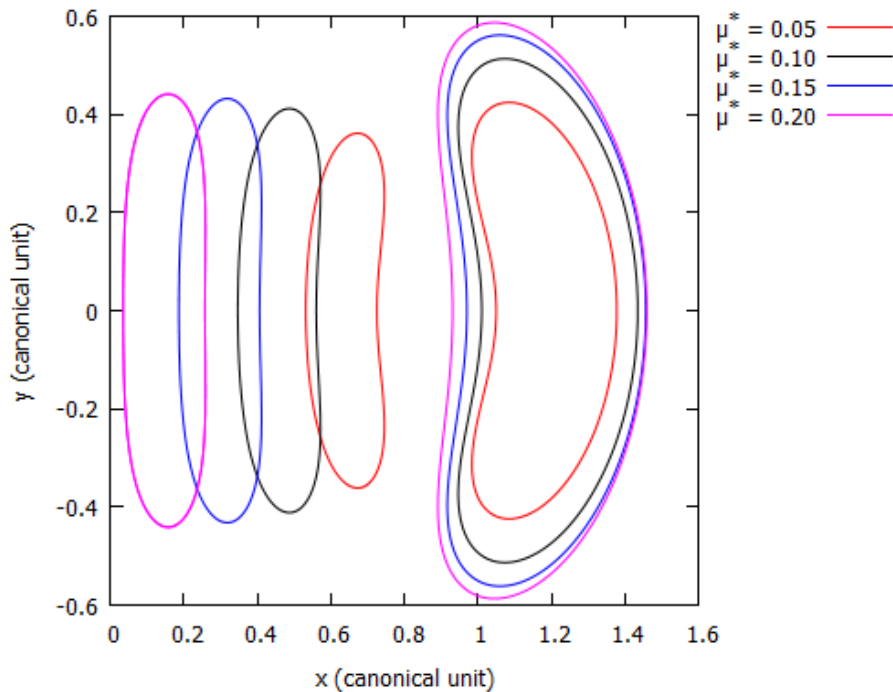
Figura 2.22 - Família de órbitas planares em torno do ponto de equilíbrio  $L_2$ .



Foram consideradas situações em que a massa do primário menos massivo (dipolo) apresenta valores de 0,05; 0,1; 0,15 e 0,2. Esses valores fazem com que  $M_1$  se torne menos massivo e, conseqüentemente,  $M_2$  se torne mais massivo. A Figura 2.23 mostra as órbitas planares para várias proporções de massa, considerando a constante de Jacobi  $C^* = 3, 10$ .

As cores das órbitas estão relacionadas à razão de massa do sistema. Quando a razão de massa é  $\mu^* = 0, 1$ , por exemplo, a curva é preta.

Figura 2.23 - Órbitas planares em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  para diferentes proporções de massa.  $C^* = 3, 10$ .



Pode ser visto na Figura 2.23 que, à medida que aumentamos a razão de massa do sistema, o ponto de equilíbrio  $L_1$  muda consideravelmente, fazendo com que as órbitas ao redor desse ponto também se alterem, se deslocando no mesmo sentido do movimento do ponto de equilíbrio  $L_1$ . Por outro lado, o ponto de equilíbrio  $L_2$  se move muito pouco, o que faz com que as órbitas em torno desse ponto se tornem concêntricas. Devido ao fato de que, à medida que aumentamos a razão de massa do sistema, os pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  se afastam mais do dipolo de massa em rotação, as órbitas planares se tornem menos deformadas.

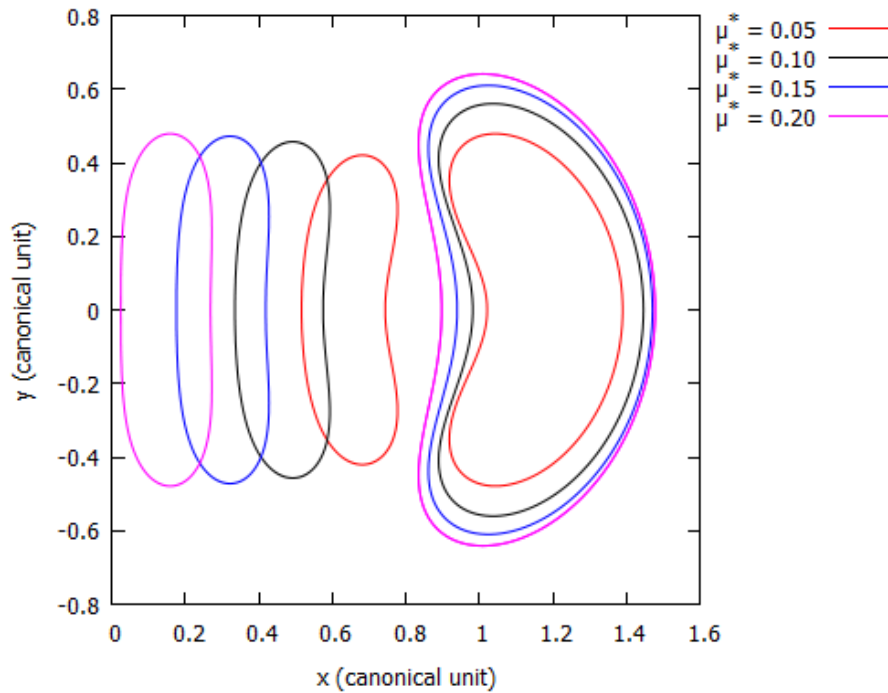
A Figura 2.24 mostra as órbitas planares para várias razões de massa, considerando a constante de Jacobi  $C^* = 3, 01$ .

## 2.16 Considerações

Neste Capítulo, realizamos uma análise das órbitas planares em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  no problema restrito síncrono de quatro corpos. As estimativas iniciais para órbitas foram encontradas a partir da linearização das equações de movimento.



Figura 2.24 - Órbitas planares em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  para diferentes proporções de massa.  $C^* = 3,01$ .



Na modelagem, consideramos que um dos corpos primários era um ponto de massa (primário mais massivo) e o outro foi modelado como um dipolo de massa em rotação, cuja rotação é sincronizada com o sistema. É possível notar que, quando levamos em consideração a forma alongada de um dos primários, comparada ao problema clássico restrito de três corpos, as trajetórias encontradas diferem entre si, fazendo com que as órbitas desse modelo sofram maiores desvios devido aos efeitos gravitacionais de  $M_2$ . Foi observado que a modificação no tamanho de  $M_2$  não altera substancialmente a amplitude da órbita, mas afeta significativamente o período e o formato da órbita, fazendo com que a órbita planar fique mais deformada. Também fizemos uma investigação numérica modificando a razão de massa do sistema. Descobrimos que, quando aumentamos a razão de massa, o ponto de equilíbrio  $L_1$  muda consideravelmente, fazendo com que a órbita planar em torno desse ponto de equilíbrio também se afaste de  $M_2$ . Por outro lado, o ponto de equilíbrio  $L_2$  tem um deslocamento sutil, à medida que aumentamos a razão de massa do sistema, fazendo com que as órbitas planares em torno de  $L_2$  se tornem concêntricas. Embora os pontos de equilíbrio colineares sejam instáveis, ainda sim, são considerados regiões do espaço onde recebem o menor distúrbio. Portanto, essas regiões são bons lugares para colocar um veículo espacial e podem ser usadas como órbitas de estacionamento.



### 3 ANÁLISE NUMÉRICA DO MOVIMENTO ORBITAL EM TORNO DE UM SISTEMA BINÁRIO DE ASTEROIDE USANDO O MODELO DO DIPOLO

#### 3.1 Introdução

O estudo do ambiente dinâmico nas proximidades de um sistema binário de asteroides é de grande interesse para o projeto de missões de exploração e também para a ciência planetária. Por isso, a investigação e análise de pequenos corpos celestes se tornaram uma questão fundamental na exploração do espaço profundo. Mas entender o comportamento dinâmico de uma partícula na vizinhança desses pequenos corpos tem sido um desafio para a astrodinâmica. Esse desafio ocorre devido à combinação da rápida rotação dos asteroides em torno de seu próprio eixo com a atração gravitacional não esférica, tornando o ambiente não linear e governando a dinâmica de uma espaçonave próxima à sua superfície.

Com o objetivo de compreender o ambiente dinâmico na vizinhança de corpos irregulares, [Chappaz e Howell \(2015\)](#) investigou a estabilidade de órbitas periódicas em torno de um sistema de asteroides binários síncronos considerando o modelo elipsóide triaxial ([CHAPPAZ; HOWELL, 2015](#)). [Chappaz e Howell \(2015\)](#) observou que a forma não esférica do corpo secundário influencia significativamente o comportamento das órbitas halo em torno de  $L_1$  e  $L_2$ . [Liang et al. \(2019\)](#) utilizou o problema restrito ligado de três corpos para investigar a influência da velocidade angular dos asteroides nas bifurcações das órbitas periódicas (planar, halo e vertical). [Liang et al. \(2019\)](#) descobriu uma nova bifurcação sob variação da velocidade angular  $\omega$  e da constante de Jacobi  $C$  utilizando uma razão de massa fixa  $\mu$ . Para realizar a investigação numérica deste Capítulo, utilizaremos o modelo simplificado denominado problema restrito síncrono de três corpos, idealizado por [Santos et al. \(2017b\)](#).

Com base nos asteroides do tipo A, consideraremos em nossa análise que o primário mais massivo tem uma forma esférica e diâmetro de 5 km, uma vez que os asteroides do tipo A têm um diâmetro menor que 10 km ([PRAVEC; HARRIS, 2007](#)). Sabendo que, em média, a órbita do corpo secundário dos asteroides do tipo A é, aproximadamente, 4,8 raio do primário, então consideramos que a distância entre os corpos massivos é de 12 km. Esse 12 km é nosso fator de normalização de distância. É conhecido na literatura que, para os asteroides do tipo A, o tamanho do corpo secundário está entre 4 % e 58 % do tamanho do primário mais massivo, cuja faixa de razão de massa varia de  $6,4 \times 10^{-5}$  a  $2,0 \times 10^{-1}$ . Com base nessa evidência, consideraremos nesta análise uma faixa de razão de massa de  $1 \times 10^{-5} - 1 \times 10^{-1}$  e a dimensão do

corpo secundário de 0 a 2000 metros.

Não foi encontrado na literatura nenhuma trabalho analisando a influencia do alongamento do corpo secundário e da razão de massa do sistema na estabilidade e bifurcação das órbitas planares e halo. Na proposta deste Capítulo, o foco está no comportamento de uma partícula de massa negligenciável na vizinhança de um sistema binário de pequenos corpos do tipo A (NEAs e MBAs). O objetivo é construir uma estrutura para investigar os comportamentos gerais de um terceiro corpo, a fim de entender como o parâmetro  $d$  (dimensão do dipolo) juntamente com a razão de massa ( $\mu^*$ ) do sistema influencia na estabilidade, período e bifurcação das órbitas periódicas em torno dos pontos de equilíbrio (planar e halo).

### 3.2 Equação do movimento

As Equações do movimento para o trabalho adotado neste Capítulo utiliza as mesmas definições mostradas na Seção 2.2. A única diferença é a respeito da definição da razão de força  $k$  que iremos acrescentar nesta Seção. Sendo assim, as equações do movimento de uma partícula de massa infinitesimal na vizinhança deste sistema é dada pela Equação 2.20, onde o potencial generalizado é dado por

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + k \left( \frac{1 - 2\mu^*}{r_1} + \frac{\mu^*}{r_{21}} + \frac{\mu^*}{r_{22}} \right). \quad (3.1)$$

O parâmetro adimensional  $k$  representa a razão entre as acelerações gravitacionais e centrífugas,  $k = G(M)/(\omega^2 D^3)$ , onde  $M$  é a massa total do sistema em kg,  $\omega$  é a velocidade angular orbital do sistema binário em rad/s,  $D$  é a distância, em metros, entre  $M_1$  e o centro de massa de  $M_2$  e, finalmente,  $G$  é a constante universal de gravidade sistema internacional de unidades (ZENG et al., 2015; FENG et al., 2016).

Os parâmetros livres do sistema são  $d$ ,  $\mu^*$  e  $k$ , que correspondem, respectivamente, ao tamanho de  $M_2$ , a distribuição de massa e um parâmetro responsável pela rotação do asteroide. Quando  $k$  é igual a 1, os corpos orbitam o centro de massa do sistema sem quaisquer forças internas no dipolo. Por outro lado, quando  $k < 1$  o dipolo está se alongando, enquanto está se comprimindo quando  $k > 1$ . O problema restrito clássico de três corpos corresponde ao caso particular  $d = 0$  e  $k = 1$  (MCCUSKEY, 1963). Além disso, quando  $d \neq 0$  e  $k = 1$ , temos o problema restrito síncrono de três corpos (SANTOS et al., 2017a).

### 3.3 Análise de estabilidade do ponto de equilíbrio no espaço tridimensional

Para determinar a estabilidade linear dos pontos de equilíbrio ( $L_i$ ;  $i = 1, 2, 3, 4$  e  $5$ ), é necessário transferir a origem do sistema de coordenadas para a posição dos pontos de equilíbrio  $(x_0, y_0, z_0)$  e então linearizar as equações de movimento em torno desses pontos, obtendo os resultados mostrados abaixo.

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \Omega_{xx}(x_0, y_0, z_0)\xi + \Omega_{xy}(x_0, y_0, z_0)\eta + \Omega_{xz}(x_0, y_0, z_0)\zeta \quad (3.2)$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \Omega_{yx}(x_0, y_0, z_0)\xi + \Omega_{yy}(x_0, y_0, z_0)\eta + \Omega_{yz}(x_0, y_0, z_0)\zeta \quad (3.3)$$

$$\ddot{\zeta} = \Omega_{zx}(x_0, y_0, z_0)\xi + \Omega_{zy}(x_0, y_0, z_0)\eta + \Omega_{zz}(x_0, y_0, z_0)\zeta \quad (3.4)$$

onde as derivadas parciais em  $(x_0, y_0, z_0)$  significam que o valor é calculado no ponto de equilíbrio que está sendo analisado. Derivadas parciais são mostradas nas Equações 3.5 - 3.10.

$$\begin{aligned} \Omega_{xx} = 1 + k & \left( \frac{3(1 - 2\mu^*)(x - x_1)^2}{((x - x_1)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1 - 2\mu^*}{((x - x_1)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right. \\ & + \frac{3\mu^*(x - x_{21})^2}{((x - x_{21})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_{21})^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ & \left. + \frac{3\mu^*(x - x_{22})^2}{((x - x_{22})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_{22})^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{yy} = 1 + k & \left( \frac{3(1 - 2\mu^*)y^2}{((x - x_1)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1 - 2\mu^*}{((x - x_1)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right. \\ & + \frac{3\mu^*y^2}{((x - x_{21})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_{21})^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ & \left. + \frac{3\mu^*y^2}{((x - x_{22})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_{22})^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{zz} = k & \left( \frac{3(1-2\mu^*)z^2}{((x-x_1)^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1-2\mu^*}{((x-x_1)^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right. \\
& + \frac{3\mu^*z^2}{((x-x_{21})^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x-x_{21})^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\
& \left. + \frac{3\mu^*z^2}{((x-x_{22})^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x-x_{22})^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{xy} = \Omega_{yx} = k & \left( \frac{3(1-2\mu^*)(x-x_1)^2y}{((x-x_1)^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{3\mu^*(x-x_{21})^2y}{((x-x_{21})^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right. \\
& \left. + \frac{3\mu^*(x-x_{22})y}{((x-x_{22})^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{xz} = \Omega_{zx} = k & \left( \frac{3(1-2\mu^*)(x-x_1)z}{((x-x_1)^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{3\mu^*(x-x_{21})z}{((x-x_{21})^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right. \\
& \left. + \frac{3\mu^*(x-x_{22})z}{((x-x_{22})^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{yz} = \Omega_{zy} = k & \left( \frac{3(1-2\mu^*)yz}{((x-x_1)^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{3\mu^*yz}{((x-x_{21})^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right. \\
& \left. + \frac{3\mu^*yz}{((x-x_{22})^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

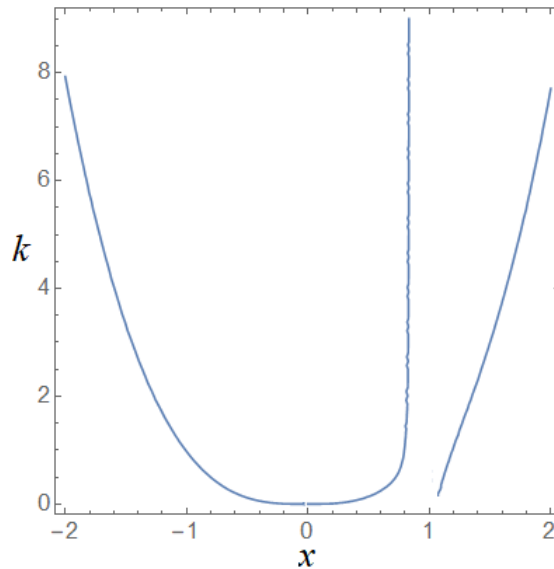
Vimos que a linearização em torno de  $L_1$  e  $L_2$ , considerando  $k = 1$  fornece um par de autovalores reais (*saddle*), correspondendo a variedades unidimensionais estáveis e instáveis, e um par de autovalores imaginários, sugerindo um subespaço central bidimensional no plano  $xy$ , que é responsável por um comportamento oscilatório em torno do ponto de equilíbrio do sistema linear (HOWELL, 1984; HAAPALA et al., 2015). Portanto, em geral, para  $L_1$  e  $L_2$ , o tipo de estabilidade é *saddle*  $\times$  *center*  $\times$  *center*. O Teorema de Lyapunov garante, para o caso planar, a existência de uma família de órbitas periódicas emanando de cada um dos pontos de equilíbrio colinear. Assim, para o caso espacial, são esperadas duas famílias de órbitas periódicas em torno de  $L_1$  e  $L_2$ . Para o modelo adotado, observou-se que a natureza dos autovalores dos pontos de equilíbrio colinear não é alterado quando variamos  $d$  e  $\mu^*$ .

### 3.4 Pontos de equilíbrio colineares em função da razão entre as acelerações gravitacionais e centrífugas

Para determinar como  $k$  afeta as posições dos pontos de equilíbrio colineares, consideramos  $\mu^* = 1 \times 10^{-3}$  e  $d = 0,0833$  unidades canônicas.

A Figura 3.1 mostra as coordenadas  $x$  de  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  como uma função de  $k$ . Como estão em ambas as extremidades do eixo  $x$ , as posições de  $L_2$  (curva à direita) e  $L_3$  (curva à esquerda) são mais afetadas do que  $L_1$ . Considere que existem três forças

Figura 3.1 - Coordenadas  $x$  dos pontos de equilíbrio  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  para diferentes valores de  $k$ .



agindo sobre o sistema: (i) a força gravitacional de  $M_1$ ; (ii) a atração gravitacional de  $M_2$ ; e (iii) a força centrífuga, que é diretamente proporcional à velocidade angular do sistema em torno do centro de massa e à distância entre o ponto de equilíbrio e o centro de massa do sistema. Assim, à medida que diminuimos a velocidade angular do sistema de asteroides em torno do centro de massa  $k$  se torna maior, com isso, é necessário aumentar a distância entre  $P$  e o centro de massa para que a força centrífuga permaneça no mesmo valor e contrabalance as forças gravitacionais de  $M_1$  e  $M_2$ , que permanecem inalteradas. Assim,  $L_2$  e  $L_3$  se afastam do centro de massa do sistema. Embora  $L_1$  também se afaste do centro de massa do sistema, ele o faz de uma maneira mais sutil. Isso ocorre porque ao se afastar do centro de massa do sistema,  $L_1$  se aproxima de  $M_2$ . À medida que a força gravitacional aumenta, uma força de equilíbrio é necessária para evitar que  $L_1$  chegue muito perto de  $M_2$ .

Conforme mostrado na Figura 3.1, as coordenadas  $x$  de  $L_2$  e  $L_3$  tendem a  $\pm \infty$ , respectivamente, quando  $k \rightarrow \infty$ , ou seja, quando o sistema de asteroides para de girar. Isso implica que  $L_2$  e  $L_3$  deixam de existir quando os asteroides estão estáticos. Por outro lado, o ponto de equilíbrio  $L_1$  continua existindo quando  $k \rightarrow \infty$ , devido ao equilíbrio entre as forças gravitacionais entre  $M_1$  e  $M_2$ .

### 3.5 Índice de estabilidade e bifurcações

As informações que podem ser obtidas através da análise do espaço de fase incluem pontos de bifurcação e estabilidade. Os autovalores (e/ou multiplicadores característicos) relacionados à matriz de monodromia são usados para mensurar a estabilidade das soluções, e para determinar os tipos de bifurcações que surgem no espaço de solução. Como já dito anteriormente, todas as soluções examinadas neste estudo possuem seis multiplicadores característicos em pares recíprocos. Como a solução é periódica, dois dos seis multiplicadores são unitários, conforme mencionado na seção 2.9.

Os outros quatro multiplicadores característicos contêm um par associado ao subespaço estável/instável e o par final representa o subespaço central. Em resumo, a matriz de monodromia, considerando uma órbita particular, tem multiplicadores característicos da forma  $1, 1, \lambda_1, 1/\lambda_1, \lambda_2$  e  $1/\lambda_2$ . Os índices de estabilidade oferecem uma medida útil da estabilidade orbital. Seguindo Broucke (1969), neste artigo consideramos que o índice de estabilidade é definido como  $s_i = |\lambda_i + 1/\lambda_i|$ ,  $i = 1, 2$ .

Uma órbita periódica é instável e existe um fluxo natural para fora e para dentro da órbita se qualquer índice de estabilidade tiver magnitude maior do que 2, isto é, se  $s_i > 2$ . Por outro lado, uma órbita periódica é estável e não possui subespaço instável se  $s_i < 2$  (ZIMOVAN-SPREEN et al., 2020). A magnitude do índice de estabilidade está diretamente relacionada com a taxa de fluxo de chegada/partida. Quanto maior o valor de  $s_i$ , mais instável é a órbita periódica.

Para tornar os resultados mais didáticos, nós assumimos que,  $s_1$  está relacionado ao índice de estabilidade que estão associados ao subespaço estável/instável ( $\lambda^{W_s}/\lambda^{W_u}$ ). Por outro lado, assumimos que  $s_2$  é o índice de estabilidade considerando o par que representa o subespaço central.

Bifurcações podem ocorrer quando  $s_i = 2$ . Neste estudo, não consideramos nos resultados os pares de autovalores unitários.

As características dos tipos de bifurcações que surgem dependem dos autovalores



(multiplicadores característicos) das órbitas periódicas, que são obtidas a partir da matriz de monodromia.

Mais detalhes a respeito de colisão de multiplicadores característicos estão além do escopo desta tese.

### 3.6 Órbitas periódicas em torno do primeiro e segundo pontos de equilíbrio colineares em função do parâmetro de massa e do tamanho do dipolo

As órbitas periódicas são de interesse especial para explorar o comportamento dinâmico de uma partícula de massa negligenciável na vizinhança de dois corpos primários.

Os resultados a seguir foram obtidos calculando aproximadamente 3500 órbitas de cada família, partindo de uma condição inicial com amplitude muito baixa, e continuando as famílias até que as órbitas obtidas se aproximassem da superfície dos asteroides. Para encontrar órbitas periódicas simétricas, consideramos  $k = 1$ , ou seja, os corpos orbitam o centro de massa do sistema sem quaisquer forças internas.

Cada família foi calculada para diferentes valores de  $\mu^*$  e  $d$  para destacar o efeito da distribuição de massa do sistema e da forma alongada do corpo secundário sobre o comportamento dinâmico de um veículo espacial nas proximidades de o sistema binário.

Em particular, estamos interessados na estabilidade dessas soluções periódicas que podem ser determinadas pela análise dos autovalores (ou multiplicadores característicos) da matriz de monodromia. Dada a natureza simplética do sistema dinâmico, se  $\lambda$  é um multiplicador característico, então  $1/\lambda$  também é, assim como  $\bar{\lambda}$  e  $1/\bar{\lambda}$ . Assim, as soluções periódicas investigadas têm seis multiplicadores característicos que aparecem em pares recíprocos, sendo dois deles unitários (BOSANAC, 2016). Os outros quatro podem estar associados ao subespaço central ou ao subespaço estável/instável. Em geral, uma órbita particular tem seis multiplicadores característicos da forma  $1, 1, \lambda_1, 1/\lambda_1, \lambda_2$  e  $1/\lambda_2$ .

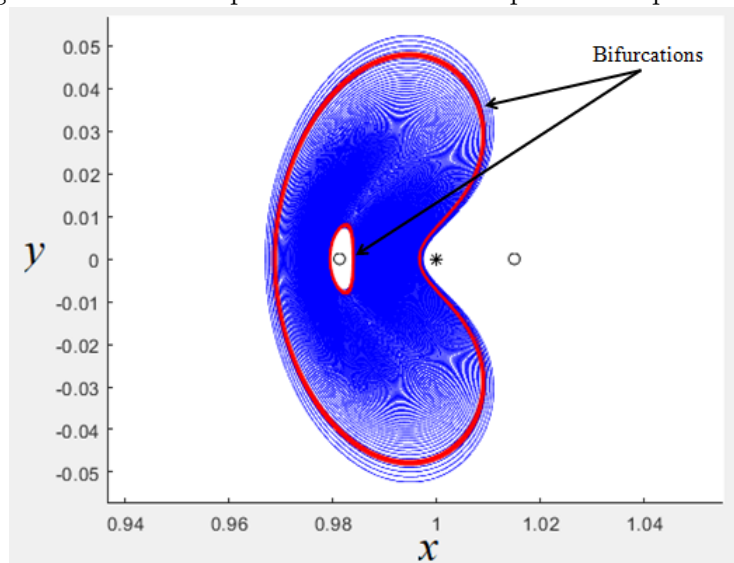
Como as órbitas periódicas que crescem a partir dos pontos colineares herdam as propriedades de estabilidade de  $L_1, L_2$  e  $L_3$ , os autovalores da matriz de monodromia dessas órbitas e os índices de estabilidade correspondentes aparecem como: (i) um par trivial de valores unitários, resultando em  $s_0 = 2$ ; (ii) um par real recíprocos, resultando em  $s_1 > 2$ ; e (iii) um par de autovalores conjugados complexos com

valor absoluto unitário, implicando  $s_2 < 2$ . Assim, dado que, para os subconjuntos das famílias de órbita periódica (OP) próximas aos equilíbrios,  $s_1$  está relacionado ao subespaço estável/instável ( $\lambda^{W_s}/\lambda^{W_u}$ ), enquanto  $s_2$  é o índice de estabilidade correspondente ao par responsável pelo subespaço central.

### 3.7 Órbitas planares

Nesta seção e nas próximas que seguem neste Capítulo, queremos investigar a influência do alongamento do corpo secundário e da razão de massa do sistema nas órbitas planares e halo. Visto isso, assumimos a partir daqui que a razão de força é unitária ( $k = 1$ ). A Figura 3.2 mostra uma família de órbitas planares em torno de  $L_1$  com  $\mu^* = 10^{-5}$  e  $d = 0$ . As órbitas obtidas não cruzam o asteroide, embora como visto na Figura 3.2, conforme a amplitude aumenta ao longo da família, as órbitas se expandem da vizinhança do ponto de equilíbrio em direção à superfície do secundário (asterisco preto).

Figura 3.2 - Órbitas planares em torno do ponto de equilíbrio  $L_1$ .



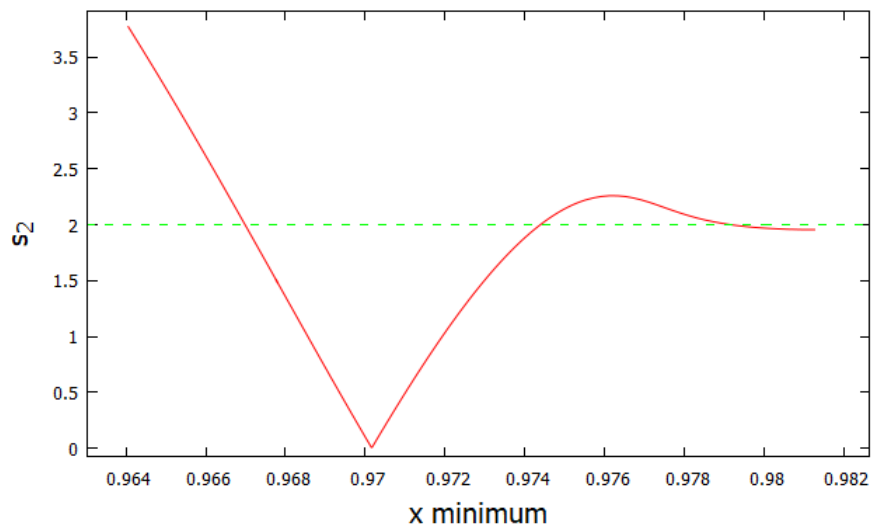
Na figura, as órbitas vermelhas indicam onde ocorrem as bifurcações, ou seja, quando um dos índices de estabilidade  $s_1$  ou  $s_2$  atinge o valor crítico 2.

Embora muitas bifurcações existam em sistemas dinâmicos, apenas dois tipos de bifurcações são de particular interesse para o foco deste trabalho, que são a forquilha e as bifurcações de multiplicação de período (period-multiplying bifurcations).

Uma família de órbitas periódicas sofre uma bifurcação do tipo forquilha quando a estabilidade da órbita periódica muda conforme um parâmetro evolui, que em nosso caso é a constante de energia  $C^*$ . Durante este tipo de bifurcação local, um par de autovalores (não triviais) da matriz de monodromia passa pelos valores críticos  $\lambda_1 = 1/\lambda_1$  (ou  $\lambda_2 = 1/\lambda_2$ ) = + 1 do círculo unitário. Conseqüentemente, o índice de estabilidade passa por  $s_1$  (ou  $s_2$ ) = 2 (BOSANAC, 2016). Além disso, a estabilidade das órbitas periódicas muda ao longo de uma família, uma família adicional de um período semelhante é formada. Essa nova família de órbitas tem a mesma estabilidade que os membros da família original antes do surgimento da bifurcação. Por outro lado, uma bifurcações de multiplicação de período é identificada quando um par de autovalores não triviais ( $\lambda_{1,2}$  e  $1/\lambda_{1,2}$ , onde  $\lambda_{1,2}$  significa  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$ ), passa por  $\lambda_{1,2} = 1/\lambda_{1,2} = - 1$  do círculo unitário. Portanto, representa um valor crítico do índice de estabilidade, tal que  $|s_{1,2}| = | - 2|$  (BOSANAC, 2016).

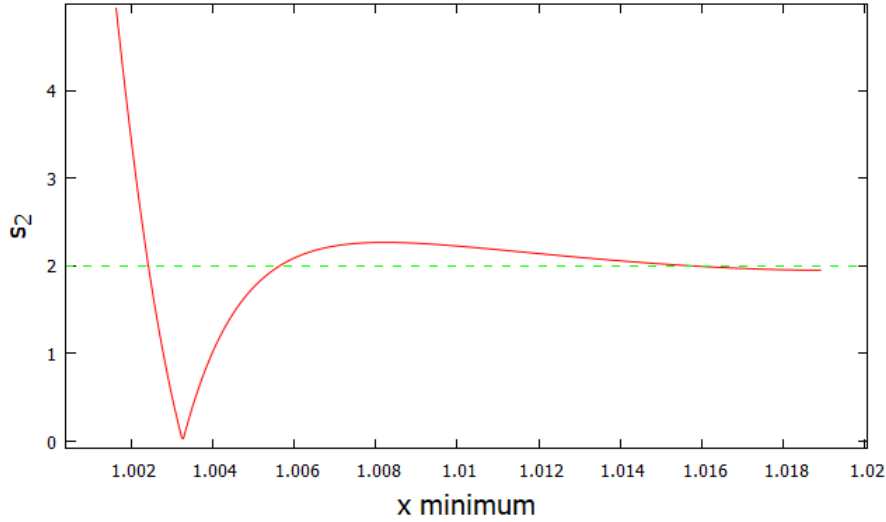
Ao construir as famílias de órbitas planares, com  $d = 0$  e  $\mu^* = 10^{-5}$ , observamos que o índice de estabilidade ( $s_2$ ) atinge o valor crítico três vezes para órbitas planares em torno de  $L_1$  e  $L_2$ , como pode ser visto nas Figuras 3.3 e 3.4. Em ambas as figuras, o eixo horizontal exibe o valor mínimo de  $x$  ao longo das órbitas. O índice de estabilidade  $s_1$  não atinge o valor crítico para  $\mu^*$  e  $d$ .

Figura 3.3 - Índice de estabilidade ( $s_2$ ) em torno  $L_1$  considerando  $d = 0$  e  $\mu^* = 10^{-5}$ .



Para  $\mu^* = 10^{-5}$ , o ponto de equilíbrio  $L_1$  está localizado na posição  $x = 0,981278$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ , enquanto  $L_2$  está na posição  $x = 1,01892$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ .

Figura 3.4 - Índice de estabilidade ( $s_2$ ) em torno  $L_2$  considerando  $d = 0$  e  $\mu^* = 10^{-5}$ .



As órbitas com amplitude menores estão próximas do ponto de equilíbrio (lado direito das Figuras 3.3 e 3.4) e a primeira bifurcação ocorre para uma órbita de pequena amplitude ( $x \approx 0,984205$  para  $L_1$  e  $x \approx 1,01577$  para  $L_2$ ). À medida que continuamos a família planar, o índice de estabilidade  $s_2$  mostrado nas Figuras 3.3 e 3.4 continuam aumentando, atinge um máximo, diminui e atinge o valor 2 novamente, onde ocorre outra bifurcação, com  $x \approx 0,99408$  para  $L_1$  e  $x \approx 1,0056$  para  $L_2$ .

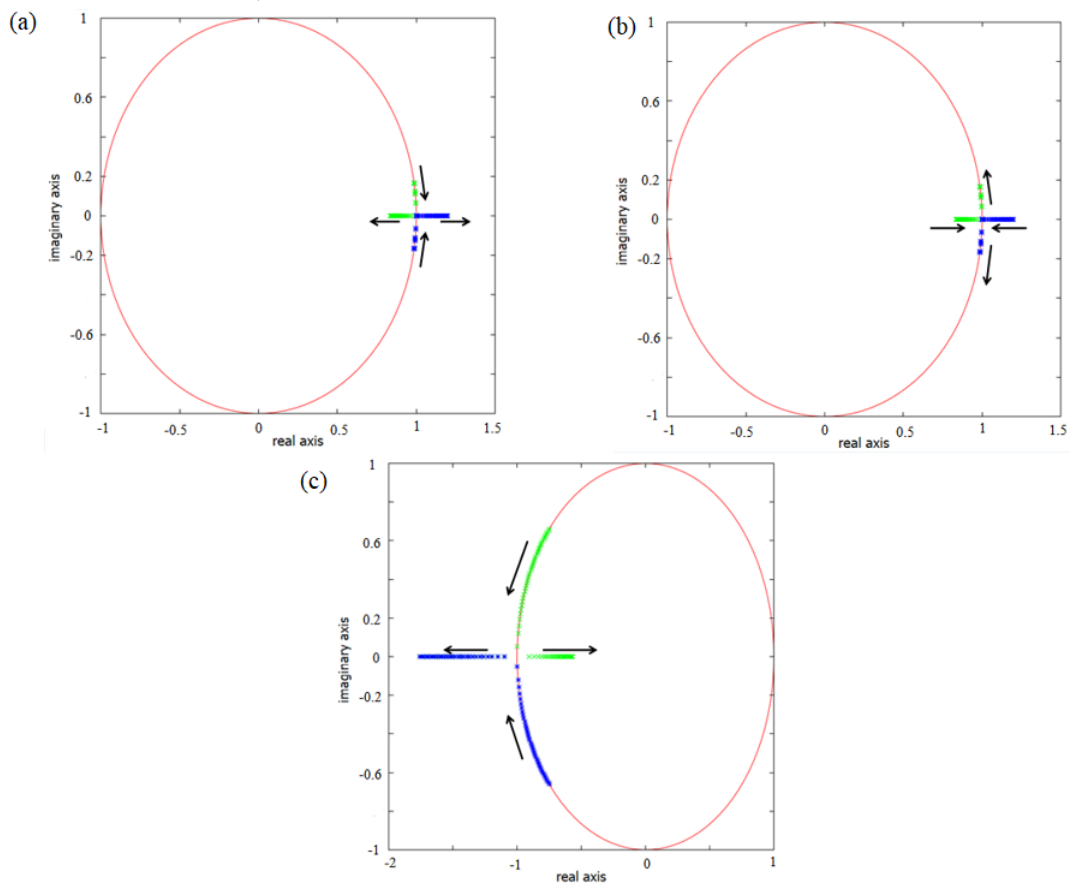
Conforme continuamos as famílias de órbitas planares em torno de  $L_1$  e  $L_2$ , o índice de estabilidade diminui, atinge um mínimo, aumenta e novamente atinge o valor crítico 2, onde ocorre outra bifurcação. Após a terceira bifurcação, o índice de estabilidade aumenta ainda mais e não detectamos bifurcações adicionais, visto que, como as órbitas estão muito próximas do centro de massa do corpo secundário, nosso método de Newton deixa de encontrar as órbitas planares, convergindo para uma família de órbitas completamente diferente.

As Figuras 3.5 (a), (b) e (c) fornecem informações sobre os tipos de bifurcações que ocorrem ao longo da família de órbitas planares. Para  $\mu^* = 10^{-5}$  e  $d = 0$ , analisando o caminho dos multiplicadores característicos nas Figuras 3.5 (a) e (b), descobrimos que a primeira bifurcação é uma bifurcação do tipo forquilha supercrítico, enquanto o segundo corresponde a um caso de uma forquilha subcrítico. Isso sugere que novas famílias de órbitas periódicas aparecem nessas regiões quando a bifurcação ocorre (FENG et al., 2016). De fato, após a primeira bifurcação (órbita periódica de baixa

amplitude) é possível detectar órbitas halo, enquanto após a segunda bifurcação surge a família de órbitas axiais (GREBOW, 2006). Ao contrário das órbitas planares de Lyapunov, as órbitas halo e axial são tridimensionais.

A Figura 3.5 (c) mostra o comportamento dos autovalores na terceira bifurcação. Os multiplicadores característicos começam no plano imaginário e se movem até que colidam no eixo real negativo e passam a obter apenas valores reais no eixo negativo. Portanto, os autovalores indicam uma bifurcação de multiplicação de período.

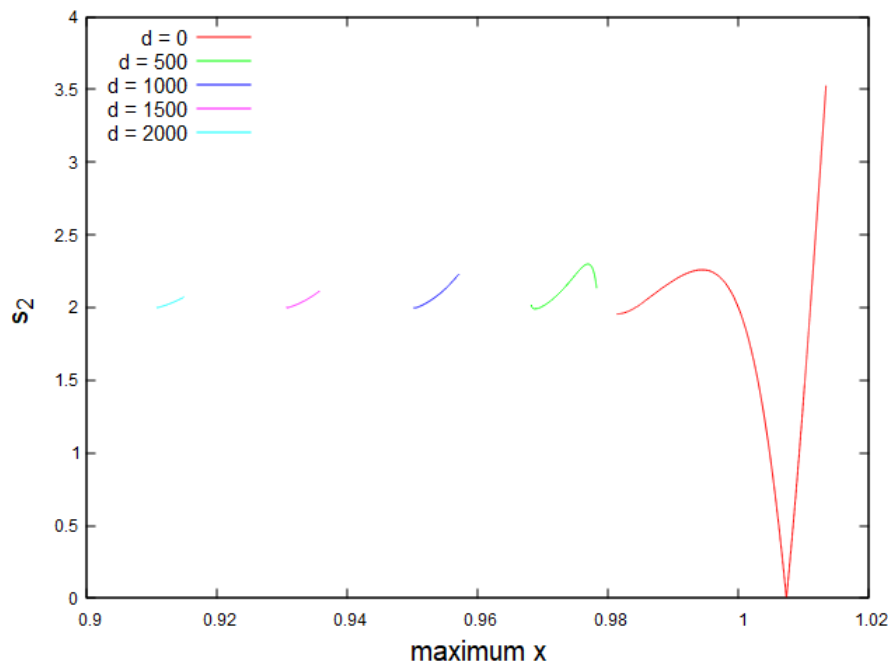
Figura 3.5 - (a) Comportamento dos multiplicadores característicos na primeira bifurcação forquilha em torno de  $L_1$  e  $L_2$ . (b) Comportamento dos multiplicadores característicos na segunda bifurcação forquilha em torno de  $L_1$  e  $L_2$ . (c) Comportamento dos multiplicadores característicos que leva à bifurcações de multiplicação de período em torno de  $L_1$  e  $L_2$ . Nestes casos, consideramos  $d = 0$  e  $\mu^* = 10^{-5}$ .



A Figura 3.6 fornece informações sobre o índice de estabilidade (considerando os valores de  $s_2$ ) quando aumentamos a dimensão do dipolo de 0 metros, ou seja, o

corpo é modelado como um ponto de massa, até a dimensão de 2000 metros. Nesta análise, consideramos a razão de massa constante no valor de  $\mu^* = 10^{-5}$ . Quando consideramos o dipolo como um corpo de massa pontual ( $d = 0$ ), é possível observar três bifurcações (a curva vermelha passa pelo valor crítico três vezes). Podemos observar que à medida que aumentamos a dimensão do corpo alongado, o segundo e terceiro ponto de bifurcação nas órbitas planares em torno de  $L_1$  deixam de existir, ou dificilmente são encontrados sem que a partícula cruze com o corpo secundário. Observe que quanto maior o tamanho do dipolo, menor será a família da órbita planar encontrada.

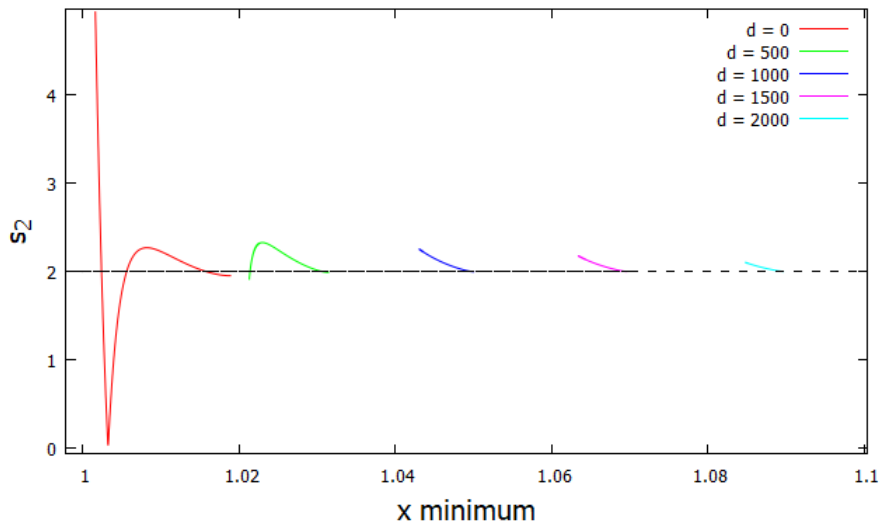
Figura 3.6 - Índice de estabilidade da órbita planar em torno de  $L_1$  para diferentes valores de  $d$ .



### 3.8 Influência do parâmetro de massa e o tamanho do dipolo nas órbitas planares

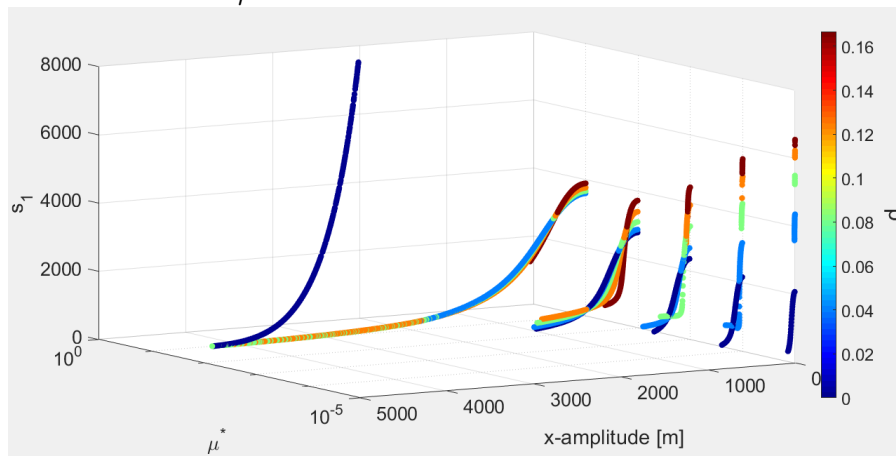
Agora, investigaremos como as órbitas planares evoluem em função do tamanho do dipolo e da razão de massa em unidades canônicas. Com o fator de normalização sendo  $D = 12000$  metros, o tamanho do dipolo usado em nosso estudo foram  $d = 0, 500, 1000, 1500$  e  $2000$  metros e a razão de massa foram  $\mu^* = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ .

Figura 3.7 - Índice de estabilidade da órbita planar em torno de  $L_2$  para diferentes valores de  $d$ .



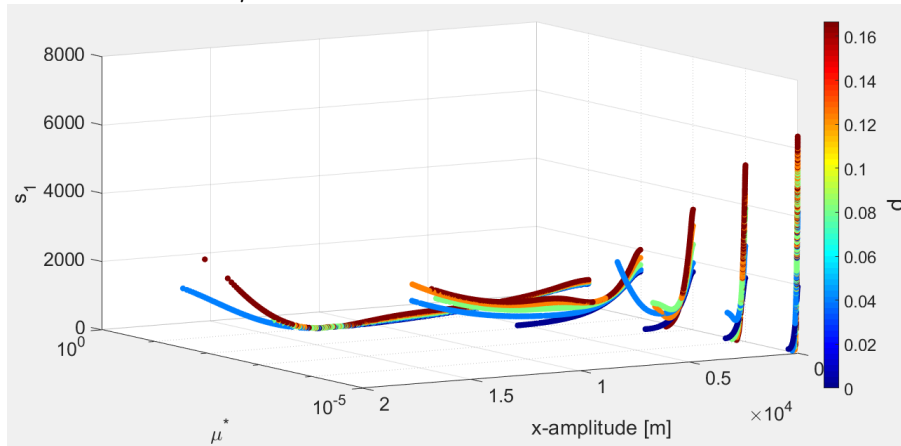
As Figuras 3.8 e 3.9 fornecem informações sobre o índice de estabilidade  $s_1$  das órbitas planares em torno de  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente, em função de  $d$  e  $\mu^*$ . Em ambas as figuras, o codificado de cores representa o tamanho do dipolo ( $d$ ).

Figura 3.8 - Índice de estabilidade ( $s_1$ ) das órbitas planares em torno de  $L_1$  para diferentes valores de  $d$  e  $\mu^*$ .



Primeiro, investigaremos as soluções quando  $d$  varia e  $\mu^*$  é mantido constante. Note que, nas Figuras 3.8 e 3.9, em geral, quando o tamanho do dipolo aumenta, as órbitas planares se tornam mais instáveis.

Figura 3.9 - Índice de estabilidade ( $s_1$ ) das órbitas planares em torno de  $L_2$  para diferentes valores de  $d$  e  $\mu^*$ .



Isso significa que quanto maior o corpo secundário, mais instáveis são as órbitas planares na vizinhança dos pontos de equilíbrio.

Se considerarmos  $d = 0$ , que corresponde ao CRTBP, observamos que à medida que  $\mu^*$  aumenta, as órbitas se tornam cada vez mais instáveis. Por outro lado, quando a forma alongada do corpo secundário é levada em consideração,  $s_1$  se torna menor à medida que  $\mu^*$  aumenta, e só aumenta novamente após  $\mu^* = 10^{-1}$ . Esta informação é importante para missões espaciais, uma vez que um alto valor no índice de estabilidade ( $s_i$ ) indica um modo divergente que se afasta rapidamente das proximidades da órbita. Em geral, o índice de estabilidade está diretamente relacionado aos custos de manutenção orbital do veículo espacial e inversamente relacionado aos custos de transferência. Então, as órbitas periódicas instáveis e estáveis são de interesse em missões espaciais, uma vez que as órbitas instáveis pode permitir que a espaçonave saia daquela região sem a necessidade de um gasto de combustível adicional. Por outro lado, as órbitas estáveis permitem manter a espaçonave na vizinhança do ponto de equilíbrio sem a necessidade de manutenção orbital.

A seguir, analisaremos o período das órbitas planares em termos de  $d$  e  $\mu^*$ . Conforme mostrado nas Figuras 3.10 e 3.11, conforme  $d$  aumenta, com  $\mu^*$  mantido constante, o período de órbitas planares diminui. Isso porque a distribuição de massa do corpo secundário permite que parte da massa do asteroide fique mais próxima da partícula de massa infinitesimal, fazendo com que a atração gravitacional se torne maior, aumentando a aceleração e diminuindo o período orbital. Em geral, quando a amplitude da órbita aumenta, o período orbital se torna mais longo.



Figura 3.10 - Período das órbitas planares em torno de  $L_1$  para diferentes valores de  $d$  e  $\mu^*$ .

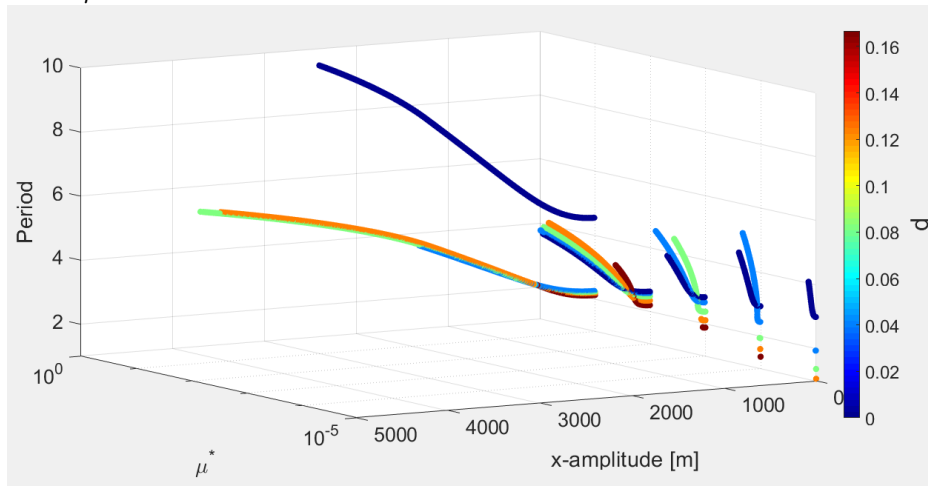
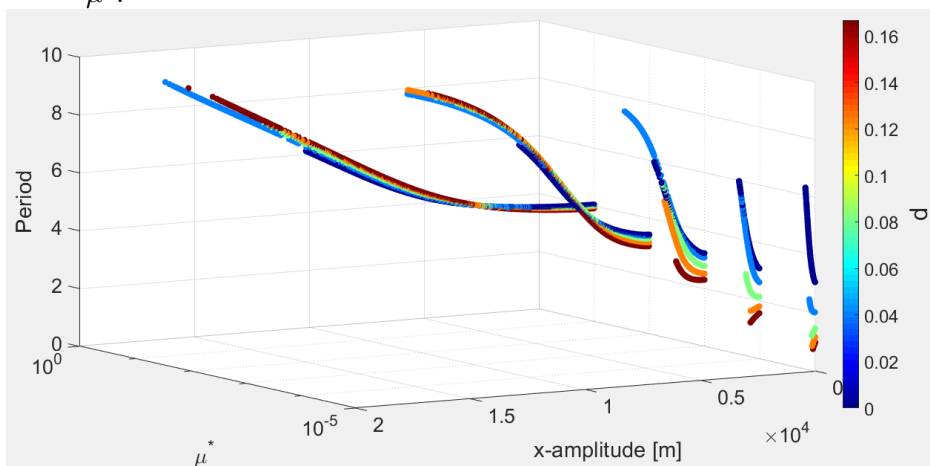


Figura 3.11 - Período das órbitas planares em torno de  $L_2$  para diferentes valores de  $d$  e  $\mu^*$ .



Considerando a família quando  $d = 0$ , quando  $\mu^*$  aumenta, o período das órbitas permanece semelhante, exceto quando  $\mu^* = 10^{-1}$ . Por outro lado, quando o alongamento do corpo secundário é considerado, em geral, para um dado valor de  $d$ , quanto maior a razão de massa, maior o período orbital.

Finalmente, analisamos a energia do sistema em termos de  $d$  e  $\mu^*$ , conforme mostrado nas Figuras 3.12 e 3.13.

Figura 3.12 - Constante de Jacobi das órbitas planares em torno de  $L_1$  para diferentes valores de  $d$  e  $\mu^*$ .

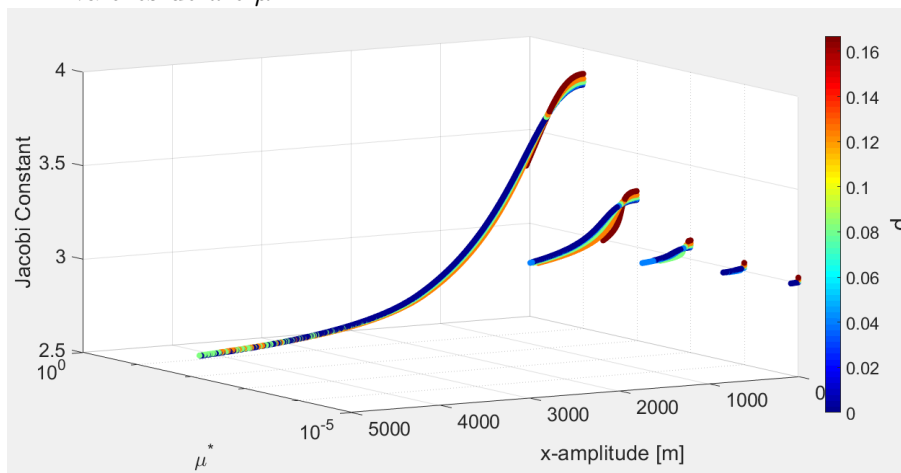
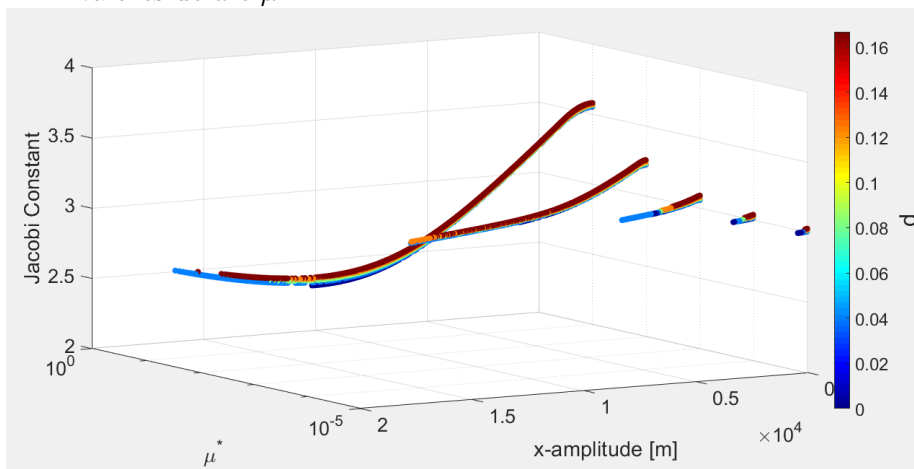


Figura 3.13 - Constante de Jacobi das órbitas planares em torno de  $L_2$  para diferentes valores de  $d$  e  $\mu^*$ .



Descobrimos que quando  $d$  ou  $\mu^*$  aumenta, a energia necessária para orbitar um determinado ponto de equilíbrio diminui. Ou seja, quanto mais alongado o corpo secundário e quanto maior o valor de  $\mu^*$ , menos energia é necessária para orbitar um determinado ponto de equilíbrio. Isso também significa que, conforme o tamanho do dipolo aumenta ou a razão de massa do sistema aumenta, as bifurcações ocorrem com energias mais baixas.

### 3.9 Computando as órbitas halo

As órbitas halo são um ramo tridimensional de órbitas planares que aparecem quando o índice de estabilidade da órbita planar atinge o valor crítico  $s_2 = 2$ . As Figuras 3.15 e 3.16 ilustram como as órbitas do halo aparecem nas bifurcações forquilha das órbitas planares em torno de  $L_1$  e  $L_2$  quando  $\mu^* = 10^{-5}$  e  $d = 0$ .

Como já mencionado, a nova família (nesse caso de halo) possui um membro que é próxima ao membro da família planar em energia e geometria. Visto isso, sabemos que uma determinada órbita halo é semelhante a órbita planar, quando o índice de estabilidade das órbitas planares atinge o valor crítico  $s_2 = 2$ . Para encontrar as condições iniciais da órbita halo ( $\mathbf{x}^*$ ), nós manteremos fixo a coordenada  $x_0$  e buscaremos por  $z_0^*$ ,  $\dot{y}_0^*$  e  $T/2^*$  tal que  $\dot{x}^*(T/2^*)$ ,  $\dot{z}^*(T/2^*)$  e  $y^*(T/2^*)$  são todos nulos. Então, utilizamos como chute inicial, para encontrar a órbita halo, a posição  $x_0$ , velocidade ( $\dot{y}$ ) e período ( $T$ ) da órbita planar quando o índice de estabilidade  $s_2 = 2$ . Conhecendo essas condições iniciais, resta apenas determinar o chute inicial da posição no eixo  $z$ , para podermos encontrar a órbita halo. Devido ao fato de que a órbita halo e planar são semelhantes (quando  $s_2 = 2$ ), a posição no eixo  $z$  da órbita halo deve ter um valor muito pequeno (órbita quase planar). Então, foi usado nesse trabalho o valor de  $z_0 = 0,0001$  unidade canônica como chute inicial para a posição no eixo  $z$ . Um método de Newton para este problema é

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - [Df(\mathbf{x}_n)]^{-1}f(\mathbf{x}_n) \quad (3.11)$$

com  $\mathbf{x} = (z, \dot{y}, T/2)$  e  $\mathbf{x}_0 = (z_0, \dot{y}_0, T_0/2)$ . Aqui  $(z_0, \dot{y}_0, T_0/2)$  é o chute inicial da órbita halo.

O diferencial é

$$Df(\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi_{4,3} & \phi_{4,5} & g_4(x_0, 0, z(T/2), 0, \dot{y}(T/2), 0) \\ \phi_{6,3} & \phi_{6,5} & g_6(x_0, 0, z(T/2), 0, \dot{y}(T/2), 0) \\ \phi_{2,3} & \phi_{2,5} & g_2(x_0, 0, z(T/2), 0, \dot{y}(T/2), 0) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde  $\phi_{i,j}$  são elementos da matriz 2.51,  $g : U \subset \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$  é o campo vetorial do problema restrito síncrono de três corpos,  $z(T/2) = \phi_3(x_0, 0, z, 0, y, 0, T/2)$  e  $\dot{y}(T/2) = \phi_5(x_0, 0, z, 0, y, 0, T/2)$ . Com essas informações, esperamos que se  $\mathbf{x}_0$  estiver perto o suficiente da órbita do halo, então  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}^*$  a medida que  $n \rightarrow \infty$ .  $g$  é dada pela Equação 3.13.

$$g(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \begin{bmatrix} g_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ g_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ g_3(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ g_4(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ g_5(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ g_6(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ 2\dot{y} + D_x\Omega \\ -2\dot{x} + D_y\Omega \\ D_z\Omega \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Então temos todas as informações necessárias para iniciar o método de Newton.

A partir do teorema do cilindro, foi possível encontrar uma família de órbita halo. Então, tendo encontrado uma órbita halo e observando que ela tem exatamente dois autovalores unitário, podemos usar isso como um ponto de partida para nos mover ao longo do cilindro. Usamos as condições iniciais da órbita halo anterior como ponto de partida para encontrar a próxima órbita halo em um valor ligeiramente maior de  $x$  (coordenada  $x$  mais perto do asteroide secundário). Se encontrarmos outra órbita de halo aqui, iteramos o processo. Desta forma foi possível calcular uma família de órbita halo. O passo da coordenada  $x$  para determinar cada órbita halo foi de  $x = 0,00002$ .

### 3.10 Órbitas halo

A Figura 3.14 mostra uma família de órbitas halo em torno de  $L_1$  com  $\mu^* = 10^{-5}$  e  $d = 0$ . As órbitas estão no espaço tridimensional e conforme a amplitude aumenta ao longo da família, as órbitas halo se expandem da vizinhança do ponto de equilíbrio em direção à superfície do secundário (asterisco preto).

As Figuras 3.15 e 3.15 fornecem informações a respeito do índice de estabilidade considerando os autovalores do subspaço central ( $s_2$ ).

Para as condições consideradas aqui, a órbita halo surge em  $x \approx 0,98418$  para  $L_1$  e em  $x \approx 1,01575$  para  $L_2$ . A Figura 3.17 mostra o caminho dos multiplicadores característicos sobre o círculo unitário das órbitas halo em torno de  $L_1$  e  $L_2$ .

Figura 3.14 - Índice de estabilidade ( $s_2$ ) das famílias de órbitas planares e halo em torno de  $L_1$  considerando  $d = 0$  e  $\mu^* = 10^{-5}$ .

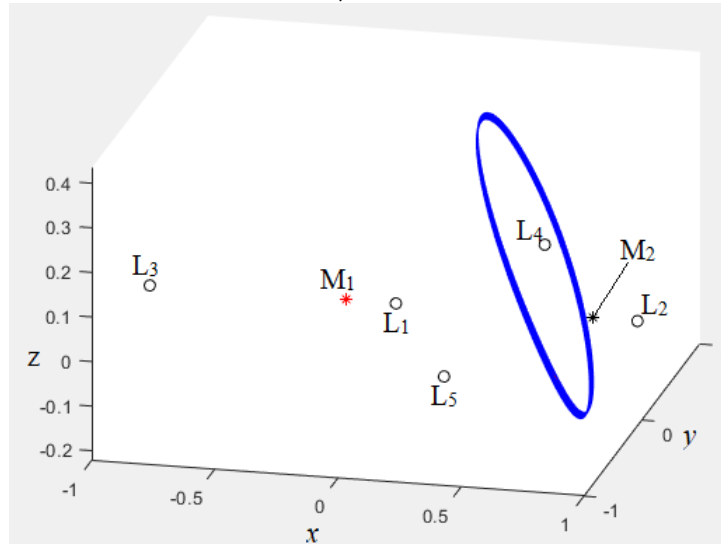


Figura 3.15 - Índice de estabilidade ( $s_2$ ) das famílias de órbitas planares e halo em torno de  $L_1$  considerando  $d = 0$  e  $\mu^* = 10^{-5}$ .

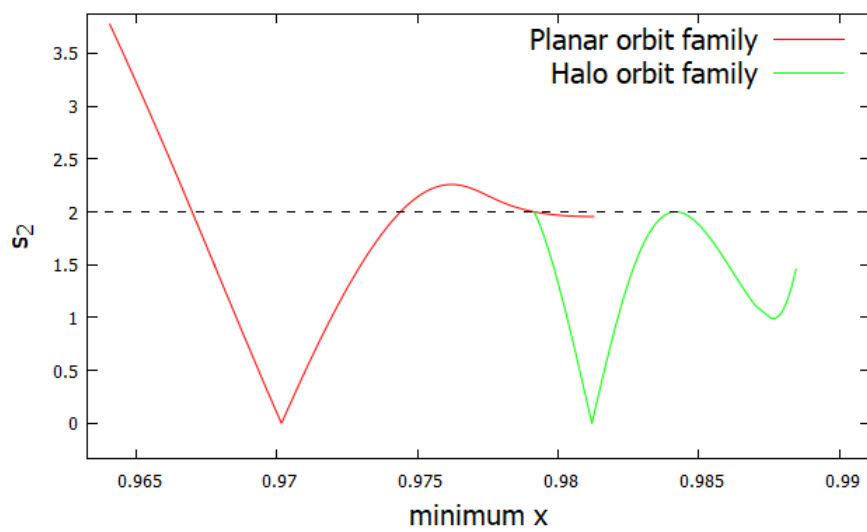
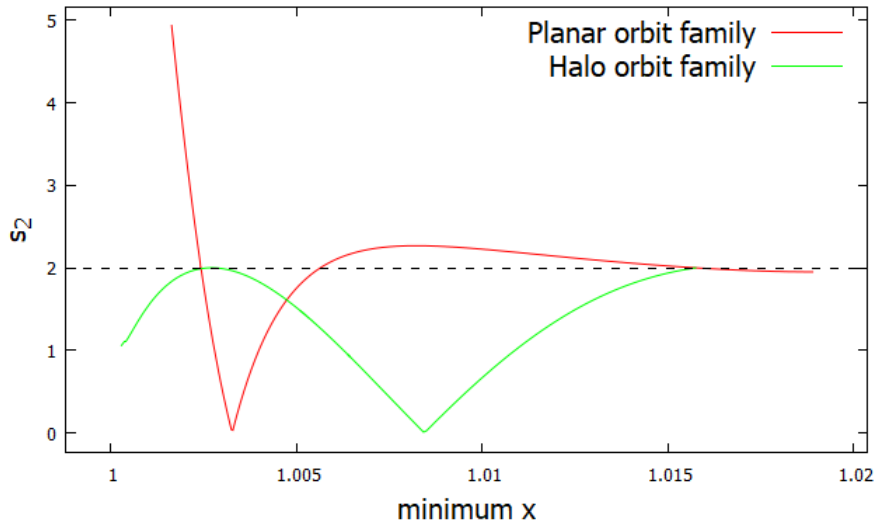
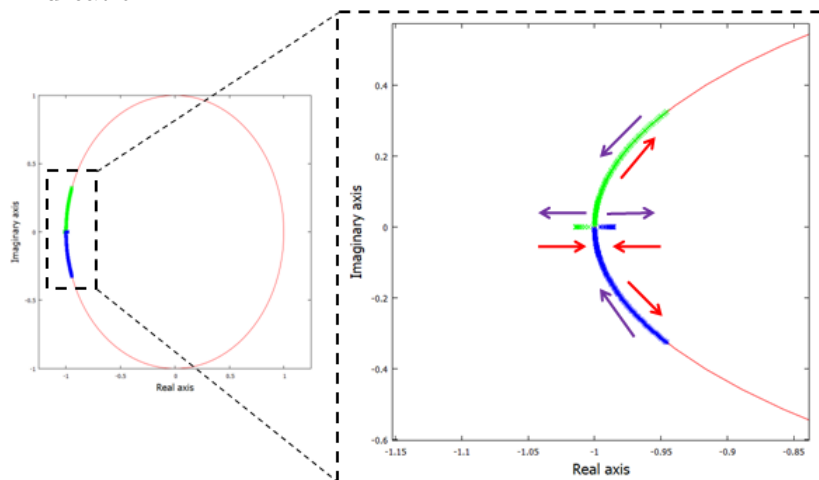


Figura 3.16 - Índice de estabilidade ( $s_2$ ) das famílias de órbitas planares e halo em torno de  $L_2$  considerando  $d = 0$  e  $\mu^* = 10^{-5}$ .



Inicialmente, os multiplicadores característicos se movem na direção indicada pelas setas roxas até que colidam com o eixo real negativo, configurando uma bifurcação de duplicação de período. Após mover-se sutilmente ao longo do eixo negativo real, os multiplicadores característicos retornam, movendo-se na direção das setas vermelhas, colidindo novamente em -1 e assumindo valores imaginários, configurando outra bifurcação de duplicação de período.

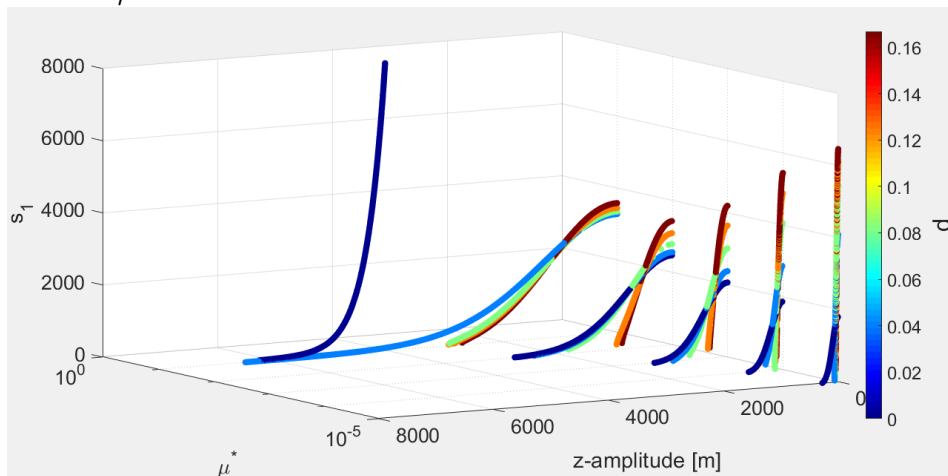
Figura 3.17 - Comportamento dos multiplicadores característicos nas period-doubling bifurcation.



As Figuras 3.18 e 3.19 fornecem informações sobre o índice de estabilidade  $s_1$  como uma função de  $d$  e  $\mu^*$ .

Observe que quanto menor a amplitude das órbitas halo, maior o valor do índice de estabilidade  $s_1$ , quando considerados  $d$  e  $\mu^*$  fixos. Conforme a amplitude da órbita halo aumenta, o índice de estabilidade diminui. Se definirmos  $d = 0$ , ainda detectamos órbitas de halo estáveis para pequenos valores de  $\mu^*$ . Essas órbitas também foram encontradas por vários autores usando o Problema dos Três Corpos Restritos e são chamadas de Near Rectilinear Halo Orbits (NRHO) (HOWELL, 1984; ZIMOVAN-SPREEN et al., 2020). As NRHOs são definidas como o subconjunto da família da órbita halo com índices de estabilidade em torno de  $s_i \pm 2$  e sem nenhum índice de estabilidade consideravelmente maior em magnitude que os outros.

Figura 3.18 - Índice de estabilidade ( $s_1$ ) das órbitas halo em torno de  $L_1$  em função de  $d$  e  $\mu^*$ .



A Figura 3.20 e 3.21 fornecem informações a respeito do índice de estabilidade  $s_1$  quando aumentamos a dimensão do dipolo de 0 até 2000 metros e mantemos a razão de massa constante com valor de  $\mu^* = 10^{-5}$ . Nesta imagem fica claro a influência da dimensão do corpo secundário na estabilidade das órbitas halo. Observe que a medida que aumentamos a dimensão do secundário, os valores de  $s_1$  se tornam cada vez maiores na vizinhança do ponto de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$ .

Observe que é improvável detectar NRHOs em torno de  $L_1$  quando levamos em consideração a forma alongada do corpo secundário e assumimos pequenos valores de  $\mu^*$ .

Figura 3.19 - Índice de estabilidade ( $s_1$ ) das órbitas halo em torno de  $L_2$  em função de  $d$  e  $\mu^*$ .

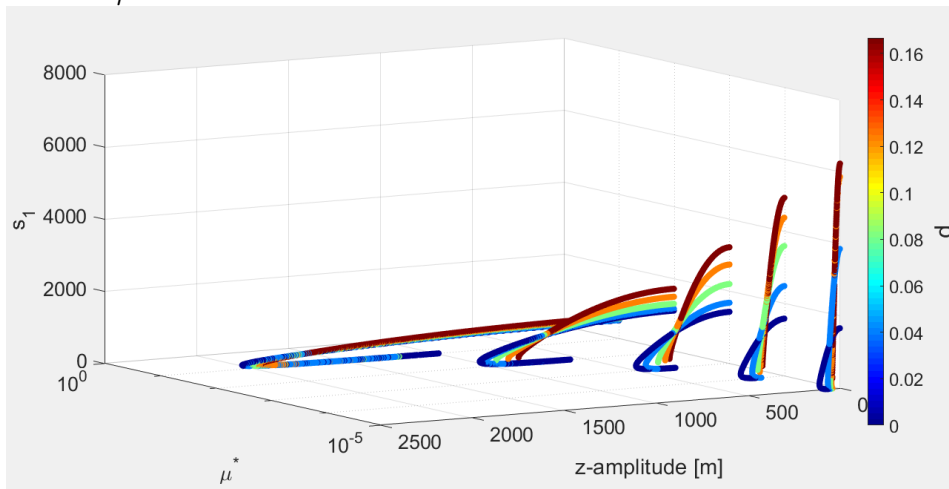


Figura 3.20 - Índice de estabilidade das órbitas halo em torno de  $L_1$  para diferentes valores de  $d$ .

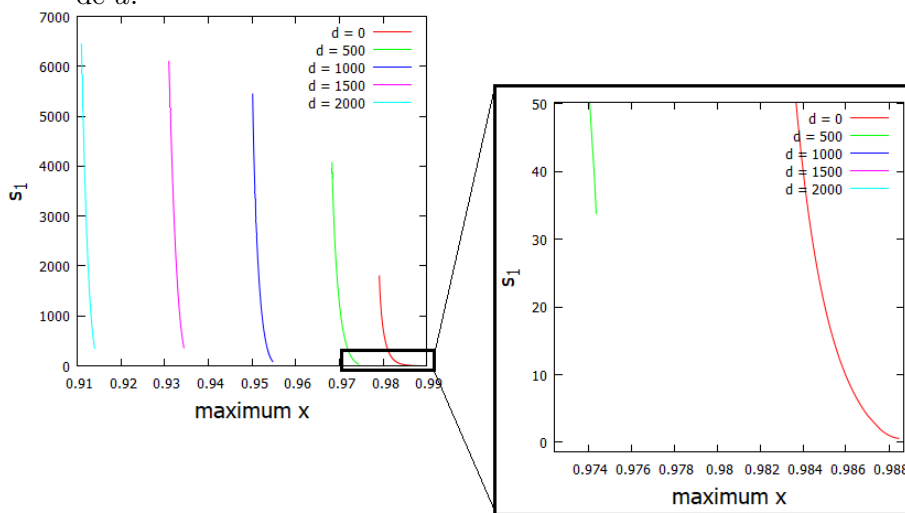
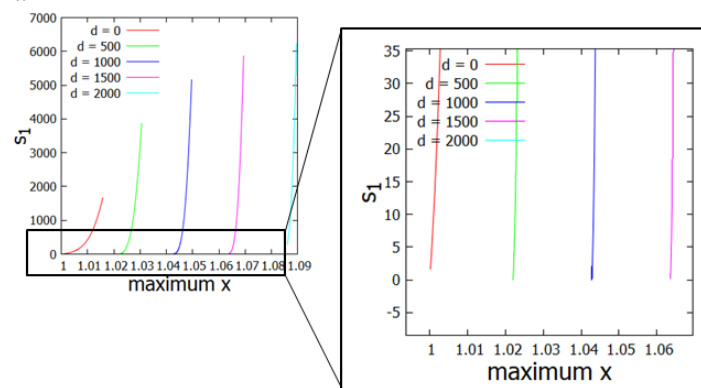


Figura 3.21 - Índice de estabilidade das órbitas halo em torno de  $L_2$  para diferentes valores de  $d$ .





Por outro lado, existem várias NRHOs em torno de  $L_2$  para diferentes valores de  $d$ . Neste trabalho, encontramos NRHOs considerando  $d$  até  $d = 1500$  metros, conforme mostrado na Figura 3.21.

Porém, como mostrado em (HOWELL, 1984), o índice de estabilidade também depende da razão de massa do sistema. Considerando  $d = 0$  e aumentando  $\mu^*$ , o índice de estabilidade de valor  $s_1$  aumenta. Não detectamos nenhuma NRHO para valores de  $\mu^* \geq 10^{-1}$  e  $d = 0$  em torno de  $L_1$ . Em contrapartida, encontramos NRHO para  $\mu^* \geq 10^{-1}$  e  $d = 0$  em torno de  $L_2$ . Esses resultados são semelhantes aos obtidos por (HOWELL, 1984). Por outro lado, levando em consideração o alongamento do secundário, isto é  $d \neq 0$ , e assumindo grandes valores de  $\mu^*$  ( $\mu^* \geq 10^{-1}$ ), é possível encontrar membros da família halo estável em torno de  $L_1$  e  $L_2$ . Assim, no modelo utilizado neste artigo, existem órbitas periódicas estáveis na vizinhança de corpos irregulares, mesmo quando o secundário tem forma não esférica. Isso está de acordo com os resultados obtidos por Chappaz e Howell (2015), que encontrou órbitas estáveis em torno de  $L_1$  e  $L_2$  levando em consideração a forma alongada do corpo secundário e considerando  $\mu = 0,4$  com o modelo do elipsóide triaxial.

Agora analisamos como o período do halo orbita em torno de  $L_1$  e  $L_2$  é afetado por  $d$  e  $\mu^*$ . À medida que  $d$  aumenta e  $\mu^*$  é mantido constante, o período das órbitas halo diminui, conforme mostrado nas Figuras 3.22 e 3.23.

Figura 3.22 - Período das órbitas halo em torno de  $L_1$  em função de  $d$  e  $\mu^*$ .

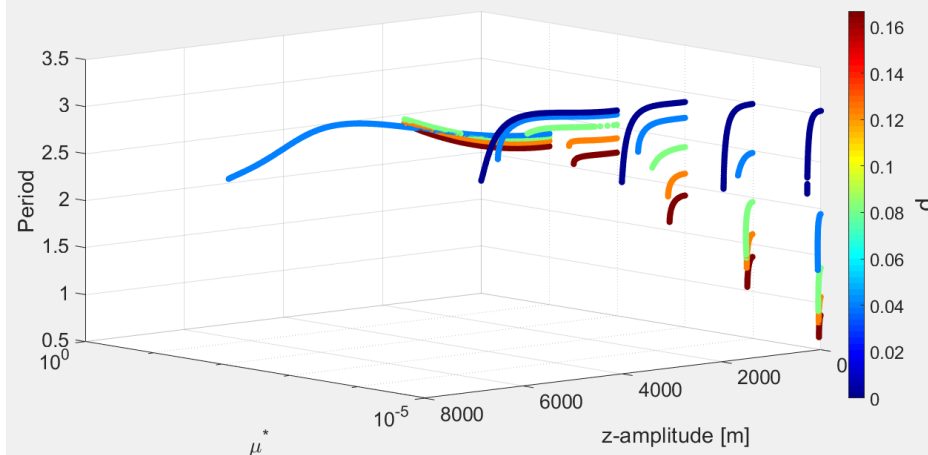
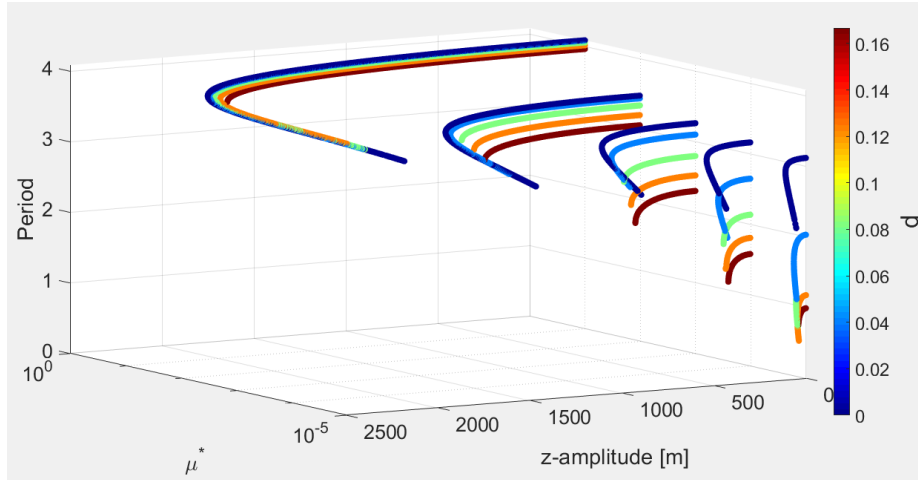


Figura 3.23 - Período das órbitas halo em torno de  $L_1$  em função de  $d$  e  $\mu^*$ .



Isso ocorre porque a atração gravitacional é mais forte próximo à partícula devido à distribuição de massa do corpo secundário fazendo com que a aceleração aumente e o período orbital diminua. À medida que a amplitude da órbita do halo aumenta, seu período orbital fica mais curto devido ao fato de que a amplitude é maior quando o corpo de massa desprezível está mais próximo do corpo secundário.

Considerando a forma alongada do asteroide, mas mantendo  $d$  constante e variando  $\mu^*$ , notamos que o período das órbitas halo se tornam mais longo. Isso ocorre porque à medida que  $\mu^*$  aumenta, o ponto de equilíbrio se afasta do corpo secundário, então as órbitas halo ficam mais longe do corpo secundário, o que faz com que a aceleração gravitacional diminua e, portanto, o período orbital da partícula ao longo da órbita aumenta.

As Figuras 3.24 e 3.25 fornecem informações sobre o comportamento da constante de Jacobi das órbitas halo em função de  $d$  e  $\mu^*$ . Observe que quando  $d$  ou  $\mu^*$  aumentam, o intervalo de valor da constante de Jacobi também aumenta. Esta é uma informação importante em termos de aplicação da missão espacial. Observe que quanto maior a razão de massa do sistema, ou quanto mais longo o corpo secundário, menos energia é necessária para que as órbitas halo se ramifiquem das órbitas planares.

### 3.11 Conclusão

Neste Capítulo, o ambiente dinâmico geral na vizinhança de sistemas binários de asteroides foi explorado.

Figura 3.24 - Constante de Jacobi da órbita halo em torno de  $L_1$  em relação a  $d$  e  $\mu^*$ .

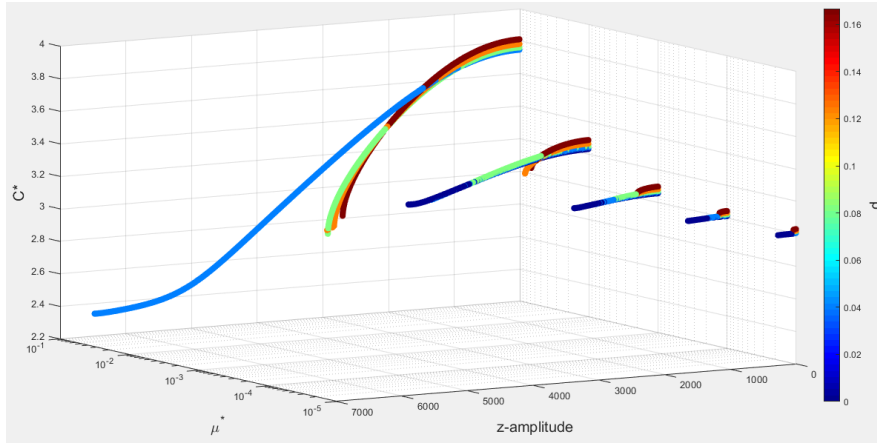
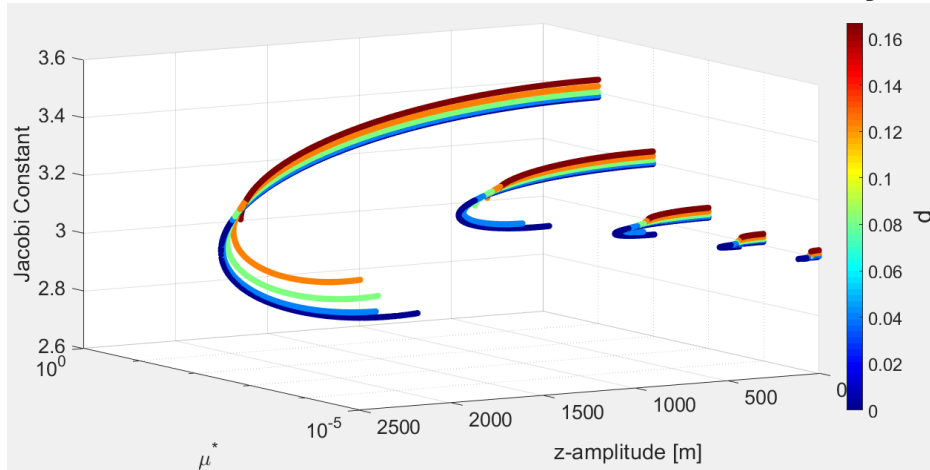


Figura 3.25 - Constante de Jacobi da órbita halo em torno de  $L_2$  em relação a  $d$  e  $\mu^*$ .



Com base nos parâmetros físicos e orbitais dos asteroides do tipo A, as posições dos pontos de equilíbrio colinear em função da velocidade angular foram calculadas.

Descobrimos que as localizações dos pontos de equilíbrio colineares  $L_3$  e  $L_2$  são mais sensíveis às mudanças na taxa de rotação em comparação com  $L_1$ .

Famílias de órbitas planares e halo foram calculadas em torno desses pontos de equilíbrio e descobrimos que quanto mais próximas as órbitas periódicas estão do ponto de equilíbrio, mais instáveis elas são.

Evidências numéricas mostram que a estabilidade das órbitas periódicas em torno dos pontos de equilíbrio depende do tamanho do corpo secundário e da razão de massa do sistema. Observamos que quanto mais alongado o corpo secundário, mais

instáveis são as órbitas planares. Além disso, detectamos órbitas halo instáveis e estáveis quando  $d = 0$  e quando  $d \neq 0$ .

Por fim, observamos que, mantendo a distribuição de massa constante, quanto mais alongado o corpo secundário, menores são os períodos orbitais das órbitas planares e halo em torno dos pontos de equilíbrio.

Portanto, se um veículo espacial fosse posicionada nas proximidades dos pontos de equilíbrio, o consumo de combustível necessário para a manutenção orbital seria maior em torno dos corpos secundários mais alongados.

## 4 TEMPO DE VIDA DE UM VEÍCULO ESPACIAL EM TORNO DE UM SISTEMA SÍNCRONO DE ASTEROIDE USANDO O MODELO DO DIPOLO DE MASSA

Este Capítulo é uma continuação do Capítulo 2, mas agora, iremos analisar um sistema binário de asteroides + partícula, levando em consideração a influência da Pressão da Radiação Solar (PRS) na dinâmica da partícula. Chamamos esse problema de problema restrito síncrono de quatro corpos perturbado.

O trabalho desenvolvido neste Capítulo foi publicado no *Journal Astrophysics and Space Science* (SANTOS et al., 2017b)

### 4.1 Introdução

Compreender o comportamento da dinâmica orbital de um veículo espacial nas proximidades de um sistema de asteroide binário é fundamental para a execução de uma missão espacial. Esse fato motivou o presente trabalho, cujo objetivo é verificar o tempo de sobrevivência de um veículo espacial em torno de um asteroide de formato irregular (ou em torno de um sistema binário de asteroide), levando em consideração o movimento de rotação de um dos corpos alongado, a forma irregular do corpo secundário e a pressão da radiação solar. Nós consideramos nesse estudo apenas o efeito da perturbação da PRS, porque esta é muito mais relevante do que a perturbação da gravidade do Sol (ou a perturbação gravitacional de outros planetas). Isso ocorre porque a perturbação gravitacional solar envolve termos diretos e indiretos, ou seja, a diferença entre a ação do Sol no veículo espacial e no asteroide se subtraem. Essas diferenças são pequenas quando o veículo espacial está próximo do asteroide ( $\approx 10^{-7}$ ) para as simulações realizadas neste Capítulo. Em contrapartida, o PRS atua diretamente no veículo, sem nenhum termo indireto para compensá-lo, o que faz com que o efeito da PRS seja muito maior ( $\approx 10^{-4}$ ) para nosso trabalho.

### 4.2 Pressão da radiação solar

A fonte de força motriz que atua em uma vela solar num veículo espacial é o momentum transportado para a vela através da energia radiativa do Sol. A noção de que a luz pode empurrar a matéria é bastante incomum nas nossas experiências cotidianas, mas isto é um mecanismo comum no sistema solar. Um dos exemplos mais marcantes é a beleza das caudas de cometas. Se sabe que os cometas possuem duas caudas distintas: uma é a cauda de íons que é varrida pelo vento solar, a outra é uma cauda de poeira que é varrida pela pressão da radiação solar. Esta pressão da

radiação solar é, de longe, o efeito dominante nas velas solares (MCINNES, 1999).

Nesta secção, uma análise física da pressão da radiação solar será explorada. Existe diversas descrições físicas que podem ser consideradas. Neste trabalho usaremos a abordagem da física quântica, que descreve a radiação (ou fótons) como sendo pacotes de energia. Outras abordagem, como a eletromagnética pode ser encontrada em (MCINNES, 1999).

### 4.3 A física da pressão da radiação solar

Seja um fóton viajando radialmente para fora do Sol e se chocando com uma vela solar transferindo momentum. A magnitude do momentum linear transportado por um fóton é dado por

$$p = \frac{E}{c} \quad (4.1)$$

onde  $E$  é a energia transportado por um fóton dada por  $E = h\nu$ , em que  $h$  é a constante de Planck dada por  $6,626 \cdot 10^{-34}$  J/s e  $\nu$  é a frequência da onda eletromagnética (em Hertz). Sabendo que  $c$  é a velocidade da luz no vácuo, podemos escrever que a magnitude do momentum linear de um fóton da seguinte forma:

$$p = \frac{h\nu}{c} \quad (4.2)$$

Para sabermos qual é a variação do momentum durante um intervalo  $\Delta t$  transferido para uma vela solar, precisamos saber primeiro se o fóton é absorvido completamente, refletido completamente, ou refletido parcialmente. Se o fóton for totalmente absorvido pela vela solar, a variação do momentum linear é dada por

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{c} \quad (4.3)$$

Se a radiação for totalmente refletida, a variação de momentum linear na vela solar é dada por:

$$\Delta p = 2 \frac{\Delta E}{c} \quad (4.4)$$

Se a radiação for parcialmente absorvida ou parcialmente refletida, a variação do momentum linear sobre a vela solar é dada por (BEUTLER, 2005):

$$\Delta p = C_r \frac{\Delta E}{c} \quad (4.5)$$

em que  $C_r$  é o coeficiente de refletividade, que possui um valor entre 1 e 2, pois depende se o material tem uma maior capacidade de absorção ou se tem a capacidade maior de reflexão.

A energia absorvida de uma fonte de radiação de intensidade  $S$  por um corpo de superfície  $A$  num intervalo de tempo  $\Delta t$  é

$$\Delta E = S \cdot A \cdot \Delta t \quad (4.6)$$

onde  $S$  é o fluxo de energia (Energia por unidade de área por unidade de tempo [ $J/(m^2s)$ ]).

Conhecendo agora a variação do momentum linear durante um intervalo  $\Delta t$  podemos encontrar a força da radiação solar transferida para uma vela solar fazendo o uso da segunda lei de Newton.

Para uma vela solar que absorve 100% da radiação solar, temos que a magnitude da força que atua nessa vela é dada por

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (4.7)$$

Conhecendo  $\Delta p$  relacionado a absorção total dada pela Equação 4.3 e sabendo que  $\Delta E$  é dada pela Equação 4.6, temos que a força da radiação solar que atua numa superfície parcialmente absorvedora (ou parcialmente refletora) é

$$F = C_r \frac{S \cdot A}{c} \quad (4.8)$$

Dividindo a Equação 4.8 pela Área da superfície absorvedora, podemos encontrar a pressão da radiação solar que é dada por

$$P_r = C_r \frac{S}{c} \quad (4.9)$$

Dividindo o fluxo de energia  $S$  a uma distancia de 1 U.A. (Unidade Astronômica) pela velocidade da luz, encontramos que a pressão da radiação solar é uma constante dada por (MONTENBRUCK; GILL, 2000)

$$P_s = 4,56316 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2 \quad (4.10)$$

Sabemos que a aceleração causada devido a pressão da radiação solar tem direção radial a superfície do Sol, podemos definir a aceleração que um veículo espacial de massa  $m$  e área  $A$  sofre ao ser perturbada pela pressão da radiação solar, conforme mostra a Equação 4.11

$$\mathbf{a}_{prs} = \frac{F}{m} = -C_r \frac{A}{m} P_s \frac{r_0^2}{(r_{sat} - r_{sol})^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (4.11)$$

onde  $r_0$  é a distancia Terra-Sol,  $r_{sat}$  é o vetor da posição geométrica do veículo espacial em relação ao centro de massa do sistema binário,  $r_{sol}$  é o vetor da posição geométrica do sol em relação ao centro de massa do sistema binário e  $\hat{\mathbf{r}}$  é o vetor unitário do sol em relação ao satélite.

É importante perceber que a aceleração que uma partícula sofre devido a influencia da pressão de radiação solar, representada pela Equação 4.11 não depende da altura do satélite acima do Superfície do asteroide. Esta é uma das razões pelas quais a pressão de radiação solar é a perturbação dominante não-gravitacional (BEUTLER, 2005).

Vários autores investigaram a influência da pressão da radiação solar não só nos veículos espaciais mas também em partículas de poeira interestelar. Burns et al. (1979) mostrou que a influencia da pressão da radiação solar em partículas de poeira muito pequena (raio  $< 0,01 \mu\text{m}$ ) não é significativa. Isto acontece porque partículas muito pequenas não são afetadas pelo momento da radiação solar, porque o comprimento de onda de radiação característica  $\lambda$  é relativamente grande (BURNS et al., 1979; HAMILTON; BURNS, 1992).

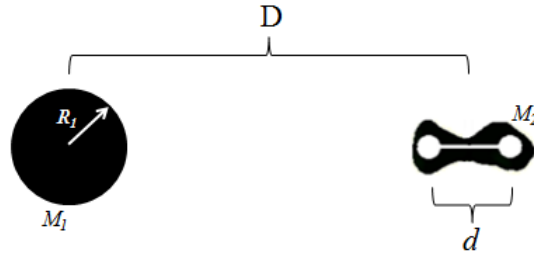
#### 4.4 Metodologia

Para este estudo, foram realizados testes numéricos assumindo que o tamanho do asteroide considerado um dipolo de massa em rotação ( $M_2$ ) é de  $d = 500$  metros. A distância entre o asteroide primário mais massivo, assumindo uma forma esférica (com raio  $R_1$ ), e o centro de massa do dipolo é de  $D$  e mede 3804 metros, como mostra a Figura 4.1.

A Figura 4.1 mostra os dois asteroides  $M_1$  e  $M_2$ , em que  $M_2$  é considerado um corpo com formato irregular. Os dois pontos de massa, representados na Figura 4.1 pelos dois círculos brancos dentro do corpo  $M_2$ , representam o dipolo de massa. Esses pontos brancos de massa são conectados por uma haste sem massa.



Figura 4.1 - Imagem representativa do sistema de asteroide estudado.



O comprimento desta haste é medido calculando a distância entre os dois pontos de massa e é considerado constante.

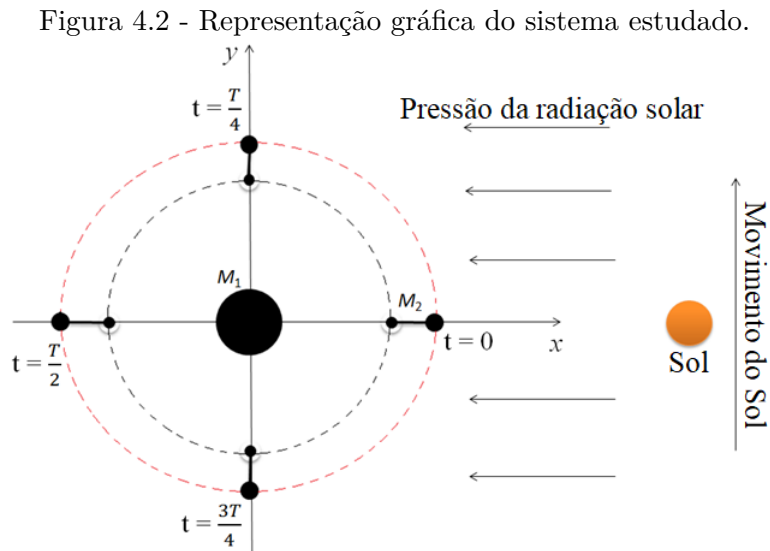
A massa total do sistema é constante e mede  $9,273 \times 10^{12}$  kg. O período de translação dos corpos primários em torno do centro de massa do sistema é de 0,686 dias. Esses valores foram baseados no par de asteroides *Alpha – Gamma* do sistema triplo 2001SN<sub>263</sub> (TRACY et al., 2015). *Gamma* tem a forma de um corpo alongado e possui movimento síncrono. A escolha desse par de asteroides se justifica devido à missão brasileira ASTER, que considera a possibilidade de enviar um veículo espacial para esse sistema de asteroides (SUKHANOV et al., 2010; PRADO, 2014). Embora os detalhes deste sistema de asteroides não sejam o objetivo principal do presente trabalho, tomamos esse sistema como base para desenvolver um estudo geral do problema. O presente estudo é realizado variando os valores de cada uma das massas dos corpos do sistema duplo ( $M_1$  e  $M_2$ ), sem alterar a massa total do sistema. No primeiro caso, a massa de  $M_1$  é 99% da massa total do sistema ( $M_1 + M_2$ ) e, conseqüentemente,  $M_2$  tem uma massa de 1% da massa total do sistema. No segundo caso,  $M_1$  possui 90% da massa total do sistema e  $M_2$  10%. Nos próximos casos, é feita uma alteração de massa de 10%, na qual diminuimos a massa de  $M_1$  e aumentamos a massa de  $M_2$  até que, no último caso estudado,  $M_1$  tenha 60% da massa total de sistema e  $M_2$  40%.

Iremos analisar a dinâmica orbital de um veículo espacial de massa desprezível nas proximidades do corpo secundário. Isso se deve ao fato de que queremos investigar, não só a influencia da razão de massa do sistema e da PRS, mas também a influencia do corpo alongado nessa dinâmica. Se considerarmos a partícula de massa infinitesimal muito distante do corpo secundário, a influencia da forma alongada do corpo menos massivo seria negligenciável. Com isso em mente, podemos prosseguir com a metodologia.

Para gerar as condições iniciais do veículo espacial, nós consideramos inicialmente

o Problema de Dois Corpos, em que queremos determinar os elementos keplerianos do veículo espacial em torno do corpo  $M_2$  que é modelado como um ponto de massa em princípio. Consideramos como sendo zero a anomalia verdadeira, o argumento do periastro e a longitude do nodo ascendente. Os únicos parâmetros que variamos foram a inclinação, o semi-eixo maior e a excentricidade da órbita.

Depois de definir os elementos keplerianos do veículo espacial em torno de  $M_2$ , nós convertemos a posição de elementos keplerianos para o sistema cartesiano, objetivando utiliza-los nas equações de movimento. Uma vez estabelecidas as condições iniciais no sistema cartesiano, é feita uma integração numérica incluindo a massa de  $M_1$ , a forma do corpo  $M_2$  e a pressão da radiação solar. Inicialmente ( $t = 0$ ) os três corpos ( $M_1$ ,  $M_2$  e o Sol) estão alinhados, conforme mostrado na Figura 4.2.



Podemos observar na Figura 4.2 que o corpo  $M_2$  sempre tem a mesma face apontada para o corpo  $M_1$ . Isso ocorre porque o período de translação de  $M_2$  é igual ao período de rotação em torno de seu próprio eixo.

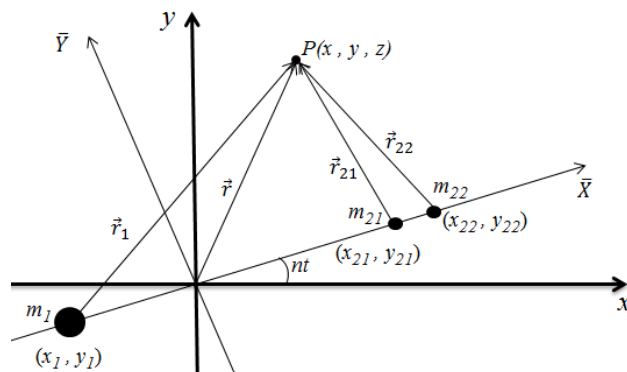
Na dinâmica, considera-se que uma colisão com  $M_1$  ocorre quando a posição do veículo espacial é menor ou igual ao raio desse corpo. Se a posição da partícula em qualquer instante for menor que o tamanho de  $M_2$  (consideramos um diâmetro de 500 metros no eixo  $x$  e 250 metros no eixo  $y$ ), teremos uma colisão. Consideramos uma órbita descartada (ejeção) quando a posição do veículo espacial ultrapassa 30 vezes a distância entre os corpos primários.

#### 4.5 Equação do movimento centrado no centro de massa do sistema binário

Neste Capítulo, o sistema canônico de unidades é usado, e significa que: i) A unidade de distância é a distância entre  $M_1$  e o centro de massa de  $M_2$  (distância  $D$ ); ii) Supõe-se também que a massa do corpo  $M_1$  seja maior que a massa do corpo  $M_2$ . Em termos matemáticos, temos que  $m_1 \geq m_2$  e  $m_2 = m_{21} + m_{22}$ , em que  $m_{21} = m_{22}$ . Consequentemente, a razão de massa é dada por  $\mu^* = \frac{m_{21}}{(m_1 + m_{21} + m_{22})}$ , onde  $\mu^* = \frac{\mu}{2}$ , com  $\mu$  sendo a razão de massa usual usada no problema restrito de três corpos (SZEBEHELY, 1967; MOLTON, 1960; SANTOS et al., 2017a). Observe que a unidade de massa é escolhida de modo que a soma das massas seja unitária; iii) A unidade de tempo é definida de modo que o período translacional dos corpos primários seja igual a  $2\pi$ ; iv) A constante gravitacional é  $G = 1$  (SZEBEHELY, 1967; MCCUSKEY, 1963).

Nesse problema, assumiu-se que o movimento do corpo de massa desprezível  $P(x, y, z)$  é governado pelas forças gravitacionais dos corpos primários  $M_1$  e  $M_2$ , mas o corpo com massa infinitesimal não afeta a dinâmica dos primários. Nas análises, a pressão da radiação solar é levada em consideração. O corpo  $M_2$  é modelado como um dipolo de massa em rotação formado por dois corpos hipotéticos com massas  $m_{21}$  e  $m_{22}$ , conforme mostrado na Figura 4.3. A distância entre o corpo  $m_{21}$  e  $m_{22}$  é  $d = 0,131440$  unidade canônica, o que equivale a 500 metros.

Figura 4.3 - Sistema de coordenadas para o Problema Restrito Síncrono de quatro corpos.



Visto a partir do sistema de referência centrado no centro de massa do sistema binário, a posição espacial do corpo de massa infinitesimal é  $P(x, y, z)$ . As posições espaciais dos corpos de massa  $m_1$ ,  $m_{21}$  e  $m_{22}$ , respectivamente, são

$$\begin{aligned}
x_1 &= -2\mu^* \cos(nT), \\
y_1 &= -2\mu^* \sin(nT), \\
z_1 &= 0,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
x_{21} &= (1 - d/2 - 2\mu^*) \cos(nT), \\
y_{21} &= (1 - d/2 - 2\mu^*) \sin(nT), \\
z_{21} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
x_{22} &= (1 + d/2 - 2\mu^*) \cos(nT), \\
y_{22} &= (1 + d/2 - 2\mu^*) \sin(nT), \\
z_{22} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde  $n$  é a velocidade angular dos corpos primários ao redor do centro de massa e  $T$  é o tempo em unidade canônica. Assim, temos que as equações de movimento de um corpo de massa infinitesimal no plano  $xy$ , quando vistas de um sistema de referência inercial, são dadas por:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} = & -\frac{(1 - 2\mu^*)(x - x_1)}{r_1^3} - \frac{\mu^*(x - x_{21})}{r_{21}^3} \\
& - \frac{\mu^*(x - x_{22})}{r_{22}^3} - P_{radx},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y} = & -\frac{(1 - 2\mu^*)(y - y_1)}{r_1^3} - \frac{\mu^*(y - y_{21})}{r_{21}^3} \\
& - \frac{\mu^*(y - y_{22})}{r_{22}^3} - P_{rad y},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{z} = & -\frac{(1 - 2\mu^*)(z - z_1)}{r_1^3} - \frac{\mu^*(z - z_{21})}{r_{21}^3} \\
& - \frac{\mu^*(z - z_{22})}{r_{22}^3} - P_{radz},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

em que

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}, \tag{4.18}$$

$$r_{21} = \sqrt{(x - x_{21})^2 + (y - y_{21})^2 + (z - z_{21})^2}, \tag{4.19}$$

$$r_{22} = \sqrt{(x - x_{22})^2 + (y - y_{22})^2 + (z - z_{22})^2}, \quad (4.20)$$

e  $P_{radx}$ ,  $P_{rady}$  e  $P_{radz}$  representam as componentes  $x$ ,  $y$ , e  $z$  da aceleração vetorial ( $\mathbf{P}_{rad}$ ) devido à pressão da radiação solar (MASAGO et al., 2016; MONTENBRUCK; GILL, 2000; BEUTLER, 2005). A equação da pressão de radiação solar vetorial é dada por

$$\mathbf{P}_{rad} = -C_r \frac{A}{m} P_S \frac{r_0^2}{R^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (4.21)$$

O valor usado para  $A$  nas simulações é de  $1 \text{ m}^2$  e a massa é adotada como  $100 \text{ kg}$ , então  $A/m = 0,01 \text{ m}^2/\text{kg}$ . Aqui consideramos que o painel solar do veículo espacial está sempre posicionado perpendicularmente aos raios solares. A unidade de medida de  $\mathbf{P}_{rad}$  é o  $\text{m}/\text{s}^2$  (unidade de aceleração). Para encontrar o valor em unidades canônicas, nós dividimos a Equação 4.21 por  $3804$  metros (distância entre os primários) e multiplicamos pelo quadrado do período orbital do sistema ( $(59270,4)^2$  segundos) dividido por  $2\pi$ . Nós consideramos que o Sol está inicialmente a uma distância  $x_{Sol} = 0,4074964 \times 10^8$  unidade canônica de distância do centro de massa do sistema de asteroide e  $y_{Sol} = 0$ . Para integrar o movimento do Sol, nós consideramos as seguintes expressões matemáticas

$$\ddot{x}_{Sol} = -\frac{M_{Sol} x_{Sol}}{M_{ast} r_{Sol}^3} = -2,14485 \times 10^{17} \frac{x_{Sol}}{r_{Sol}^3} \quad (4.22)$$

e

$$\ddot{y}_{Sol} = -\frac{M_{Sol} y_{Sol}}{M_{ast} r_{Sol}^3} = -2,14485 \times 10^{17} \frac{y_{Sol}}{r_{Sol}^3} \quad (4.23)$$

em que  $M_{Sol} = 1,989 \times 10^{30}$ ,  $M_{ast} = 9,23 \times 10^{12}$  e  $r_{Sol} = \sqrt{x_{Sol}^2 + y_{Sol}^2}$ .

## 4.6 Investigação numérica

Os sistemas binários de asteroides são bastante interessantes, pois são sistemas compostos por corpos que possuem massas e raios semelhantes. Uma partícula colocada nas proximidades de um sistema binário, por exemplo, sofre perturbações complexas, e o entendimento dessas perturbações é fundamental para determinar as regiões onde existem famílias de órbitas ao redor do sistema. A determinação dessas famílias de órbitas podem indicar a localização de possíveis partículas de poeiras ao redor do sistema, o que ainda não pode ser observado através de telescópios. Por outro lado, uma região instável terá pouca ou nenhuma partícula de poeira, portanto é possível desconsiderar a possibilidade da existência de um corpo ou anéis naquela região. Essas informações são importantes ao planejar uma missão para um sistema de asteroides, porque as características do sistema influenciam as posições em que

o veículo espacial será colocado. Existem regiões onde o veículo espacial está mais protegido ou vulnerável aos riscos de colisões com partícula de poeira (ARAÚJO et al., 2012; ARAÚJO et al., 2015a). Um estudo foi desenvolvido para encontrar famílias de órbitas nas proximidades de um sistema binário de asteroides, em termos dos elementos Keplerianos iniciais, dentro de um determinado período de tempo e levando em consideração os distúrbios gravitacionais e a pressão da radiação solar presente no sistema. As condições iniciais adotadas e os resultados são descritos a seguir.

Analisaremos as grades das condições iniciais em relação ao centro de massa do dipolo de massa em rotação. Levamos em conta as forças gravitacionais dos dois corpos primários, a forma irregular bem como a rotação do corpo secundário (menos massivo) e a pressão da radiação solar. Para construir as grades, nós consideramos inicialmente o veículo espacial em uma órbita em torno de  $M_2$ , conforme explicado na Seção 4.4. Os únicos parâmetros que alteramos foram a inclinação, a excentricidade e o semi-eixo maior. Neste estudo, analisamos órbitas planares diretas (inclinação zero) e órbitas retrógradas (inclinações de 180 graus). Nós variamos a excentricidade de  $e = 0$  até  $e = 0,99$ , no passo de 0,01. O semi-eixo maior do veículo espacial varia de  $a_0 = 500$  metros (distância entre  $M_{21}$  e  $M_{22}$  até  $a_f$ , em que  $a_f$  é a região *Hill* (ARAÚJO et al., 2008) do dipolo de massa em rotação, com a adição de uma margem extra de 50 metros além da região de influência, conforme mostra a Equação 4.24

$$a_f = r_{Hill} + 50 \quad (4.24)$$

em que  $r_{Hill}$  é dada por

$$r_{Hill} = r \sqrt[3]{\frac{2m_2}{3m_1}}. \quad (4.25)$$

onde  $r$  é a distancia entre os corpos primários (3804 metros), e  $m_2$  e  $m_1$  são as massas dos corpos  $M_2$  e  $M_1$ , respectivamente, em kg. Observe através da Equação 4.25 que a esfera de influência depende da massa dos corpos primários. Então, para cada condição inicial com uma dada massa para o dipolo, a esfera de influência também será diferente e as variações das condições iniciais do semi-eixo maior serão alteradas.

O tempo total de integração é de 500 unidades canônicas do sistema analisado, o que equivale a aproximadamente 1 ano. O período orbital em torno do centro de massa do sistema de asteroide que estamos analisando é de 0,686 dias. Para realizar as integrações numéricas, o método Runge-Kutta 7/8 (de passo variável) é usado com um intervalo de tempo de 0,01 unidade canônica. Durante as integrações, acompa-

nhamos as partículas que colidiram com qualquer um dos corpos, as partículas que foram ejetadas do sistema e as partículas que sobreviveram durante o tempo de integração. A Figura 4.4 (órbitas diretas) e a Figura 4.5 (órbitas retrógradadas) mostram os resultados e consideram uma grade de condições iniciais (com relação ao primário menos massivo) como uma função do semi-eixo maior e a excentricidade do veículo espacial. Lembrando que o semi-eixo maior e a excentricidade são em relação ao centro de massa de  $M_2$ . O codificado de cores indicam o tempo que a partícula sobrevive para cada condição inicial. A pressão da radiação solar é levada em consideração. Podemos ver no topo do lado esquerdo que há uma região em branco. Nessa região, as condições iniciais do veículo espacial estão dentro do corpo  $M_2$ , portanto elas não têm nenhum significado físico. Podemos notar que a vida útil do veículo espacial é muito baixa (apenas um período orbital do sistema) quando consideramos a massa do primário menos massivo sendo 1% da massa total do sistema. Isso ocorre porque a massa do corpo  $M_2$  é pequena (apenas 1% da massa total do sistema); portanto, a esfera de influência desse corpo também é pequena (menos que o dobro do tamanho do corpo  $M_2$ ). Como consequência, o veículo espacial é lançado muito próximo do corpo  $M_2$ , fazendo com que seja rapidamente capturado. As órbitas que possuem um alto valor do semi-eixo maior e uma baixa excentricidade são órbitas que duram mais, porque iniciam suas trajetórias mais distantes do corpo  $M_2$ , sendo necessário percorrer uma distância maior até a colisão.

Figura 4.4 - Tempo de vida útil na região próxima a  $M_2$  (órbitas diretas). O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de  $a$  e  $e$ . Massa de  $M_1 = 99\%$  e massa de  $M_2 = 1\%$  da massa total do sistema. A pressão da radiação solar está incluída.

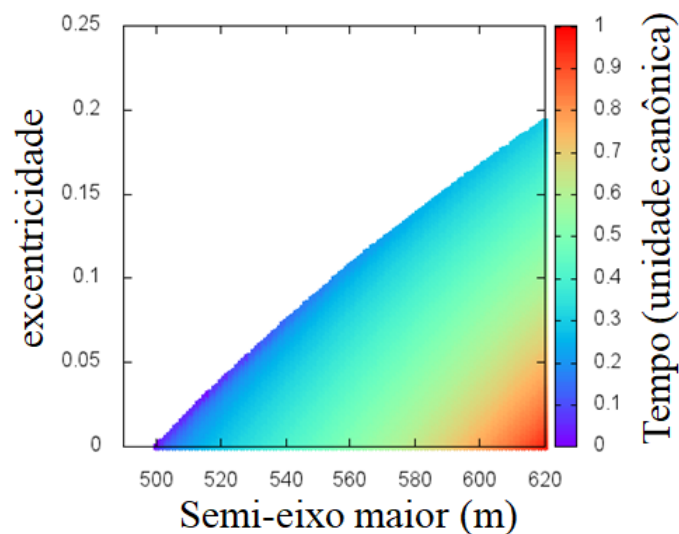
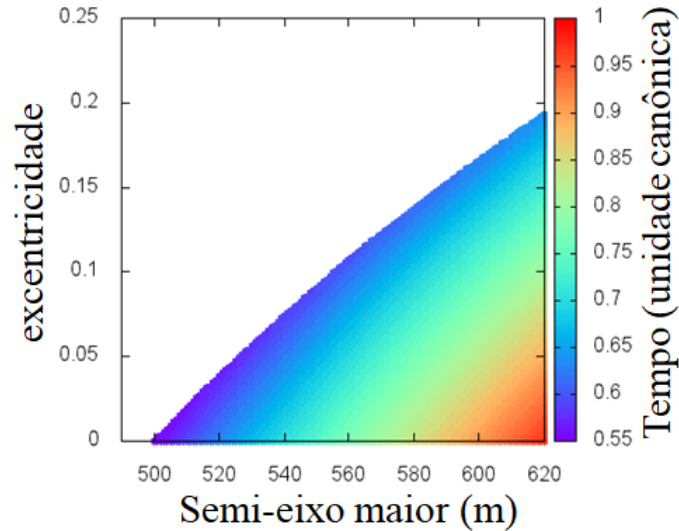


Figura 4.5 - Tempo de vida útil na região próxima a  $M_2$  (órbitas retrógradas). O diagrama mostra a evolução do tempo de vida da órbita em função de  $a$  e  $e$ . Massa de  $M_1 = 99\%$  e massa de  $M_2 = 1\%$  da massa total do sistema. A pressão da radiação solar está incluída.



As Figuras 4.6 e 4.7 mostram algumas trajetórias das órbitas diretas e retrogradadas, respectivamente, quando consideramos a pressão da radiação solar e o corpo secundário ( $M_2$ ) tem 1% da massa total do sistema.

Figura 4.6 - Tempo de vida útil na região próxima a  $M_2$  (órbitas diretas) e duas trajetórias para uma compreensão mais clara do movimento do veículo espacial. A pressão da radiação solar está incluída.

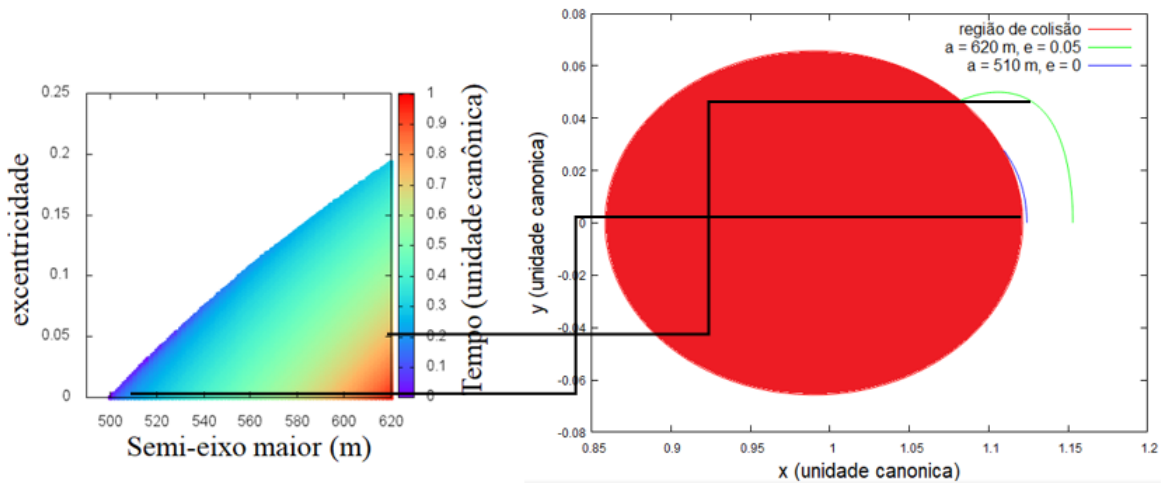
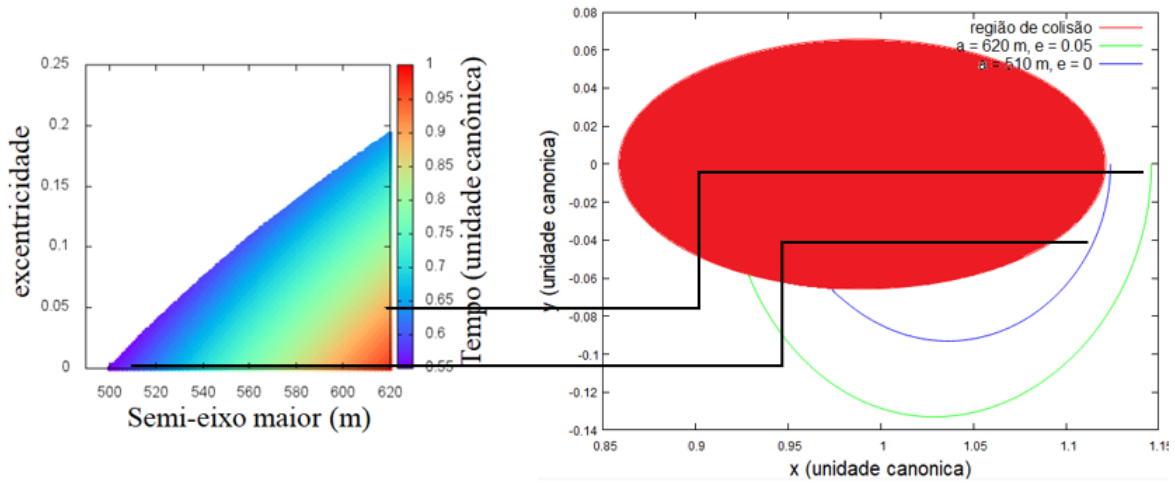




Figura 4.7 - Tempo de vida útil na região próxima a  $M_2$  (órbitas diretas) e duas trajetórias para uma compreensão mais clara do movimento do veículo espacial. A pressão da radiação solar está incluída.

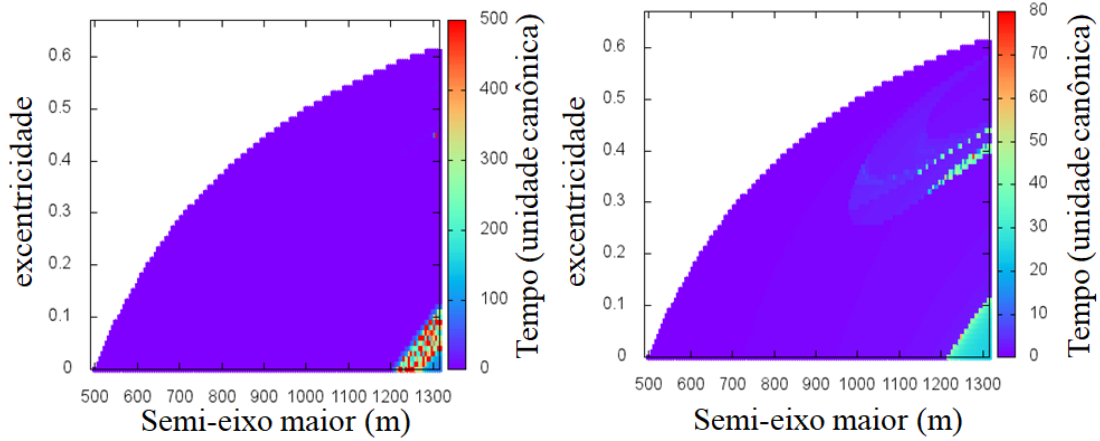


Depois de usar uma razão de massa semelhante aos corpos *Alpha – Gamma* do asteroide 2001SN<sub>263</sub>, modificamos as massas dos primários, para ver os efeitos desse parâmetro. Como já mencionado, manteremos a massa total do sistema no valor  $9.273 \times 10^{12}$  kg. No entanto, faremos uma análise considerando que 90% da massa total do sistema pertence a  $M_1$  e 10% da massa total do sistema pertence a  $M_2$  (dipolo de massa em rotação). A razão de massa é  $\mu^* = 0,05$ . A ordem de magnitude da massa do corpo  $M_2$  é  $10^{11}$  kg.

A pressão da radiação solar faz com que o veículo espacial seja empurrado para  $M_2$  (devido à posição inicial do Sol e do veículo espacial). Como o veículo espacial começa com as condições iniciais muito próximas de  $M_2$  (como mencionado), esse “empurrão” da pressão da radiação solar faz com que o veículo espacial colida mais rapidamente com o corpo  $M_2$ . Isso significa que a pressão da radiação solar reduz a vida útil das órbitas, neste caso. As Figuras 4.8 (a) e 4.8 (b) mostram a vida útil do veículo espacial em função do semi-eixo maior e da excentricidade das órbitas iniciais, para exemplificar esse efeito. Na figura 4.8 (a) a pressão da radiação solar não é levada em consideração e na Figura 4.8 (b) a pressão da radiação solar é incluída na simulação.

Nas Figuras 4.8 (a) e 4.8 (b), o semi-eixo maior é diferente dos mostrados nas Figuras 4.4 e 4.5, porque na situação mostrada nas Figuras 4.8 (a) e 4.8 (b)  $M_2$  possui uma massa maior, o que torna sua região de influência maior.

Figura 4.8 - Tempo de vida na região próxima a  $M_2$  (órbitas diretas). O diagrama mostra a evolução da vida útil da órbita em função de  $a$  e  $e$ . Massa de  $M_1 = 90\%$  e massa de  $M_2 = 10\%$  da massa total do sistema. (a) Órbitas diretas. Sem pressão da radiação solar. (b) Órbitas diretas. Com pressão da radiação solar.

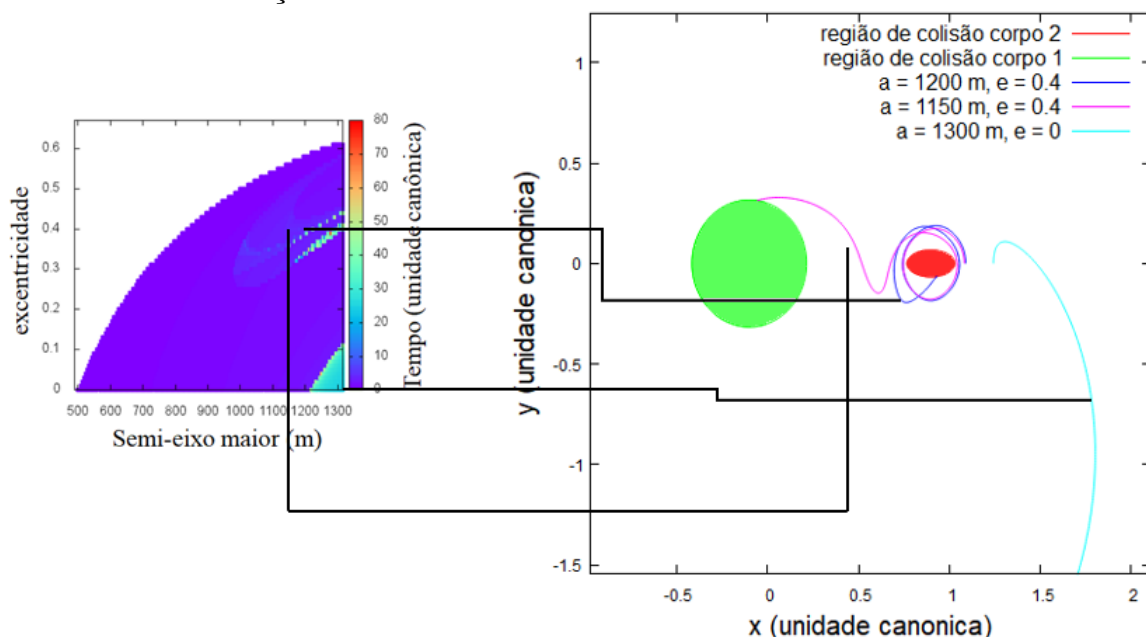


Quando a massa de  $M_2$  é maior, as órbitas próximas a este corpo têm uma força gravitacional mais intensa de  $M_2$ , fazendo o veículo espacial colidir com o corpo rapidamente. As órbitas com o semi-eixo maior próximo à extremidade da região de influência de  $M_2$  são órbitas que duram mais. As órbitas diretas que sobrevivem durante a integração numérica na Figura 4.8 (a), por  $\mu^* = 0,05$ , são trajetórias que orbitam o centro de massa do sistema. Nenhuma órbita direta foi encontrada orbitando em torno de  $M_2$ .

Pode ser visto na Figura 4.8 (b) que, quando a pressão da radiação solar é levada em consideração no modelo, as órbitas duram um tempo de 80 unidades canônicas, aproximadamente 3,5 meses. A pressão da radiação solar aumenta a excentricidade da órbita e o raio do periapsis se torna menor, fazendo com que o veículo espacial se aproxime do dipolo e colida com ele. Observe também que, devido ao aumento da excentricidade, o apoapsis da órbita também aumenta, fazendo com que o veículo espacial colida com o corpo  $M_1$  com mais frequência ou ejeje do sistema.

As Figuras 4.9 mostra algumas trajetórias das órbitas diretas quando consideramos a pressão da radiação solar e o corpo secundário ( $M_2$ ) tem 10% da massa total do sistema. A órbita de cor azul, onde o semi-eixo maior inicial vale 1300 metros e a excentricidade vale 0, a órbita é uma espiral se afastando do sistema. Por questão de escala, não plotamos a trajetória completa.

Figura 4.9 - Tempo de vida útil na região próxima a  $M_2$  (órbitas diretas) e três trajetórias para uma compreensão mais clara do movimento do veículo espacial. A pressão da radiação solar está incluída.



As Figuras 4.10 (a) e 4.10 (b) fornecem informações a respeito do destino final da partícula em relação às Figuras 4.8 (a) e 4.8 (b), respectivamente, isto é, ela informa em quais condições iniciais o veículo espacial colide com  $M_1$ , com  $M_2$ , sobrevive durante o tempo total de integração ou ejete do sistema. As regiões de cor vermelha nas Figuras 4.10 (a) e 4.10 (b) indicam que a partícula colidiu com o primário menos massivo ( $M_2$ ). A região de cor azul indica que a partícula colidiu com  $M_1$ . As regiões amarelas indicam que a partícula foi ejetada do sistema e a região negra mostra as condições iniciais em que a partícula sobrevive por todo o tempo de integração.

Podemos ver que, na Figura 4.10 (a), para o semi-eixo maior de 1200 metros e excentricidade abaixo de 0,1, as órbitas sobrevivem (cor preta) em torno do sistema, ou escapam (cores amarelas) do sistema. Cada ponto de cor nas grades de condição inicial possuem trajetórias em torno do sistema binário de asteroide, e é notável que uma pequena variação na condição inicial pode fazer com que o satélite se aproxime mais ou menos de um dos primários. Podemos ver, na Figura 4.11, o corpo mais massivo mostrado em rosa, o corpo  $M_2$ , com uma forma de dipolo em massa e duas órbitas. A órbita vermelha tem um semi-eixo maior inicial de 1255 metros e uma excentricidade de 0,01. A órbita azul tem um eixo semi-eixo maior inicial de 1255 metros e uma excentricidade de 0,02.

Figura 4.10 - Órbitas diretas. Região de colisão com  $M_1$  (azul), região de colisão com  $M_2$  (vermelho) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). A região branca é a região dentro de  $M_2$ . Massa de  $M_1 = 90\%$  e massa de  $M_2 = 10\%$ . (a) Órbitas diretas. Sem pressão da radiação solar. (b) Órbitas diretas. Com pressão da radiação solar.

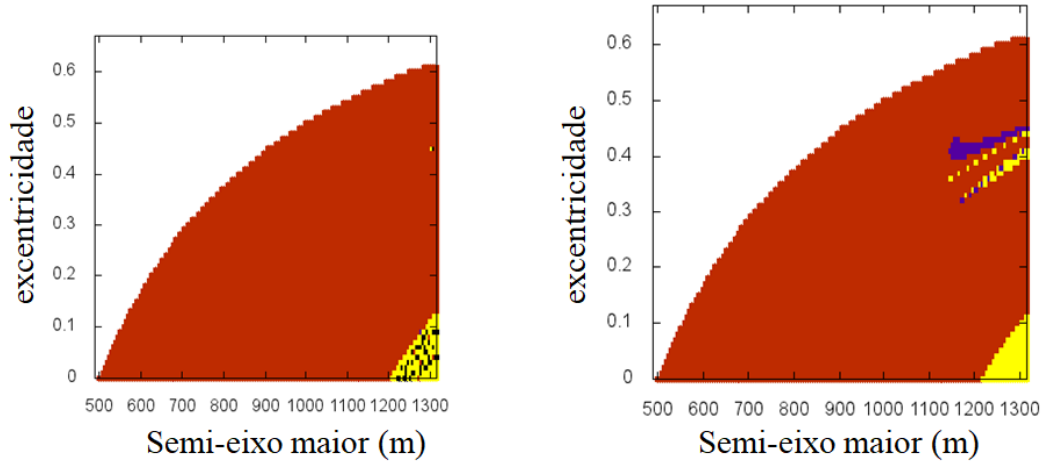
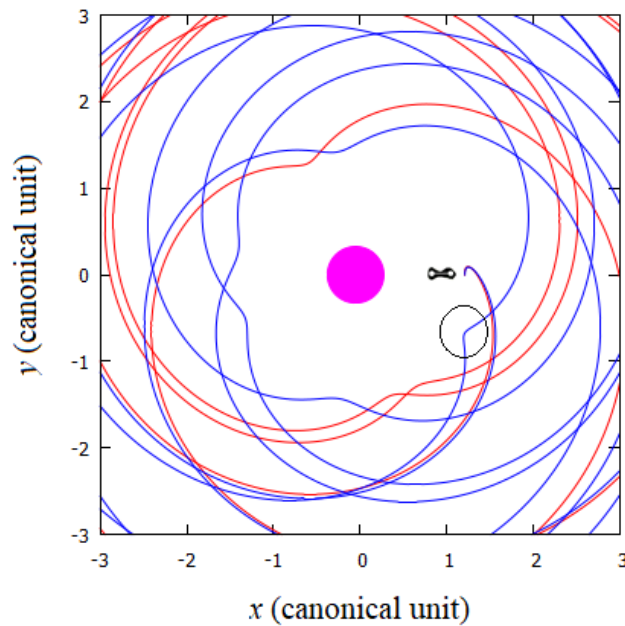


Figura 4.11 - Órbita ejetada do sistema (cor azul) e órbita sobrevivente (cor vermelha). A pressão da radiação solar não é levada em consideração.

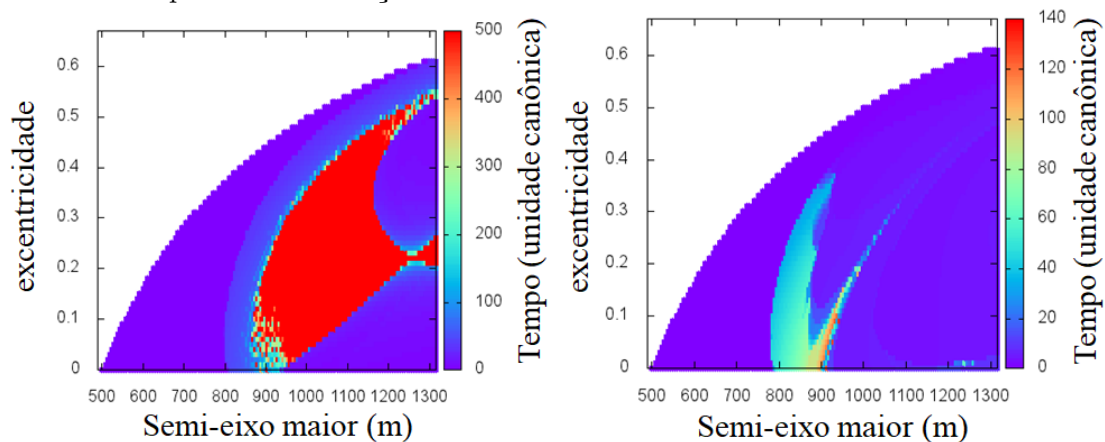


Podemos ver, na Figura 4.11, que as duas órbitas são inicialmente sobrepostas, mas com o passar do tempo (devido à sensibilidade do sistema) elas se afastam gradualmente. Em um dado instante, a órbita azul está mais próxima dos corpos primários (região destacada na figura por um círculo preto), fazendo com que a órbita

ganhe energia e seja ejetada do sistema. Por outro lado, a órbita vermelha não está muito próxima dos primários, ou seja, não há ganho de energia e, portanto, o satélite permanece orbitando o sistema durante toda a integração numérica. Vale lembrar que as duas órbitas são diretas e que a perturbação devido à pressão da radiação solar não está sendo considerada. Por outro lado, quando consideramos a pressão da radiação solar, podemos observar através da Figura 4.10 (b) que nenhuma órbita sobrevive por toda integração numérica, devido ao efeito da pressão da radiação solar fazer com que o veículo espacial, escape do sistema ou colida com um dos corpos primários.

As Figuras 4.12 (a) e 4.12 (b) são analisadas de maneira semelhante às Figuras 4.8 (a) e 4.8 (b) e também têm as mesmas condições iniciais. A diferença é que, nas Figuras 4.12 (a) e 4.12 (b), as órbitas são retrógradadas.

Figura 4.12 - Tempo de vida na região próxima a  $M_2$  (órbitas retrógradadas). O diagrama mostra a evolução da vida útil da órbita em função de  $a$  e  $e$ . Massa de  $M_1 = 90\%$  e massa de  $M_2 = 10\%$  da massa total do sistema. (a) Órbitas retrógradadas. Sem pressão da radiação solar. (b) Órbitas retrógradadas. Com pressão da radiação solar.



Os resultados numéricos mostram que existe uma região mais ampla de órbitas retrógradadas que sobrevivem mais tempo quando comparadas às órbitas diretas.

Observamos que nenhuma trajetória foi encontrada (tanto nas simulações em que a pressão da radiação solar não foi considerada quanto nas em que foi considerada) que orbitava o corpo menos massivo em órbitas diretas. Por outro lado, todas as órbitas retrógradadas que sobreviveram por 500 períodos orbitais na Figura 4.12 (a) permanecem em torno do corpo menos massivo ( $M_2$ ). Todas as órbitas que não

sobrevivem por toda a integração numérica são regiões onde a partícula colide com  $M_2$ .

É possível ver, na Figura 4.12 (b), que quando a pressão da radiação solar é levada em consideração, as órbitas não duram um ano (500 unidades canônicas). Mas elas sobrevivem por mais tempo em relação às órbitas diretas mostradas na Figura 4.8 (b) (pressão de radiação solar incluída).

A influência da pressão da radiação solar aumenta a intensidade das perturbações que afetam as órbitas, resultando em uma maior frequência de colisões com os corpos primários. Órbitas que inicialmente têm o semi-eixo maior acima de 1050 e excentricidade abaixo de 0,02 são órbitas que colidem com  $M_1$ . As demais condições mencionadas na Figura 4.12 (b) fazem com que a partícula colida com  $M_2$ .

É notável que, quando a pressão da radiação solar é levada em consideração (nas Figuras 4.8 (b) e 4.12 (b)), tanto em órbitas diretas quanto em retrógradas, as partículas deixam de sobreviver durante todo o tempo de integração numérica, quando consideramos a razão de massa de  $\mu^* = 0,05$ .

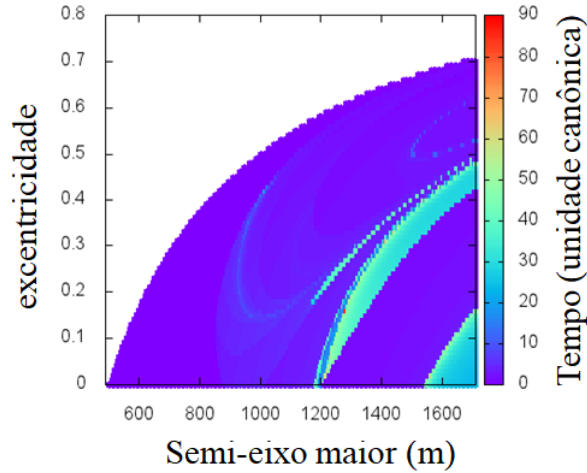
Percebemos que a inclusão da pressão de radiação solar nas simulações causa uma diferença considerável nos resultados obtidos. Assim, é necessário usar a pressão da radiação solar em estudos envolvendo sistemas com massas pequenas, como no caso de asteroides e cometas. A partir deste ponto, mostraremos apenas os resultados levando em consideração a pressão da radiação solar, uma vez que essa é uma força importante que está sempre presente na dinâmica.

Variando as massas dos corpos, mas mantendo constante a massa total do sistema ( $9.273 \times 10^{12} \text{ kg}$ ), podemos estudar a influência desse parâmetro. Agora, fazemos uma análise considerando que 80% da massa total do sistema pertence a  $M_1$  e 20% da massa total do sistema pertence a  $M_2$ . Novamente, nesta análise, o sistema de coordenadas está centrado no centro de massa do corpo menos massivo. A ordem de magnitude da massa de  $M_2$  é  $10^{12} \text{ kg}$  e a razão de massa é  $\mu^* = 0,1$

As Figuras 4.13 (órbitas diretas) e 4.14 (órbitas retrógradas) mostram uma grade de condições iniciais que relacionam a excentricidade, o semi-eixo maior e a vida útil das órbitas.

Podemos ver, na Figura 4.13, que nenhuma órbita direta sobrevive por um ano quando levamos em consideração a pressão da radiação solar.

Figura 4.13 - Tempo de vida na região próxima a  $M_2$  (órbitas diretas). O diagrama mostra a evolução da vida útil da órbita em função de  $a$  e  $e$ . A massa é de  $M_1 = 80\%$  e a massa de  $M_2 = 20\%$  da massa total do sistema. Pressão de radiação solar está incluída.



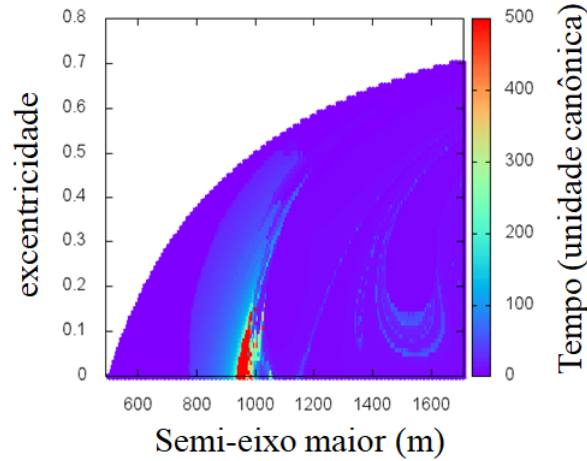
Embora essas órbitas não sobrevivam a todo o tempo de integração, elas duram mais tempo em comparação com as simulações anteriores. Isso ocorre porque a força gravitacional de  $M_2$  aumenta, governando com maior intensidade a dinâmica de um veículo espacial na sua vizinhança conseqüentemente, fazendo com que a partícula sobreviva por mais tempo em torno de  $M_2$ . A partir disso, podemos deduzir que, à medida que aumentamos a massa do corpo secundário, mais órbitas permanecerão por mais tempo na vizinhança do asteroide e, possivelmente, podemos encontrar órbitas diretas ao redor do corpo menos massivo quando mesmo quando levadas em consideração a pressão da radiação solar.

Por outro lado, algumas regiões de órbitas retrógradas que sobrevivem por um ano começam a aparecer na vizinhança do semi-eixo maior de 1000 metros e baixas excentricidades, como mostra a Figura 4.14.

À medida que aumentamos a massa de  $M_2$ , os tempos de sobrevivência das órbitas também aumentam.

Podemos observar que existem regiões em que órbitas retrógradas sobreviveram por pelo menos 1 ano, enquanto nenhuma órbita direta sobrevive por toda a integração numérica. Essas regiões, onde as órbitas retrógrada sobrevivem e as diretas não, são muito importantes na aplicação da astrodinâmica quando se trata de missões espaciais.

Figura 4.14 - Tempo de vida na região próxima a  $M_2$  (órbitas retrógradas). O diagrama mostra a evolução da vida útil da órbita em função de  $a$  e  $e$ . A massa de  $M_1 = 80\%$  e massa de  $M_2 = 20\%$  da massa total do sistema. Pressão de radiação solar está incluída.



As órbitas diretas são mais populares em relação à existência de partículas espacial (uma vez que a maioria dos corpos celestes orbitam em órbitas diretas), enquanto que, por outro lado, órbitas retrógradas dificilmente ocorrem naturalmente. Assim, as regiões onde as órbitas diretas não sobrevivem e as órbitas retrógradas sobrevivem são ótimas opções para um veículo espacial ser colocado, porque nessas regiões a probabilidade de existência de partículas espacial com tamanho considerável ( $r > 0,01 \mu m$ ) colidir com o veículo espacial é quase nula. Além disso, é possível que um satélite seja colocado em uma órbita retrógrada para observar o corpo em estudo.

As Figuras 4.15 e 4.16 mostram algumas trajetórias das órbitas diretas e retrogradadas, respectivamente, quando consideramos a pressão da radiação solar e o corpo secundário ( $M_2$ ) tem 20% da massa total do sistema.

As grades de colisão referentes às Figuras 4.13 e 4.14 são mostradas nas Figuras 4.17 e 4.18, respectivamente. Podemos ver, nas Figuras 4.17 e 4.18, que a influência da pressão da radiação solar faz com que o veículo espacial colida com maior frequência com os corpos primários ou faz com que uma partícula escape mais rapidamente do sistema. À medida que os tempos de sobrevivência das órbitas aumentam, a pressão da radiação solar permanece atuando por mais tempo, causando distúrbios no veículo espacial, tornando a órbita caótica e fazendo com que o veículo espacial escape (regiões amarelas nas figuras) ou colida com um dos corpos principais (azul e regiões vermelhas).



Figura 4.15 - Tempo de vida útil na região próxima a  $M_2$  (órbitas diretas) e duas trajetórias para uma compreensão mais clara do movimento do veículo espacial. A pressão da radiação solar está incluída.

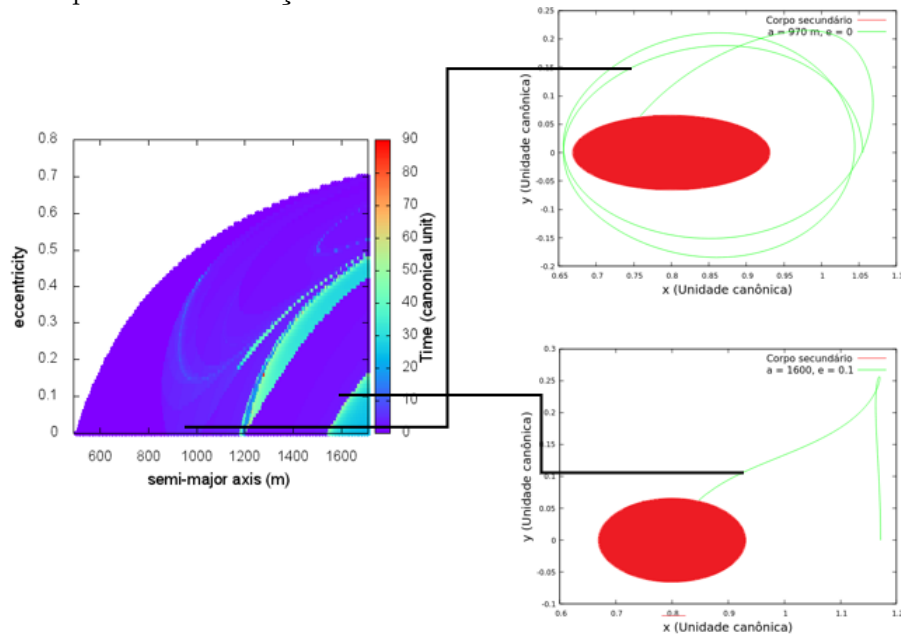


Figura 4.16 - Tempo de vida útil na região próxima a  $M_2$  (órbitas diretas) e duas trajetórias para uma compreensão mais clara do movimento do veículo espacial. A pressão da radiação solar está incluída.

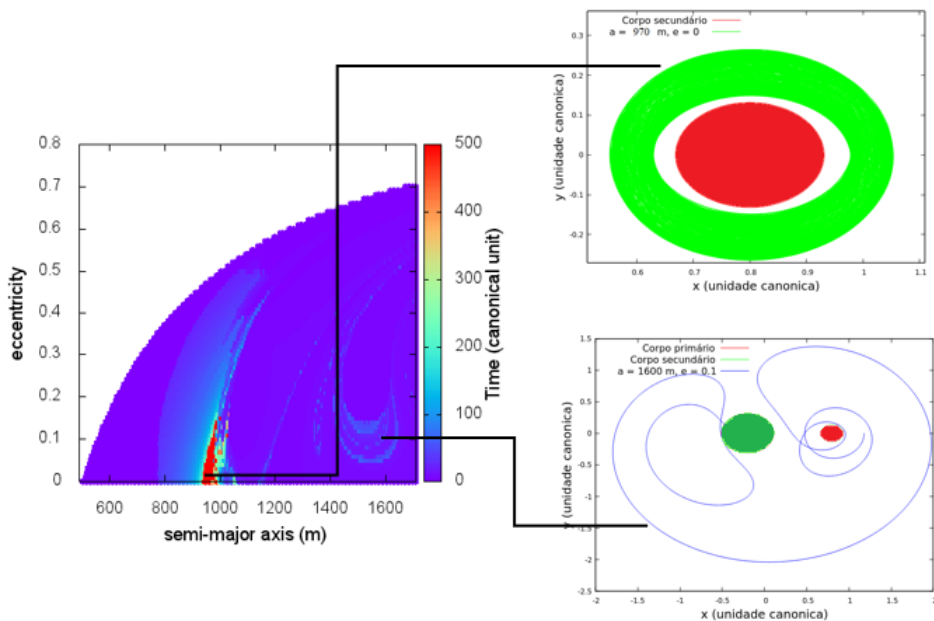


Figura 4.17 - Órbitas diretas. Região de colisão com  $M_1$  (azul), região de colisão com  $M_2$  (vermelho), órbitas que sobreviveram por 500 unidades canônicas (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). Pressão de radiação solar está incluída. A região branca é a região dentro de  $M_2$ . Massa de  $M_1 = 80\%$  e massa de  $M_2 = 20\%$ .

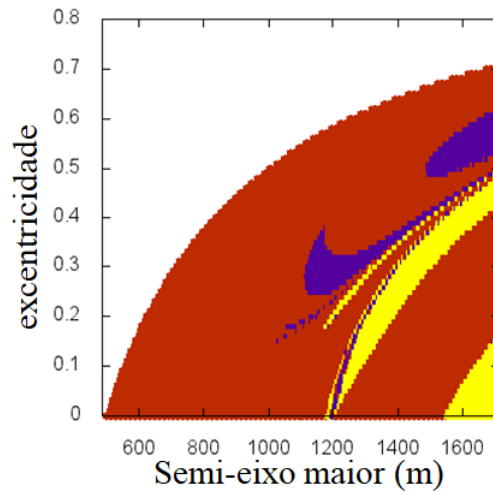
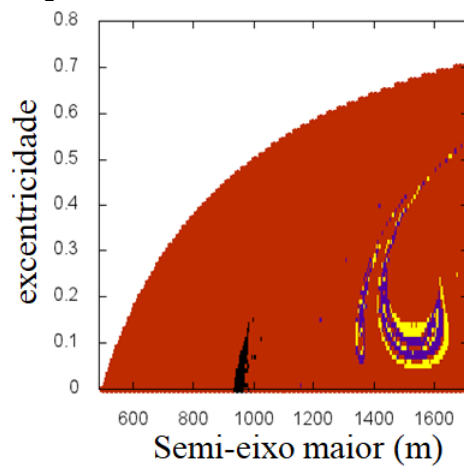
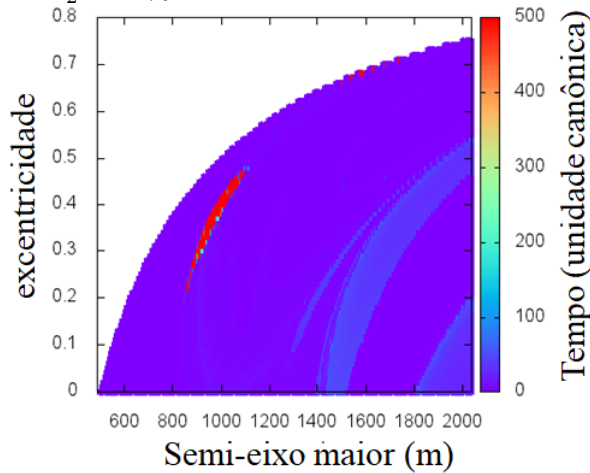


Figura 4.18 - Órbitas retrógradadas. Região de colisão com  $M_1$  (azul), região de colisão com  $M_2$  (vermelho), órbitas que sobreviveram por 500 unidades canônicas (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). Pressão de radiação solar está incluída. A região branca é a região dentro de  $M_2$ . Massa de  $M_1 = 80\%$  e massa de  $M_2 = 20\%$ .



Agora vamos fazer uma análise considerando que 70% da massa total do sistema pertence a  $M_1$  e 30% da massa total do sistema pertence a  $M_2$ . A razão de massa neste caso é  $\mu^* = 0,15$ . Novamente, as grades das condições iniciais têm o sistema de referência no centro de massa do corpo menos massivo. As Figuras 4.19 (órbitas diretas) e 4.20 (órbitas retrógradadas) mostram grades de condições iniciais que relacionam a excentricidade, o semi-eixo maior e a vida útil das órbitas.

Figura 4.19 - Órbitas diretas. Região de colisão com  $M_1$  (azul), região de colisão com  $M_2$  (vermelho), órbitas que sobreviveram por 500 unidades canônicas (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). Pressão de radiação solar está incluída. A região branca é a região dentro de  $M_2$ . Massa de  $M_1 = 70\%$  e massa de  $M_2 = 30\%$ .



Devido à maior massa do corpo  $M_2$ , em comparação aos casos anteriores, é possível encontrar regiões onde órbitas diretas e retrógradadas sobrevivem pelo tempo de integração numérica. Observe que, pela primeira vez, foram encontradas regiões onde as órbitas diretas sobrevivem por 1 ano em torno do primário menos massivo. Isso foi previsto, como já mencionado, devido ao fato de que a força gravitacional do corpo menos massivo ser maior, em relação aos casos anteriores, fazendo com que passe a existir regiões em que é possível colocar um veículo espacial em órbita do corpo  $M_2$  que durem por, pelo menos, um ano. Regiões em que as órbitas sobrevivem por todo tempo de integração se tornam cada vez maiores nas órbitas retrógradadas, quando comparada aos casos anteriores.

A Figura 4.21 mostra algumas trajetórias das órbitas diretas quando consideramos a pressão da radiação solar e o corpo secundário ( $M_2$ ) tem 30% da massa total do sistema.

Figura 4.20 - Órbitas retrógradas. Região de colisão com  $M_1$  (azul), região de colisão com  $M_2$  (vermelho), as órbitas que sobreviveram por 500 unidades canônicas (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). Pressão de radiação solar está incluída. A região branca é a região dentro de  $M_2$ . Massa de  $M_1 = 70\%$  e massa de  $M_2 = 30\%$ .

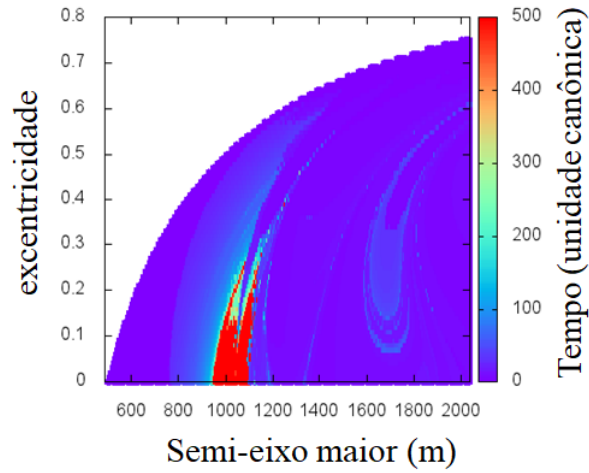
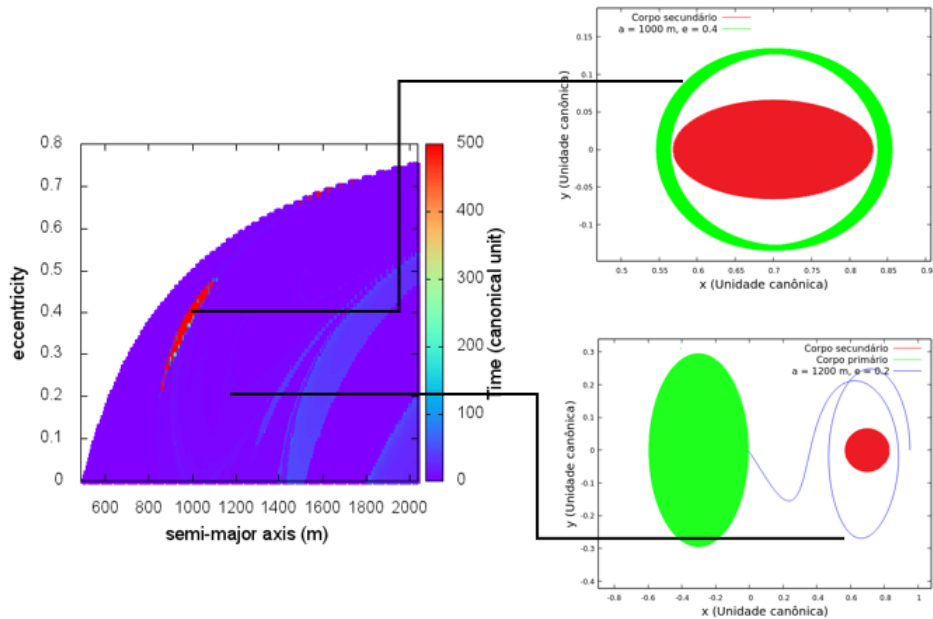


Figura 4.21 - Tempo de vida útil na região próxima a  $M_2$  (órbitas diretas) e duas trajetórias para uma compreensão mais clara do movimento do veículo espacial. A pressão da radiação solar está incluída.



As Figuras 4.22 e 4.23 mostram as grades de colisão de órbitas diretas e retrógradas referentes às Figuras 4.19 e 4.20, respectivamente.

Figura 4.22 - Órbitas diretas. Região de colisão com  $M_1$  (azul), região de colisão com  $M_2$  (vermelho), as órbitas que sobreviveram por 500 unidades canônicas (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). Pressão de radiação solar está incluída. A região branca é a região dentro de  $M_2$ . Massa de  $M_1 = 70\%$  e massa de  $M_2 = 30\%$ .

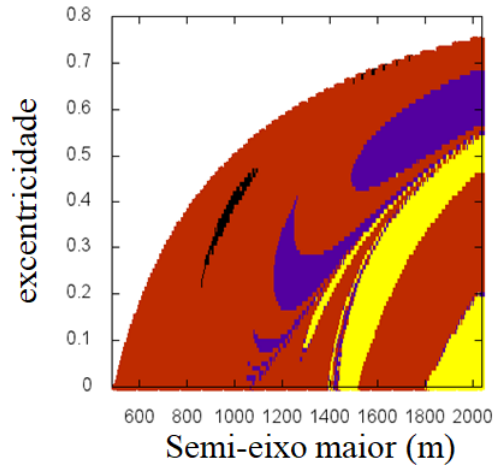
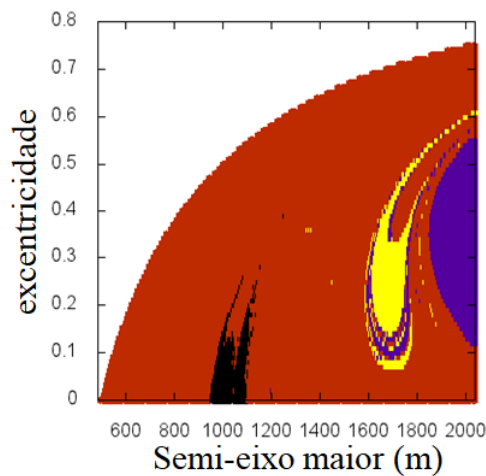


Figura 4.23 - Órbitas retrógradas. Região de colisão com  $M_1$  (azul), região de colisão com  $M_2$  (vermelho), as órbitas que sobreviveram por 500 unidades canônicas (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). Pressão de radiação solar está incluída. A região branca é a região dentro de  $M_2$ . Massa de  $M_1 = 70\%$  e massa de  $M_2 = 30\%$ .



Através das condições iniciais para colisões das Figuras 4.22 e 4.23, podemos en-

contrar o destino final do veículo espacial na órbita retrógrada. As regiões negras indicam as órbitas que sobreviveram por um ano. Essas regiões são áreas onde uma partícula orbita o corpo menos massivo. As regiões em vermelho são locais onde o veículo espacial colide com  $M_2$ . As regiões em azul são regiões em que o veículo espacial colide com  $M_1$ . As regiões em amarelo são regiões onde o veículo espacial é ejetado do sistema e, finalmente, as regiões em preto são regiões em que o veículo espacial orbita  $M_2$ . Percebemos que, um alto valor do semi-eixo maior, aumenta a chance da espaçonave não sobreviver por toda integração numérica. Isso ocorre porque o veículo espacial está mais distante de  $M_2$ , em regiões onde a atração gravitacional de  $M_2$  é menor. Por esse motivo, o efeito da pressão de radiação solar e  $M_1$  no veículo espacial se torna mais significativo. Devido à sensibilidade do sistema, essas forças perturbadoras puxam o veículo espacial para próximo de  $M_2$ , fazendo com que colida com o segundo primário ou ejetado do sistema.

Finalmente, analisando um sistema em que 60% da massa total está concentrada no corpo  $M_1$  e 40% da massa total do sistema está concentrada no corpo  $M_2$ , temos as grades das condições iniciais de vida útil mostradas nas Figuras 4.24 (órbitas diretas) e 4.25 (órbitas retrógradas). A razão de massa, neste caso, é  $\mu^* = 0,2$ . A ordem de magnitude da massa de  $M_2$  é  $10^{12}$  kg.

Figura 4.24 - Tempo de vida na região próxima a  $M_2$  (direciona órbitas). O diagrama mostra a evolução da vida útil da órbita em função de  $a$  e  $e$ . Massa de  $M_1 = 60\%$  e massa de  $M_2 = 40\%$  da massa total do sistema. Pressão de radiação solar está incluída.

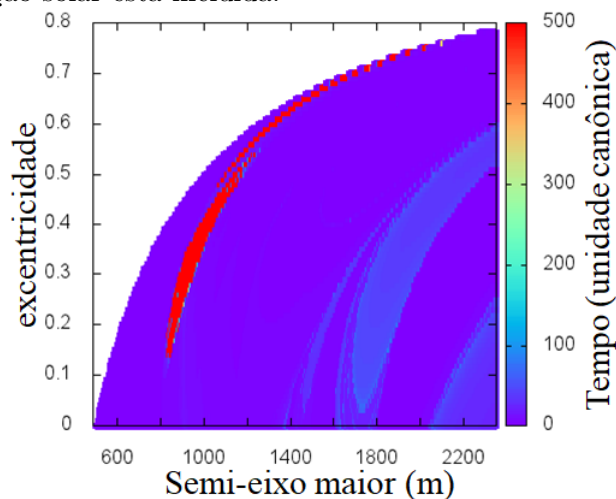
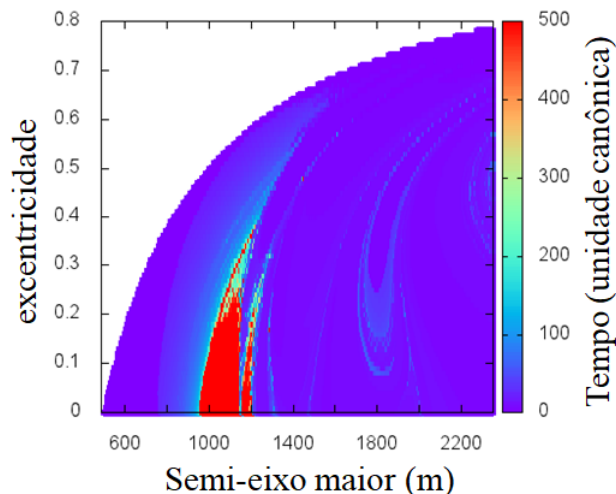


Figura 4.25 - Tempo de vida na região próxima a  $M_2$  (órbitas retrógradas). O diagrama mostra a evolução da vida útil da órbita em função de  $a$  e  $e$ . Massa de  $M_1 = 60\%$  e massa de  $M_2 = 40\%$  da massa total do sistema. Pressão de radiação solar está incluída.



As grades de condição inicial que mostram o tempo de sobrevivência do veículo espacial quando consideramos a razão de massa de  $\mu^* = 0,2$  (ou seja, 40 % da massa total do sistema está localizada em  $M_2$ ), assemelham-se às grades das condições iniciais mostradas no caso anterior ( $\mu^* = 0,15$ ). A diferença é que, no último caso, as regiões das órbitas que sobrevivem por todo o tempo da integração numérica se tornam maiores (regiões do vermelho nas Figuras 4.24 e 4.25). Isso se deve ao fato do campo gravitacional de  $M_2$  ser maior nesta última situação, o que aumenta a chance de encontrar órbitas que sobrevivam.

As grades de colisão do último caso se assemelham às grades de colisão mostradas nas Figuras 4.22 e 4.23. Somente as regiões de escape (amarelo) e colisões com  $M_1$  (azul) tornam-se levemente maiores para a razão de massa  $\mu^* = 0,2$ .

#### 4.7 Considerações

Investigamos órbitas de uma partícula em torno de um sistema binário de asteroides. O asteroide mais massivo foi considerado esférico e o segundo asteroide (menos massivo) foi modelado como um dipolo de massa em rotação. Uma série de integrações numéricas foram feitas para todos os modelos adotados, levando em consideração a força gravitacional dos dois corpos e a pressão da radiação solar. Uma grade de condições iniciais foi estabelecida em função do semi-eixo maior e da excentricidade para verificar a vida útil e, conseqüentemente, a instabilidade das órbitas de uma

nave espacial posicionada nas proximidades de um sistema binário de asteroides.

Quando 99% da massa do sistema foi atribuída ao corpo esférico ( $M_1$ ), nenhuma órbita sobreviveu por 1 ano em torno do primário menos massivo. Isso ocorre devido ao fato da partícula estar posicionada muito próximo de  $M_2$ , fazendo com que a partícula seja rapidamente capturada pela atração gravitacional desse corpo.

Após essa análise, verificamos o comportamento do sistema assumindo 90% da massa do sistema em  $M_1$  (mais massivo) e 10% da massa total do sistema em  $M_2$ . Nesta análise, foi possível encontrar órbitas retrógradas que sobrevivem por um ano (quando a pressão da radiação solar não é levada em consideração) em torno de  $M_2$  (dipolo de massa em rotação). Por outro lado, órbitas diretas com um semi-eixo maior alto e baixa excentricidade também sobrevivem a todo o tempo de integração numérica (1 ano), mas neste caso o veículo espacial orbita o centro de massa do sistema  $M_1 - M_2$ . Percebemos que o sistema é muito sensível, onde uma pequena mudança nas condições iniciais pode fazer com que o veículo espacial se aproxime dos corpos primários, receba energia e ejeite do sistema. As órbitas não sobreviveram por toda a integração numérica quando a pressão da radiação solar é levada em consideração, fazendo com que as órbitas colidam rapidamente com  $M_2$  ou  $M_1$  ou escapem do sistema. Assim, foi possível mostrar a importância de levar em consideração a pressão da radiação solar ao investigar órbitas em torno de um sistema binário de asteroides com uma massa total de  $9.273 \times 10^{12}$  kg quando o sistema binário de asteroide está próximo ao Sol (perihelio do asteroide  $< 1$  U.A.).

Encontramos órbitas instáveis que colidem com  $M_1$ , onde instáveis queremos dizer que as órbitas não sobrevivem por toda integração numérica. Observamos que quando a pressão da radiação solar é levada em consideração, ela aumenta o raio do apogeu da órbita, fazendo com que a partícula deixe a órbita em torno de  $M_2$  e colida com  $M_1$ . Este tipo de órbita também é interessante. Uma aplicação de algumas dessas órbitas podem ser usadas para observar  $M_2$  por um curto período de tempo e depois transferir naturalmente o veículo espacial para observar  $M_1$ . Ao se aproximar de  $M_1$ , seria necessário usar um propulsor para fazer o veículo espacial orbitar esse corpo, em vez de colidir com ele.

Percebemos que à medida que aumentamos a razão de massa do corpo em que desejamos orbitar, conseqüentemente maior se torna a força gravitacional capaz de manter um veículo espacial em torno desse asteroide, ou seja, sua força gravitacional supera em várias ordem de grandeza as perturbações provenientes de outros corpos celestes (no nosso caso, PRS e  $M_1$ ), com isso é possível encontrar uma região maior



de órbitas que sobrevivem por toda integração numérica.

Encontramos algumas órbitas que não sobrevivem por um ano de integração em órbitas diretas, mas permanecem em órbita ao considerar órbitas retrógradas. Essas regiões nas quais as órbitas retrógradas sobrevivem e as diretas não sobrevivem são indicações de locais onde o veículo espacial poderia ser posicionado em uma missão espacial, porque é uma região que possivelmente vazia de grandes partículas, reduzindo assim a chance do veículo espacial colidir com um corpo espacial.

À medida que aumentamos a massa de  $M_2$ , maior é a sua força gravitacional capaz de manter uma partícula ao seu redor. Portanto, existem mais órbitas que sobrevivem por toda integração numérica. Isto é, sua força gravitacional supera os distúrbios da pressão da radiação solar e a atração gravitacional do primário mais massivo.

É possível observar nas figuras que, com um semi-eixo maior alto, aumenta a chance da ação da pressão da radiação solar puxar a partícula para fora da órbita em torno de  $M_2$ , fazendo com que colida com  $M_1$  ou escape de o sistema.



## 5 PONTOS DE EQUILÍBRIO EM TORNO DE UM SISTEMA TOTALMENTE SÍNCRONO

Este Capítulo é um estudo mais geral, quando comparada com os Capítulos anteriores, pois aborda as equações do movimento do problema restrito totalmente síncrono de quatro corpos (PRTS4C) para representar a força gravitacional na vizinhança de um sistema binário síncrono de asteroides, onde os dois corpos primários são considerados como corpos alongados irregulares. Este trabalho foi baseado na classe de asteroides tipo B.

O trabalho desenvolvido neste Capítulo foi apresentando no International Congress of Mechanical Engineering (COBEM) ocorrido em Curitiba, na cidade do Paraná (BR), 2017, e publicado nos anais no Proceedings of the 24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering.

### 5.1 Introdução

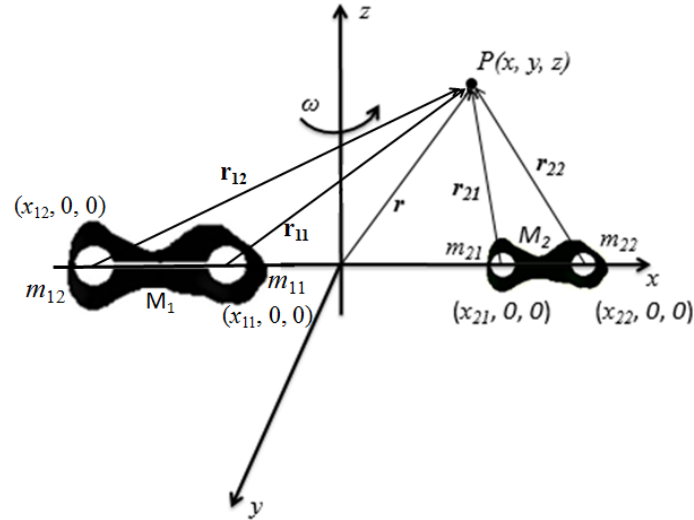
O modelo adotado aqui assume que os dois asteroides do sistema binário são modelados como um dipolo de massa em rotação, com o objetivo de representar um corpo natural alongado. Santos et al. (2017a) investigaram os pontos de equilíbrio e suas respectivas curvas de velocidade zero de um sistema binário de asteroides, considerando o problema restrito síncrono de quatro corpos, em que um dos asteroides foi considerado uma massa pontual e o segundo asteroide (menos massivo) foi considerado um dipolo de massa em rotação (asteroide do tipo A). Este trabalho é uma continuação do trabalho de Santos et al. (2017a), onde investigamos as equações de movimento em um sistema binário de asteroide totalmente síncrono (classe de asteroide do tipo B). Isto significa que os dois asteroides são modelados como dipolo de massa em rotação, e que o período de rotação dos asteroides em torno do próprio eixo é igual ao período de translação dos dois asteroides em torno do centro de massa do sistema.

### 5.2 Dinâmica do sistema

O problema restrito de quatro corpos totalmente síncrono tem o objetivo de descrever a dinâmica de uma partícula de massa infinitesimal ( $P$ ) que se move sob a influência do campo gravitacional de dois outros corpos massivos alongados ( $M_1$  e  $M_2$ ) que orbitam em torno do centro de massa do sistema. A unidade de distância é normalizada pela distância do centro de massa do corpo  $M_1$  para o centro de massa do corpo  $M_2$ . Os dois corpos primários são modelados como um dipolo de massa

em rotação, ou seja, cada corpo primário é formado por dois corpos hipotéticos com massas  $m_{11}$  e  $m_{12}$  (para o corpo  $M_1$ ) e  $m_{21}$  e  $m_{22}$  (para o corpo  $M_2$ ), como mostra a Figura 5.1.

Figura 5.1 - Imagem representativa da forma geométrica do sistema em estudo (fora de escala).



A razão de massa é dada por

$$\mu^* = \frac{m_{21}}{m_{11} + m_{12} + m_{21} + m_{22}}. \quad (5.1)$$

Em termos de unidades canônicas, as massas dos corpos são dadas por

$$m_{11} = (1 - 2\mu^*)/2,$$

$$m_{12} = (1 - 2\mu^*)/2,$$

$$m_{21} = \mu^*/2,$$

$$m_{22} = \mu^*/2.$$

Os corpos primários estão localizados no eixo  $x$ , cujas coordenadas são dadas por

$$x_{11} = -2\mu^* - d_1/2, \quad (5.2)$$

$$x_{12} = -2\mu^* + d_1/2, \quad (5.3)$$

$$x_{21} = -2\mu^* - d_2/2 + 1, \quad (5.4)$$

$$x_{22} = -2\mu^* + d_2/2 + 1. \quad (5.5)$$

Aqui  $d_1$  é a distância entre o ponto de massa  $m_{11}$  até o ponto de massa  $m_{12}$  (dimensão de  $M_1$ ) e  $d_2$  é a distância do ponto da massa  $m_{21}$  até o ponto da massa  $m_{22}$  (dimensão de  $M_2$ ). As equações de movimento da partícula de massa infinitesimal, quando vistas de um sistema de referência girante, são dadas por

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \quad (5.6)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y, \quad (5.7)$$

$$\ddot{z} = \Omega_z, \quad (5.8)$$

onde

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - 2\mu^*}{2r_{11}} + \frac{1 - 2\mu^*}{2r_{12}} + \frac{\mu^*}{r_{21}} + \frac{\mu^*}{r_{22}}, \quad (5.9)$$

com

$$r_{11} = [(x - x_{11}), y, 0]^T, \quad (5.10)$$

$$r_{12} = [(x - x_{12}), y, 0]^T, \quad (5.11)$$

$$r_{21} = [(x - x_{21}), y, 0]^T, \quad (5.12)$$

$$r_{22} = [(x - x_{22}), y, 0]^T, \quad (5.13)$$

em que  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$  e  $\Omega_z$  são as derivadas parciais de  $\Omega$  em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Na forma de primeira ordem, as equações de movimento são

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x, \\ \dot{y} &= v_y, \\ \dot{z} &= v_z, \\ \dot{v}_x &= -m_{11}x_{11}/r_{11}^3 - m_{12}x_{12}/r_{12}^3 - m_{21}x_{21}/r_{21}^3 - m_{22}x_{22}/r_{22}^3 + x + 2v_y, \\ \dot{v}_y &= -m_{11}y/r_{11}^3 - m_{12}y/r_{12}^3 - m_{21}y/r_{21}^3 - m_{22}y/r_{22}^3 + y - 2v_x, \\ \dot{v}_z &= -m_{11}z/r_{11}^3 - m_{12}z/r_{12}^3 - m_{21}z/r_{21}^3 - m_{22}z/r_{22}^3, \end{aligned} \quad (5.14)$$

ou simplesmente  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu^*)$ , em que  $\mathbf{x} = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  é o estado e  $\mathbf{f}$  é a função com valor vetorial de seis dimensões dada pelo lado direito da Equação 5.14.

O PR4CTS possui cinco pontos de equilíbrio,  $x_i$ , onde  $\mathbf{f}(x_i, \mu^*) = 0$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Eles são rotulados aqui como  $L_i$ . Os pontos de equilíbrio que estão localizados no eixo  $x$  são chamados de *colineares*. Estes são  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ . Por outro lado, os pontos de equilíbrio no plano  $xy$  são os pontos  $L_4$  e  $L_5$ . Todos os pontos de equilíbrio encontrados com este modelo existem no plano  $xy$ .

O PR4CTS admite uma integral de movimento, que é dada por,

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{x}, \mu^*, d_1, d_2) = & \frac{(1 - 2\mu^*)}{\sqrt{(x + 2\mu^* + d_1/2)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{(1 - 2\mu^*)}{\sqrt{(x + 2\mu^* - d_1/2)^2 + y^2 + z^2}} + \\
 & \frac{\mu^*}{\sqrt{(x + 2\mu^* + d_2/2 - 1)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\mu^*}{\sqrt{(x + 2\mu^* - d_2/2 - 1)^2 + y^2 + z^2}} \\
 & + (x^2 + y^2) - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

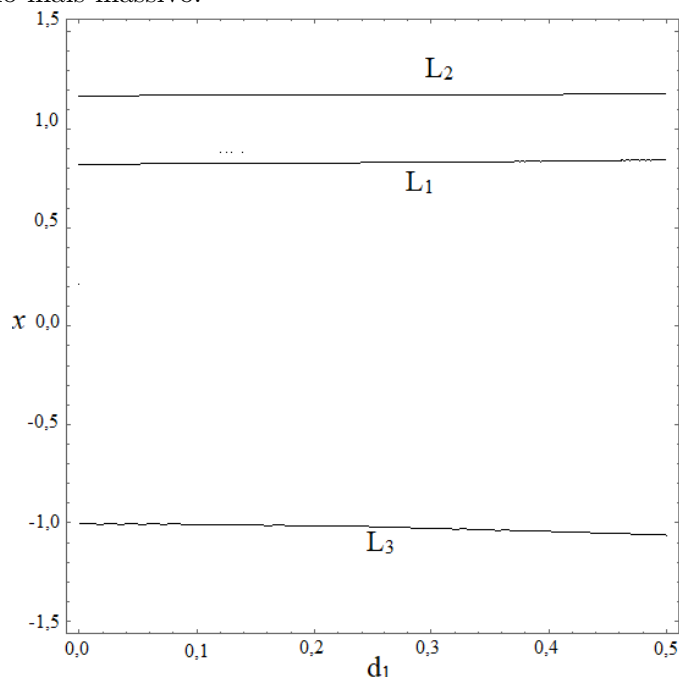
Observe que  $J$  é uma função que depende do estado da partícula, da razão de massa do sistema e da dimensão dos corpos primários alongados. Para o caso particular onde a dimensão dos corpos alongados  $d_1 = d_2 = 0$ , nós retornamos ao Problema Restrito Circular de Três Corpos, onde a constante de Jacobi é função apenas do estado da partícula ( $\mathbf{x}$ ) e da razão de massa do sistema ( $\mu^*$ ) (DUTT; SHARMA, 2011; SZEBEHELY, 1967; REN; SHAN, 2014; MCCUSKEY, 1963).

### 5.3 Resultados

As Figuras 5.2 e 5.3 mostram as coordenadas  $x$  dos pontos  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  para diferentes valores de  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente. Note que na Figura 5.2 (onde variamos a dimensão de  $M_1$ ) os efeitos modificam levemente as posições de  $L_3$ . Devido a  $L_1$  e  $L_2$  estarem distantes de  $M_1$ , a localização destes pontos de equilíbrio não são alteradas consideravelmente. Na Figura 5.3 o tamanho de  $M_2$  foi modificado. Por esse motivo os pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  tem maior influencia (por estarem mais próximas do  $M_2$ ) devido à nova distribuição de massa desse corpo. Observe que desta vez a posição de  $L_3$  não é alterado consideravelmente.

A Figura 5.4 mostra como a posição dos pontos de equilíbrio colineares variam quando aumentamos a razão de massa do sistema. Podemos observar na Figura 5.4 que à medida que aumentamos a razão de massa, a massa de  $M_2$  se torna maior e a massa do  $M_1$  diminui. Essa mudança de campo gravitacional de ambos os corpos, faz com que uma nova configuração seja necessária para estabelecer os pontos

Figura 5.2 - Variação dos pontos de equilíbrio colineares em função do tamanho do primário mais massivo.



de equilíbrio. Observe que, à medida que aumentamos a massa de  $M_2$ , os pontos de equilíbrio mais próximos de  $M_2$  tendem a se distanciar deste corpo, fazendo com que o ponto de equilíbrio  $L_1$  se mova em direção a origem do sistema e o ponto de equilíbrio  $L_2$  se mova se afastando do corpo  $M_2$ . O ponto de equilíbrio  $L_3$  é mais distante do primário menos massivo, o que dificulta a compreensão da comportamento deste corpo intuitivamente. As evidências numéricas mostram que, à medida que aumentamos a razão de massa, o ponto de equilíbrio  $L_3$  se afasta dos corpos primários, fazendo com que uma nova relação entre força centrífuga e força gravitacional seja necessária para anular a geração deste ponto de equilíbrio.

Alguns testes numéricos foram realizados, onde consideramos  $\mu^* = 0.0049505$ ,  $d_1 = 0.736068$  e  $d_2 = 0.131440$ . Esses valores numéricos são baseados no par de asteroides *Alpha - Gamma* do sistema de asteroides 2001SN<sub>263</sub>. A partir destes valores numéricos, e fazendo  $\mathbf{f}(x_i, \mu^*) = 0$ , encontramos cinco raízes reais, das quais três são colineares ( $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ ) e os outros dois pontos de equilíbrio ( $L_4$  e  $L_5$ ) estão no plano  $xy$ . A localização desses pontos de equilíbrio é mostrada na Tabela 5.1. A Figura 5.5 mostra as posições dos pontos de equilíbrio (vermelho) em relação ao centro de massa de cada corpo primário (preto).

Algumas *Curvas de Velocidade Zero* (CVZ) são mostrados da Figura 5.6 à 5.9.

Figura 5.3 - Variação dos pontos de equilíbrio colineares em função do tamanho do primário menos massivo.

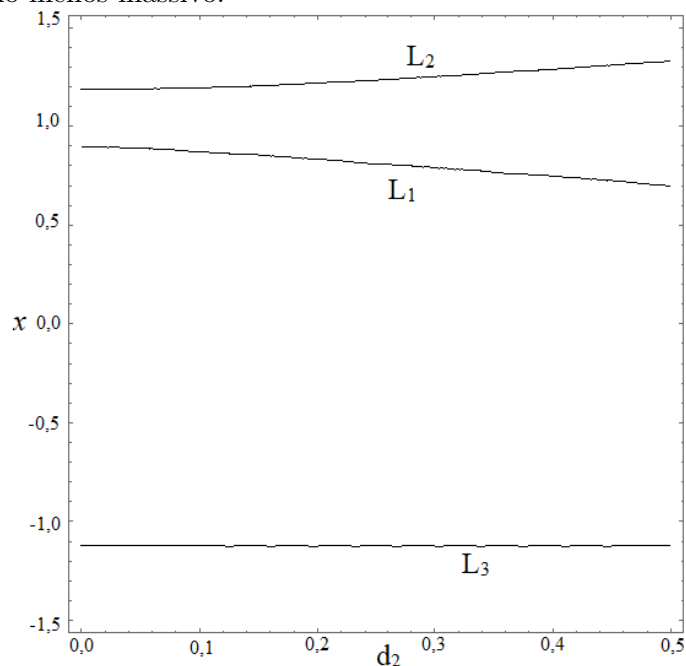


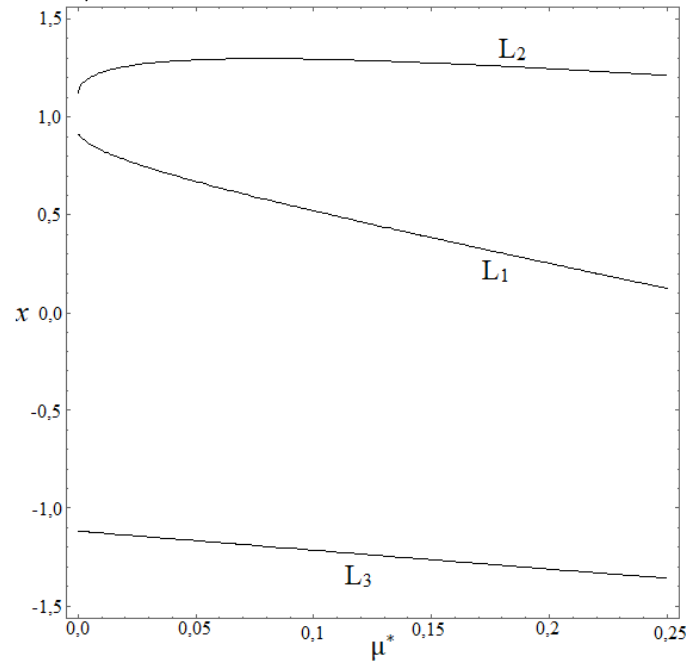
Tabela 5.1 - As posições dos pontos de equilíbrio para o sistema estudado (Alpha-Gamma do sistema 2001SN<sub>263</sub>).

		Equilibrium points
$L_1$	x	0.8621142586696
	y	0
$L_2$	x	1.2000933511901
	y	0
$L_3$	x	-1.122101868767
	y	0
$L_4$	x	0.0046508345280
	y	0.9276535170573
$L_5$	x	0.0046508345280
	y	-0.9276535170573

O codificado de cores indica a velocidade que a partícula terá em cada região. A legenda da coluna colorida mostra a velocidade quadrática necessária para atravessar de uma região para outra. As regiões vermelhas são regiões proibidas, onde o movimento da partícula não é possível. Para uma partícula atingir as regiões vermelhas com as condições iniciais geradas, é necessário ter velocidade quadrada negativa, o que é uma impossibilidade física.



Figura 5.4 - Posições dos pontos de equilíbrio colineares ( $L_1$ ,  $L_2$  and  $L_3$ ) para diferentes valores de  $\mu^*$ .



Na Figura 5.6 (a) podemos observar que a CVZ, relacionada a energia  $C_1^* = 3,716359670795$ , toca uma a outra em um ponto chamado  $L_1$ . Valores ligeiramente menores que  $C_1^*$  torna possível o deslocamento de um veículo espacial entre  $M_1$  e  $M_2$  através do ponto  $L_1$ . A Figura 5.6 (b) mostra uma aproximação visual da 5.6 (a) em  $M_2$  para uma melhor visualização das CVZ próximas a  $M_2$ .

É importante observar que o veículo espacial que parte inicialmente próxima de  $M_1$  e com energia  $C_1^*$ , por exemplo, pode atingir o corpo  $M_2$  apenas atravessando o ponto  $L_1$ . Podemos observar que, pela Figura 5.6, a transferência entre as regiões próximas  $M_1 - M_2$  e o infinito permanece proibida, mas a transferência entre  $M_1$  e  $M_2$  é possível.

Diminuindo o valor de  $C$ , a curva de velocidade zero próximas a  $M_1$  e  $M_2$  (interior oval) se torna maior e a curva externa se torna menor. Quando o valor de  $C^*$  é  $C_2^* = 3,34813335305$ , a oval interna e a externa entram em contato, portanto, temos um segundo ponto de contato. Esse ponto de contato é chamado  $L_2$ . Conforme mostrado na Figura 5.7, é possível observar que para valores ligeiramente menor que  $C^* = C_2^*$  torna-se possível uma comunicação entre as regiões próximas de  $M_1 - M_2$  com o infinito. A Figura 5.7 (b) é uma aproximação visual da Figura 5.7 (a) ao redor do corpo  $M_2$ .

Figura 5.5 - Posições dos pontos de equilíbrio para o sistema estudado (vermelho) e as posições do centro de massa dos corpos primários (preto).

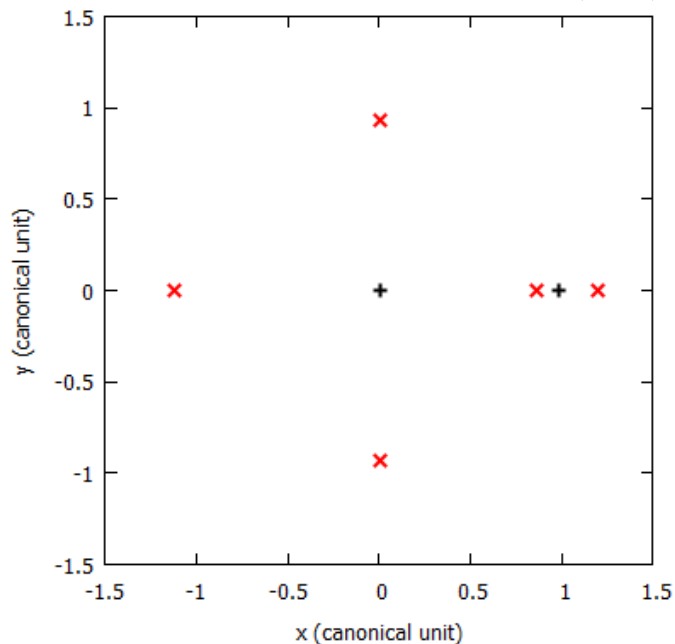
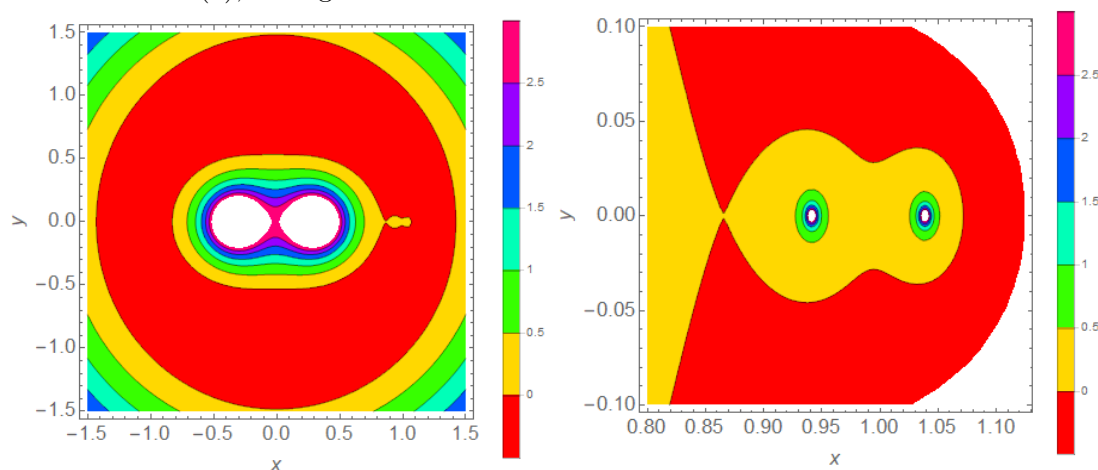
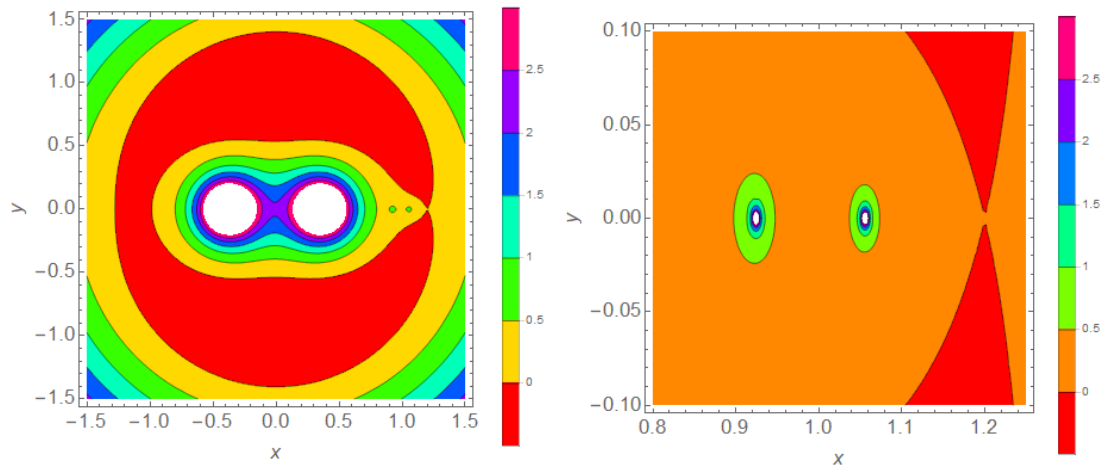


Figura 5.6 - *curvas de velocidade zero*. O primeiro ponto de contato ocorre em  $C^* = 3.716359670795$ . (a) Curvas de velocidade zero. (b) Aproximação da Figura 5.6 (a), na região no torno de  $M_2$ .



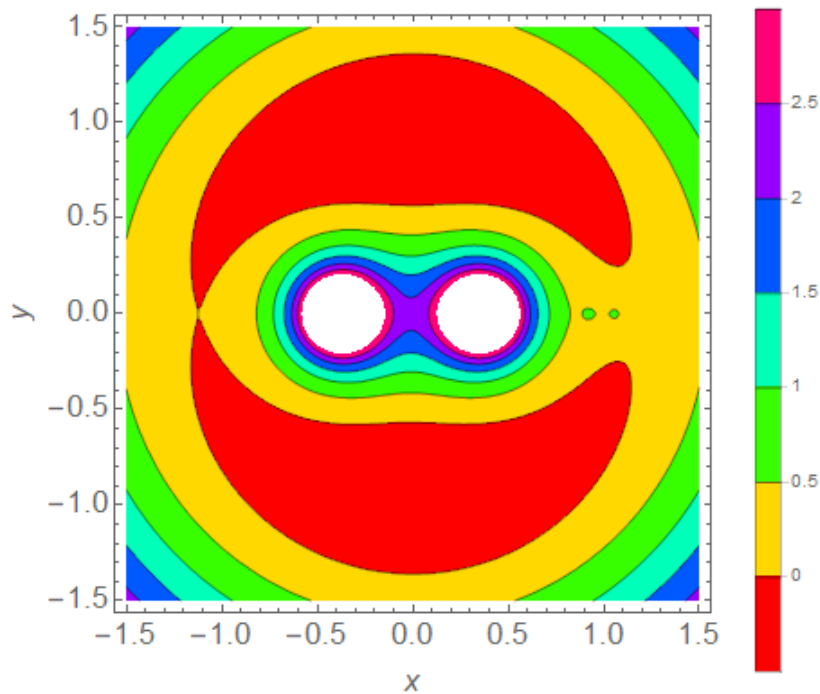
Diminuindo ainda mais o valor de  $C^*$  até  $C_3^* = 3,2678562132$ , a região proibida é reduzida (região vermelha se torna cada vez menor em relação as Figuras 5.6 e 5.7) e o veículo espacial tem mais regiões onde é possível o movimento, como mostrado na Figura 5.8. Podemos notar que existe uma conexão entre a região próxima de  $M_1$  e o infinito, mas desta vez do lado esquerdo.

Figura 5.7 - *curvas de velocidade zero*. O segundo ponto de contato ocorre em  $C^* = 3,34813335305$ . (a) Curvas de velocidade zero. (b) Aproximação da Figura 5.7 (a), na região no torno de  $M_2$ .



Esse terceiro ponto de contato é chamado  $L_3$ .

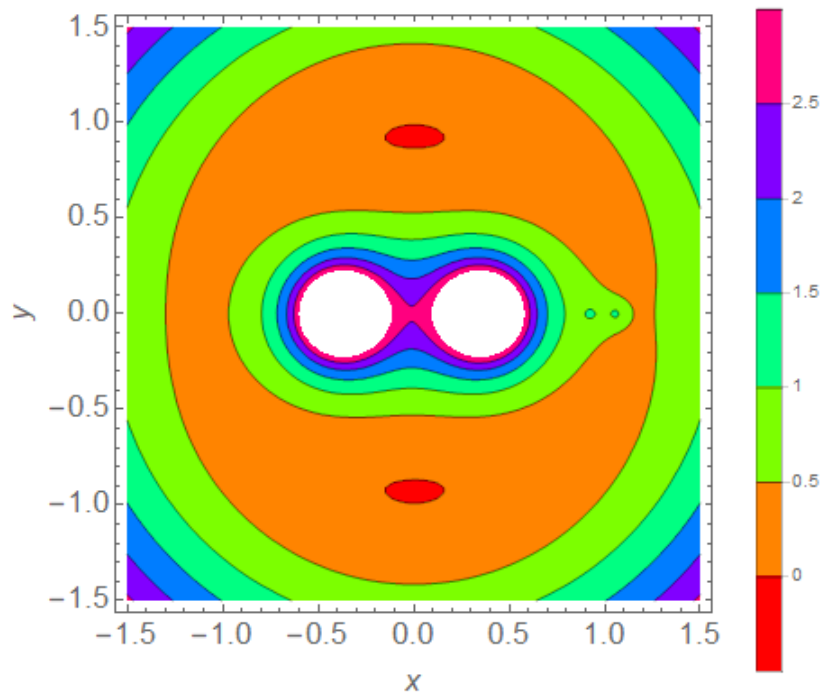
Figura 5.8 - *curvas de velocidade zero*. O terceiro ponto de contato ocorre em  $C^* = 3,2678562132$ .



Por fim, diminuindo de  $C_3^*$  para  $C_{4-5}^* = 2,85925963595$ , a região proibida se torna

menor quando comparada aos casos anteriores. Observe que apenas as regiões em torno dos pontos de equilíbrio  $L_4$  e  $L_5$  permanecem proibidas, como mostra a Figura 5.9. A notação  $C_{45}^*$  é uma forma abreviada de escrever  $C_4$  e  $C_5$ , porque eles têm os mesmos valores.

Figura 5.9 - *curvas de velocidade zero*. O quarto e quinto pontos de contatos ocorrem em  $c^* = 2,85925963595$ .



#### 5.4 Considerações

Neste trabalho, investigamos a influência que a dimensão dos corpos primários e suas respectivas massas tem na geração dos pontos de equilíbrio. Para o estudo quantitativo, percebemos que, à medida que aumentamos a dimensão de  $M_2$ , os pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  são mais influenciados (porque estão mais próximos desse corpo) e se afastam de  $M_2$ . O ponto de equilíbrio  $L_3$  não sofre uma mudança considerável por estar mais distante do corpo  $M_2$ . Por outro lado, quando variamos a dimensão de  $M_1$ , notamos uma mudança considerável na posição do ponto de equilíbrio  $L_3$ . No entanto, as posições dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  praticamente não são alteradas.

Também foi analisada a influência da razão de massa  $\mu^*$  nas posições dos pontos de

equilíbrio. Evidências numéricas mostram que, à medida que aumentamos a razão de massa (a massa de  $M_2$  se torna maior), todos os pontos de equilíbrio colineares se afastam de  $M_2$ . Isso se deve ao fato do campo gravitacional de  $M_2$  se tornar maior (com o aumento de  $\mu^*$ ) e, com isso, uma nova configuração é necessária para estabelecer os pontos de equilíbrio.

As curvas de velocidade zero foram obtidas para encontrar as regiões nas quais o movimento do veículo espacial no plano  $xy$  é permitido para valores diferentes de  $C^*$ . Neste estudo, verificamos que, à medida que diminuimos o valor da constante de Jacobi  $C^*$ , as regiões onde o movimento é permitido se tornam maiores. Observamos que quando consideramos as dimensões dos corpos primários, os pontos de equilíbrio colineares surgem com uma constante de Jacobi maior em relação aos pontos de equilíbrio do problema restrito clássico de três corpos. Isto significa que, com uma energia menor da espaçonave é possível sair da vizinhança de um corpo primário e alcançar o corpo secundário de forma natural. Isto é muito importante para a astrodinâmica, uma vez que menor energia significa menor gasto de combustível.



## 6 DINÂMICA DE UM VEÍCULO ESPACIAL EM TORNO DE UM COMETA EXTINTO DA FAMÍLIA DE JÚPITER

### 6.1 Introdução

O asteroide NEO 2017 YE5 fez uma aproximação com Terra em 21 de junho de 2018 a uma distância de cerca de 0,04 au. Este asteroide também é classificado como um Asteroide Potencialmente Perigoso (Potentially Hazardous Asteroids) pelo banco de dados de pequenos corpos da Jet Propulsion Laboratory (JPL). Durante seu sobrevôo próximo à Terra, ele se tornou um interessante alvo de radar para os observatórios de Arecibo, Goldstone e Green Bank. Assim, as observações de radar realizadas entre 21 e 26 de junho de 2018 a partir desses radiotelescópios mostraram que 2017 YE5 é na verdade composto por dois asteroides de tamanho e massa semelhantes em órbita mútua um sobre o outro. Até o momento, apenas quatro binários de massas quase iguais foram descobertos entre a população NEO, incluindo (69230) Hermes, (190166) 2005 UP156, 1994 CJ1 e 2017 YE5. As observações realizadas indicaram que o sistema é composto por dois componentes de 900 m cada, separados por 1,8 km (raios de quatro componentes) (Taylor et al. 2018, 2019). Além disso, os dados do radar sugerem que os componentes têm formas ligeiramente diferentes e algumas diferenças no brilho da superfície. Observações de curvas de luz fotométricas deste sistema binário relatadas em Monteiro et al. (2021) confirmou que o período orbital mútuo deste sistema é de cerca de 24 horas, apoiando as estimativas de radar. Suas características físicas indicam que é semelhante aos núcleos cometários, tendo um albedo escuro (em torno de 3 %), um espectro sem características, classificado como um tipo D, e uma baixa densidade de 0,6 a 1,2 g/cm<sup>3</sup> (MONTEIRO et al., 2021).

O parâmetro Tisserand ( $T_J$ ) é geralmente usado para distinguir cometas e asteroides. Essa quantidade é uma constante de movimento no problema restrito de três corpos e é calculada em relação a Júpiter. A maioria dos asteroides do cinturão principal tem  $T_J > 3$ , a maioria dos cometas da família de Júpiter (JFCs) tem  $2 < T_J < 3$ , e a família Halley e cometas de período longo têm  $T_J < 2$  (Levison 1994). O sistema YE5 2017 tem um parâmetro Tisserand de  $T_J = 2,87$ , implicando em uma órbita semelhante a um cometa. De acordo com Monteiro et al. (2021), o sistema YE5 2017 é um possível cometa binário da família de Júpiter adormecido, uma vez que suas características orbitais e físicas são semelhantes às JFCs.

Diferentes NEOs binários serão visitados por veículos espaciais, incluindo (65803) Didymos, que é o alvo da missão Double Asteroid Redirection Test (DART) da NASA (NAIDU et al., 2020), (175706) 1996 FG3 e (35107) 1991 VH, que são os alvos

da missão JANUS da NASA, e o Trojan binário de tamanho igual (617) Patroclus, que é um dos alvos da missão Lucy da NASA (SOUZA-FELICIANO et al., 2020). A maioria desses binários são asteroides primitivos, ou seja, ricos em compostos orgânicos e voláteis, provavelmente formados além do cinturão principal externo, que podem fornecer pistas sobre a origem da água e das moléculas prebióticas na Terra primitiva, por exemplo, (MORBIDELLI et al., 2020; IZIDORO et al., 2013).

Nesse contexto, o binário 2017 YE5 parece ser um alvo plausível para uma missão espacial, pois pode fornecer detalhes sobre o conteúdo volátil e orgânico na região próxima à Terra, bem como fornecer pistas sobre diferenças nos processos de formação de sistemas binários. Além disso, este é um candidato a cometa dormente, o que o torna um alvo interessante para entender os estados finais dos cometas ou para investigar os processos dinâmicos que movem os asteroides de órbitas asteroidais típicas para as semelhantes a cometas.

Uma vez que temos dados observacionais recentes deste sistema, como características físicas e orbitais, nós realizamos este estudo buscando entender a dinâmica de um veículo espacial que se encontra na vizinhança do binário 2017 YE5. Uma vez que os corpos primários são praticamente esféricos e orbitam em torno do centro de massa de forma circular (MONTEIRO et al., 2021), nós utilizamos o Problema Restrito Circular de Três Corpos pra realizar este trabalho.

## 6.2 Equação do movimento

Nesta Seção, definimos o modelo matemático do problema restrito circular de três corpos (CRTBP) considerando um sistema de referência girante (MOLTON, 1960; SZEBEHELY, 1967; MCCUSKEY, 1963). Neste problema, assume-se que a dinâmica de um corpo de massa desprezível,  $P$ , é analisada ao viajar no campo gravitacional gerado por dois primários,  $M_1$  e  $M_2$ , com massas  $m_1$ ,  $m_2$ , respectivamente, em que  $m_1 = m_2$ . O corpo de massa infinitesimal ( $P$ ) não afeta o movimento dos primários.

As distâncias de  $P$  a  $M_1$  e  $M_2$  são, respectivamente,  $r_1 = [(x - \mu)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$  e  $r_2 = [(x + \mu)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ .

A soma das massas dos primários, em unidade canônica, é  $m_1 + m_2 = 1$ . Então, a razão de massa do sistema é

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0,5. \quad (6.1)$$



As posições dos primários,  $M_1$  e  $M_2$ , nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  são  $(1 - \mu, 0, 0)$  e  $(-\mu, 0, 0)$ , respectivamente, o que significa  $(-0,5, 0)$  e  $(0,5, 0)$  no caso presente de massas iguais para os primários.

Quando vistas de um sistema girante, as equações de movimento (na forma de primeira ordem) de partículas de massa negligenciável  $P$ , no eixo  $xyz$ , são mostradas na Equação 6.2

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x, \\
 \dot{v}_x &= -(1 - \mu)(x + \mu)/r_1^3 - \mu(x + \mu - 1)/r_2^3 + x + 2v_y, \\
 \dot{y} &= v_y, \\
 \dot{v}_y &= -(1 - \mu)y/r_1^3 - \mu y/r_2^3 + y - 2v_x, \\
 \dot{z} &= v_z, \\
 \dot{v}_z &= -(1 - \mu)z/r_1^3 - \mu z/r_2^3,
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

ou  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ , onde o vetor de estado é  $\mathbf{x} = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  e a função vetorial de seis dimensões é  $\mathbf{f}$ , dada pela Equação 6.2 (GIDEA; MASDEMONT, 2007).

O CRTBP tem cinco pontos de equilíbrio,  $\mathbf{x}_k$ , onde  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mu) = 0$ ,  $k = 1, \dots, 5$ . Eles são conhecidos como pontos de Lagrange e são rotulados como  $L_k$ . Os pontos colineares ( $L_1, L_2, L_3$ ) estão localizados no eixo  $x$ . Por outro lado, os pontos triangulares ( $L_4, L_5$ ) estão localizados no plano  $xy$ . Todos os pontos de equilíbrio estão localizados no plano  $z = 0$ .

O CRTBP tem uma integral do movimento, conhecida como integral de Jacobi, conforme mostrado na Equação 6.3

$$C(\mathbf{x}, \mu) = x^2 + y^2 + \frac{2\mu}{r_1} + \frac{2(\mu)}{r_2} - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \tag{6.3}$$

Em particular, se tornarmos a velocidade igual a zero na Equação 6.3, uma região limite é encontrada, onde a velocidade da partícula é zero (MOLTON, 1960; SZE-BEHELY, 1967). Esta região é chamada de “Curva de Velocidade Zero” (CVZ).

Em termos matemáticos, esta CVZ é definida por  $2\Omega - C = 0$  (MCCUSKEY, 1963). A Equação 6.4 fornece uma expressão matemática da CVZ em coordenadas cartesianas

$$C = x^2 + y^2 + \frac{2\mu}{r_1} + \frac{2(\mu)}{r_2} = V(x, y, z). \tag{6.4}$$

onde  $V(x, y, z)$  é o potencial modificado.

O movimento do corpo só é possível quando  $x^2 + y^2 + \frac{2\mu}{r_1} + \frac{2(\mu)}{r_2} > C$ , caso contrário, o quadrado da velocidade seria negativo, o que é impossibilidade física (SZEBEHELY, 1967; SANTOS et al., 2017a).

### 6.3 Resultados numéricos

Todos os resultados numéricos obtidos foram realizados no plano  $xy$  do sistema, isto é, consideramos que  $z = 0$  e  $\dot{v}_z = 0$ . Para calcular a localização dos pontos de Lagrange de um sistema binário de asteroide é necessário conhecer as características físicas e orbitais do sistema em análise. Usando os dados mais recentes do sistema 2017 YE5 (MONTEIRO et al., 2021), sabemos que os dois primários,  $M_1$  e  $M_2$ , têm formas aproximadamente esféricas e a mesma massa,  $m_1 = m_2 = 2.3120 \times 10^{11}$  kg. A distância entre os primários é de 1800 metros.

### 6.4 Pontos de Lagrange

A localização dos pontos de Lagrange pode ser encontrada resolvendo a equação  $\nabla V(x, y, z) = 0$ , onde  $V(x, y, z)$  é o potencial modificado na Equação 6.4. A Figura 6.1 mostra, em unidade canônica, a distribuição dos cinco pontos de Lagrange do sistema YE5 2017 e a localização do centro de massa de cada primário. Observe as simetrias dessas posições.  $L_1$  é o ponto médio dos primários.  $L_2$  está localizado simetricamente com  $L_3$  e  $L_4$  com  $L_5$ , em relação a  $L_1$ . Isso se deve ao fato de que as massas de  $M_1$  e  $M_2$  são iguais.

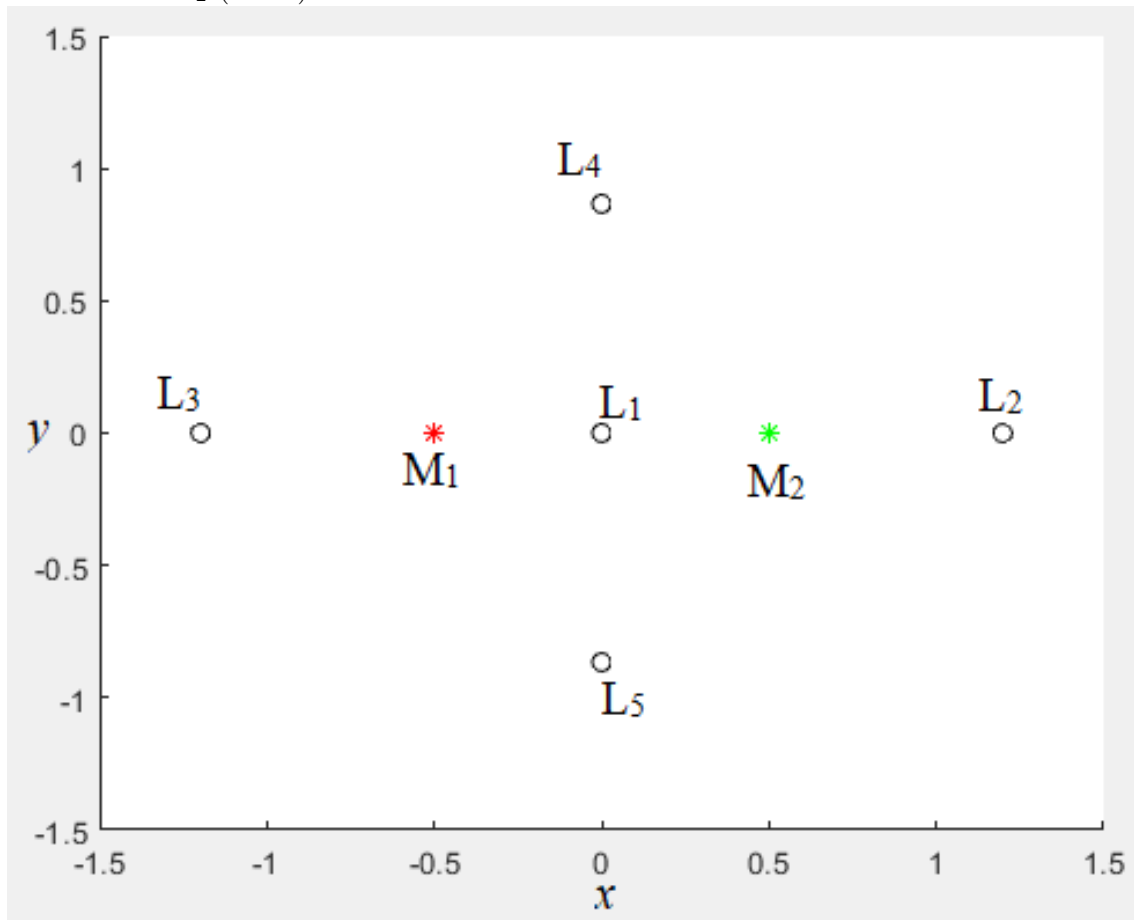
A Tabela 6.1 mostra as localizações exatas dos pontos de Lagrange (em unidade canônica e em km) e suas constantes de Jacobi  $C$  para o sistema 2017 YE5.

Cada ponto de equilíbrio está associado a uma constante de Jacobi. O primeiro ponto de Lagrange ( $L_1$ ) surge quando a constante de Jacobi é  $C_1 = 4,00$ . Este é o

Tabela 6.1 - Localização dos pontos de Lagrange e suas constantes de Jacobi  $C$ , em unidade canônica, para o sistema 2017 YE5.

	$x$ (u.c.)	$y$ (u.c.)	$x$ (km)	$y$ (km)	$C$ (u.c.)
$L_1$	1,19841	0	2,15713	0	4,00
$L_2$	1,19841	0	2,15713	0	3,4567962
$L_3$	-1,19841	0	-2,15713	0	3,4567962
$L_4$	0	0,86602	0	1,55884	2,75
$L_5$	0	-0,86602	0	-1,55884	2,75

Figura 6.1 - Imagem dos cinco pontos de Lagrange e as localizações de  $M_1$  (vermelho) e  $M_2$  (verde).



valor  $C$  que permite uma transferência orbital entre  $M_1$  e  $M_2$  em movimento natural. Esta transferência só pode ser feita através do ponto de Lagrange  $L_1$ . Observe que, usando  $C = 4,00$ , uma transferência de uma partícula de massa infinitesimal da vizinhança de um dos primários para o infinito é impossível, uma vez que este valor de  $C$  não abre as passagens pelos pontos de equilíbrio  $L_2$  e  $L_3$ .

Reduzindo o valor de  $C$ , as  $CVZ$  internas crescem e as externas diminuem. Quando  $C$  atinge o valor  $C_{2-3} = 3,45$  os ovais internas e externas das curvas de velocidade zero se cruzam nos pontos de Lagrange  $L_2$  e  $L_3$ . Como os primários têm a mesma massa, esses pontos de Lagrange surgem para a mesma constante de Jacobi ( $C = 3,45$ ).

Uma transferência natural entre  $M_1$  e  $M_2$  ainda é possível e, além disso, também é possível transferir um veículo espacial entre os primários e o infinito, passando pelos

pontos de Lagrange  $L_2$  e  $L_3$ .

Aumentando ainda mais a energia do sistema, ou seja, diminuindo a constante de Jacobi, as regiões proibidas tornam-se menores e as regiões permitidas de movimento da partícula tornam-se maiores. Quando  $C$  atinge o valor  $C_{4-5} = 2,75$ , os pontos de Lagrange  $L_4$  e  $L_5$  surgem. Observe que, para valores maiores que  $C_{4-5}$ , o movimento é permitido em todo o espaço.

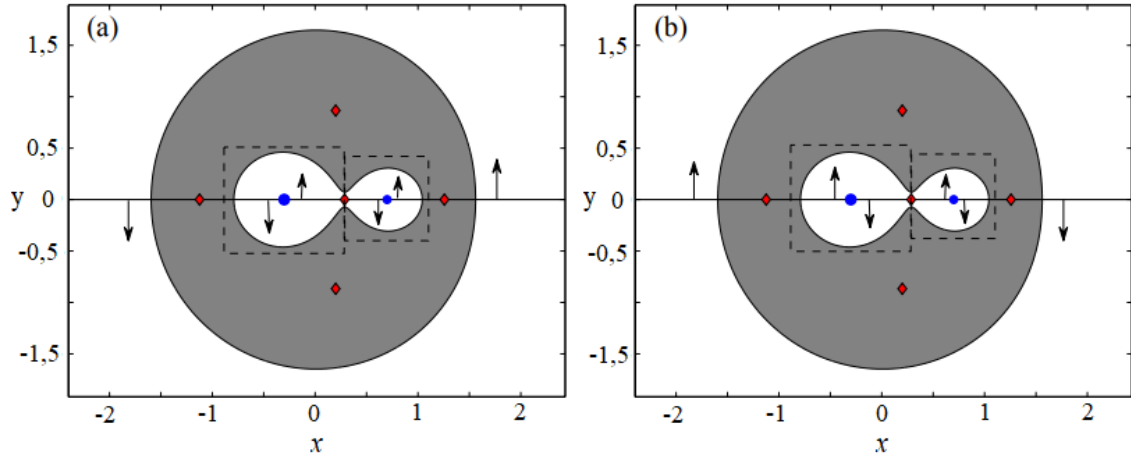
Todos os pontos de equilíbrio do sistema YE5 2017 são instáveis, uma vez que a razão de massa do sistema é  $\mu = 0,5$  (MCCUSKEY, 1963).

## 6.5 Órbitas periódicas

Para obter informações sobre as soluções e comportamentos gerais do sistema dinâmico, traçamos a superfície da seção. Eles fornecerão alguma assistência para encontrar as condições iniciais para soluções periódicas.

Consideraremos nesta análise o movimento de um veículo espacial no plano  $xy$ , que gira em torno do eixo  $Oz$  a uma velocidade angular  $\omega$ . Desta forma, definimos a superfície da seção como  $C = \text{constante}$ ,  $y = 0$  e  $\dot{y} > 0$ . Separamos o hiperplano da superfície da seção em três partes. Inicialmente, variamos  $x_0$  de -1 a -0,55. Depois disso, variamos  $x_0$  de -0,45 a 0,45. Finalmente, variamos  $x_0$  de 0,55 a 1 (lembrando que os primários estão em  $x_1 = -0,5$  e  $x_2 = 0,5$  com  $y = 0$ ). Dado o valor de  $x_0$  e  $C$ , determinamos a magnitude de  $\dot{y}_0$  de acordo com a expressão da constante de movimento, dada pela Equação 6.3. O sinal de  $\dot{y}$  é determinado pelo fato de as trajetórias serem selecionadas para serem inicialmente progressivas ou retrógradas; a direção das setas na Figura 6.5 ilustra uma escolha de sinal para a velocidade na direção- $y$ . Entre  $L_1$  e  $L_3$ , a direção de movimento para uma trajetória é definida em relação a  $M_1$ , enquanto a direção de movimento entre  $L_1$  e  $L_2$ , é definida em relação a  $M_2$ .

Figura 6.2 - Definição de (a) trajetórias prógradas e (b) retrógradas por região.



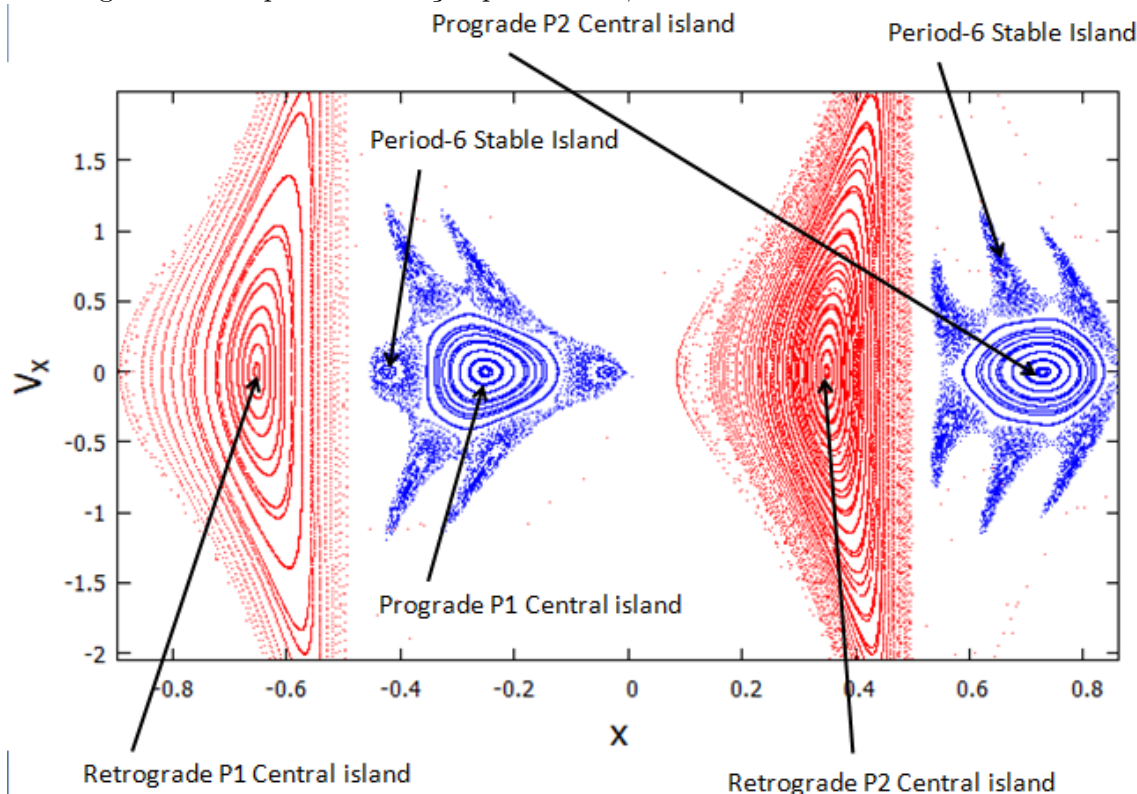
Em ambas as figuras, a direção do movimento é definida em relação a  $M_1$  na caixa pontilhada à esquerda e em relação a  $M_2$  na caixa pontilhada à direita. A direção do movimento na região externa é definida de forma equivalente a partir de  $M_1$  ou  $M_2$ .

Fonte: Adaptado de Bosanac (2016).

Caminhos que começam na região externa são equivalentemente definidos como prógrados ou retrógrados em relação a qualquer um dos primários. Observe que apenas a variável  $x$  é uma coordenada de posição no gráfico. O eixo vertical é a componente  $x$  da velocidade. Portanto, nesta superfície 2-D da seção, traçamos os pontos  $(x, \dot{x})$ . No caso considerado aqui, tomamos as unidades de massa, distância entre os primários e velocidade angular tais que  $\mu = 0,5$ ,  $d = \omega = 1$ , respectivamente. Para cada gráfico, normalmente calculamos cerca de 100 condições iniciais diferentes e 3000 cruzamentos no eixo  $x$  para cada condição inicial. Fizemos várias superfícies de seção para diferentes valores da constante de Jacobi  $C$ .

A Figura 6.3 mostra uma superfície de seção e representa um subconjunto da dinâmica para  $C = 4$ .

Figura 6.3 - Superfície da seção para  $C = 4,00$  em torno do sistema YE5 2017.



Este valor da constante de Jacobi é o valor no ponto de equilíbrio  $L_1$ .

Os pontos vermelhos no mapa correspondem a trajetórias que, inicialmente, são retrógradas em relação a um dos primários. Por outro lado, as interseções azuis mostram movimentos que são inicialmente progressivos.

É possível observar que existem dois tipos de soluções periódicas em torno de  $M_1$  e  $M_2$  para  $C = 4$ . A Figura 6.4 mostra soluções periódicas do período 1, e é dominada por um ponto central fixo, no eixo  $x$ , e uma solução periódica do período 6. Existem também soluções periódicas em torno de  $M_2$ . A Figura 6.5 mostra soluções periódicas do período 1 que é dominado por um ponto central fixo e período 6.

Essas órbitas periódicas em torno de  $M_1$  e  $M_2$  são cercadas por órbitas quase periódicas em toros concêntricos. Além disso, observamos vários pontos distribuídos aleatoriamente, o que pode ser um indicativo de caos. Dizemos “indicação” porque uma evidência gráfica nunca é suficiente para concluir a existência do caos. As condições iniciais para algumas dessas órbitas estão listadas na Tabela 6.2.

Figura 6.4 - Superfície da seção para  $C = 4,00$  em torno de  $M_1$  (prógrada).

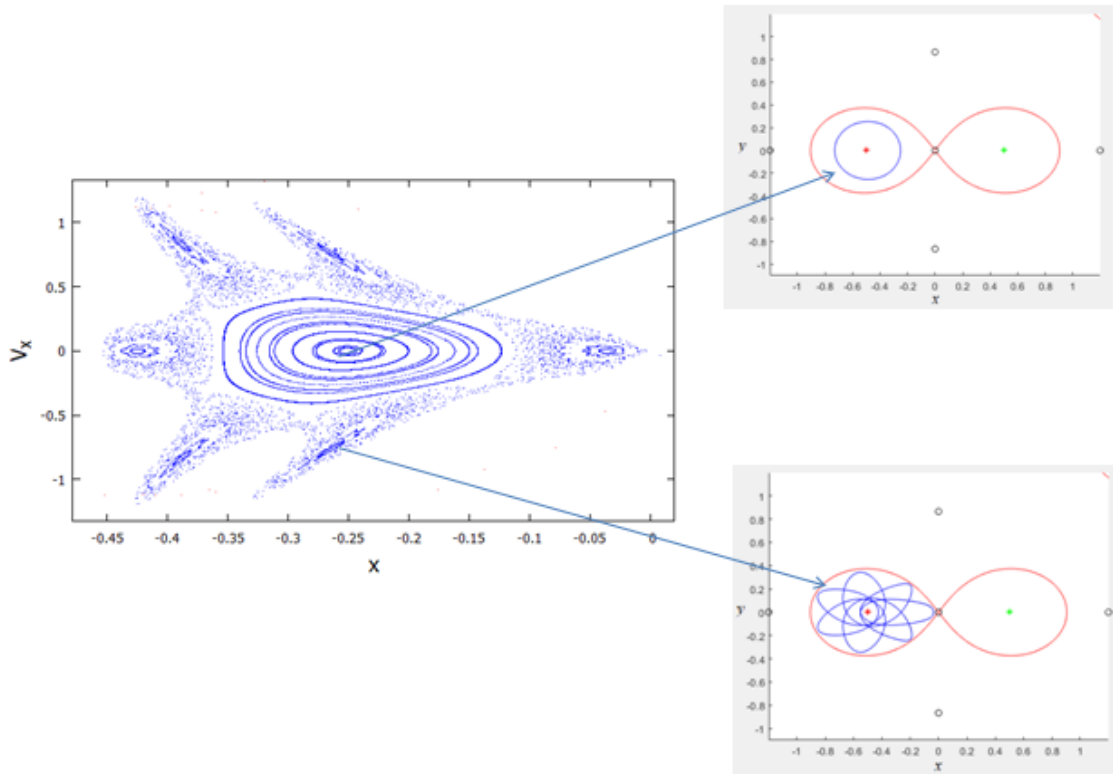


Figura 6.5 - Superfície da seção para  $C = 4,00$  em torno de  $M_1$  (retrógrada).

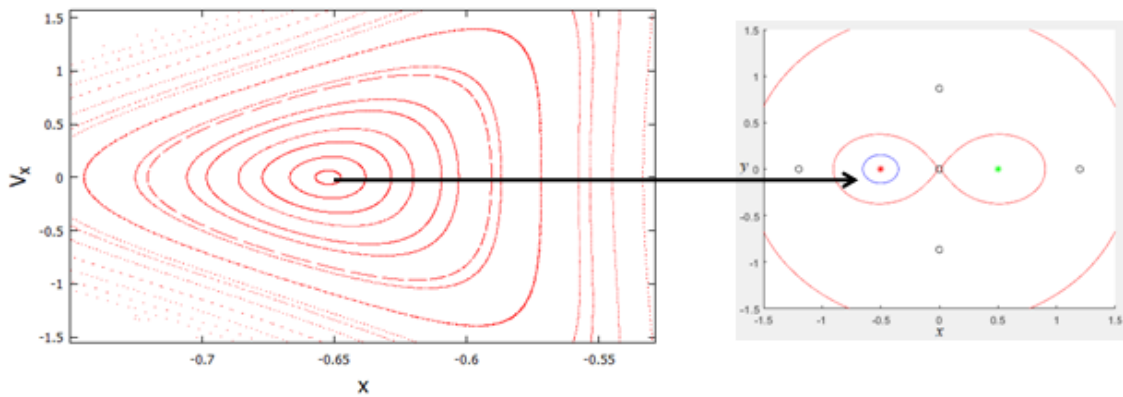


Tabela 6.2 - Condições iniciais das órbitas periódicas para  $C = 4,00$ .

$M_i - j$	Estabilidade	T	x	$\dot{y}$	$s_1$	$s_2$
$M_1 - 1$	estável	1,326	-0,250	1,185	1,051	0,303
$M_1 - 6$	estável	7,844	-0,035	0,145	1,442	1,225
$M_2 - 1$	estável	1,326	0,25	-1,185	1,051	0,303
$M_2 - 6$	estável	7,844	0,035	-0,145	1,442	1,225

Figura 6.6 - Superfície da seção para  $C = 4,00$  em torno de  $M_2$  (prógrada).

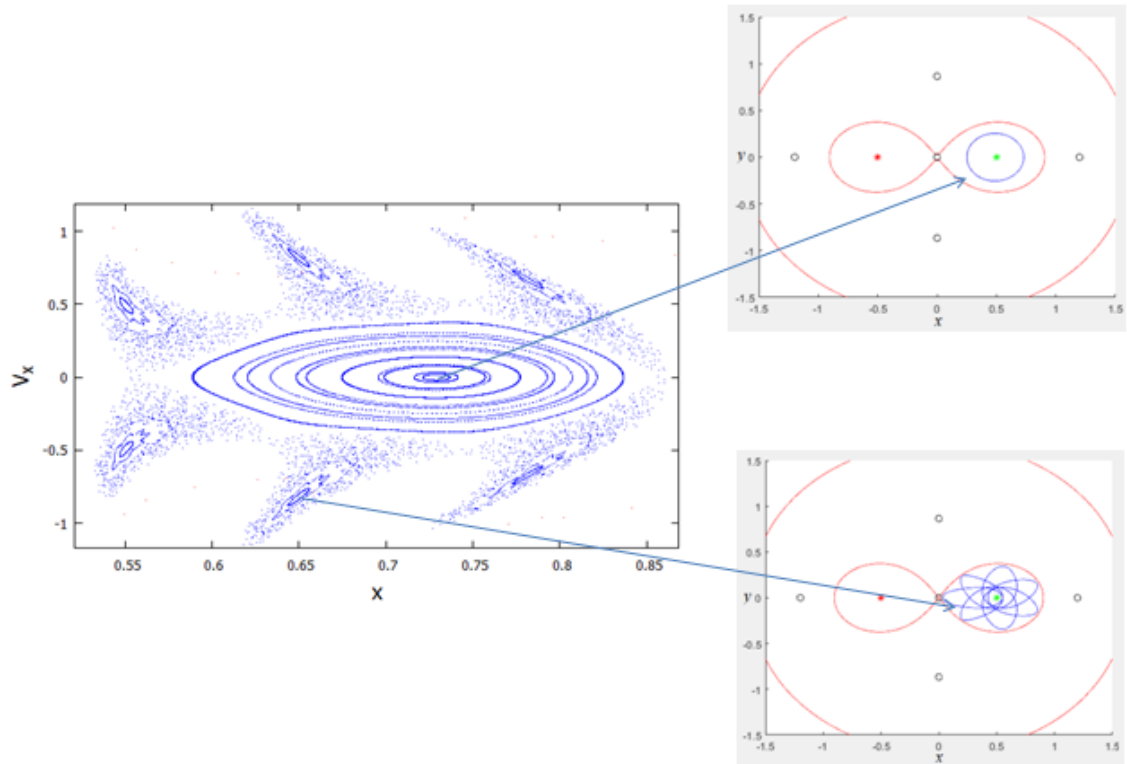


Figura 6.7 - Superfície da seção para  $C = 4,00$  em torno de  $M_2$  (retrógrada).

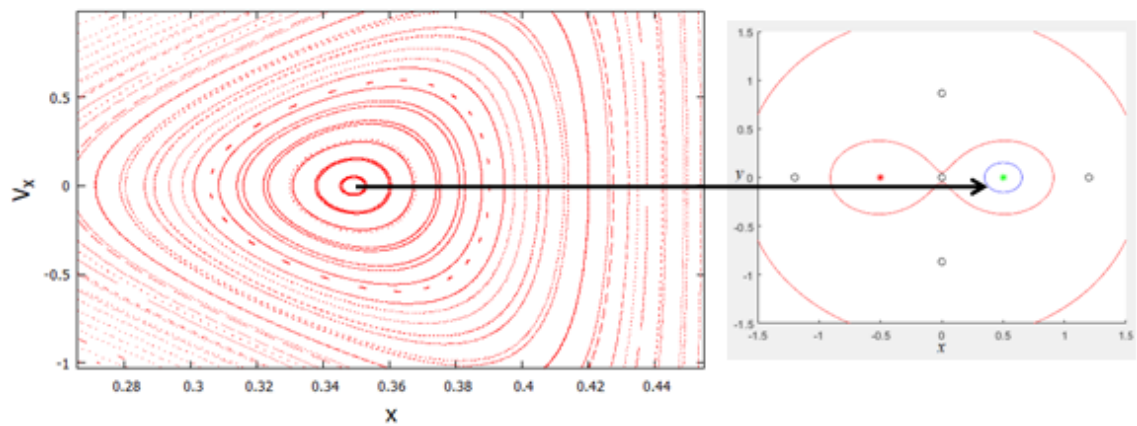
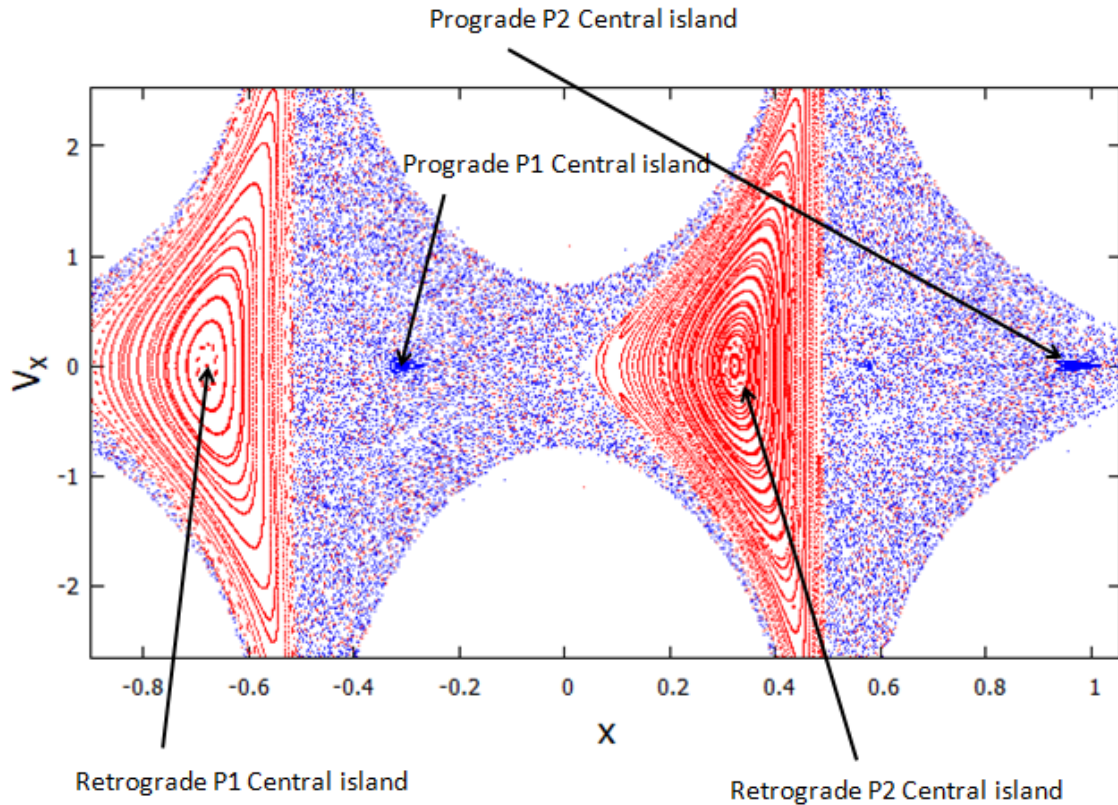




Figura 6.8 - Superfície de seção para  $C = 3,4567$  em torno do sistema 2017 YE5.

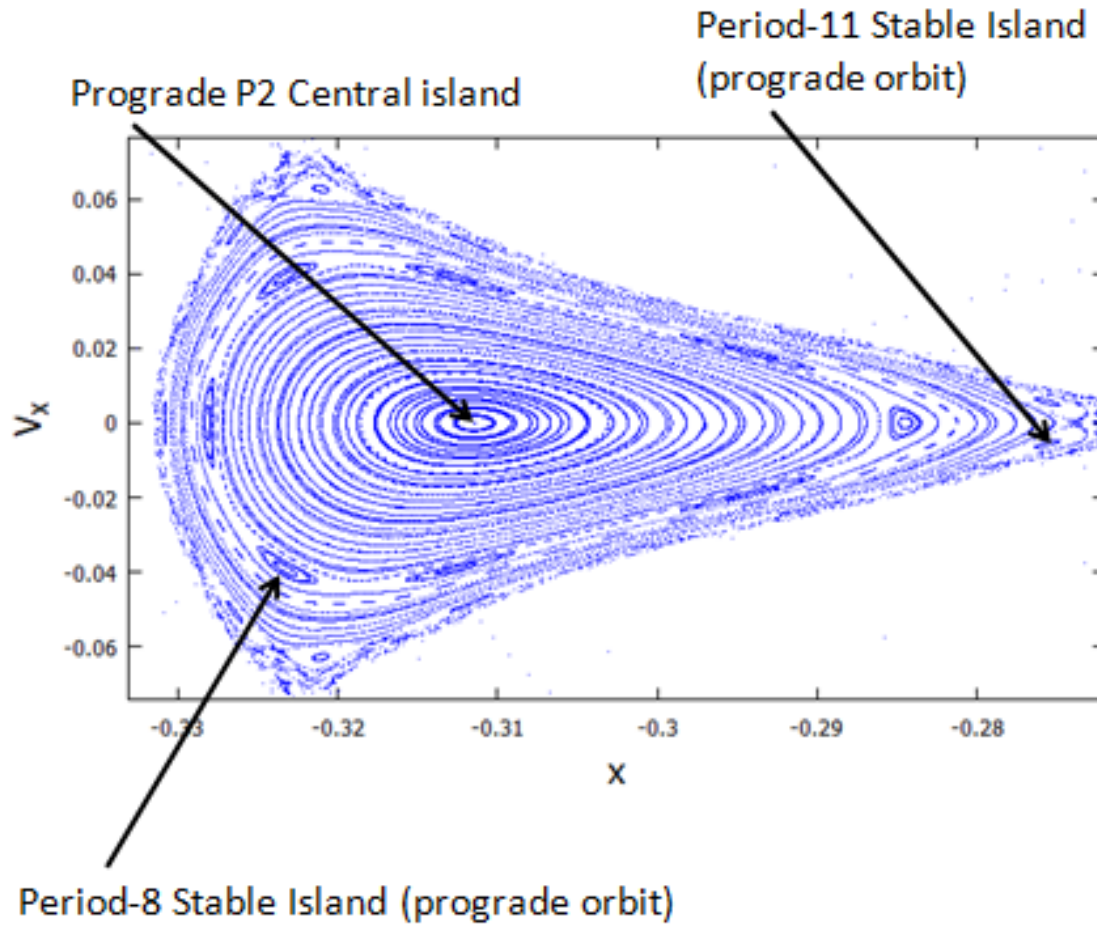


Para essas órbitas, calculamos o índice de estabilidade ( $s_i$ ), usando a matriz de monodromia. Como bem conhecido, se  $|s_i| > 2$ , os expoentes característicos das órbitas são instáveis. Por outro lado, se  $|s_i| < 2$ , eles são estáveis; e, finalmente,  $|s_i| = 2$  representa um caso de estabilidade indiferente (BROUCKE, 1969). Este índice de estabilidade aparece nas colunas seis e sete na Tabela 6.2. A primeira coluna da Tabela 6.2 fornece  $M_i - j$  onde  $i = 1, 2$  (referindo-se aos primários) e  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , refere-se ao período da órbita. Por exemplo,  $M_1 - 6$  representa uma órbita periódica em torno de  $M_1$  com período 6.

A seguir, calculamos a superfície da seção considerando a constante de Jacobi  $C_2 = C_3 = 3,456796224086153$ . Eles são mostrados na Figura 6.8.

Conforme mostrado na Figura 6.8, as ilhas retrógradas estáveis (vermelhas) são maiores em comparação com as ilhas prógradas estáveis (azuis) que estão inseridas em um mar de possível caos.

Figura 6.9 - Superfície de seção para  $C = 3,4567$  em torno de  $M_1$ .



Observe que, para  $C = C_2 = C_3$ , é possível encontrar órbitas periódicas do período 1, tanto em sentido prógrado quanto retrógrado. Uma vez que as trajetórias retrógradas emergem em ilhas relacionadas com uma órbita de período 1, elas são geralmente menos sensíveis as perturbações em relação às trajetórias prógradas.

As Figuras 6.9 e 6.10 são uma aproximação da superfície de seção das órbitas prógradas nas proximidades dos corpos  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. Observe na Figura 6.9 que o movimento progressivo em torno de  $M_1$  exhibe um comportamento de ordem superior de tamanho significativo. Isso significa que há uma ilha de período estável 8 e uma ilha de período estável 11 que foram separadas da ilha central prógrada. Trajetórias dos períodos 8 e 11 também são encontradas em torno de  $M_2$ , como pode ser visto na Figura 6.10.

Figura 6.10 - Superfície de seção para  $C = 3,4567$  em torno de  $M_2$ .

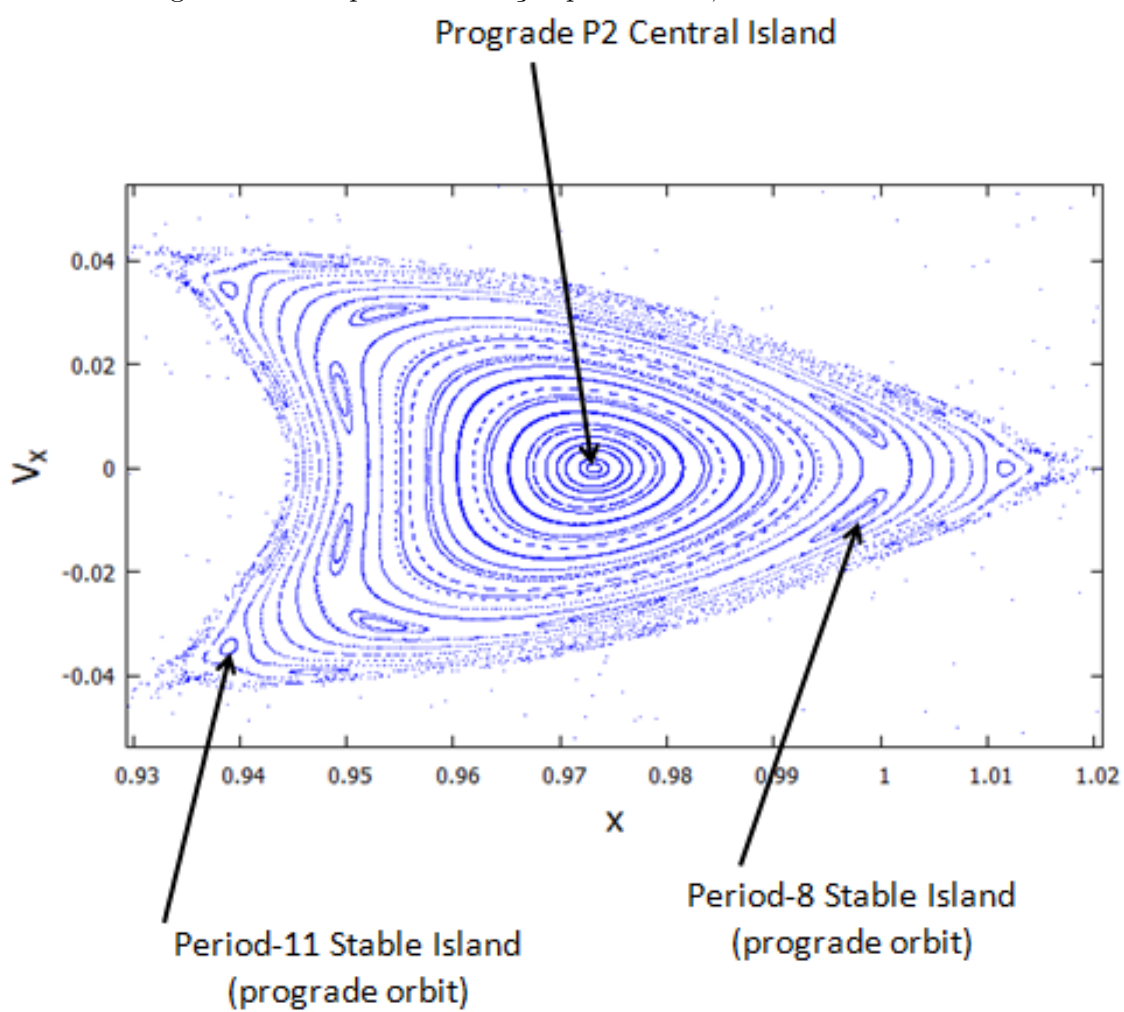
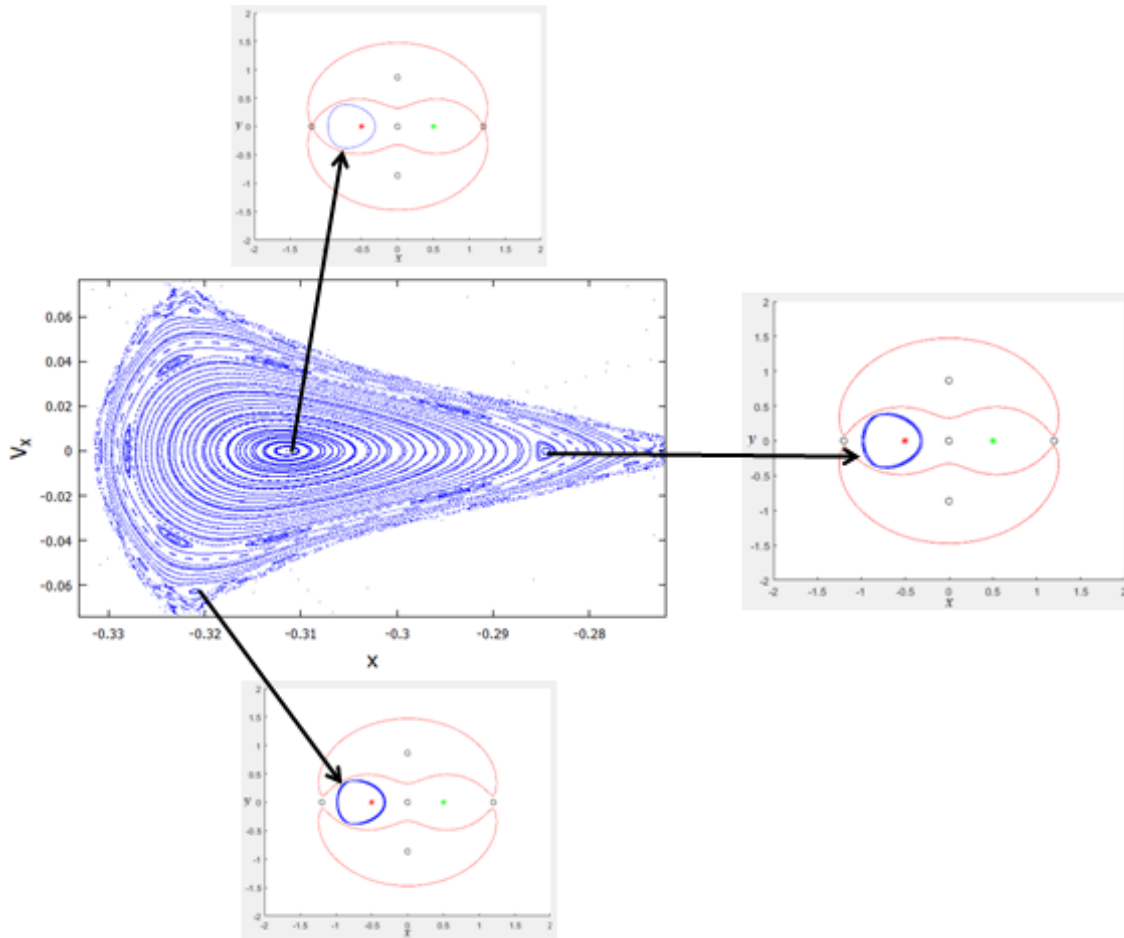


Figura 6.11 - Superfície de seção para  $C = 3,4567$  em torno de  $M_1$ .



Observe que, como no caso anterior, as órbitas periódicas são circundadas por órbitas quase periódicas em círculos concêntricos. Também observamos vários pontos distribuídos aleatoriamente, o que é uma indicação de caos.

A Figura 6.11 mostra as órbitas periódicas estáveis e CVZ, considerando  $C = 3,4567$ , referindo-se à superfície de seção das órbitas prógradas em torno de  $M_1$ .

Não plotamos as órbitas em torno de  $M_2$  para  $C = 3,4567$  porque as órbitas são semelhantes às órbitas em torno de  $M_1$ .

As condições iniciais para algumas dessas órbitas estão listadas na Tabela 6.3.

Por fim, construímos a superfície da seção considerando a constante de Jacobi  $C = 2,75$ , como pode ser visto na Figura 6.12.

Tabela 6.3 - Condições iniciais das órbitas periódicas para  $C = 3,45991779618$ .

$M_i - j$	Estabilidade	T	x	$\dot{y}$	$s_1$	$s_2$
$M_1 - 1$	estável	3,458	-0,973	-0,531	1,051	0,303
$M_1 - 8$	estável	17,58	-0,328	1,918	1,965	1,782
$M_1 - 11$	estável	25,19	-0,330	1,942	1,996	1,734
$M_2 - 1$	estável	3,65	0,322	1,872	1,779	1,753
$M_2 - 8$	estável	17,58	0,328	-1,918	1,965	1,782
$M_2 - 11$	estável	25,19	0,330	-1,942	1,996	1,734

Figura 6.12 - Superfície de seção para  $C = 2,75$  around 2017 YE5 system.

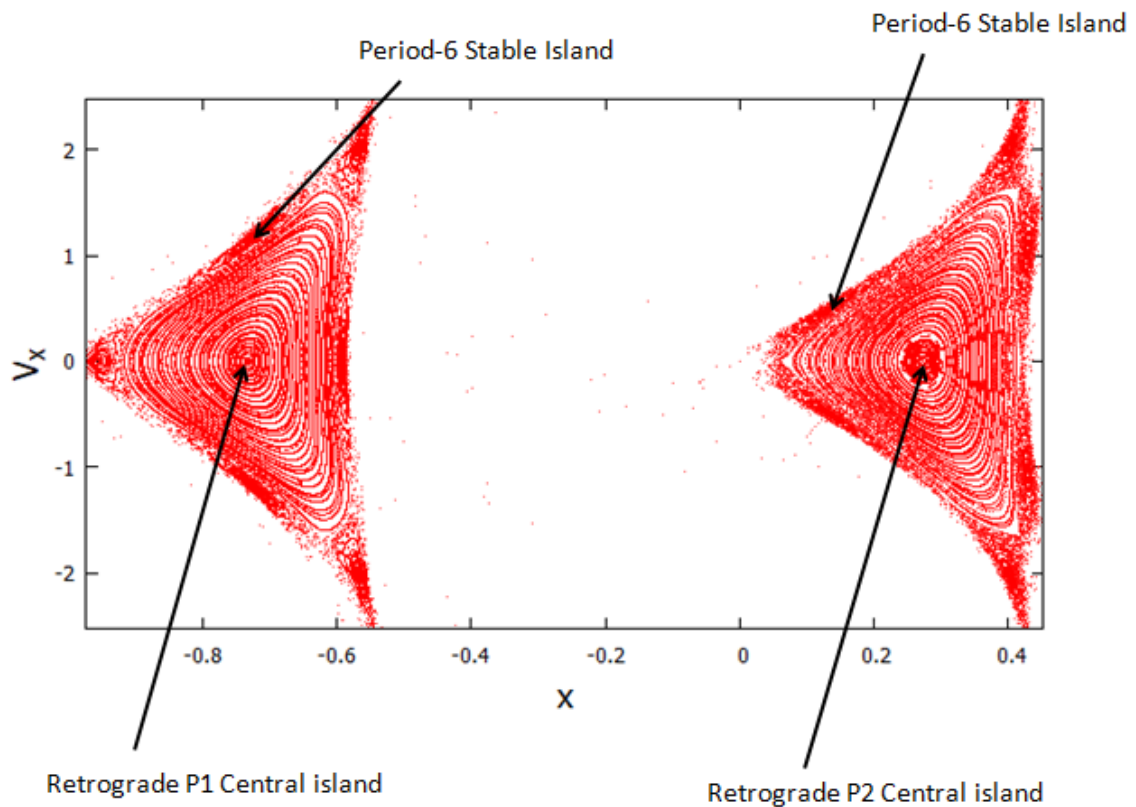
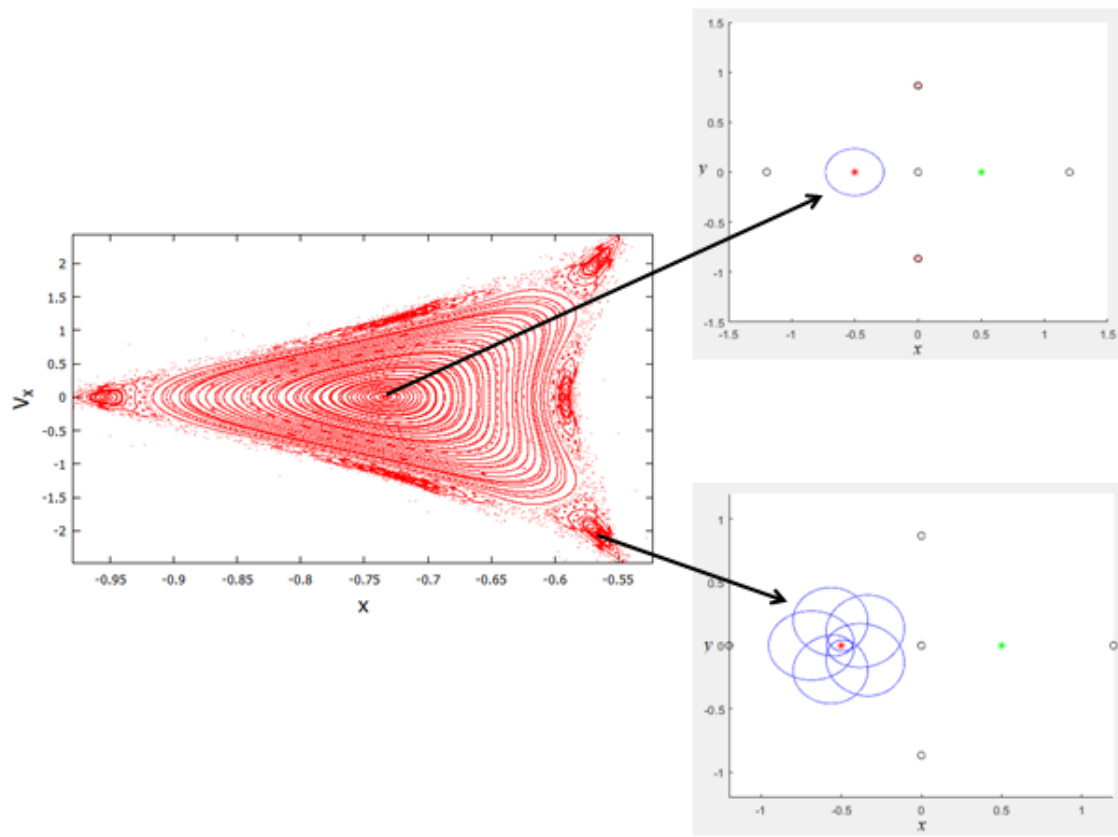


Figura 6.13 - Superfície de seção para  $C = 2,75$  around  $M_1$  (retrógrada).

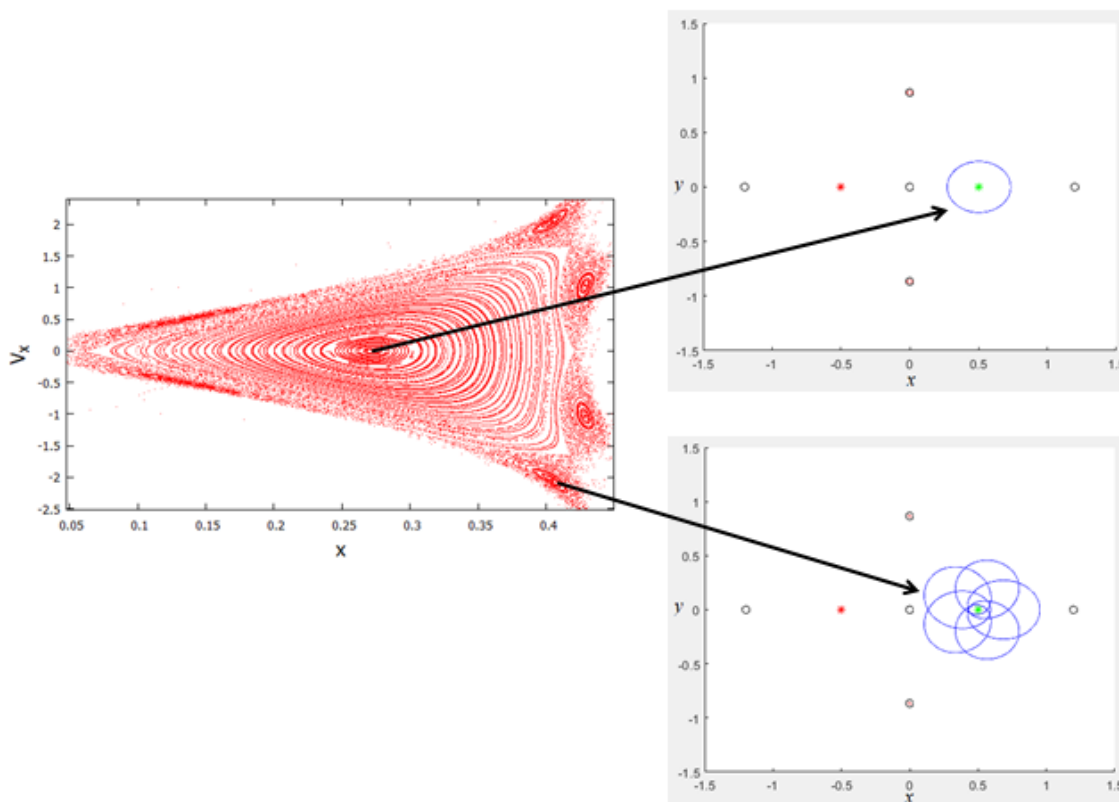


Observe na Figura 6.12 que não há órbita prógrada estável em torno de cada primário do sistema YE5 2017 quando  $C = 2,75$ . Por outro lado, ainda existem órbitas retrógradadas.

As Figuras 6.13 e 6.14 mostram uma aproximação da superfície da seção para órbitas retrógradadas nas proximidades dos corpos  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. Observe que, como nos casos anteriores, há um ponto central fixo ao redor de cada primário. Além disso, também detectamos comportamento de ordem superior em cada primário. Observe que existe uma ilha estável do período-6 que foi separada da ilha central retrógrada.

No lado direito das Figuras 6.13 e 6.14 podemos observar as trajetórias referentes às órbitas do período-1 e período-6 em torno dos corpos  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente.

Figura 6.14 - Superfície de seção para  $C = 3,75$  around  $M_2$  (retrógrada).



## 6.6 Variação da velocidade necessária para abrir transferências de diferentes regiões

Nos últimos anos, tem havido grande interesse da comunidade científica em explorar asteroides e cometas. Tendo isso em mente, calculamos a variação de velocidade necessária para que um veículo espacial, que está ao redor de um dos primários, obtenha a energia mínima necessária para possibilitar as transferências entre os primários e até mesmo para escapar do sistema. Este é o valor mínimo necessário para uma manobra impulsiva.

Para isso, determinamos uma órbita periódica em torno de  $M_1$ , com todos os pontos de equilíbrio fechados pelas curvas de velocidade zero, conforme mostrado na Figura 6.15. A constante de Jacobi usada é  $C = 5,00$ . A Figura 6.15 mostra que uma transferência orbital natural entre  $M_1$  e  $M_2$  não é possível. A partir disso, não é possível para a espaçonave escapar do sistema naturalmente.

Figura 6.15 - Órbita periódica em torno  $M_1$  para  $C = 5$  (órbita prográda).

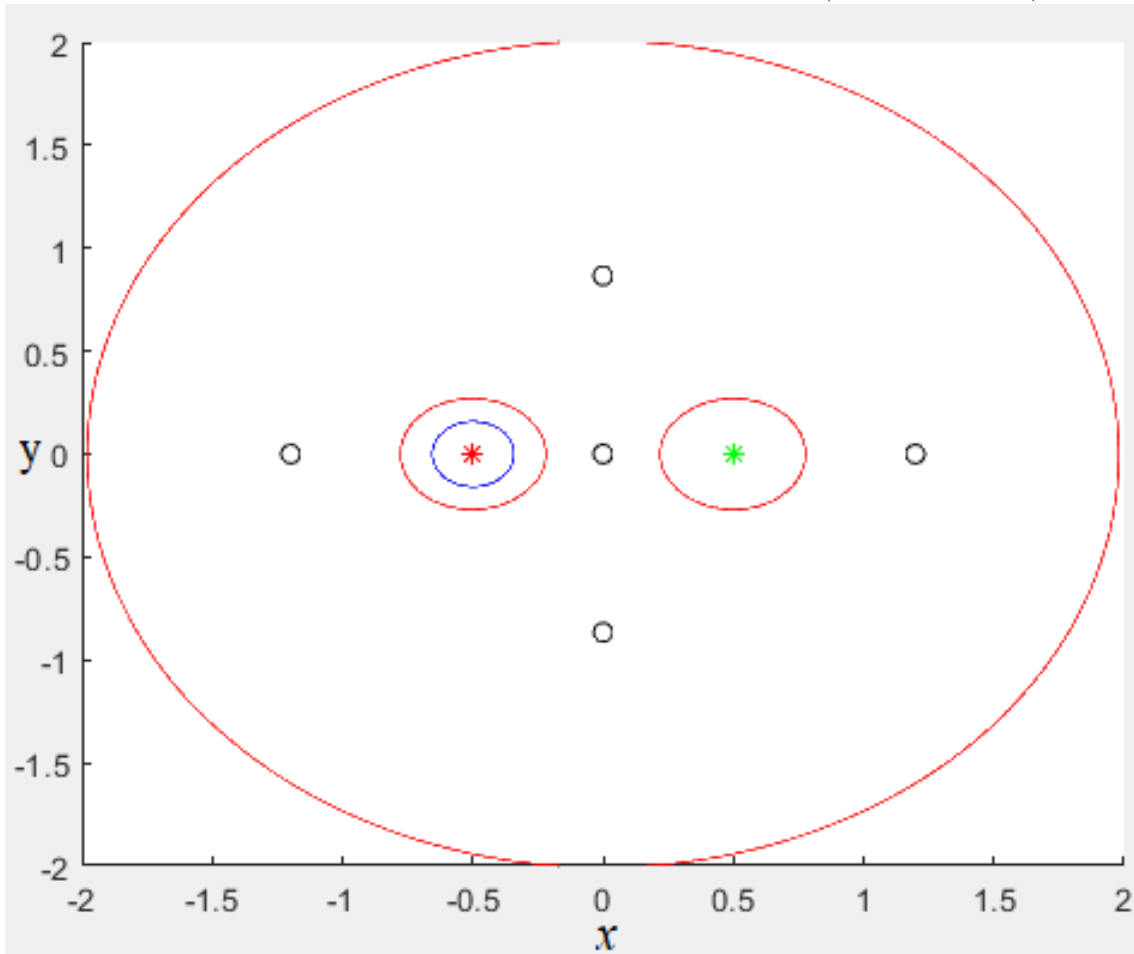


Tabela 6.4 - Condição inicial da órbita periódica para  $C = 5$ .

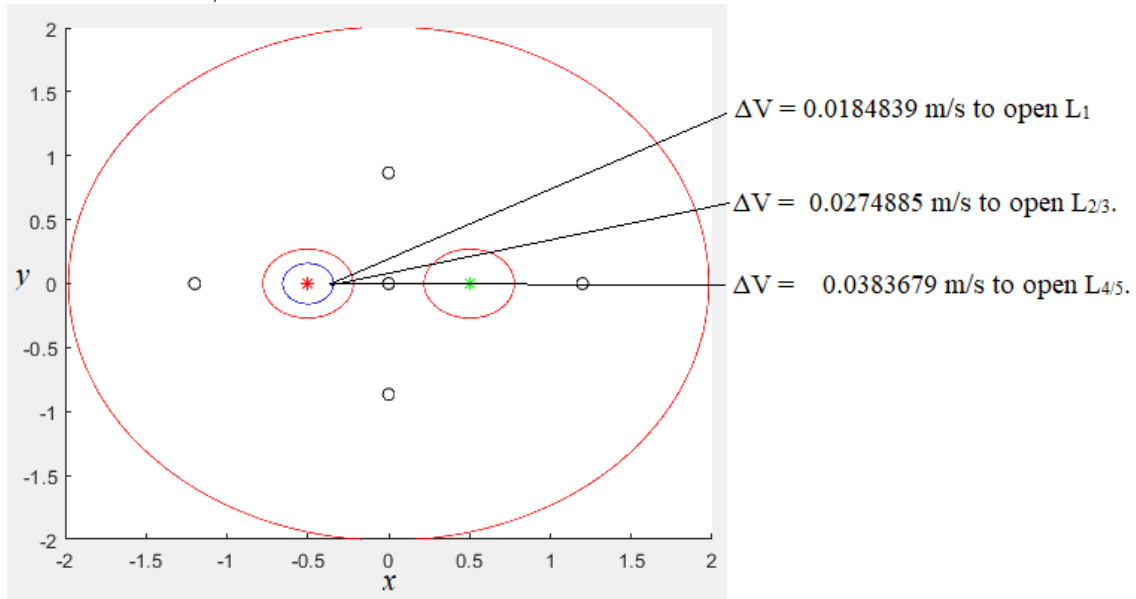
$M_i - j$	Estabilidade	T	x	$\dot{y}$	$s_1$	$s_2$
$M_1 - 1$	estável	1.220	-0.342	1.622	0.814	0.607

Algumas características orbitais das órbitas mostradas na Figura 6.15 podem ser encontradas na Tabela 6.4.

A partir da órbita encontrada na Figura 6.15, queremos encontrar o  $\Delta V$  necessário para atingir a energia mínima que permite uma transferência entre os primários utilizando um acréscimo de velocidade tangencial, ou seja, o  $\Delta V$  necessário para que as ovas (CVZ) em torno de  $M_1$  e  $M_2$  se encontrem em  $L_1$ . Sem dúvida que esse acréscimo de velocidade pode ocorrer em qualquer ponto da órbita e em qualquer direção.



Figura 6.16 -  $\Delta V$  necessário para abrir a passagem pelos pontos de equilíbrio  $L_1$ ,  $L_{2/3}$  e  $L_{4/5}$  assumindo  $C = 5$ .



O objetivo aqui é ter uma noção quantitativa do gasto de combustível necessário, antes de realizar uma simulação mais detalhada.

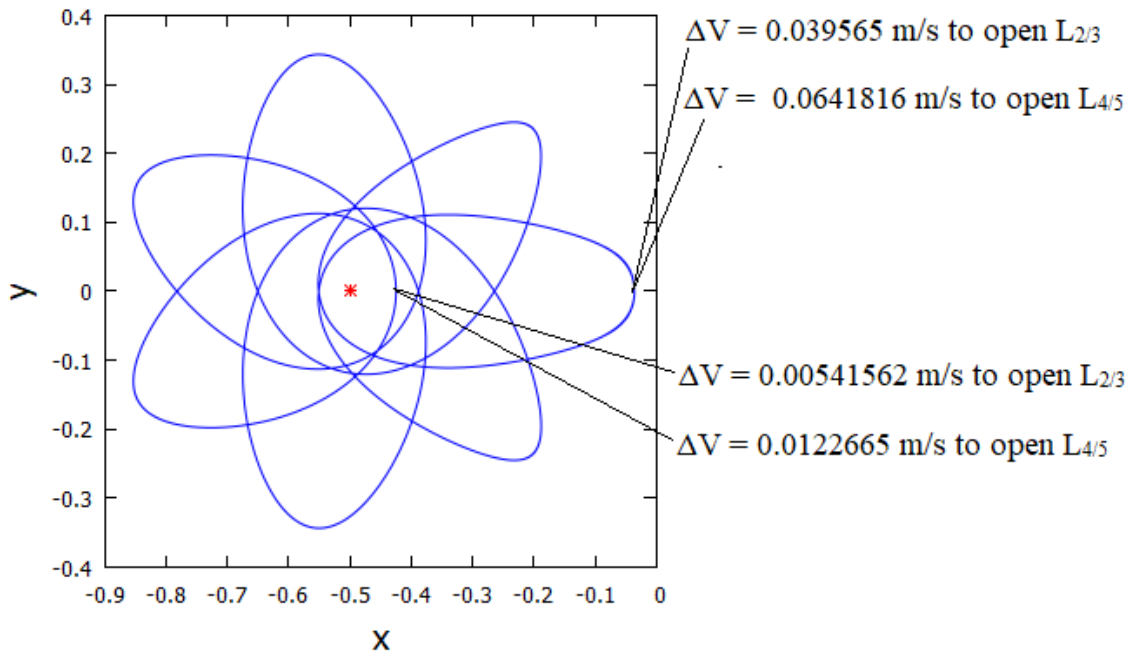
Considerando o movimento plano, assumindo  $y = 0$ , a posição  $x$  da espaçonave conforme mostrado na Tabela 6.4 e usando a constante de Jacobi  $C = 4,00$ , podemos usar a Equação 6.3 para encontrar  $v_{y_{c_1}}$  necessário para abrir a passagem por  $L_1$ , onde  $v_{y_{c_1}}$  significa a velocidade  $v_y$  perpendicular ao eixo  $x$  cuja constante de Jacobi é  $C_1$ . Obtendo este valor, podemos encontrar  $\Delta V$  fazendo  $\Delta V = v_{y_{c_1}} - v_{y_{c_5}}$ .

Em vista disso, calculamos o  $\Delta V$  necessário para sair de  $C = 5$  e alcançar  $C_1$ ,  $C_{2/3}$  e  $C_{4/5}$ . Os resultados são mostrados na Figura 6.16. Algumas características orbitais das órbitas mostradas na Figura 6.15 podem ser encontradas na Tabela 6.4.

O  $\Delta V$  necessário depende da posição da espaçonave em sua órbita em torno dos primários. Observe que, como essa órbita é aproximadamente circular, o  $\Delta V$  exigido é quase o mesmo em qualquer ponto da órbita.

Observe que o  $\Delta V$  necessário para abrir a passagem dos pontos de equilíbrio  $L_{4/5}$  é maior do que para abrir a passagem em  $L_{2/3}$  pontos. Isso se deve ao fato de que, quando os pontos de equilíbrio  $L_{4/5}$  são abertos, o movimento da espaçonave é permitido em toda a região, tornando necessária maior energia.

Figura 6.17 -  $\Delta V$  necessário para abrir a passagem pelos pontos de equilíbrio  $L_1$ ,  $L_{2/3}$  e  $L_{4/5}$  assumindo  $C = 4,00$  e usando a órbita do período-6.



Realizamos os mesmos cálculos considerando a órbita de período 6, mostrada na Figura 6.17. Uma visão de  $M_1$  e de  $\Delta V$  necessários para abrir a passagem pelos pontos de equilíbrio  $L_{2/3}$  e  $L_{4/5}$  são mostrados na Figura 6.17

Observe que quando a manobra é realizada no periastro, menor será o  $\Delta V$  necessário para abrir os pontos de equilíbrio subsequentes. Esse resultado é de grande importância, visto que a quantidade de combustível disponível em uma espaçonave é essencial em uma missão espacial.

Depois de ter encontrado várias órbitas periódicas e calculado suas estabilidades, pretendemos analisar a influência da pressão da radiação solar sobre essas órbitas periódicas.

## 6.7 Efeito na pressão da radiação solar

Após realizar uma análise da dinâmica de uma partícula nas proximidades do sistema 2017 YE5 considerando apenas as forças gravitacionais do sistema, iremos agora investigar a influência da pressão da radiação solar.

As equações de movimento que usamos na simulação numérica consideram um sis-

tema inercial onde a origem do sistema de referência coincide com o baricentro do sistema de asteroides 2017 YE5. As equações de movimento usadas são mostradas nas Equações 6.5.

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{\mu(x' - x'_1)}{r'_1{}^3} - \frac{\mu(x' - x'_2)}{r'_2{}^3} + P_{rad_x}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu(y' - y'_1)}{r'_1{}^3} - \frac{\mu(y' - y'_2)}{r'_2{}^3} + P_{rad_y}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu(z' - z'_1)}{r'_1{}^3} - \frac{\mu(z' - z'_2)}{r'_2{}^3} + P_{rad_z},\end{aligned}\tag{6.5}$$

em que  $P_{rad_x}$ ,  $P_{rad_y}$  e  $P_{rad_z}$  representam, respectivamente, os componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  da aceleração devido à pressão da radiação solar (MONTENBRUCK et al., 2002; BEUTLER, 2005), fornecido pela Equação 6.6.

$$\mathbf{P}_{rad} = C_r \frac{A}{m} P_s \frac{r_0^2}{r'_{sun}{}^2} \hat{\mathbf{r}},\tag{6.6}$$

onde  $C_r$  é o coeficiente de pressão de radiação. Neste trabalho consideramos  $C_r = 1,5$ .  $m$  é a massa do veículo espacial e  $A$  é a área da seção transversal da partícula iluminada pelo sol.  $P_s$  é a pressão da radiação solar em torno da distância Sol-Terra e seu valor é de aproximadamente  $4,55 \times 10^{-6} N/m^2$ ;  $r_0$  é a distância entre o Sol e a Terra;  $\hat{\mathbf{r}}$  é o vetor da unidade radial do Sol em relação à partícula;  $r'_{sun}$  é a distância entre o Sol e o veículo espacial dada pela Equação 6.7.

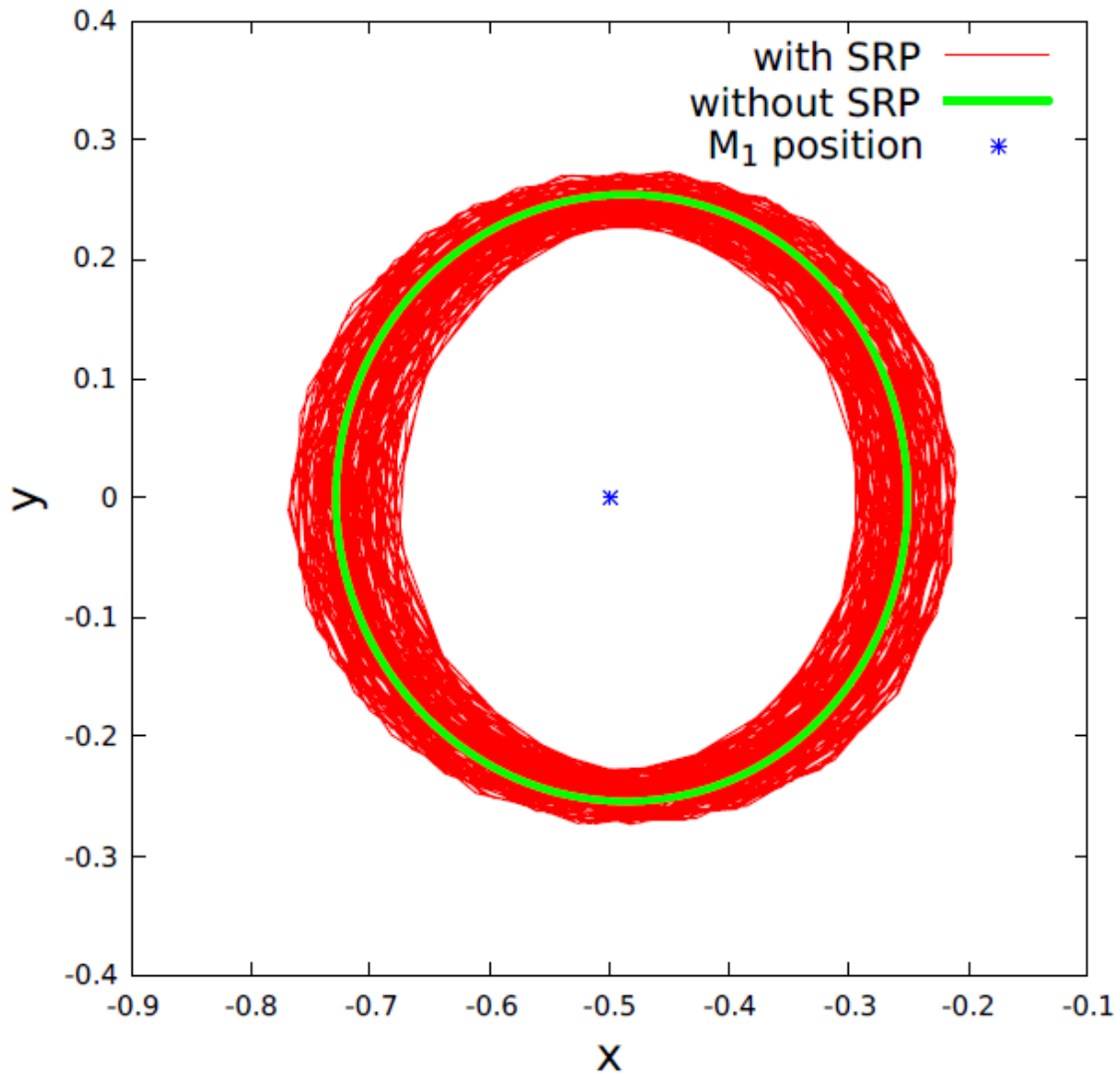
$$r'_{sun} = \sqrt{(x' - x_{sun})^2 + (y' - y_{sun})^2 + (z' - z_{sun})^2},\tag{6.7}$$

onde  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  são as posições espaciais do veículo espacial no sistema de referência inercial centrado no baricentro do sistema 2017 YE5. Para determinar as condições iniciais do Sol

Existem várias partículas interplanetárias, que variam em tamanho e densidade (JEWITT et al., 2020; FINK; RUBIN, 2012). Para realizar as simulações, utilizou-se a razão área-massa de 0,01 e 0,1, visando verificar a influência da pressão da radiação solar nas proximidades deste sistema de asteroides. Lembrando que a Equação 6.6 é escrita no referencial inercial centrado no baricentro do sistema 2017 YE5.

Quando o sistema 2017 YE5 está no periélio ( $r_p = 0,818$  U.A.), observamos que a pressão da radiação solar varre toda e qualquer órbita nas proximidades desse sistema, sem que nenhuma partícula/espçonave seja capaz de sobreviver ao redor

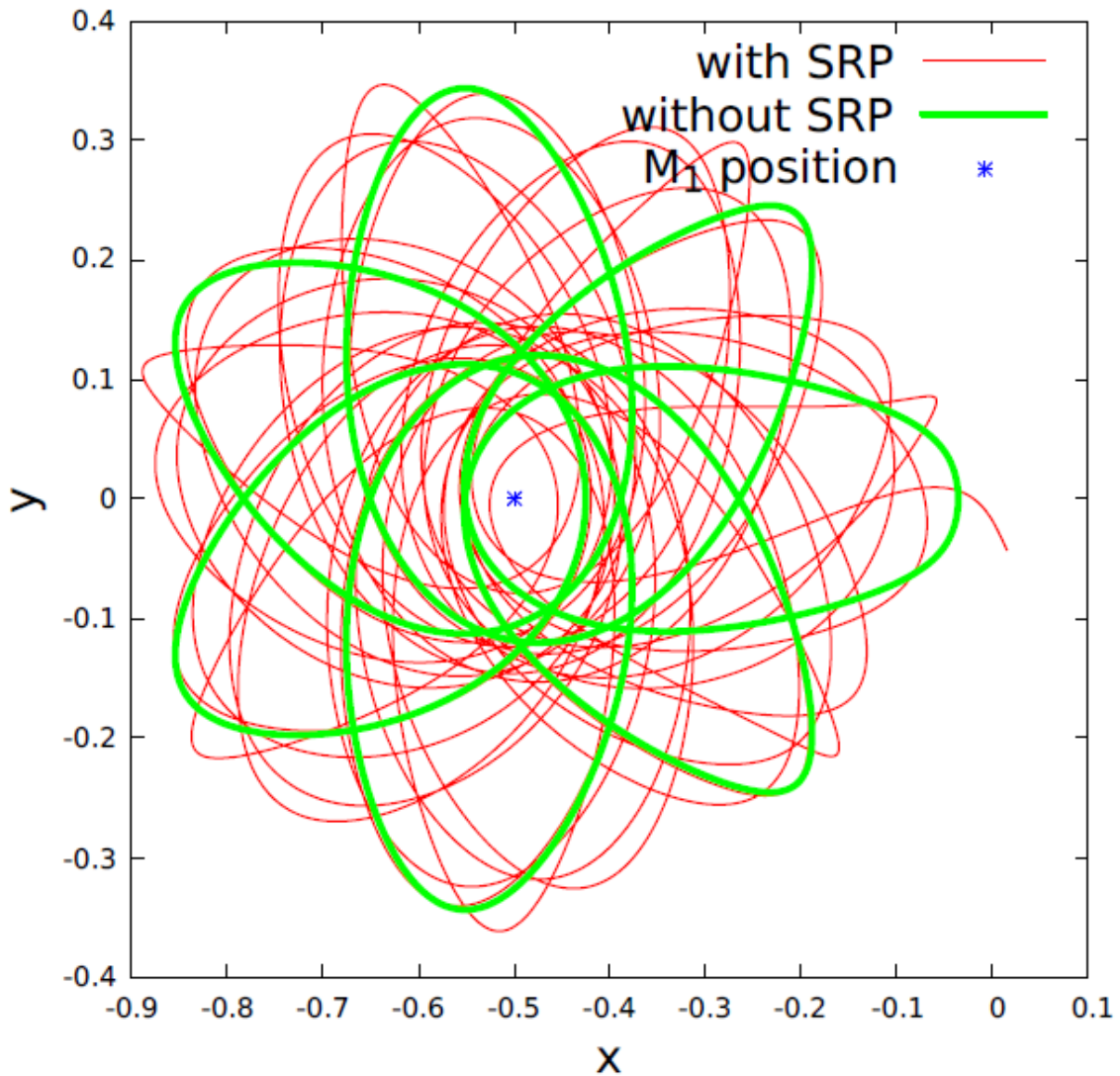
Figura 6.18 - Órbita de período-1 em torno de  $M_1$  considerando a pressão de radiação solar usando  $C = 4,00$ .



do sistema.

Por outro lado, quando consideramos  $A/m = 0,01$  e o sistema de asteroides 2017 YE5 no afélio ( $r_a = 4,818$  U.A.), é possível encontrar órbitas que sobrevivem ao redor de cada corpo primário. A Figura 6.18 mostra uma órbita em torno de  $M_1$  considerando a pressão da radiação solar (trajetória vermelha) e quando não consideramos a pressão da radiação solar (trajetória verde). Observe que quando a pressão da radiação solar é levada em consideração, a órbita oscila em torno do período orbital periódico-1. Nesta simulação, consideramos a constante de Jacobi  $C = 4,00$ . Nas simulações numéricas que realizamos (por 1 ano) observamos que o efeito da

Figura 6.19 - Órbita de período-6 em torno de  $M_1$  considerando a pressão de radiação solar usando  $C = 4,00$ .



pressão da radiação solar, quando o sistema 2017 YE5 está no afélio e  $A/m = 0,01$ , não é suficiente para fazer as órbitas do período 1 escapar do sistema ou orbitar o outro primário. Por outro lado, a pressão da radiação solar tem maior influência nas órbitas com período maior que um, fazendo com que a órbita escape da vizinhança de um dos primários, como pode ser visto na Figura 6.19.

Observe na Figura 6.19 que quando consideramos a pressão da radiação solar, a órbita (vermelha) oscila em torno da órbita periódica (verde). Após alguns dias, a órbita vermelha escapa pelo ponto de equilíbrio  $L_1 (0,0)$  e começa a orbitar  $M_2$ . Como consideramos a constante de Jacobi  $C = 4,00$ , esse caminho é o único que

permite a transferência orbital entre os primários. Na Figura 6.19 mostramos até o momento em que a órbita escapa pelo ponto  $L_1$  para evitar poluição visual.

Como as órbitas de um período  $> 1$  têm um índice de estabilidade mais alto em relação às órbitas do período 1, elas são mais suscetíveis a perturbações de outros corpos celestes.

Resultados semelhantes foram encontrados ao considerar outras constantes de Jacobi.

## 6.8 Transferência entre os pontos colineares

Nesta seção, investigaremos transferências orbitais entre os pontos de equilíbrio do sistema 2017 YE5. Além do efeito gravitacional dos corpos primários, nós investigaremos transferências orbitais deste sistema em específico, levando em consideração a pressão da radiação solar e a perturbação gravitacional do Sol. Queremos investigar o  $\Delta V$  necessário para fazer com que um veículo espacial saia de um ponto de equilíbrio e alcance outro.

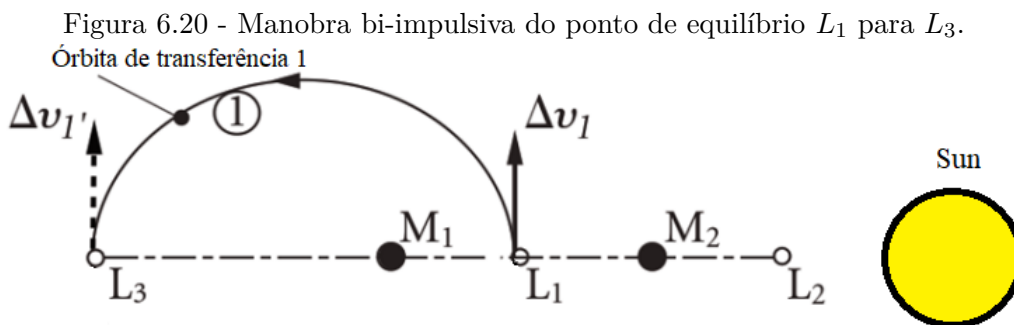
Nós consideramos que quando um veículo espacial está sobre um ponto de equilíbrio, o painel da vela solar está paralela aos raios solares, de tal forma que a influencia da PRS não altera a posição dos pontos de equilíbrio. Visto isso, a PRS só perturba o veículo espacial durante a trajetória de transferência. O tipo de transferência que usaremos para realizar este estudo é a manobra bi-impulsiva. Uma manobra impulsiva altera instantaneamente a velocidade de um veículo espacial (magnitude e/ou direção). É o caso limite de uma queima para gerar uma determinada quantidade de  $\Delta V$ , quando o tempo de queima tende a zero. Assim, durante uma manobra impulsiva, apenas a velocidade muda e a posição da espaçonave permanece inalterada. A manobra impulsiva é o modelo mais aplicado na literatura, devido à sua simplicidade e razoável precisão. É satisfatório para os casos em que a posição da espaçonave muda apenas ligeiramente durante o tempo de queima. Assim, neste trabalho, será utilizada a abordagem de manobras impulsivas, que ocorrem em tempo zero, produzindo a mudança de velocidade necessária,  $\Delta V$ , mas deixando a posição inalterada.

## 6.9 Metodologia

A Figura 6.9 mostra como essas transferências são simuladas. Começa com a aplicação de um primeiro impulso na posição inicial da espaçonave e termina com a aplicação do segundo impulso na posição final desejada da espaçonave. Conside-

rando que a espaçonave está posicionada em um ponto de equilíbrio do sistema 2017 EY5, pode ser necessário que a espaçonave mude sua órbita durante uma missão, de modo que possa estudar e coletar informações sobre cada um dos corpos desse sistema por exemplo.

Um exemplo de transferência do ponto de Lagrange  $L_1$  para o ponto Lagrange  $L_3$  é mostrado na Figura 6.9. Neste exemplo, a espaçonave está situada no ponto  $L_1$  e deve atingir o ponto  $L_3$ . Desta forma, uma manobra impulsiva é aplicada no ponto  $L_1$ , dando ao veículo espacial a variação necessária da velocidade  $\Delta v_1$  para iniciar a transferência da órbita 1, direcionada ao ponto  $L_3$ . Quando o veículo espacial atinge  $L_3$ , outra manobra impulsiva é aplicada, dando ao veículo espacial a variação necessária de velocidade  $\Delta v_1'$ , objetivando colocar a espaçonave na órbita final desejada do ponto Lagrange  $L_3$ . Devido ao fato dessas manobras necessitarem de dois impulsos para completar a transferências, este tipo de manobra é denominada de manobra bi-impulsiva. A Figura 6.9 é uma imagem representativa de como as transferências são simuladas.



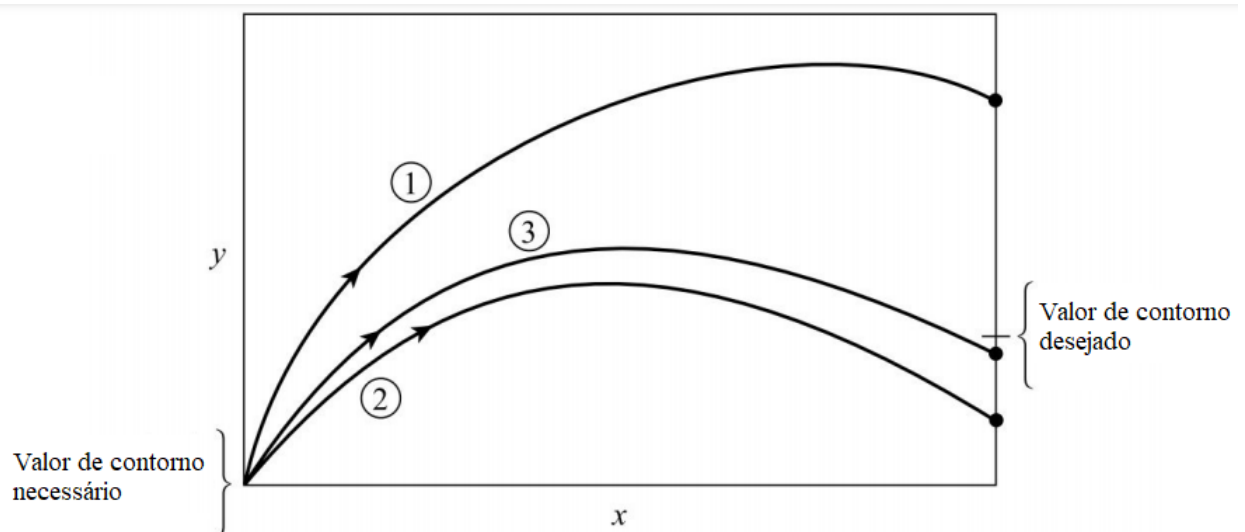
Fonte: Oliveira et al. (2017).

## 6.10 Problema de valor de contorno

O objetivo desta Seção é encontrar a trajetória de um veículo espacial que sai de um determinado ponto de equilíbrio e alcança outro. Se o tempo de transferência for livre, existirá um número infinito de soluções possíveis. Assim, podemos formular o problema da seguinte forma: “Encontre uma órbita que faça um veículo espacial alcançar um ponto de equilíbrio a partir de outro ponto de equilíbrio, após um determinado tempo de vôo”. Isso significa que este é um problema de encontrar trajetórias conectando dois pontos dados em um intervalo de tempo definido.

No entanto, o sistema de equações que descreve o movimento do veículo espacial não possui soluções analíticas e integrações numéricas precisam ser aplicadas para resolver o problema. Portanto, esse problema é tratado como um “Problema de valor de contorno entre dois pontos” (TPBVP). Existem duas classes distintas de métodos numéricos para resolver TPBVPs, conforme abordado por [Press et al. \(1987\)](#): Neste trabalho, nós utilizaremos o conhecido método shooting. Este método fornece uma abordagem eficiente para fazer um conjunto de “tiros” de alcance que permite melhorar a função objetivo sistematicamente. No início, as integrações de teste são feitas para satisfazer as condições de contorno em um ponto final. O erro entre a condição final alcançada e a condição de contorno desejada é usada para ajustar os valores iniciais, até que as condições em ambos os pontos finais sejam finalmente satisfeitas. O método do shooting é ilustrado na Figura 6.10.

Figura 6.21 - Exemplo esquemático do método de shooting.



Fonte: Oliveira et al. (2017).

Para resolver o *TPBVP* nesta Seção foram utilizados os seguintes passos:

(i) É necessário dar um valor inicial da posição ( $\vec{r}_i$ ) e da velocidade ( $\vec{v}_i$ ). Deste modo, o estado inicial é completamente conhecido;



(ii) O estado final é dado pela velocidade final desejada  $\vec{v}_d$  e a posição final desejada  $\vec{r}_d$ , assim o estado final é completamente conhecido;

(iii) Em seguida, é preciso determinar um tempo final,  $\tau$ , e integrar as Equações do movimento de  $\tau_0 = 0$  até  $\tau_f$ ;

(iv) Depois calcule o novo estado, composto por um vetor velocidade  $\vec{v}_f$ , e um vetor posição  $\vec{r}_f$ , ambos obtidos a partir do método de integração numérica.

(v) Finalmente verifique a posição final. Se  $|\vec{r}_f - \vec{r}_d|$  é menor do que uma determinada tolerância ( $10^{-5}$ ), a solução é encontrada e o processo é interrompido. Caso contrário, o processo retorna para a etapa (i) e um incremento na velocidade inicial  $\vec{v}_i$  é feito.

A solução fornece a trajetória da espaçonave, bem como as quantidades de consumo de combustível, especificadas pela quantidade de  $\Delta V$  em todo o tempo de transferência, ou seja,  $\Delta v_1$  no lançamento da espaçonave mais  $\Delta v'_1$  no ponto final desejado do veículo espacial. Assim, mudando o tempo de vôo, é possível encontrar uma família de órbitas de transferência. Nos resultados também são apresentados os gráficos com a variação da velocidade  $\Delta V$  versus o tempo, e a variação da velocidade  $\Delta V$  versus o ângulo da trajetória de vôo inicial (ângulo de disparo), conforme feito por Prado (1996). A definição deste ângulo é tal que o zero está no eixo  $X$  apontando para a direção positiva e aumenta no sentido anti-horário. Essa definição é mostrada na Figura 6.10.

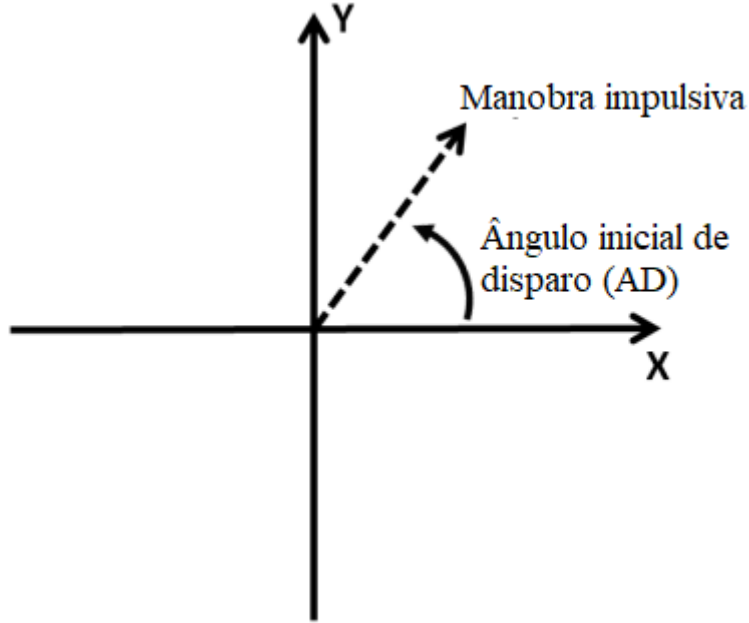
Neste trabalho, consideramos o tempo de vôo de  $t = 0,1$  dia até 1 dia, isto é, até um período orbital do sistema.

### 6.11 Equação do movimento no sistema girante

As equações de movimento do corpo de massa desprezível, no plano  $x - y$  (considerando a pressão da radiação solar), quando vistas a partir de um referencial girante, são dadas pelas Equações mostradas a seguir.

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{\mu(x + \mu)}{((x + \mu)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\mu(x - \mu)}{((x - \mu)^2 + y^2)^{3/2}} - \mathcal{A}(P_{radx}) + \frac{M_{sun}}{(M_1 + M_2)} \left( \frac{(x_{sun} - x)}{r_{sun}^3} - \frac{x_{sun}}{r_{sun}^3} \right), \quad (6.8)$$

Figura 6.22 - Ângulo de disparo.



Fonte: Oliveira et al. (2017).

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - \frac{\mu y}{((x + \mu)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\mu y}{((x - \mu)^2 + y^2)^{3/2}} - \mathcal{A}(P_{rad_y}) + \frac{M_{sun}}{(M_1 + M_2)} \left( \frac{(y_{sun} - y)}{r_{sun}^3} - \frac{y_{sun}}{r_{sun}^3} \right), \quad (6.9)$$

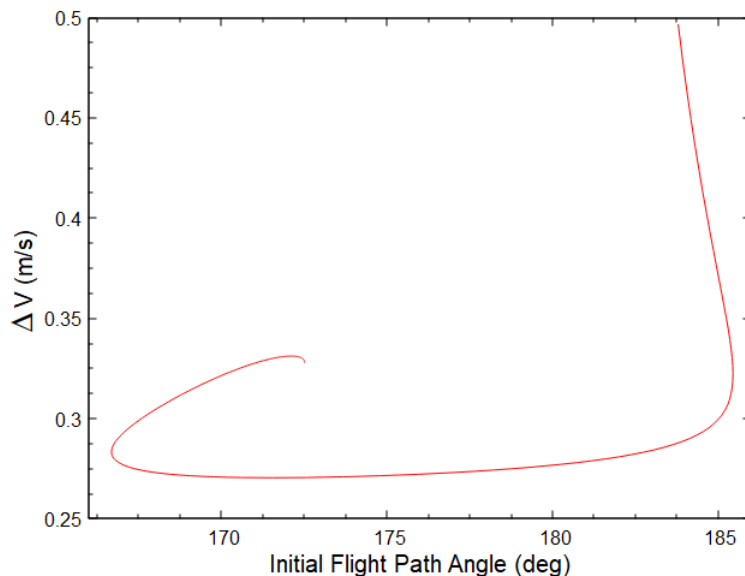
onde  $P_{rad_x}$  e  $P_{rad_y}$  representam as componentes  $x$  e  $y$  da aceleração devido à pressão da radiação solar e  $\mathcal{A}$  é uma rotação instantânea que leva o vetor  $P_{rad}$  de uma estrutura inercial para uma estrutura fixa no corpo (ALJBAAE et al., 2020).  $M_{sun}/(M_1 + M_2)$  é a massa do Sol em unidade canônica. Observe que precisamos determinar a massa dos corpos primários para incluir a perturbação gravitacional do Sol em unidade canônica. Só foi possível determinar a massa do asteroide depois das recentes observações realizadas por Monteiro et al. (2021), onde foi observado que o sistema tem o período de rotação em torno do centro de massa de 24 hrs. Visto isso, nós calculamos a massa dos corpos primários utilizando a terceira lei de Kepler, onde determinamos  $M_1 = M_2 = 2.3120 \times 10^{11}$ .  $x_{sun}$ ,  $y_{sun}$  e  $z_{sun}$  definem a posição do Sol no eixo  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Nas simulações, consideramos que o Sol está no plano  $xy$ , conseqüentemente  $z_{sun} = 0$ .

## 6.12 Resultados numéricos

Foram feitas simulações de transferências orbitais entre os pontos de equilíbrio  $L_1$  para  $L_2$ ,  $L_2$  para  $L_3$ ,  $L_3$  para  $L_2$  e, finalmente de  $L_1$  para  $L_3$  do sistema 2017 YE5. Como resultado, são mostradas as parcelas com a correspondente variação de velocidade em relação ao tempo e a correspondente variação de velocidade em relação ao ângulo inicial de trajetória de vôo.

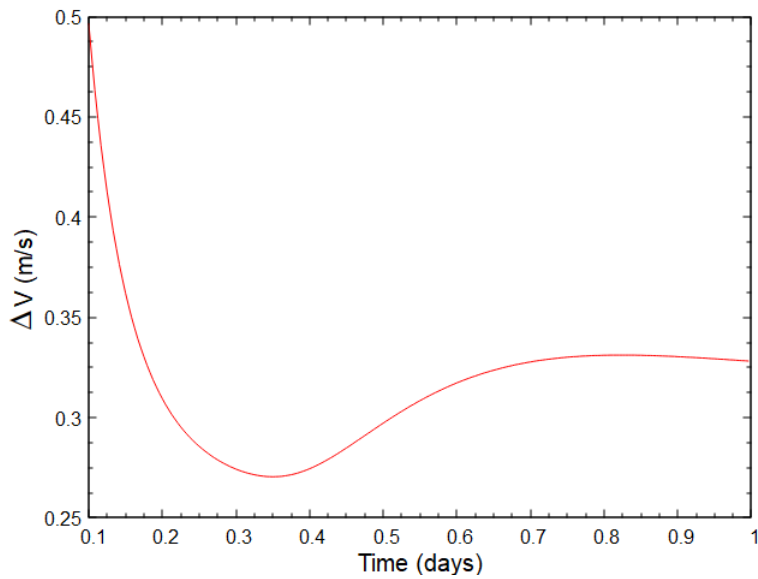
A variação de velocidade necessária para realizar uma manobra fornece um número mais diretamente relacionado ao consumo de combustível, mas requer hipóteses relacionadas à velocidade e posição do veículo espacial no ponto inicial de transferência e a velocidade e posição final no término da transferência. A primeira família de orbitas de transferência considera transferências entre o ponto de equilíbrio colinear  $L_2$  para o  $L_1$ , considerando que o asteroide está no periapse de sua órbita ao redor do Sol, que é de cerca de 0,818 A.U.

Figura 6.23 - Transferencia de  $L_2$  para  $L_1$ , fornecendo o ângulo de disparo vs  $\Delta V$ .



É possível observar pela Figura 6.23 que o ângulo de disparo responsável pela família de transferência orbital de  $L_2$  para  $L_1$  está em torno de  $165^\circ$  e  $185^\circ$ . Isto ocorre porque precisamos aplicar o impulso em direção ao ponto de equilíbrio  $L_1$ , que está a  $180^\circ$  de  $L_2$ . A Figura 6.24 fornece informações do tempo de voo durante a transferência em função do  $\Delta V$ . Observe que para uma transferência muito rápida ( $t = 0,1$  dia), é necessário um  $\Delta V$  elevado.

Figura 6.24 - Transferencia de  $L_2$  para  $L_1$ , fornecendo o tempo de transferência vs  $\Delta V$ .

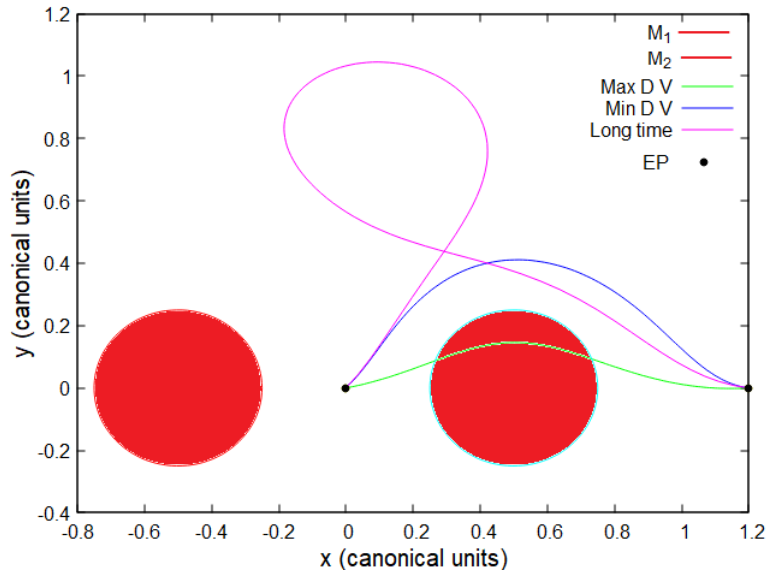


Este valor elevado decorre de que o veículo espacial tem de viajar a uma velocidade alta para alcançar o ponto de equilíbrio em menos tempo. À medida que o tempo de transferência aumenta, o  $\Delta V$  necessário para realizar a manobra se torna menor, até atingir um valor mínimo ( $\Delta V = 0,276408$ ,  $t = 0,35$  dias). Isto decorre de que, como levamos mais tempo para alcançar o destino final, o veículo espacial pode se deslocar com uma velocidade menor, necessitando assim de um menor  $\Delta V$ . Depois de atingir um mínimo, o tempo de transferência se torna maior e o  $\Delta V$  também aumenta. Isto fica mais fácil de entender se nós observarmos um gráfico da trajetória do veículo espacial, conforme podemos ver na Figura 6.25.

Na Figura 6.25 nós plotamos a posição dos corpos primários (círculos em vermelhos), a trajetória que utilizou o máximo de  $\Delta V$  (trajetória verde), o mínimo de  $\Delta V$  (trajetória azul) e a que levou mais tempo para sair de  $L_2$  e alcançar  $L_1$  (trajetória roxa), bem como a posição dos pontos de equilíbrio (EP).

Observe que a trajetória que leva mais tempo (long time), tem um ângulo de disparo parecido com a trajetória que gasta um  $\Delta V$  mínimo (trajetória azul e roxa), mas a trajetória roxa alcança um ponto muito mais alto (em relação ao eixo y) quando comparado as outras trajetórias. Isto acontece porque o impulso inicial é mais elevado, fazendo o veículo espacial se deslocar por uma distância maior no espaço e consequentemente gastando mais tempo e combustível para alcançar o destino final ( $L_1$ ).

Figura 6.25 - Trajetórias de um veículo espacial que parte de  $L_2$  e alcança  $L_1$ .



É importante notar que a trajetória que leva o menor tempo (verde) tem um ângulo de disparo de  $183.79^\circ$ . Esta trajetória busca o caminho mais curto para alcançar o ponto de equilíbrio  $L_1$ , conseqüentemente o veículo espacial colide com  $M_2$  durante essa transferência.

Em seguida, realizamos as simulações de transferência de  $L_2$  para  $L_3$ . As Figuras 6.26 e 6.27 fornecem informações a respeito da variação de velocidade em relação ao ângulo inicial de trajetória de vôo e da variação de velocidade em relação ao tempo de vôo, respectivamente.

Observe na Figura 6.26 que o ângulo inicial de disparo se encontra entre  $165^\circ$  e  $185^\circ$  pelas mesmas razões mencionadas na interpretação da Figura 6.23. Observe que o tempo de vôo mais curto ( $t = 0,1$  dia) utiliza o  $\Delta V$  máximo, pois para alcançar o destino final em menos tempo, é necessário ter uma velocidade maior e conseqüentemente um  $\Delta V$  maior. Também é possível notar que o  $\Delta V$  necessário para sair de  $L_2$  e alcançar  $L_3$  no menor tempo ( $t = 0,1$  dia) é o dobro do valor encontrado para sair de  $L_2$  e alcançar  $L_1$  nesse mesmo tempo. Isto ocorre em razão da simetria do problema. Devido ao fato de que os corpos primários tem massas iguais, o ponto de equilíbrio  $L_1$  está na metade do caminho de  $L_3$  em relação a um veículo espacial que parte de  $L_2$ . Embora não seja um movimento retilíneo, podemos interpretar da seguinte maneira. Para a espaçonave percorrer o dobro da distância (alcançar  $L_3$ ) no mesmo intervalo de tempo que alcançou  $L_1$  ( $t = 0,1$ ), é necessário dobrar o valor da velocidade.

Figura 6.26 - Transferencia de  $L_2$  para  $L_3$ , fornecendo o ângulo de disparo vs  $\Delta V$ .

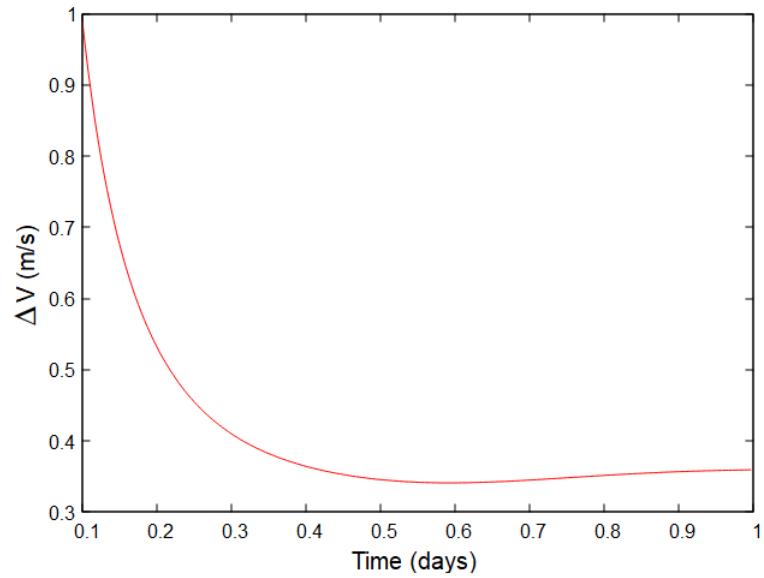
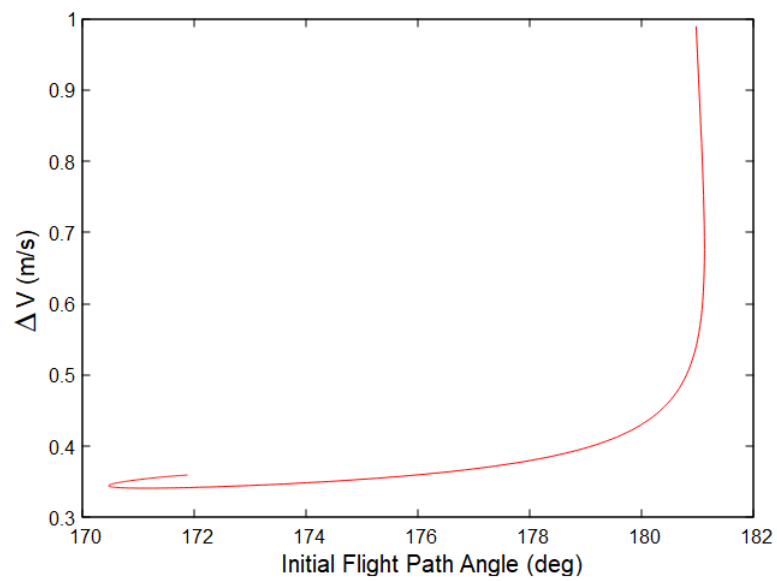


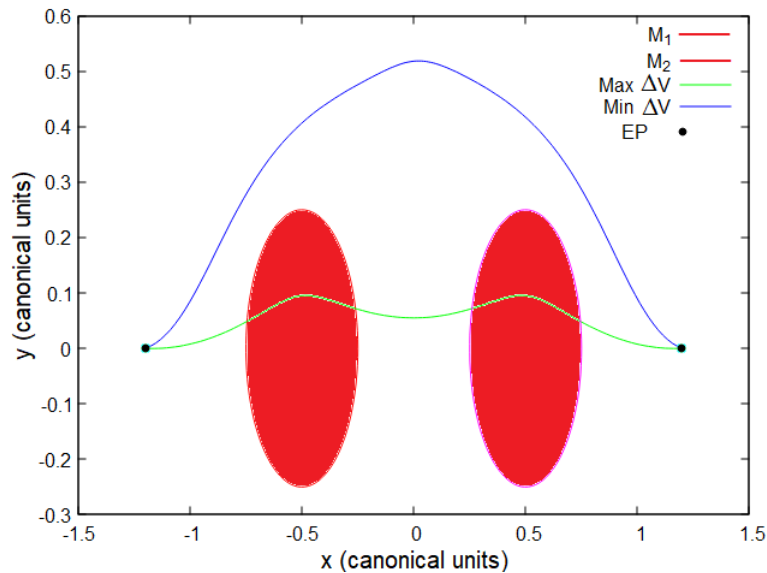
Figura 6.27 - Transferencia de  $L_2$  para  $L_3$ , fornecendo o tempo de transferência vs  $\Delta V$ .



Note nas Figuras 6.26 e 6.27 que existe um  $\Delta V$  mínimo necessário para que o veículo espacial alcance  $L_3$  partindo de  $L_2$ . O  $\Delta V$  mínimo tem o valor de  $\Delta V = 0,341153$  m/s, o tempo de transferência é de  $t = 0,5917$  dias e o ângulo de disparo  $171,134^\circ$ . Observe que o  $\Delta V$  mínimo para alcançar  $L_3$  partindo de  $L_2$  (para o tempo estimado) é ligeiramente maior do que o  $\Delta V$  mínimo para alcançar  $L_1$  partindo de  $L_2$ . Isto ocorre porque o ponto de equilíbrio  $L_3$  está mais distante de  $L_2$  (quando comparado com  $L_1$ ), sendo necessário maior energia para alcançar a região que se encontra  $L_3$ . O tempo de transferência (para o  $\Delta V$ ) também é ligeiramente maior do que o tempo de transferência para alcançar  $L_1$  partindo de  $L_2$ . Isto ocorre porque o ponto de equilíbrio  $L_3$  é o ponto mais distante de  $L_2$ , sendo necessário um maior tempo para alcançar este ponto utilizando um valor ótimo de  $\Delta V$ .

Na Figura 6.28 é possível observar a trajetória do veículo espacial que parte de  $L_2$  e alcança  $L_3$ . Na Figura plotamos apenas a trajetória de mínimo  $\Delta V$  e a trajetória mais rápida ( $t = 0,1$ ). Observe que, assim como no caso anterior, a trajetória mais rápida colide com  $M_2$ . Por outro lado, a trajetória otimizada consegue alcançar o destino final e ainda sim, gastando o mínimo de combustível e gastando apenas 12 horas para realizar a transferência.

Figura 6.28 - Trajetórias de um veículo espacial que parte de  $L_2$  e alcança  $L_3$ .



Finalmente, realizamos as simulações numéricas considerando um veículo espacial que parte de  $L_3$  e alcança  $L_2$ .

As famílias de transferências são mostrados nas Figuras 6.29 e 6.30.

Figura 6.29 - Transferencia de  $L_2$  para  $L_3$ , fornecendo o ângulo de disparo vs  $\Delta V$ .

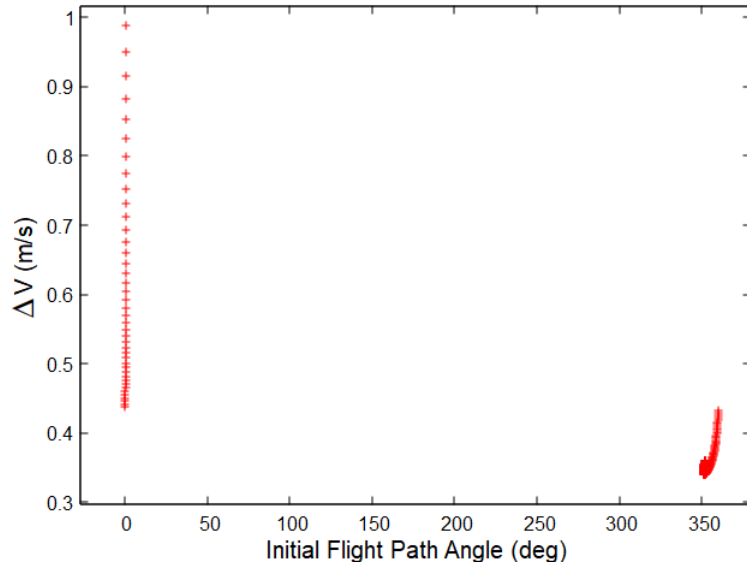
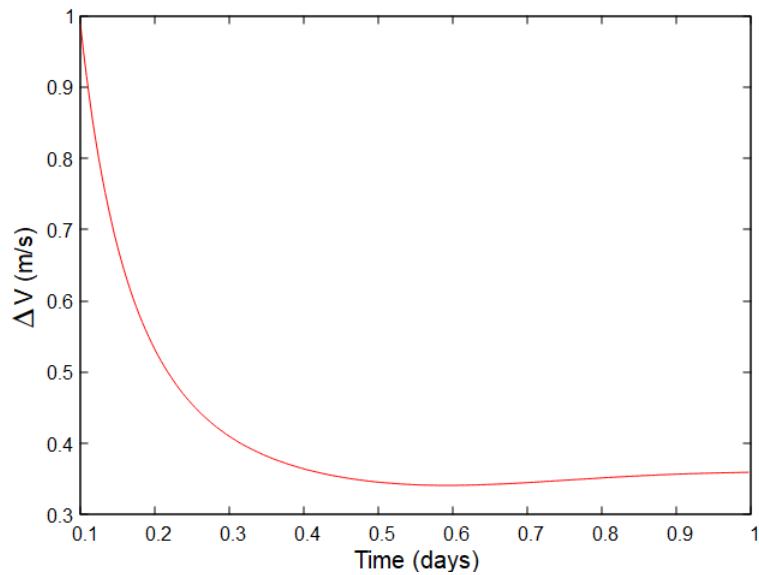


Figura 6.30 - Transferencia de  $L_2$  para  $L_3$ , fornecendo o tempo de transferência vs  $\Delta V$ .

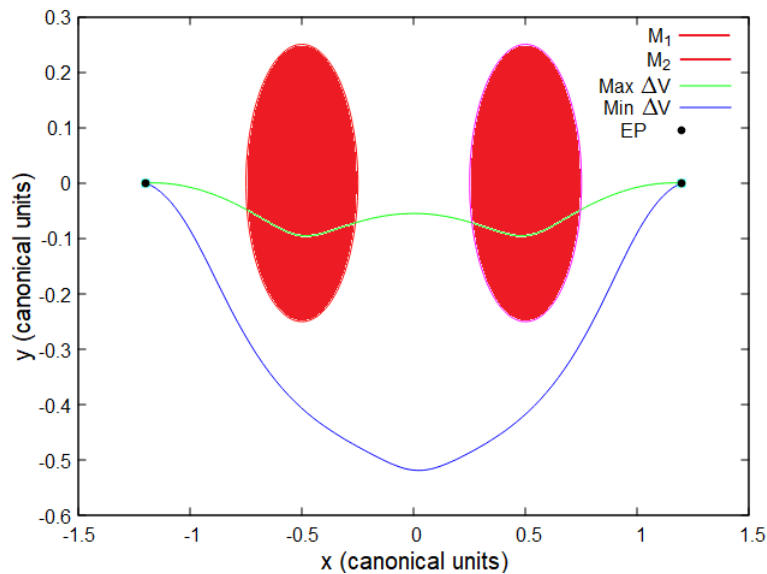




Na Figura 6.29 podemos observar que encontramos uma família de transferências orbitais para um ângulo de disparo em torno de  $0^\circ$  graus, uma vez que  $L_2$  faz este ângulo em relação a um objeto que se encontra em  $L_3$  (sentido positivo do eixo  $x$ ). Depois, só encontramos famílias de órbitas de transferência quando o ângulo de disparo está em torno de  $345^\circ$  e  $360^\circ$ . Esta descontinuidade significa que não encontramos soluções que alcançam  $L_2$  partindo de  $L_3$  para ângulos de disparo entre  $0^\circ$  e  $345^\circ$ . O valor mínimo (considerando o tempo máximo de 1 dia) para realizar esta transferência é de  $\Delta V = 0,341152$  m/s e ângulo de disparo de  $171,13^\circ$ .

A Figura 6.30 fornece informações sobre o tempo de vôo. Observe que esta Figura é muito semelhante a Figura 6.27. Isto decorre do fato da simetria do sistema. Como os corpos primários do sistema 2017 YE5 tem massas iguais, é necessário o mesmo impulso para partir dos pontos de equilíbrio simétricos, que nesse caso é  $L_3$  e  $L_2$ . Isto pode ser verificado através da Figura 6.31.

Figura 6.31 - Trajetórias de um veículo espacial que parte de  $L_3$  e alcança  $L_2$ .



Na Figura 6.31 plotamos apenas a trajetória de  $\Delta V$  mínimo e a trajetória de menor tempo ( $t = 0,1$ ). Observe a semelhança entre as Figuras 6.28 e 6.31. Podemos observar que a energia necessária para alcançar  $L_2$  partindo de  $L_3$  é a mesma do que realizar o caminho inverso (de  $L_2$  para  $L_3$ ). Devido a razão de área/massa ser pequena ( $A/m = 0,01$ ), a perturbação devido a pressão da radiação solar não influencia significativamente a trajetória durante a transferência, uma vez que está

transferência é realizada em um intervalo de tempo pequeno (no máximo 1 dia).

A perturbação da pressão da radiação solar é, em média, 1000 vezes menor do que as forças gravitacionais dos corpos primários, então conseqüentemente, as forças gravitacionais dos corpos primários que governam predominantemente o movimento do veículo espacial nesta região e no intervalo de tempo da transferência.

A diferença  $\Delta V_{L_2 \text{ to } L_3} - \Delta V_{L_3 \text{ to } L_2} = 5.1 \times 10^{-8}$  m/s, em que  $\Delta V_{L_i \text{ to } L_k}$  significa  $\Delta V$  necessário para sair de  $L_i$  e alcançar  $L_k$ . A precisão numérica das simulações é de  $10^{-12}$ . Observe que esse valor da diferença é baixo mas ainda sim diferente de zero. Se nós não considerarmos a perturbação proveniente do Sol, essa diferença seria zero.

### 6.13 Considerações

As localizações exatas dos cinco pontos de Lagrange em um asteroide binário com origem cometária recém-descoberto foram determinadas, bem como a energia (constante de Jacobi) necessária associada a esses pontos de equilíbrio. Todos os pontos de Lagrange estão no plano dos primários (SZEBEHELY, 1967). Os pontos de Lagrange são regiões do espaço onde existem equilíbrios de forças considerados no modelo. Na presença de outras forças, eles não são mais pontos de equilíbrio, mas recebem um mínimo de perturbação, portanto, são ótimos locais para manter um veículo espacial com manobras de manutenção orbital mínima.

A superfície da seção é uma ferramenta poderosa que permite encontrar órbitas periódicas em torno de um sistema binário. Construimos esses mapas considerando o CRTBP em um sistema girante. Ao restringir o nível de energia (ou constante de Jacobi), reduzimos nosso sistema em uma dimensão, portanto, considerando o problema planar, o sistema é reduzido a duas dimensões e, conseqüentemente, o espaço de fase é totalmente representado pela projeção em um plano. Os níveis de energia utilizados são os dos pontos de equilíbrio.

Encontramos órbitas periódicas estáveis (prógrada e retrógrada), ao redor de cada primário, com períodos 1, 6, 8, 11, dependendo da constante de Jacobi utilizada.

Construímos tabelas que fornecem as condições iniciais que geram as órbitas periódicas para o sistema 2017 YE5. Essas tabelas também informam a estabilidade das órbitas periódicas encontradas.

Finalmente, calculamos os valores mínimos que uma manobra impulsiva precisa

aplicar a um veículo espacial para permitir transferências entre os pontos de equilíbrio colineares. Vimos que durante o tempo de transferências, a influencia do Sol não altera significativamente a energia necessária para realizar a manobra e nem a trajetória percorrida pelo veículo espacial.



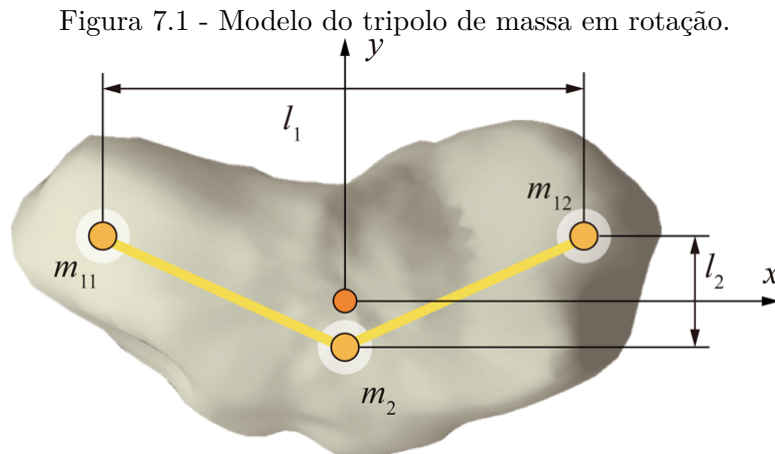
## 7 DINÂMICA EM TORNO DE UM ASTEROIDE MODELADO COMO UM TRÍPOLO DE MASSA

Este Capítulo fornece a revisão da literatura a respeito da importância dos modelos simplificados e aborda as equações do movimento de uma partícula de massa infinitesimal em torno de um asteroide que tem uma forma arqueada. Este Capítulo busca compreender de que forma os principais parâmetros do asteroide influenciam na dinâmica de uma partícula na sua vizinhança.

O trabalho desenvolvido neste Capítulo foi publicado na Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica (SANTOS et al., 2020).

### 7.1 Introdução

Inspirado no modelo de ligação de partículas duplas, Lan et al. (2017) propôs que pequenos corpos com formatos convexos podem ser modelados por um modelo de ligação de partículas triplas determinado por cinco parâmetros: massa do asteroide em kg ( $M$ ), velocidade angular em torno do próprio eixo ( $\omega$ ), distância horizontal entre os pontos de massa  $m_{11}$  e  $m_{12}$  ( $l_1$ ), razão entre  $l_1$  e  $l_2$  ( $\tau$ ) e a razão de massa do sistema ( $\beta$ ). Esse modelo criado por Lan et al. (2017) é mostrado na Figura 7.1.



Fonte: Lan et al. (2017).

Lan et al. (2017) analisou os asteroides 433 Eros, 243 Ida e a lua marciana  $M_1$  Phobos, em que validaram o chamado modelo do tripolo de massa, verificando que a distribuição do campo gravitacional das regiões anulares instáveis é semelhante à encontrada no modelo poliédrico. Mais tarde, Yang et al. (2018) propôs o modelo

de ligação tripla de partículas assimétricas como um passo adicional para melhorar o modelo de ligação tripla simétrica. Os autores analisaram o modelo de tripolo de massa assimétrica usando três asteroides alongados diferentes (243 Ida, 433 Eros e (8567) 1996 HW1) e verificaram que o modelo de tripolo de massa assimétrico é mais preciso do que seus antecessores, o modelo dipolo e o tripolo simétrico (ZENG et al., 2016; LAN et al., 2017).

Embora os trabalhos encontrados na literatura tratem da validação do modelo do tripolo simétrico e assimétrico, uma análise semi-analítica do modelo do tripolo ainda não foi realizada. Portanto, o principal objetivo do presente trabalho é realizar uma análise dinâmica em torno de asteroides que possuem uma forma convexa e investigar quais parâmetros ( $k$ ,  $\mu^*$  e  $\Phi$ , onde  $\Phi$  determina o quanto arqueado é o asteroide) influenciam na distribuição dos pontos de equilíbrio, na estrutura topológica das curvas de velocidade zero e na condição de estabilidade das soluções estacionárias. O modelo do tripolo possui um grau de liberdade a mais quando comparado ao modelo dipolo de massa. Assim, é possível identificar novos parâmetros, como o ângulo azimutal, e investigar sua influência nas propriedades dinâmicas em torno de um sistema arqueado. Com isso, os resultados podem ser aplicados para investigar corpos arqueados naturais alongados, como alguns sistemas de asteroides, núcleos de cometas e luas do planeta.

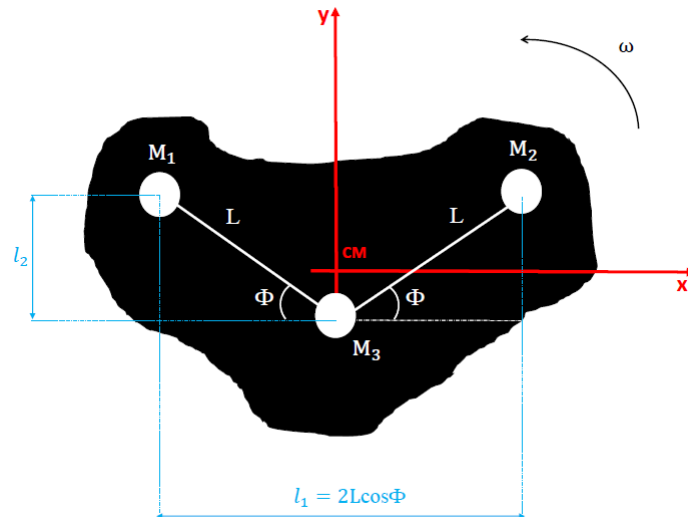
Este Capítulo está organizado da seguinte maneira. O modelo e a metodologia são discutidos na Seção 7.2. Os resultados são analisados e discutidos na Seção 7.3. Na Seção 7.4, investigamos e comparamos as condições de estabilidade do modelo adotado neste estudo com sistemas reais de corpos pequenos. Na Seção 7.5, são feitas algumas considerações finais.

## 7.2 Estrutura matemática

Nesta Seção, descrevemos o problema restrito de quatro corpos usando o modelo do tripolo de massa em rotação mostrado na Figura 7.2. Este modelo consiste em três pontos de massa,  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ , dispostos dentro de um asteroide de formato irregular. Todas as equações desenvolvidas neste trabalho se referem ao sistema partícula-asteroide (onde a partícula é um corpo com massa desprezível), ou seja, as perturbações de outros corpos não são levadas em consideração. As hastes que conectam  $M_1$  a  $M_3$  e  $M_2$  a  $M_3$  tem massa desprezível e o mesmo comprimento  $L = 1$ , que é a unidade canônica. A distância entre  $M_1$  e  $M_2$  é indicada por  $l_1$ , enquanto a distância entre  $M_2$  e o eixo  $x$ , que contém  $M_3$ , é indicada por  $l_2$ . O parâmetro  $\tau$  é definido como a razão entre  $l_2$  e  $l_1^*$ , em que  $l_1^* = l_1/2$ , ou seja,  $\tau = l_2/l_1^*$ .

A origem do sistema de referência  $(xy)$  está no centro de massa do asteroide. O ângulo formado por cada haste com o eixo  $x$  é chamado de ângulo azimutal e é indicado por  $\Phi$ . Assumimos que ambas as hastes fazem o mesmo ângulo com o eixo horizontal. A configuração geométrica do asteroide depende desse ângulo. Quanto mais arqueada a forma do asteroide, maior é o ângulo azimutal. Observe que quando  $\Phi = 0^\circ$  o comprimento do asteroide é máximo e igual a duas unidades canônicas. As equações que descrevem o movimento da partícula no plano  $xy$  ao redor do tripolo estão escritas no sistema de referência girante que gira com velocidade angular constante  $\omega = 1$ , em unidades canônicas. A unidade de tempo é definida de modo que o período de rotação do tripolo seja igual a  $2\pi$ . Consideramos que  $M_1$  e  $M_2$  têm massas iguais, ou seja,  $m_1 = m_2$ .

Figura 7.2 - Representação esquemática do asteroide modelado por um tripolo.



### 7.2.1 Equação do movimento

Considere que o corpo com massa desprezível (partícula) está localizado em  $P(x, y)$  e seu movimento é governado exclusivamente pelas forças gravitacionais devido aos corpos primários  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ .  $M_1$  e  $M_2$  têm massas  $m_1 = m_2 = \mu^*$  e  $M_3$  têm massa  $m_3 = 1 - 2\mu^*$ , onde  $\mu^*$  é razão de massa definida como

$$\mu^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (7.1)$$

As coordenadas dos corpos primários  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ , em unidades canônicas, são,

respectivamente, dadas por:

$$x_1 = -\cos(\Phi), \quad y_1 = \sin(\Phi) - 2\mu^* \sin(\Phi), \quad z_1 = 0, \quad (7.2)$$

$$x_2 = \cos(\Phi), \quad y_2 = \sin(\Phi) - 2\mu^* \sin(\Phi), \quad z_2 = 0, \quad (7.3)$$

$$x_3 = 0, \quad y_3 = -2\mu^* \sin(\Phi), \quad z_3 = 0. \quad (7.4)$$

Usando as unidades canônicas mencionadas acima, a função Hamiltona do sistema é escrita como (SZEBEHELY, 1967; MCCUSKEY, 1963):

$$H = \frac{(p_x + y)^2 + (p_y + x)^2}{2} - \frac{x^2 + y^2}{2} - k \left( \frac{\mu^*}{r_1} + \frac{\mu^*}{r_2} + \frac{1 - 2\mu^*}{r_3} \right), \quad (7.5)$$

em que

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, \quad (7.6)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}, \quad (7.7)$$

$$r_3 = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2}, \quad (7.8)$$

e  $p_x$  e  $p_y$  são as componentes do momento angular da partícula em relação ao eixo  $x$  e ao eixo  $y$ , respectivamente. O parâmetro adimensional  $k$  é a razão de força, dada pela razão entre a força gravitacional e a força centrífuga (ZENG et al., 2018; ZENG et al., 2016a) dada por

$$k = \frac{G^* M}{\omega^{*2} l_1^{*3}}. \quad (7.9)$$

O valor de  $k$  depende da velocidade angular do asteroide ( $\omega^*$ ) no sistema internacional de unidades, da massa total do corpo ( $M$ ) em kg. O comprimento  $l_1^*$  na Equação 7.9 refere-se a distância entre  $M_1$  e  $M_2$ , em metros, e  $G^*$  é a constante gravitacional universal no sistema internacional de unidades. Portanto,  $k$  pode ser calculado após a obtenção do comprimento do segmento  $l_1^*$ . (ZENG et al., 2018; LAN et al., 2017; ZENG et al., 2016a)

A partir da função Hamiltona, é possível obter as equações de movimento da partícula no sistema de referência girante:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y, \quad (7.10)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - x. \quad (7.11)$$



As demais equações dinâmicas são

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - x + \Omega_x, \quad (7.12)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = p_x - y + \Omega_y, \quad (7.13)$$

em que  $\Omega_x$  e  $\Omega_y$  são as derivadas parciais de  $\Omega$  em relação a  $x$  e  $y$ , respectivamente, que são dados por

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + k \left( \frac{\mu^*}{r_1} + \frac{\mu^*}{r_2} + \frac{1 - 2\mu^*}{r_3} \right). \quad (7.14)$$

A Equação 7.14 é uma função escalar, também conhecida como pseudo-potencial, que é responsável pela aceleração experimentada pela partícula em um sistema de referência não inercial. As equações de movimento de uma partícula de massa infinitesimal no plano  $xy$  são (SZEBEHELY, 1967; MURRAY; DERMOTT, 1999; MCCUSKEY, 1963; SCHEERES, 2012):

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \quad (7.15)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y, \quad (7.16)$$

que têm a mesma aparência que as equações do problema restrito clássico de três corpos (SZEBEHELY, 1967; MURRAY; DERMOTT, 1999; MCCUSKEY, 1963; SCHEERES, 2012).

Considerando o movimento no plano  $xy$  e multiplicando a Equação 7.15 por  $2x$  e Equação 7.16 por  $2y$  e, somando-os, temos que

$$2x\ddot{x} + 2y\ddot{y} = 2x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + 2y\frac{\partial\Omega}{\partial y} \quad (7.17)$$

em que pode ser reescrita como

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{dt} = 2\frac{d\Omega}{dt}. \quad (7.18)$$

Integrando a Equação 7.18 em relação ao tempo, nós encontramos que

$$v^2 = 2\Omega - C^*, \quad (7.19)$$

onde  $v$  é a velocidade da partícula e  $C^*$  é uma constante de integração.

Neste Capítulo,  $C^*$  é chamado de constante de Jacobi modificada, onde modificado significa que é diferente da constante estudada por Jacobi para o caso do problema restrito clássico de três corpos (PRCTC). Um caso especial ocorre quando  $k = 1$ , uma vez que a constante de Jacobi modificada tem o mesmo valor que a constante de Jacobi, correspondente ao PRCTC. Olhando para a Equação 7.19, notamos que a velocidade da partícula depende apenas do pseudo-potencial e da constante de integração  $C^*$ . A constante  $C^*$  é determinada numericamente em termos da posição inicial e velocidade da partícula.

### 7.2.2 Pontos de equilíbrio

As localizações dos pontos de equilíbrio são explicitamente definidas em termos de  $\mu^*$  (e implicitamente em  $\Phi$ ). Fazendo o lado direito das Equações 7.15 e 7.16 iguais a zero, ou seja,  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ , implica que as acelerações são nulas:

$$\begin{aligned} x + k \left( -\frac{\mu^*(x-x_1)}{[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu^*(x-x_2)}{[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2]^{\frac{3}{2}}} \right. \\ \left. - \frac{(1-2\mu^*)(x-x_3)}{[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2]^{\frac{3}{2}}} \right) = 0, \\ y + k \left( -\frac{\mu^*(y-y_1)}{[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu^*(y-y_2)}{[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2]^{\frac{3}{2}}} \right. \\ \left. - \frac{(1-2\mu^*)(y-y_3)}{[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2]^{\frac{3}{2}}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

As soluções deste sistema de equações podem ser determinadas numericamente.

### 7.2.3 Análise da estabilidade linear dos pontos de equilíbrio

As aproximações analíticas de primeira ordem para o movimento em relação aos pontos de equilíbrio  $(x_0, y_0)$  são derivadas por meio da linearização em relação ao ponto de equilíbrio. As equações variacionais de primeira ordem podem ser resolvidas para produzir uma aproximação útil. Como uma etapa inicial, considere os seguintes símbolos,

$$\begin{aligned} \xi &= x - x_0 \\ \eta &= y - y_0. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Portanto,  $\xi$  e  $\eta$  são as variações relativas ao ponto de equilíbrio definido em termos de seus números de medida  $x_0$  e  $y_0$ . Então, linearizar as Equações 7.15 e 7.16 sobre

a solução de equilíbrio resulta

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \Omega_{xx}(x_0, y_0)\xi + \Omega_{xy}(x_0, y_0)\eta, \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \Omega_{xy}(x_0, y_0)\xi + \Omega_{yy}(x_0, y_0)\eta,\end{aligned}\tag{7.22}$$

onde as derivadas parciais em  $(x_0, y_0)$  significam que o valor é calculado no ponto de equilíbrio que está sendo investigado.  $\xi$  e  $\eta$  representam as coordenadas da partícula em relação ao ponto de equilíbrio  $(x_0, y_0)$  e  $\Omega_{xx}$ ,  $\Omega_{xy}$ ,  $\Omega_{xy}$  e  $\Omega_{yy}$  são as derivadas parciais calculadas nestes pontos, dadas por

$$\begin{aligned}\Omega_{xx} &= 1 + k\left(\frac{3(1 - 2\mu^*)x^2}{(x^2 + (y - y_3)^2)^{5/2}} - \frac{1 - 2\mu^*}{(x^2 + (y - y_3)^2)^{3/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)^{3/2}}\right. \\ &\quad \left. + \frac{3\mu^*(x - x_1)^2}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)^{5/2}} - \frac{\mu^*}{((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2)^{3/2}}\right. \\ &\quad \left. + \frac{3\mu^*(x - x_2)^2}{((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2)^{5/2}}\right), \\ \Omega_{yy} &= 1 + k\left(\frac{3(1 - 2\mu^*)(y - y_3)^2}{(x^2 + (y - y_3)^2)^{5/2}} - \frac{1 - 2\mu^*}{(x^2 + (y - y_3)^2)^{3/2}} + \frac{3\mu^*(y - y_1)^2}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)^{5/2}}\right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu^*}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)^{3/2}} + \frac{3\mu^*(y - y_2)^2}{((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2)^{5/2}}\right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu^*}{((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2)^{3/2}}\right), \\ \Omega_{xy} = \Omega_{yx} &= k\left(\frac{3(1 - 2\mu^*)x(y - y_3)}{(x^2 + (y - y_3)^2)^{5/2}} + \frac{3\mu^*(x - x_1)(y - y_1)}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)^{5/2}}\right. \\ &\quad \left. + \frac{3\mu^*(x - x_2)(y - y_2)}{((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2)^{5/2}}\right).\end{aligned}\tag{7.23}$$

Da mesma forma que fizemos na Equações 2.34, podemos encontrar as raízes não triviais da Equação caraterística fazendo:

$$\lambda^4 + (4 - \Omega_{xx}^0 - \Omega_{yy}^0)\lambda^2 + \Omega_{xx}^0\Omega_{yy}^0 - (\Omega_{xy}^0)^2 = 0.\tag{7.24}$$

### 7.3 Resultados

Nesta Seção, mostraremos os resultados numéricos obtidos em nossas interações numéricas. O objetivo é obter uma visão geral da dinâmica do problema, o que nos permitirá tirar algumas conclusões.

#### 7.3.1 Influência de $[k, \mu^*, \Phi]$ nos pontos de equilíbrio

Começamos calculando os pontos de equilíbrio do sistema. A figura 7.3 (a) mostra os pontos de massa  $M_1$  (círculo verde no lado esquerdo),  $M_2$  (círculo verde no lado direito) e  $M_3$  (círculo verde central) e seis pontos de equilíbrio (vermelho) para  $\Phi = 0^\circ$ ,  $\mu^* = 1/3$  e  $k = 1$ . Os pontos de equilíbrio entre  $M_1$  e  $M_3$  e entre  $M_2$  e  $M_3$  se sobrepõem à haste que liga as esferas (veja a Figura 8.1). Portanto, assumimos que esses pontos de equilíbrio estão dentro do corpo do asteroide.

A Figura 7.3 (b) é semelhante à Figura 7.3 (a), mas agora  $\mu^* = 1/3$  e  $k = 1$ , mas  $\Phi = 45^\circ$ . Nesse caso, existem oito pontos de equilíbrio, todos fora do eixo  $x$ . A mudança de posição ocorre porque é necessária uma nova configuração para atender às condições de equilíbrio à medida que as posições dos corpos primários mudam, modificando o valor do ângulo azimutal.

Realizamos investigações numéricas para entender como as coordenadas dos pontos de equilíbrio externo mudam quando  $\mu^*$ ,  $k$  e  $\Phi$  são variados. Para facilitar esta análise, identificamos cinco regiões, A, B, C, D e E, como mostrado na Figura 7.4. Observamos que as regiões são simétricas em relação ao eixo  $y$ . Observe que as regiões A, B e E são simétricas em relação ao eixo  $y$ , ou seja, se os pontos de equilíbrio (nas regiões A, B ou E) tiverem coordenadas  $(x, y)$ , haverá outro ponto de equilíbrio nas coordenadas  $(-x, y)$ . Devido a essa propriedade simétrica das regiões, analisaremos apenas as situações nas quais  $x$  é negativo. A Figura 7.4 exibe os pontos de equilíbrio quando  $\mu^* = 1/3$ ,  $k = 1$  e  $\Phi$  está variando. A figura ilustra como os pontos de equilíbrio se movem conforme o parâmetro  $\Phi$  é variado. Os ângulos azimutais correspondentes são dados na legenda do gráfico. Pode-se observar o “caminho” seguido pelos pontos de equilíbrio à medida que  $\Phi$  aumenta. Para  $\Phi = 90^\circ$ , os pontos de equilíbrio são equivalentes a um dipolo alinhado em  $x = 0$ .

Para a região A, plotamos o comportamento dos pontos de equilíbrio no plano  $xy$  em função de  $\mu^*$ ,  $k$  e  $\Phi$ , conforme mostrado na Figura 7.5.

A Figura 7.5 mostra como as coordenadas dos pontos de equilíbrio variam com  $k$ ,  $\mu^*$  e  $\Phi$ .

Figura 7.3 - Pontos de equilíbrio para um ângulo azimutal de (a)  $0^\circ$  e (b)  $45^\circ$ . Nos dois casos,  $\mu^* = 1/3$ .

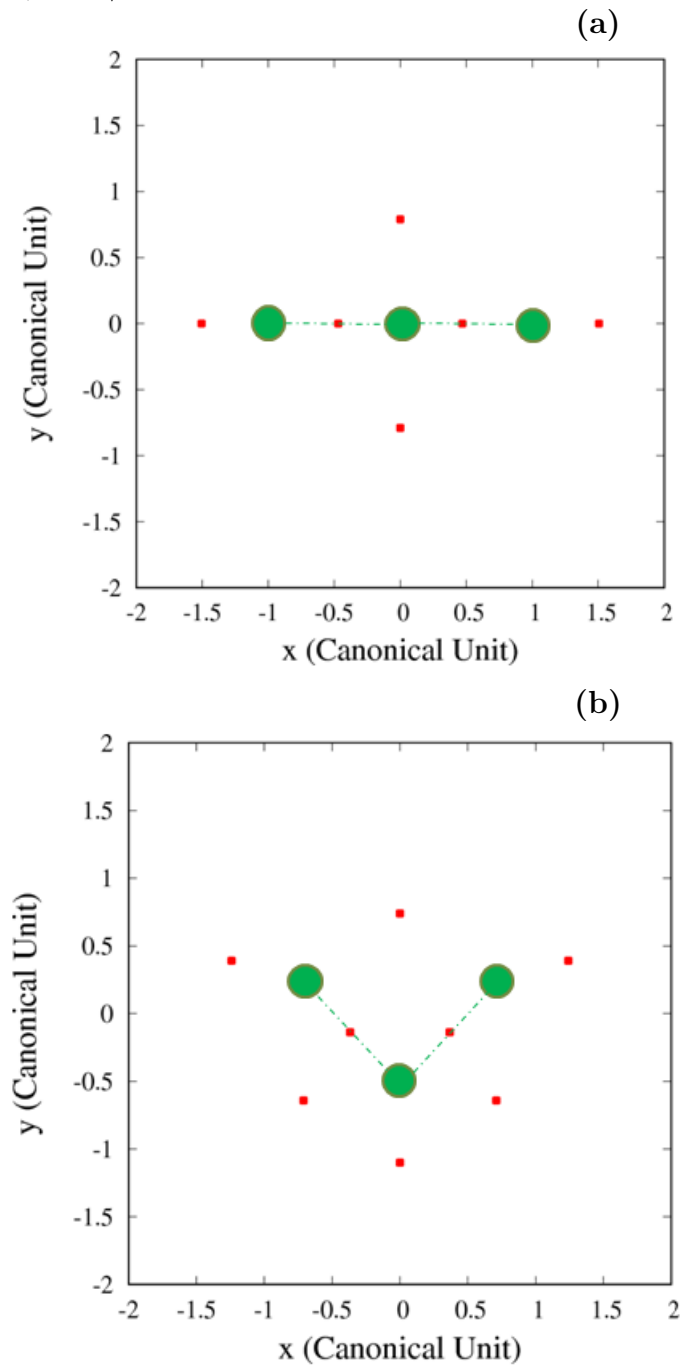
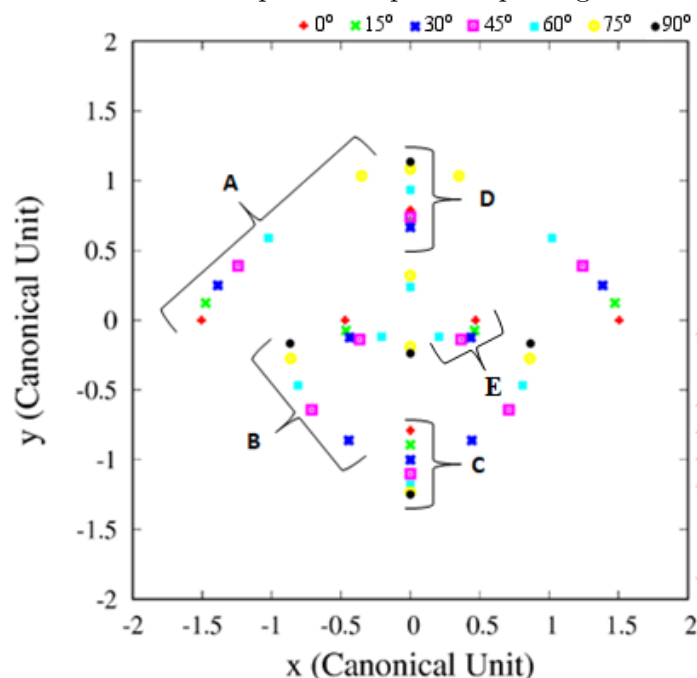


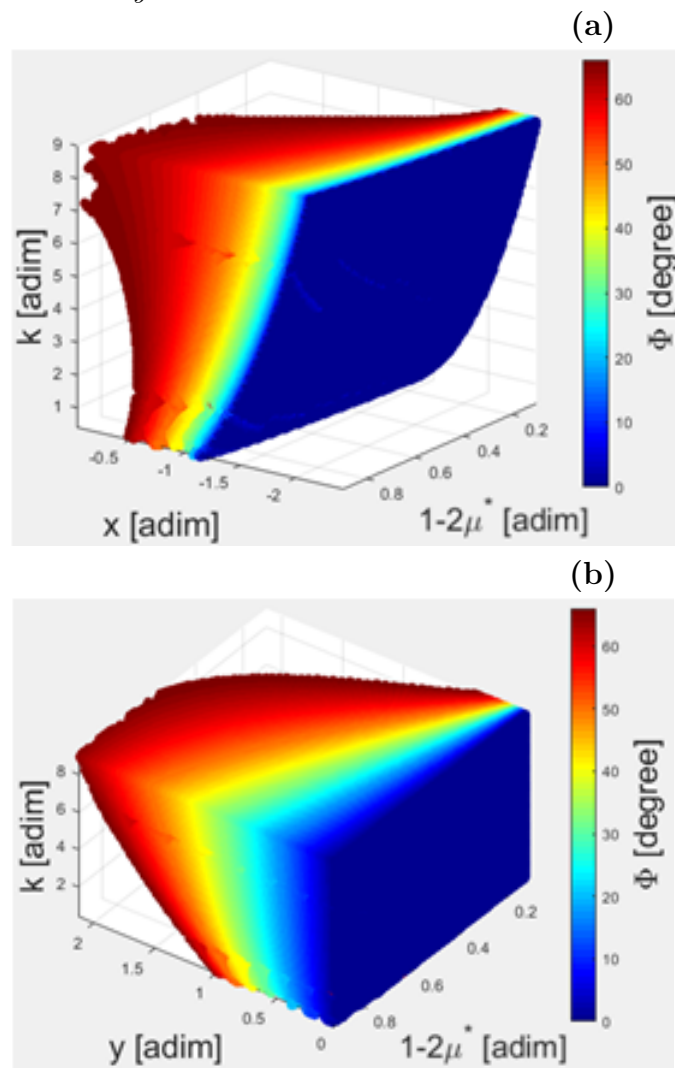
Figura 7.4 - Pontos de equilíbrio separados por regiões de A a E.



Observe que os gráficos mostram a variação na massa do corpo  $M_3$ , dada por  $1-2\mu^*$ . Ou seja, se a massa de  $M_3$  aumentar, conseqüentemente, a massa de  $M_1$  (e  $M_2$ ), dada por  $\mu^*$ , diminui. A barra de cores representa o valor do ângulo azimutal. Primeiro, investigamos as soluções quando variamos  $k$  e mantemos  $\mu^*$  e  $\Phi$  constantes. Observe na Figura 7.5 que à medida que a rotação do asteroide diminui, ou seja, à medida que  $k$  aumenta, os pontos de equilíbrio se afastam do centro de massa do sistema. Isso ocorre porque aumentar  $k$  implica em diminuir a velocidade angular do asteroide em torno de seu próprio eixo (veja Equação 7.9), diminuindo assim o valor da força centrífuga. A condição da existência de um ponto de equilíbrio é que a força resultante em um ponto no espaço seja zero, ou seja, a força gravitacional e a força centrífuga devem ter o mesmo valor em módulo, mas direções opostas. Portanto, para manter a força centrífuga em um valor que neutraliza a força gravitacional, a distância do centro de massa para posição dos pontos de equilíbrio deve aumentar. À medida que  $k$  aumenta, os pontos de equilíbrio aparecem mais afastados do centro de massa.

Em seguida, mantendo os valores de  $k$  e  $\Phi$  constantes e variando  $\mu^*$ , a Figura 7.5 mostra que, à medida que  $\mu^*$  se torna menor, o ponto de equilíbrio no eixo  $x$  que está dentro da região A se aproxima do centro de massa do sistema.

Figura 7.5 - As coordenadas dos pontos de equilíbrio na região  $A$  em função de  $k$ ,  $\mu^*$  e  $\Phi$ .  
(a) Posição dos pontos de equilíbrio em  $x$ -axis. (b) Posição de equilíbrio dos pontos no eixo  $y$ .



Por outro lado, com uma redução de  $1-2 \mu^*$  (ou seja, aumento de  $\mu^*$ ), os pontos de equilíbrio no eixo  $y$  se afastam do asteroide. Isso acontece porque, à medida que a massa dos corpos  $M_1$  e  $M_2$  se torna menor, a força gravitacional na borda do asteroide diminui no eixo  $x$ , o que resulta na redução da força centrífuga do sistema nesse eixo. Por outro lado, as posições dos pontos de equilíbrio no eixo  $y$  se movem para longe do centro de massa à medida que a força gravitacional nesse eixo se torna maior devido ao aumento na massa de  $M_3$ .

Finalmente, à medida que aumentamos  $\Phi$ , os pontos de equilíbrio na região  $A$  ao longo do eixo  $x$  se aproximam do centro de massa do sistema, enquanto os pontos ao longo do eixo  $y$  se afastam do centro de massa do sistema. Esses pontos de equilíbrio existem apenas quando o ângulo azimutal está entre  $0^\circ$  e  $76^\circ$ . Além desse valor, a configuração do tripolo não permite a existência de pontos de equilíbrio na região  $A$ .

Para a região  $B$ , as variações das coordenadas  $x$  e  $y$  dos pontos de equilíbrio em função de  $k$ ,  $\mu^*$  e  $\Phi$  são mostradas nas Figuras 7.6 (a) e (b), respectivamente. Para uma melhor visão do caminho percorrido pelos pontos de equilíbrio, quando variamos os parâmetros  $k$ ,  $\mu^*$  e  $\Phi$ , inserimos uma curva (linha preta) na região amarela ( $\Phi = 65^\circ$ ).

Observamos que, à medida que  $k$  se torna menor, as posições dos pontos de equilíbrio na região  $B$  se afastam do centro de massa do sistema. Isso é verdade para os pontos de equilíbrio nos eixos  $x$  e  $y$  e ocorre pelo mesmo motivo dos pontos de equilíbrio na região  $A$ .

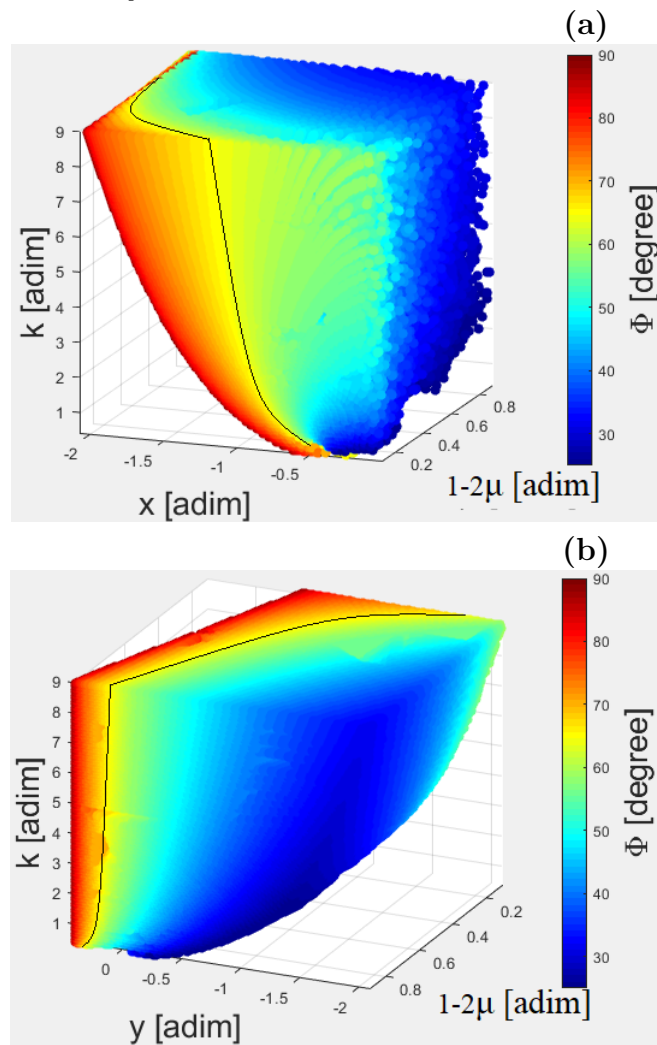
Os pontos de equilíbrio na região  $B$  ocorrem para  $\Phi > 26^\circ$ . Quando a massa  $m_3$  aumenta, os pontos de equilíbrio tendem a se afastar do corpo principal nos eixos  $x$  e  $y$ .

Analisando a disposição dos pontos de equilíbrio na região  $B$  à medida que aumentamos  $\Phi$ , descobrimos que os pontos de equilíbrio se movem para cima ao longo do eixo  $y$  e podem cruzar para o semiplano positivo. Diferentemente do que acontece com as soluções na região  $A$ , os pontos de equilíbrio na região  $B$  se afastam do centro de massa do sistema ao longo do eixo  $x$ .

A tabela 7.1 resume a direção do deslocamento dos pontos de equilíbrio na região  $A$  e  $B$  em relação ao centro de massa do corpo, pois  $k$ ,  $\mu^*$  e  $\Phi$  variam.



Figura 7.6 - As coordenadas dos pontos de equilíbrio na região  $B$  em função de  $k$ ,  $\mu^*$  e  $\Phi$ .  
(a) Posição dos pontos de equilíbrio em  $x$ -axis. (b) Posição de equilíbrio dos pontos no eixo  $y$ .



O símbolo  $\nearrow$  indica que o parâmetro correspondente está aumentando, enquanto  $\equiv$  é usado para indicar parâmetros que estão fixos. As setas direcionais indicam a direção do deslocamento dos pontos de equilíbrio. Por exemplo, quando mantemos fixos os valores de  $k$  e  $\mu^*$  e aumentamos  $\Phi$ , os pontos de equilíbrio da região  $A$ ,  $x$  e  $y$  movem para a direita (aproximando-se do centro de massa do sistema) e para cima (afastando-se do centro de massa do sistema), respectivamente.

Tabela 7.1 - Tendências de variação das coordenadas para os pontos de equilíbrio das regiões  $A$  e  $B$ .

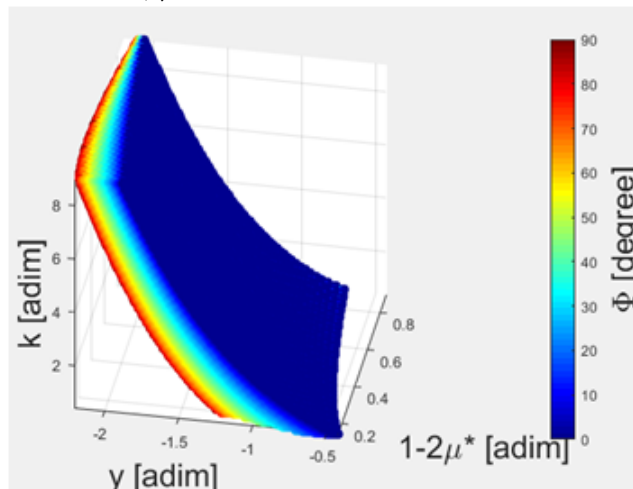
Resumo, variação de parâmetros.	Movimento do ponto de equilíbrio. Região $A$		Movimento do ponto de equilíbrio. Região $B$	
	$x_0$	$y_0$	$x_0$	$y_0$
$k \nearrow, 1-2\mu^* \equiv, \Phi \equiv$	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\downarrow$
$k \equiv, 1-2\mu^* \nearrow, \Phi \equiv$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$
$k \equiv, 1-2\mu^* \equiv, \Phi \nearrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$	$\uparrow$

Em seguida, investigamos as regiões  $C$  e  $D$ . Nessas duas regiões, as coordenadas dos pontos de equilíbrio no eixo  $x$  são zero para todos os pontos.

A Figura 7.7 mostra a coordenada  $y$  dos pontos de equilíbrio em função de  $k$ ,  $\mu^*$  e  $\Phi$ . Quando  $k$  aumenta, a força centrífuga fica menor, então os pontos de equilíbrio se afastam de  $M_3$ . À medida que a massa de  $M_3$  aumenta, a força gravitacional na direção  $y$  se torna mais forte, fazendo com que as posições dos pontos de equilíbrio na região  $C$  se movam na direção negativa do eixo  $y$ .

Finalmente, à medida que  $\Phi$  aumenta, os pontos de equilíbrio se movem para baixo ao longo do eixo  $y$ . A Figura 7.7 ilustra que a coordenada  $y$  dos pontos de equilíbrio da região  $C$  depende de  $\Phi$ , e que  $y_C(\Phi)$  se torna menor à medida que aumentamos o ângulo azimutal. Isso acontece porque, à medida que aumentamos  $\Phi$ ,  $M_1$  e  $M_2$ , os pontos de equilíbrio se movem para cima ao longo do eixo  $y$ . Então, para manter o centro de massa do sistema na origem,  $M_3$  deve estar no semiplano com um eixo  $y$  negativo. Além disso, à medida que  $\Phi$  aumenta, a coordenada de  $M_3$  se torna cada vez mais negativa, de modo que os pontos de equilíbrio na região  $C$  se afastam de  $M_3$  na direção negativa para manter o equilíbrio entre as forças gravitacionais e centrífugas.

Figura 7.7 - Comportamento dos pontos de equilíbrio no eixo  $y$  da região  $C$  é uma função dos parâmetros  $k$ ,  $\mu^*$  e  $\Phi$ .



A Figura 7.8 mostra como os pontos de equilíbrio na região  $D$  dependem de  $k$ ,  $\mu^*$  e  $\Phi$ . À medida que  $k$  aumenta, os pontos de equilíbrio se afastam do centro de massa do sistema. Quando a massa de  $M_3$  se torna maior, isto é, à medida que  $(1-2\mu^*)$  aumenta, os pontos de equilíbrio na região  $D$  se movem na direção positiva do eixo  $y$ , afastando-se do centro de massa do sistema.

Finalmente, investigamos o comportamento dos pontos de equilíbrio no eixo  $y$  quando aumentamos  $\Phi$ . Inicialmente, quando aumentamos  $\Phi$ , os pontos de equilíbrio no eixo  $y$  se aproximam do centro de massa do sistema. Isso acontece porque, quando aumentamos o ângulo azimutal,  $M_3$  se move para baixo, conseqüentemente a força gravitacional no eixo positivo de  $y$  se torna mais fraca. Por outro lado, à medida que aumentamos  $\Phi$ , os corpos  $M_1$  e  $M_2$  se movem para cima em relação ao eixo  $y$ . Isso faz com que a força gravitacional aumente na região  $D$ , agora fazendo com que os pontos de equilíbrio se movam para cima. Para uma melhor compreensão, construímos uma figura usando  $[\mu^*, k] = [1/3, 1]^T$ , que mostra o comportamento do ponto de equilíbrio na região  $D$  quando variamos  $\Phi$ , como mostrado na Figura 7.9.

Então, à medida que aumentamos o valor de  $\Phi$ , os valores dos pontos de equilíbrio na região  $D$  diminuem, aproximando-se do centro de massa do sistema, atingindo um mínimo em  $\Phi_D = 30,32^\circ$  e a posição  $y$  da região  $D$  que depende de  $\Phi$  é  $y(\Phi)_{D-min} = 0,6664$  e depois aumenta novamente, afastando-se do centro de massa do sistema.

A tabela 7.2 resume a direção no deslocamento dos pontos de equilíbrio na região  $C$  e  $D$  em relação ao centro de massa do asteroide quando  $k$ ,  $\mu^*$  e  $\Phi$  variam.

Figura 7.8 - Comportamento dos pontos de equilíbrio no eixo  $y$  da região  $D$  é uma função dos parâmetros  $k$ ,  $\mu^*$  e  $\Phi$ .

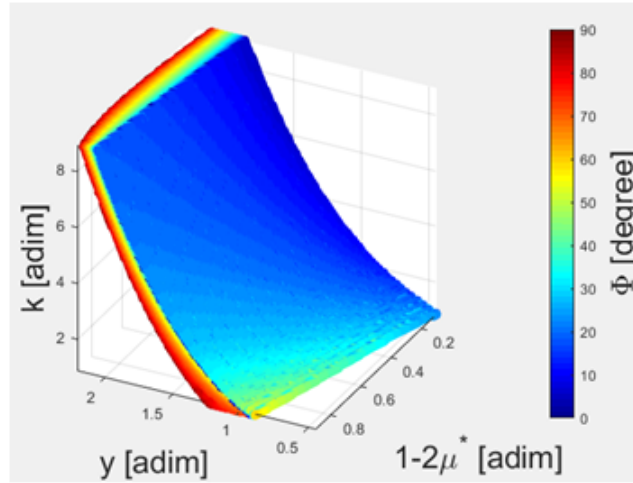
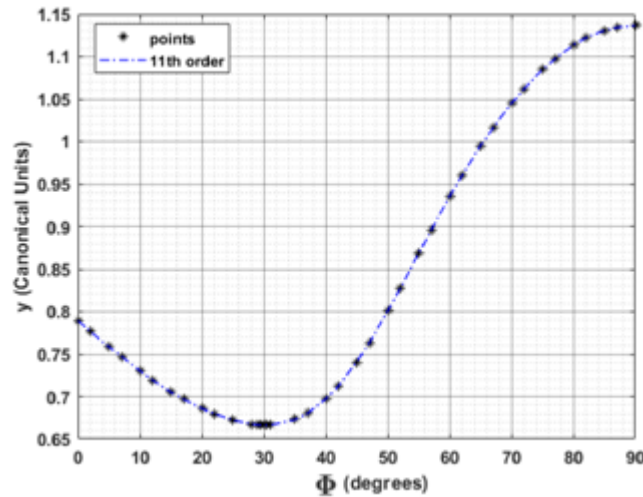


Figura 7.9 - Coordenada  $y$  dos pontos de equilíbrio na região  $D$  em função de  $\Phi$  para  $[\mu^*, k] = [1/3, 1]^T$ .



### 7.3.2 Influência do ângulo azimutal nas curvas de velocidade zero

O ângulo azimutal é um dos parâmetros principais que governam a estrutura topológica das curvas de velocidade zero ao redor do sistema do tripolo de massa. Nesta Seção, esse efeito é investigado. Para as simulações numéricas, mantemos  $[k, \mu^*]^T = [1, 1/3]^T$  e variamos o ângulo  $\Phi$  no intervalo  $[0, 90^\circ]$ . As curvas de velocidade zero aqui mostradas, objetivam determinar a ordem do surgimento dos pontos de equilíbrio. Devido a isso, nós determinamos as curvas mesmo que elas passem por dentro do corpo analisado.

Tabela 7.2 - Tendências de variação das coordenadas para os pontos de equilíbrio das regiões  $C$  e  $D$ .

Resumo, variação de parâmetros.	Movimento dos pontos de equilíbrio. Região $C$		Movimento dos pontos de equilíbrio. Região $D$	
	$x_0$	$y_0$	$x_0$	$y_0$
$k \nearrow, 1-2\mu^* \equiv, \Phi \equiv$	0	$\downarrow$	0	$\uparrow$
$k \equiv, 1-2\mu^* \nearrow, \Phi \equiv$	0	$\downarrow$	0	$\uparrow$
$k \equiv, 1-2\mu^* \equiv, \Phi \nearrow$	0	$\downarrow$	0	$\downarrow \uparrow$

A Equação 7.19 relaciona o quadrado da velocidade e a posição do corpo de massa infinitesimal em um sistema de coordenadas girante. Observe que quando a constante de integração  $C^*$  é determinada numericamente pelas condições iniciais, a Equação 7.19 fornece a velocidade com a qual o corpo de massa infinitesimal se move.

Em particular, se  $v$  é zero, a Equação 7.19 define as curvas nas quais a velocidade é zero. A equação que fornece as curvas de velocidade zero, em coordenadas cartesianas, é:

$$x^2 + y^2 + \frac{2\mu^*}{r_1} + \frac{2\mu^*}{r_2} + \frac{2(1-2\mu^*)}{r_3} = C^* \quad (7.25)$$

onde  $r_1, r_2$  e  $r_3$  são mostrados nas Equações 7.6, 7.7 e 7.8. As curvas de velocidade zero no plano  $xy$  para seis valores diferentes de  $\Phi$  são mostradas na Figura 7.10. Cada curva nos quadros a) a f) da Figura 7.10 corresponde ao valor da constante de Jacobi para a qual os contatos entre as ovas ocorrem e os pontos de equilíbrio surgem. O tripolo não está ilustrado na figura.

A Figura 7.10 a) mostra as curvas de velocidade zero quando o ângulo azimutal é  $0^\circ$ . Observe que, para esse ângulo azimutal,  $M_1, M_2$  e  $M_3$  estão alinhados no eixo  $x$ . Por outro lado, a Figura 7.10 b) mostra as curvas de velocidade zero quando o ângulo azimutal é  $20^\circ$ . Para valores pequenos de  $x$  e  $y$  que satisfaçam a Equação 7.25, os dois primeiros termos são praticamente irrelevantes e a equação pode ser escrita como:

$$-\frac{\mu^*}{r_1} - \frac{\mu^*}{r_2} - \frac{2(1-2\mu^*)}{r_3} = \frac{C^*}{2} - \frac{(x^2 + y^2)}{2} = \frac{C^*}{2} - \epsilon. \quad (7.26)$$

Essa equação fornece as curvas equipotenciais para os três centros de força  $\mu^*, \mu^*$  e  $1-2\mu^*$ , conforme mostrado na Figura 7.10 a) e b). Para valores elevados de  $C^*$ , as ovas consistem em curvas fechadas ao redor de cada corpo. Se diminuirmos  $C^*$ ,

as ovas em torno de  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  (ovas internas) se expandem e os contornos externos (ovas externos) se movem em direção ao centro de massa do sistema. As ovas internas se conectam com as ovas externas, resultando nos pontos de equilíbrio na região  $A$  (curva preta) e as ovas entre os corpos também se conectam, resultando nos pontos de equilíbrio na região  $E$  (curva vermelha). Veja as Figuras 7.10 a) e b).

Se  $C^*$  for diminuído ainda mais, as regiões onde o movimento é permitido se tornam maiores. Isso acontece porque a oval em torno das massas aumenta e se funde com a oval externa, deixando apenas uma pequena área confinada (regiões  $C$  e  $D$ ), onde o movimento é impossível. Observe na Figura 7.10 a) que, devido à simetria do problema, os pontos de equilíbrio nas regiões  $C$  e  $D$  aparecem com o mesmo valor de  $C^*$  (curva verde). Por outro lado, quando o ângulo azimutal é diferente de  $0^\circ$ , os pontos de equilíbrio nas regiões  $C$  e  $D$  aparecem para diferentes valores da constante de Jacobi (curvas verde e azul, respectivamente) mostrados na Figura 7.10 b).

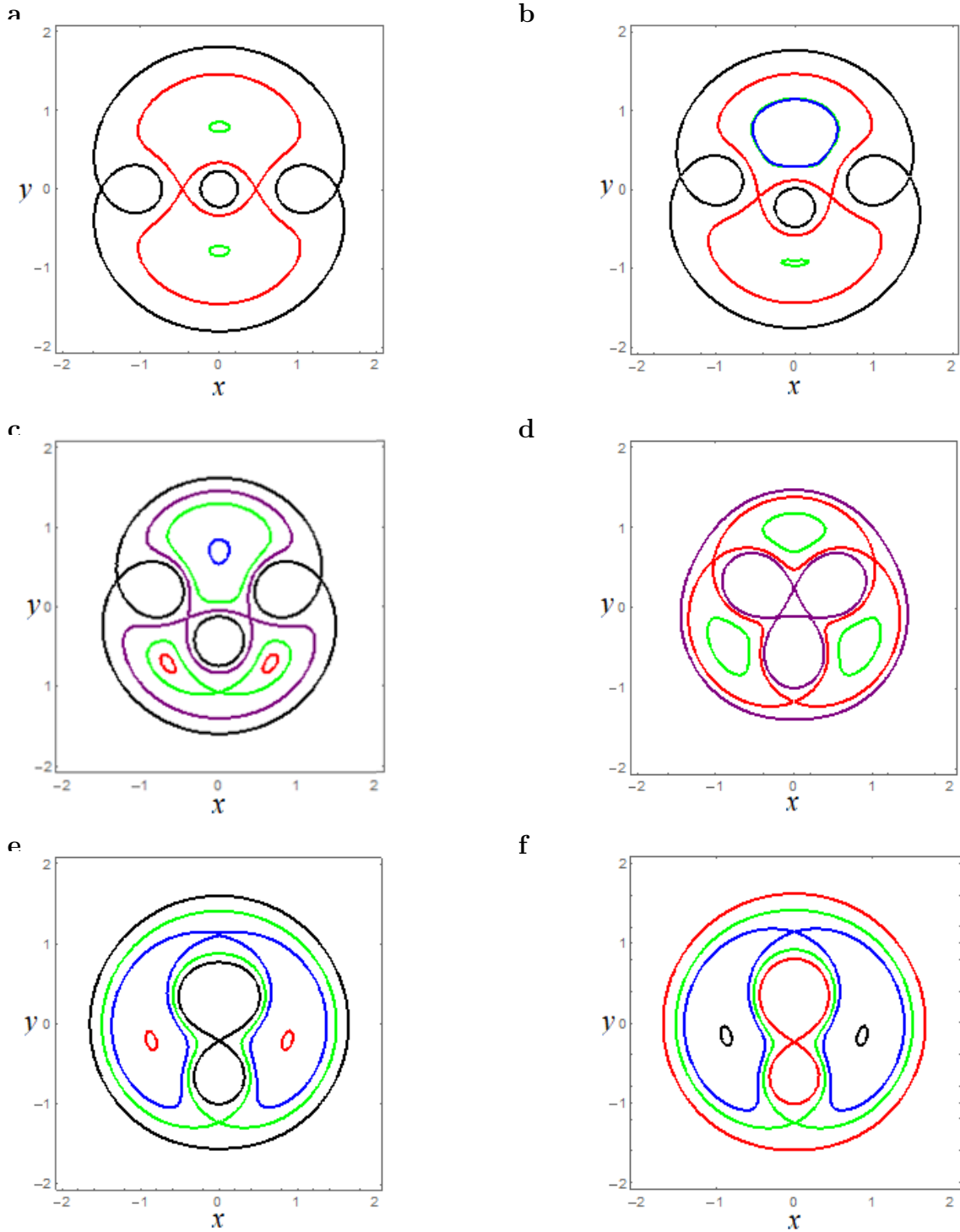
A Figura 7.10 c) mostra as curvas de velocidade zero quando o ângulo azimutal é de  $40^\circ$ . A mudança na estrutura topológica das curvas de velocidade zero é evidente à medida que o ângulo azimutal é variado. Observe na Figura 7.10 c) que, além dos pontos de contato mostrados nas Figuras 7.10 a) e b), novos pontos de contato emergem (curvas vermelhas) na região  $B$ . Por meio de simulações numéricas, observamos que as regiões  $B$  surgem quando o ângulo azimutal é maior que  $26^\circ$ .

Quando consideramos o ângulo azimutal de  $60^\circ$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  formam um triângulo equilátero em relação ao sistema de referência girante.

Assim, as curvas de velocidade zero têm uma forma simétrica. Quando o ângulo azimutal é  $60^\circ$ , os pontos de equilíbrio nas regiões  $A$  e  $C$  surgem para  $C_{A-C} = 2,946725190$ . Da mesma forma,  $C_{BD} = 3,35803516$  é necessário para contatos entre formas ovas nas regiões  $B$  e  $D$ . A Figura 7.10 (e) mostra as curvas de velocidade zero para um ângulo azimutal de  $80^\circ$ . Na Figura 7.10 (e), observamos que as regiões  $A$  deixam de existir, deixando apenas as regiões  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$ . Isso significa que, assim como as regiões  $B$  dependem do ângulo azimutal para emergir ou desaparecer, o mesmo acontece com a região  $A$ . A região  $A$  deixa de existir quando  $\Phi > 76^\circ$ .

Finalmente, considerando um ângulo azimutal de  $90^\circ$ ,  $M_1$  e  $M_2$  se sobrepõe, o que significa que eles se comportam como um corpo único com massa  $m = m_1 + m_2$ . Para esta configuração, o sistema é semelhante ao problema restrito clássico de três corpos, com uma razão de massa de  $\mu^* = 1/2$ .

Figura 7.10 - Influência do ângulo azimutal nas curvas de velocidade zero no plano  $xy$ .



(a) Curvas de velocidade zero para um ângulo azimutal de  $0^\circ$ . (b) Curvas de velocidade zero para um ângulo azimutal de  $20^\circ$ . (c) Curvas de velocidade zero para um ângulo azimutal de  $40^\circ$ . (d) Curvas de velocidade zero para um ângulo azimutal de  $60^\circ$ . (e) Curvas de velocidade zero para um ângulo azimutal de  $80^\circ$ . (f) Curvas de velocidade zero para um ângulo azimutal de  $90^\circ$ .

Observe nas Figuras 7.10 (a) - (f) que, à medida que aumentamos o ângulo azimutal de 0 a 90°, alterações perceptíveis nas curvas de velocidade zero podem ser observadas próximo ao asteroide convexo. Observe que as regiões que conectam as ovas se movem ao longo do plano  $xy$  à medida que variamos o ângulo azimutal.

Os valores das constantes de Jacobi modificadas nos pontos de contato em cada região da Figura 7.10 são mostrados na Figura 7.11. Os números 7.11 (a) - (d) mostram como os valores da constante de Jacobi nas regiões  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  ( $C_A$ ,  $C_B$ ,  $C_C$  e  $C_D$ , respectivamente) variam em função do ângulo azimutal  $\Phi$ . Na Figura 7.11 - a), vemos que os valores da constante de Jacobi  $C_A(\Phi)$  diminuem à medida que o ângulo azimutal  $\Phi$  aumenta. Para  $C_B(\Phi)$ , observa-se que, inicialmente, o valor da constante de Jacobi aumenta com o aumento do ângulo azimutal e depois diminui, conforme mostrado na Figura 7.11 (b). Esse comportamento causa um valor máximo para  $C_B(\Phi)$ , que acontece em  $C_B = 2,989303755$ , para  $\Phi = 46,524234^\circ$ . Por outro lado, os valores da função  $C_C(\Phi)$  aumentam à medida que aumentamos  $\Phi$ . Finalmente, para  $C_D$ , à medida que aumentamos  $\Phi$ , inicialmente, os valores de  $C_D$  se tornam menores, atingindo um valor mínimo de  $C_D = 2,4120014$ , quando o ângulo azimutal é de aproximadamente  $\Phi = 19,987^\circ$  e depois aumenta.

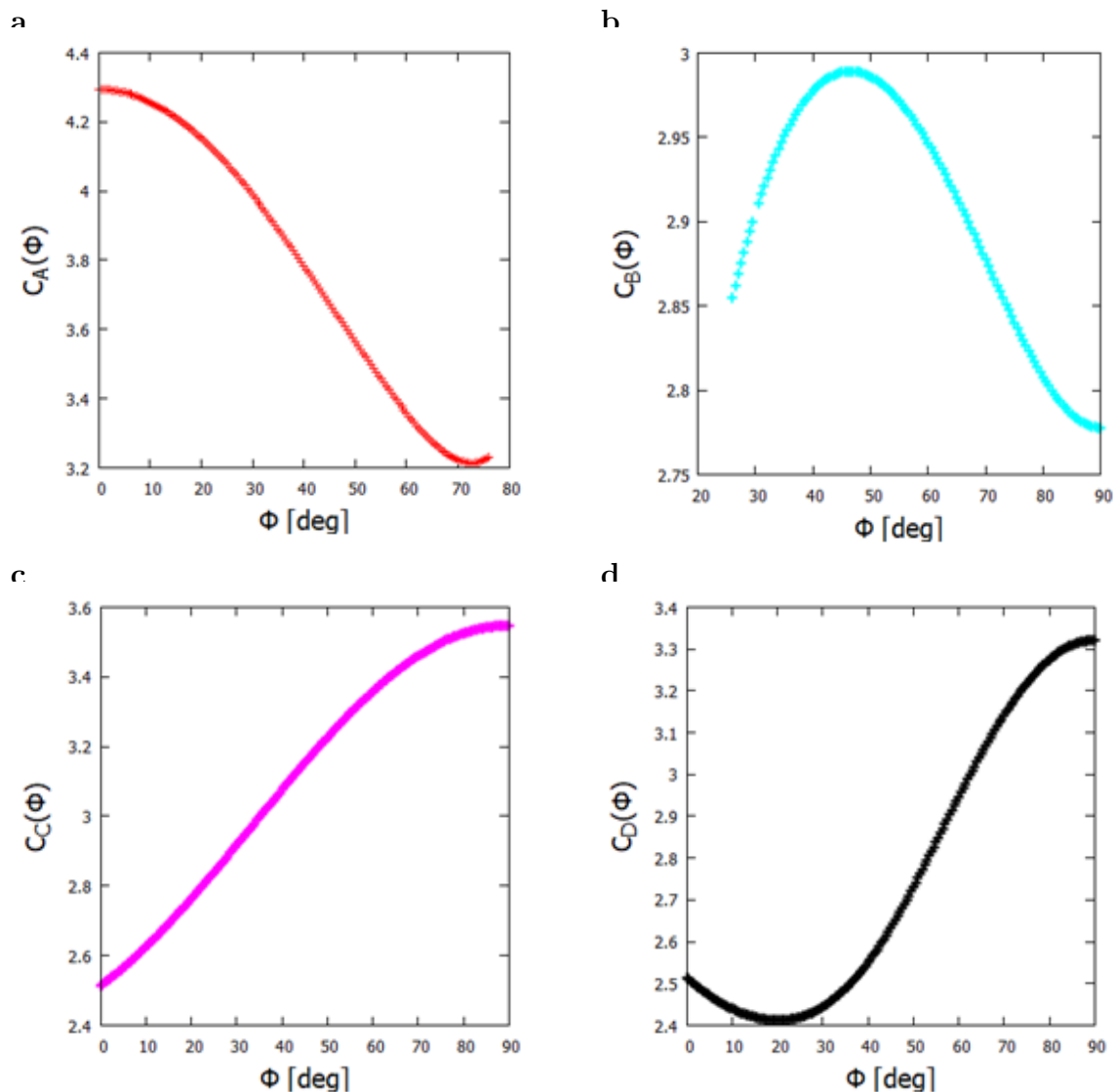
### 7.3.3 Condição de estabilidade

Agora, vamos nos concentrar na análise das condições de estabilidade para os pontos de equilíbrio nas regiões  $D$  e  $C$  ( $L_D$  e  $L_C$ ), respectivamente, ou seja, pontos que possuem coordenadas nulas em  $x$ . Descrevemos como as condições de estabilidade para os pontos de equilíbrio  $L_D$  (e  $L_C$ ) dependem do ângulo azimutal ( $\Phi$ ), da razão de força ( $k$ ) e da razão de massa ( $\mu^*$ ). De fato, se algum desses parâmetros forem alterados, a condição de estabilidade (instável ou estável) desses pontos de equilíbrio também poderá mudar.

Primeiro, vejamos a condição de estabilidade da região  $D$ . A Figura 7.12 mostra gráficos de  $\Phi$  versus  $\mu^*$ , mostrando a transição de estabilidade. Nós vemos na Figura 7.12 a) que, quando o ângulo azimutal aumenta e  $k = 1$ , a razão de massa necessária para manter o ponto de equilíbrio  $L_D$  estável diminui. Quando o ângulo é 0°, a razão de massa máxima para permitir a estabilidade linear do sistema estudado é  $\mu^* = 0,0742683$ . Se a razão de massa for maior que esse valor, o ponto de equilíbrio  $L_D$  será instável para todos os ângulos azimutais. Observe que, quando  $\Phi \rightarrow 90^\circ$ , as duas massas do tripolo ( $m_1$  e  $m_2$ ) colapsam em um ponto de massa com a razão de massa  $2\mu^*$ . Nesse caso, o ponto  $L_D$  é semelhante ao ponto de equilíbrio  $L_3$  do problema restrito clássico de três corpos.



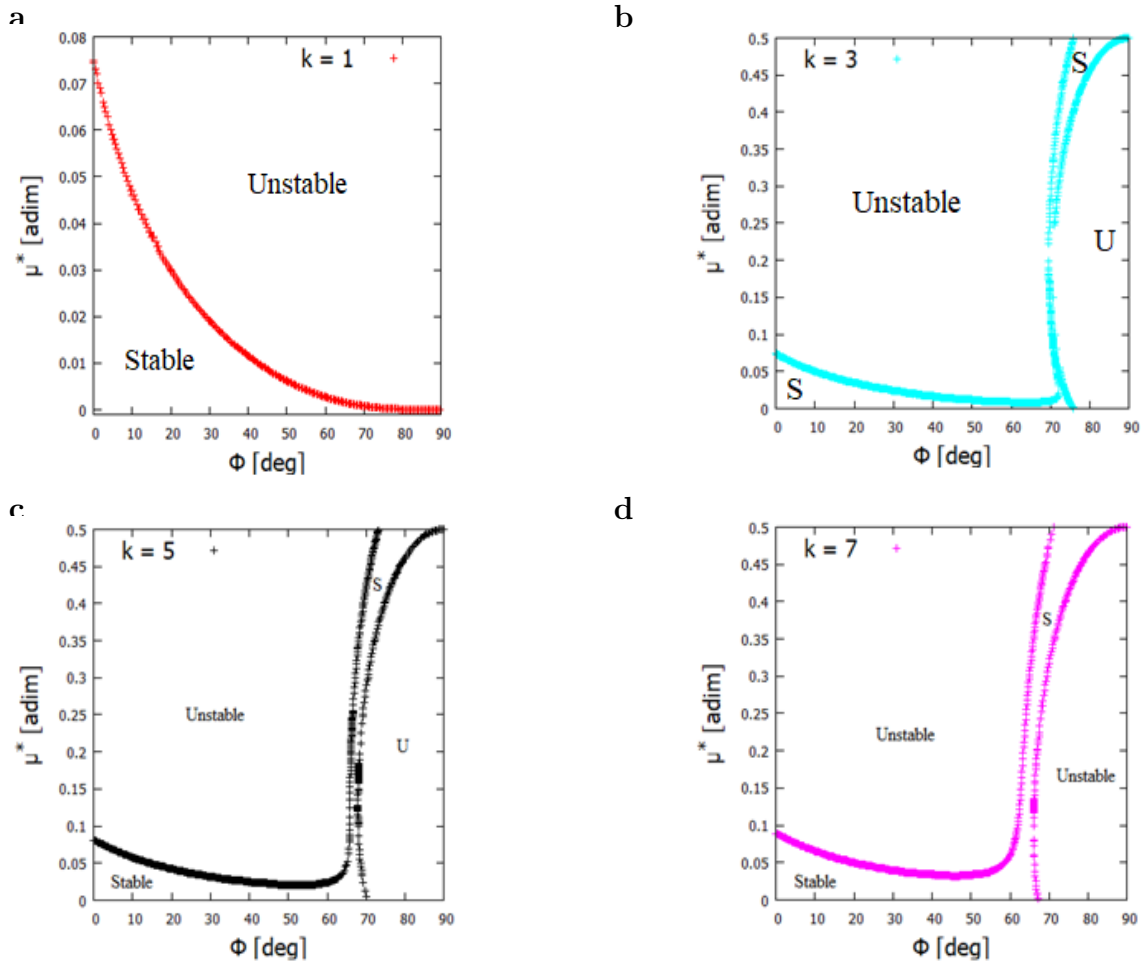
Figura 7.11 - Comportamento da constante de Jacobi nas regiões  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , respectivamente, em função do ângulo azimutal.



(a) Valores da constante de Jacobi ( $C_A$ ) nos pontos de equilíbrio versus  $\Phi$ . (b) Valores da constante de Jacobi ( $C_B$ ) nos pontos de equilíbrio versus  $\Phi$ . (c) Valores da constante de Jacobi ( $C_C$ ) nos pontos de equilíbrio versus  $\Phi$ . (d) Valores da constante de Jacobi ( $C_D$ ) nos pontos de equilíbrio versus  $\Phi$ .

Portanto, este ponto de equilíbrio é linearmente instável para qualquer razão de massa, o que está de acordo com a literatura (MCCUSKEY, 1963; SZEBEHELY, 1967; MOULTON, 1914; MURRAY; DERMOTT, 1999).

Figura 7.12 - Valores da razão de massa ( $\mu^*$ ) versus o ângulo azimutal ( $\Phi$ ) para a condição de estabilidade do ponto de equilíbrio  $L_D$  considerando valores diferentes de  $k$ .



(a) Valores da razão de massa ( $\mu^*$ ) versus o ângulo azimutal ( $\Phi$ ) quando  $k = 1$  para a condição de estabilidade do ponto de equilíbrio  $L_D$ . (b) Valores da razão de massa ( $\mu^*$ ) versus o ângulo azimutal ( $\Phi$ ) quando  $k = 3$  para a condição de estabilidade do ponto de equilíbrio  $L_D$ . (c) Valores da razão de massa ( $\mu^*$ ) versus o ângulo azimutal ( $\Phi$ ) quando  $k = 5$  para a condição de estabilidade do ponto de equilíbrio  $L_D$ . (d) Valores da razão de massa ( $\mu^*$ ) versus o ângulo azimutal ( $\Phi$ ) quando  $k = 7$  para a condição de estabilidade do ponto de equilíbrio  $L_D$ .

Tabela 7.3 - Valores exatos dos autovalores em função dos parâmetros  $\Phi$ ,  $\mu^*$  e  $k$  para a região D.

$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{3,4}$	$\Phi$ (grau)	$\mu^*$	$k$
$\pm 0,1820i$	$\pm 0,9832i$	0	0,01	1
$\pm 0,3973i$	$\pm 0,9176i$	30	0,01	1
$-0,4790 \pm 0,8225i$	$0,4790 \pm 0,8225i$	60	0,01	1
$\pm 3,0139$	$\pm 2,3861i$	90	0,01	1
$\pm 0,4568i$	$\pm 0,8895i$	0	0,05	1
$-0,3809 \pm 0,8031i$	$0,3809i \pm 0,8031i$	30	0,05	1
$-0,8463 \pm 0,9878i$	$0,8463 \pm 0,9878i$	60	0,05	1
$\pm 1,8094$	$\pm 1,6635i$	90	0,05	1
$-0,2075 \pm 0,7369i$	$0,2075 \pm 0,7369i$	0	0,1	1
$-0,5344 \pm 0,8863i$	$-0,5344 \pm 0,8863i$	30	0,1	1
$-0,9342 \pm 0,9971i$	$0,9342 \pm 0,9971i$	60	0,1	1
$\pm 1,6048$	$\pm 1,5525i$	90	0,1	1
$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{3,4}$	$\Phi$ (grau)	$\mu^*$	$k$
$\pm 0,1838i$	$\pm 0,9829i$	0	0,01	3
$\pm 0,3498i$	$\pm 0,9352i$	30	0,01	3
$-0,1695 \pm 0,7051i$	$0,1695 \pm 0,7051i$	60	0,01	3
$\pm 0,8243$	$\pm 1,187i$	90	0,01	3
$\pm 0,4614i$	$\pm 0,8871i$	0	0,05	3
$-0,3254 \pm 0,7740i$	$0,3254i \pm 0,7740i$	30	0,05	3
$-0,5204 \pm 0,8128i$	$0,5204 \pm 0,8128i$	60	0,05	3
$\pm 1,0801$	$\pm 1,2944i$	90	0,05	3
$-0,2108 \pm 0,7378i$	$0,2108 \pm 0,7378i$	0	0,1	3
$-0,4813 \pm 0,8482i$	$0,4813 \pm 0,8482i$	30	0,1	3

As Figuras 7.12 (b) a (d) mostram  $\Phi$  versus  $\mu^*$ , que ilustram as regiões de estabilidade quando  $k > 1$ . Vemos na Figura 7.12 (b) que, para  $\Phi < 70^\circ$ , a transição de estabilidade é semelhante ao caso em que  $k = 1$ , mas a bifurcação ocorre quando  $\Phi \sim 70^\circ$ .

Observe no gráfico que uma faixa vertical estreita aparece, fazendo com que o ponto de equilíbrio  $L_D$  seja estável para qualquer valor de  $\mu^*$ . À medida que  $\Phi$  aumenta, as condições de estabilidade mudam novamente, tornando o ponto de equilíbrio estável apenas para valores altos de  $\mu^*$ . Portanto, observe que, quando o sistema tem valores baixos de  $\mu^*$ , os pontos de equilíbrio são linearmente estáveis para  $\Phi < 76^\circ$ . Por outro lado, para um asteroide muito arqueado ( $\Phi > 76^\circ$ ), o ponto de equilíbrio  $L_D$  é linearmente estável quando a razão de massa do sistema é alta.

A Tabela 7.3 fornece informações de alguns autovalores em função dos parâmetros  $\Phi$ ,

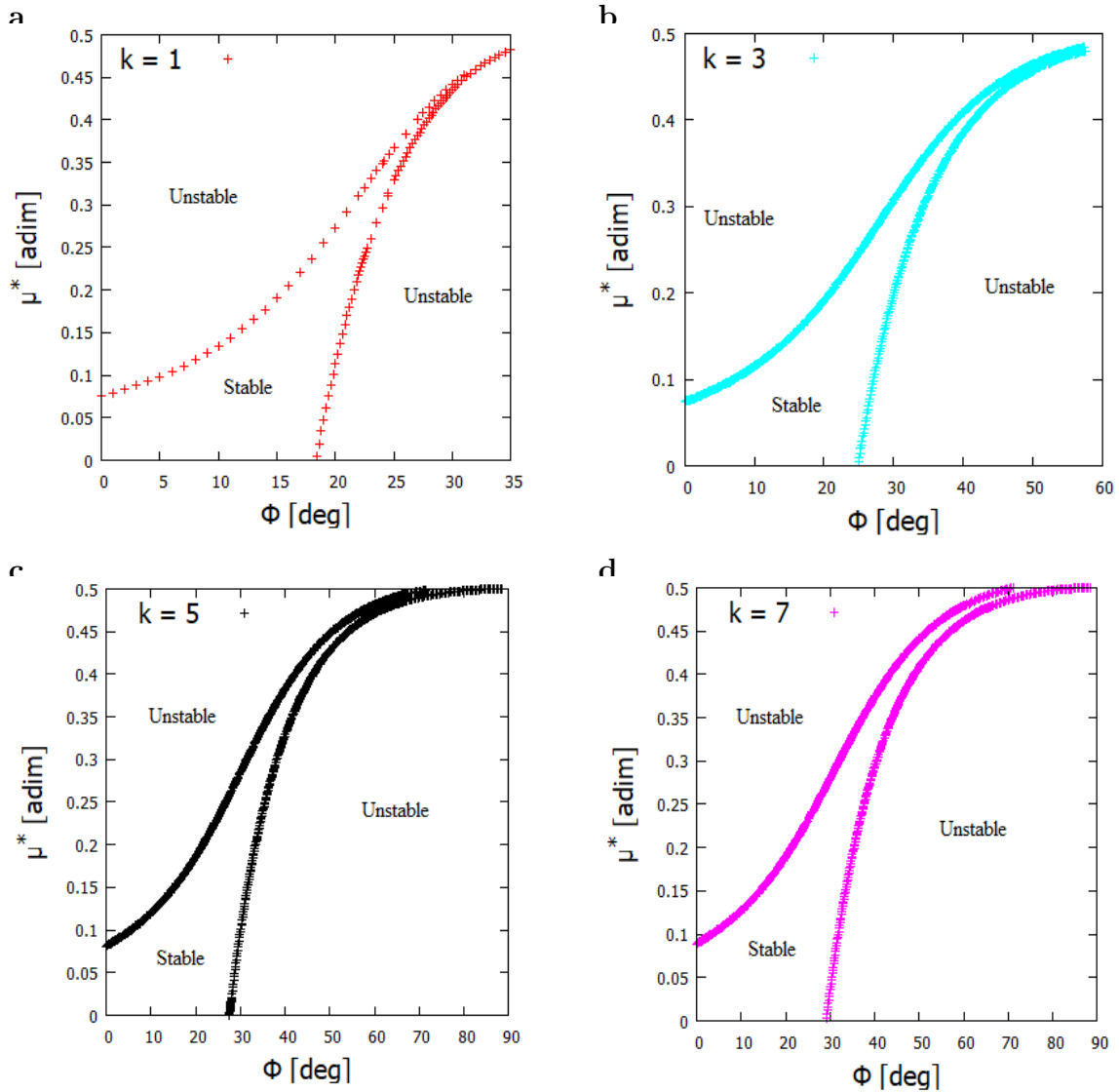
$\mu^*$  e  $k$ .

A Figura 7.12 (c) mostra a curva de transição de estabilidade para  $k = 5$ . Observamos que quando  $\Phi < 60^\circ$ , a curva de transição de estabilidade é semelhante aos casos anteriores. Também observamos que uma faixa vertical estreita aparece (em torno de  $\Phi \approx 65^\circ$ ) e possui uma área maior em relação ao caso anterior. Isso significa que também podemos encontrar regiões estáveis quando consideramos altos valores de  $\Phi$  ( $\Phi > 60^\circ$ ) e  $\mu^*$ . À medida que aumentamos o valor de  $\Phi$  (quando  $\Phi > 70^\circ$ ), o ponto de equilíbrio  $L_D$  se torna linearmente estável apenas para valores altos de  $\mu^*$ . Para valores baixos de  $\mu^*$ , o ponto de equilíbrio  $L_D$  é estável quando  $\Phi < 70^\circ$ . As letras  $S$  e  $U$  mostradas na Figura 7.12 c) são abreviações para condição Estável (Stable) e Instável (Unstable), respectivamente.

Finalmente, Figura 7.12 (d) mostra a transição de estabilidade quando  $k = 7$ . Observe que, como nos casos anteriores, quando consideramos  $k = 7$ , aparece uma faixa vertical estreita (em torno de  $\Phi \approx 60^\circ$ ), permitindo que o ponto de equilíbrio  $L_D$  seja linearmente estável para qualquer valor de  $\mu^*$ . Se aumentarmos gradualmente  $\mu^*$  e  $\Phi$ , as regiões estáveis permanecerão até  $\Phi = 89,6^\circ$ . Por outro lado, se diminuirmos  $\mu^*$  à medida que aumentamos  $\Phi$  (de  $66^\circ$ ), a região estável se estende até  $\Phi = 67^\circ$ . Observe nas Figuras 7.12 b) - d) que a área da faixa vertical estreita se torna maior à medida que aumentamos o valor  $k$ . Isso significa que, quanto maior o valor de  $k$ , maior a região que permite a estabilidade linear do ponto de equilíbrio  $L_D$  para quaisquer valores de  $\mu^*$ .

Uma análise semelhante foi realizada para o ponto de equilíbrio  $L_C$  e os resultados são mostrados na Figura 7.13. Diferente da Figura 7.12 (a), quando  $k = 1$ , a Figura 7.13 (a) mostra que existem dois limites de transição de estabilidade. O primeiro limite (transição inferior, curva à esquerda) existe para pequenos ângulos azimutais, começando em  $0^\circ$ , com uma razão de massa de 0,07427949. Acima de  $18,351^\circ$ , as evidências numéricas mostram que surge outra transição de estabilidade, como mostra a curva à direita na Figura 7.12 (a).

Figura 7.13 - Valores da razão de massa ( $\mu^*$ ) versus o ângulo azimutal ( $\Phi$ ) para a condição de estabilidade do ponto de equilíbrio  $L_C$  considerando valores diferentes de  $k$ .



(a) Valores da razão de massa ( $\mu^*$ ) versus o ângulo azimutal ( $\Phi$ ) quando  $k = 1$  para a condição de estabilidade do ponto de equilíbrio  $L_C$ . (b) Valores da razão de massa ( $\mu^*$ ) versus o ângulo azimutal ( $\Phi$ ) quando  $k = 3$  para a condição de estabilidade do ponto de equilíbrio  $L_C$ . (c) Valores da razão de massa ( $\mu^*$ ) versus o ângulo azimutal ( $\Phi$ ) quando  $k = 5$  para a condição de estabilidade do ponto de equilíbrio  $L_C$ . (d) Valores da razão de massa ( $\mu^*$ ) versus o ângulo azimutal ( $\Phi$ ) quando  $k = 7$  para a condição de estabilidade do ponto de equilíbrio  $L_C$ .

As Figuras 7.13 b) - d) mostram  $\Phi$  versus  $\mu^*$ , que ilustram as regiões de estabilidade, quando  $k > 1$ . A figura 7.13 b) mostra duas transições de estabilidade. Observe que a primeira transição começa quando  $\Phi = 0^\circ$  e  $\mu^*$  é aproximadamente 0,074.

A segunda transição de estabilidade começa quando  $\Phi = 25^\circ$ , e quando o asteroide está  $80^\circ$  mais arqueado que o caso anterior, portanto, o ponto de equilíbrio  $L_C$  tem uma região estável mais ampla em comparação com as obtidas quando  $k = 1$ . Para  $\Phi > 57,5^\circ$ , o ponto de equilíbrio  $L_C$  é instável para qualquer razão de massa.

Se aumentarmos ainda mais o valor de  $k$  para  $k = 5$ , a região de estabilidade se tornará ainda maior, conforme mostrado na Figura 7.13 c). A primeira transição de estabilidade ocorre quando  $\Phi = 0^\circ$  e  $\mu^* = 0,08$ . Por outro lado, a segunda curva surge quando  $\mu^* = 0$  e  $\Phi = 28^\circ$ , limitando assim a região que permite que o ponto de equilíbrio  $L_C$  seja estável. Se o ângulo azimutal for maior que  $68^\circ$ , o ponto de equilíbrio  $L_C$  se tornará instável para qualquer razão de massa.

Finalmente, fizemos uma análise considerando  $k = 7$ . Note da Figura 7.13 d) que, devido à baixa rotação do asteroide, resulta em uma área maior no gráfico que faz o ponto de equilíbrio  $L_C$  linearmente estável. Para  $k = 7$ , a primeira transição começa quando  $\Phi = 0^\circ$  e  $\mu^* = 0,09$ . Por outro lado, a segunda transição de estabilidade começa quando  $\Phi = 29^\circ$  e  $\mu^* = 0$ . Isso mostra que, quando aumentamos o valor de  $k$  (ou seja, a velocidade angular de o asteroide se torna mais lenta), as duas curvas de transição de estabilidade se cruzam quando o ângulo azimutal é alto, variando de aproximadamente  $\Phi = 35^\circ$  quando  $k = 1$ , até  $\Phi = 75^\circ$  quando  $k = 7$ . Isso mostra que, à medida que aumentamos a razão de força  $k$ , a região de estabilidade se torna maior.

## 7.4 Aplicação

Para validar as equações e os resultados desenvolvidos neste Capítulo, comparamos os resultados obtidos com quatro corpos celestes, (i) 243 Ida, (ii) 433 Eros, (iii) 1996 (HW1) e (iv) M1 Phobos.

Os parâmetros  $k$ ,  $\Phi$  e  $\mu^*$  foram obtidos em Lan et al. (2017) (para Ida e M1 Phobos) e em Yang et al. (2018) (para Eros e 1996 HW1). Os autores estimaram os parâmetros utilizando métodos de otimização. A estabilidade linear dos pontos de equilíbrio dos corpos celestes mencionados acima foi obtida por Wang et al. (2014) e usada neste estudo para fins de comparação. Em Wang et al. (2014), as regiões  $C$  e  $D$  são os pontos de equilíbrio  $E_4$  e  $E_2$ , respectivamente.

Os parâmetros otimizados dos corpos analisados neste estudo são mostrados na Tabela 7.4, onde  $\Phi$  é determinado fazendo  $\Phi = \arctan(2\sigma)$ , em que  $\sigma$  é dado por

Tabela 7.4 - Os parâmetros ideais para o modelo do tripolo.

Asteroide	$k$	$\mu^*$	$\Phi$
243 Ida	0,402	0,237	19,94°
M1 Phobos	22,003	0,396	56,09°
433 Eros	0,434	0,260	18,95°
1996 (HW1)	3,158	0,443	27,43°

$l_2/l_1$  e foi determinado em Lan et al. (2017) e Yang et al. (2018).

Conhecendo os parâmetros para cada corpo celeste, é possível encontrar as condições de estabilidade para os pontos de equilíbrio  $E_4$  e  $E_2$  nas Equações 7.23 e 2.36.

A Figura 7.14 mostra  $\mu^*$  versus  $\Phi$  e ilustra as regiões de estabilidade dos pontos de equilíbrio  $L_C$  e  $L_D$  para os asteroides 1996 HW1, 243 Ida e 433 Eros e M1 Phobos.

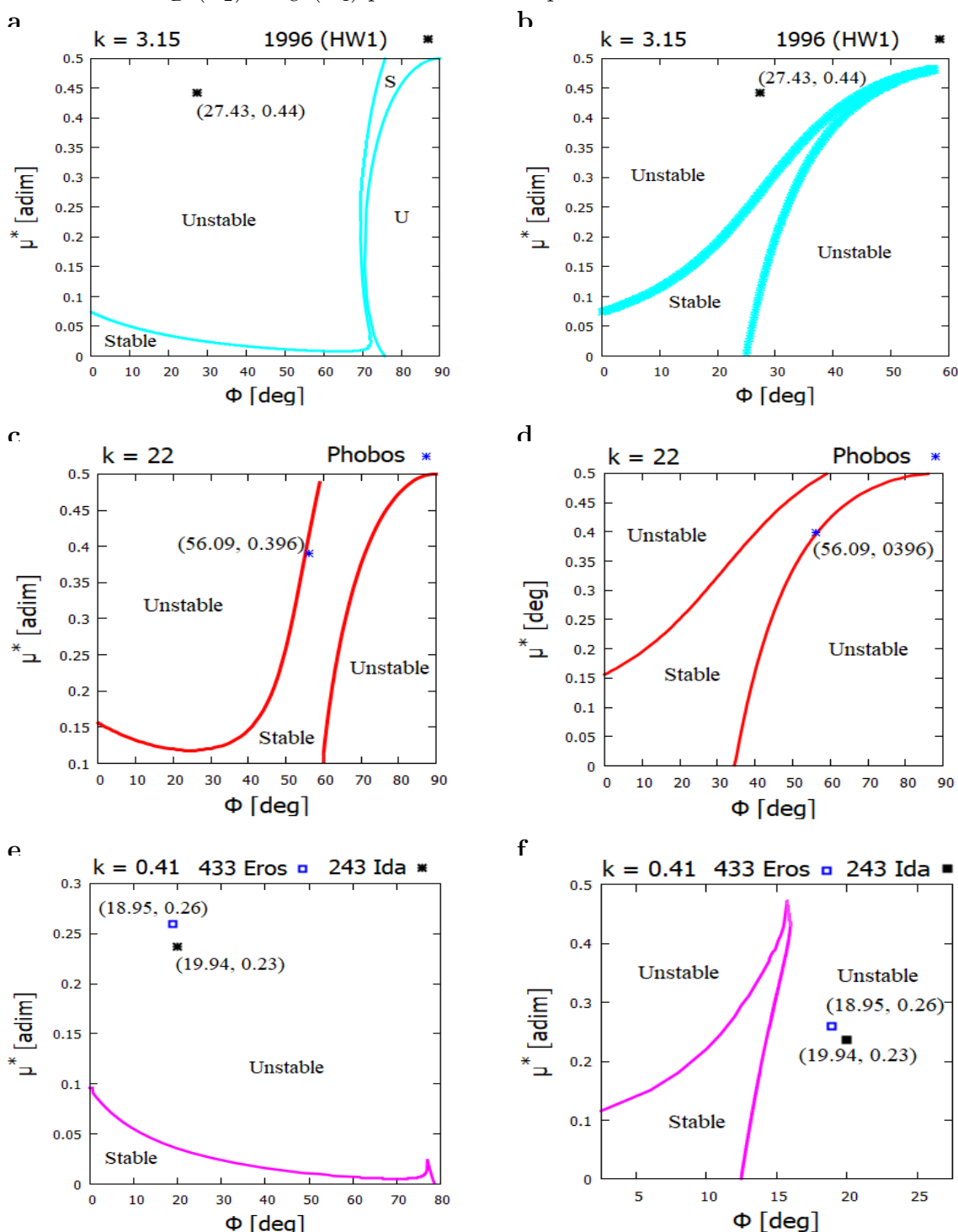
As Figuras 7.14 a) e b) representam  $\Phi$  vs.  $\mu^*$  (27,43; 0,44) para o asteroide 1996 HW1. Observamos que o ponto de equilíbrio está fora da região que permite a estabilidade dos pontos de equilíbrio  $E_2$  e  $E_4$ , mostrando que esses pontos de equilíbrio são instáveis, resultado que coincide com os resultados obtidos por Wang et al. (2014).

As Figuras 7.14 c) e d) mostram a região de estabilidade dos pontos de equilíbrio  $E_2$  e  $E_4$  quando  $k = 22$ . Plotamos o par ordenado (56,09, 0,396) para o M1 Phobos. Devido às características (forma, densidade e rotação) do M1 Phobos, os pontos de equilíbrio  $E_2$  e  $E_4$  estão dentro da região de estabilidade, tornando esses pontos de equilíbrio linearmente estáveis.

A estabilidade dos pontos de equilíbrio depende da densidade aparente, da forma e da velocidade angular dos asteroides. A densidade aparente é obtida a partir da composição do asteroide, uma característica difícil de mudar. As formas dos asteroides passam a ser modeladas ao longo tempo. Por outro lado, a velocidade angular do asteroide é alterada devido à aceleração causada pelo efeito YORP (PADDACK, 1969), e podem ser modificadas em dias.

Observe que os pontos de equilíbrio  $E_2$  e  $E_4$  do M1 Phobos estão próximos do limite que garante a condição de estabilidade (veja Figura 7.14 (c) e (d)).

Figura 7.14 - Valores de  $\mu^*$  versus  $\Phi$  para a condição de estabilidade do ponto de equilíbrio  $L_D (E_2)$  e  $L_C (E_4)$  para um valor específico de  $k$ .



Figuras da esquerda referem-se ao ponto de equilíbrio  $L_D (E_2)$ . Figuras da direita referem-se ao ponto de equilíbrio  $L_C (E_4)$ . (a)  $k = 3,15$  do asteroide HW1 de 1996. (b)  $k = 3,15$  para o asteroide HW1 de 1996. (c)  $k = 22$  para M1 Phobos. (d)  $k = 22$  de M1 Phobos. (e)  $k = 3,15$  dos asteroides 243 Ida e 433 Eros. (f)  $k = 3,15$  dos asteroides 243 Ida e 433 Eros.



Se a velocidade angular desse corpo aumentar, como previsto pelo efeito YORP,  $k$  diminuirá, tornando o ponto de equilíbrio instável. Este resultado mostra a importância de realizar uma análise generalizada com o objetivo de compreender globalmente as propriedades dinâmicas nas proximidades dos corpos celestes.

Finalmente, as Figuras 7.14 (e) e (f) fornecem informações sobre a condição de estabilidade dos 243 Ida e 433 Eros. Na Tabela 7.4, vemos que  $k$  para os asteroides 243 Ida e 433 Eros estão muito próximos. Por esse motivo, mostraremos os resultados para esses dois asteroides no mesmo gráfico, nas Figuras 7.14 (e) e (f). Plotamos  $(\Phi, \mu^*) = (18,95, 0,26)$  e  $(\Phi, \mu^*) = (19,94, 0,23)$  para 433 Eros e 243 Ida, respectivamente. Observamos que os pontos de equilíbrio  $E_2$  e  $E_4$  (Figura 7.14 (e) e (f), respectivamente, dos asteroides 243 Ida e 433 Eros são instáveis devido às suas características físicas e dinâmicas.

Esses resultados mostram que nossa análise generalizada coincide com os resultados obtidos para um dado asteroide que pode ser modelado como um tripolo de massa em rotação.

## 7.5 Considerações

As propriedades dinâmicas do tripolo de massa em rotação foram abordadas neste Capítulo. O tripolo de massa em rotação consiste em três massas pontuais cuja forma geométrica depende da forma dos asteroides em análise.

Observamos que o potencial gravitacional depende de três parâmetros livres, que são: a razão de força, a razão de massa e o ângulo azimutal. Observamos que a quantidade de pontos de equilíbrio que surgem depende da combinação desses parâmetros livres, podendo ser encontrado de cinco a oito pontos de equilíbrio. A tendência de variar a localização dos pontos de equilíbrio de acordo com os parâmetros livres é determinada.

Também analisamos a estrutura topológica das curvas de velocidade zero em relação ao ângulo azimutal. Observamos que as curvas de velocidade zero em torno do tripolo de massa em rotação apresentam alterações significativas devido à forma convexa do asteroide.

Analisando as equações linearizadas, observamos que a condição de estabilidade dos pontos de equilíbrio na região  $C$  e  $D$  dependem de  $k$ ,  $\mu^*$  e  $\Phi$ . Para a região  $C$ , observamos o surgimento de bifurcações quando  $k > 1$ . Por outro lado, a estabilidade dos pontos de equilíbrio na região  $D$  tem dois limites de transição de estabilidade

para qualquer valor de  $k$ . Nas duas regiões ( $C$  e  $D$ ), observamos que, à medida que aumentamos o valor de  $k$ , a região de estabilidade se torna maior.

Compreender a dinâmica de uma partícula sujeita ao campo gravitacional de um asteroide alongado é extremamente importante para a exploração desses corpos. Os resultados apresentados aqui forneceram uma caracterização global do comportamento dinâmico de uma partícula de massa infinitesimal em torno de um asteroide modelado como um tripolo de massa em rotação. Isso permitiu uma melhor compreensão dos principais fatores que influenciam a estrutura topológica do campo gravitacional na vizinhança de asteroides com formato convexo. Modelos mais complexos, como o método poliédrico, são muito mais precisos e amplamente utilizados na análise de um asteroide específico, mas o presente modelo provou ser útil no fornecimento de informações gerais sobre famílias de asteroides semelhantes ao modelo do tripolo.

## 8 UM MODELO DE PARTÍCULAS LIGADAS PARA ASTEROIDES ALONGADOS COM DISTRIBUIÇÃO DE MASSA TRIDIMENSIONAL

O objetivo do presente Capítulo é desenvolver um modelo simplificado para descrever os campos gravitacionais de asteroides alongados. A relação entre o modelo simplificado e o asteroide real é construída olhando as localizações dos pontos de equilíbrio. O modelo proposto consiste em representar um asteroide alongado usando um sistema de ligação de partículas triplas distribuídas no espaço tridimensional. É uma extensão do modelo do Capítulo anterior que se concentravam apenas em modelos bidimensionais. Um método de otimização não linear é usado para determinar os parâmetros de nosso modelo, minimizando os erros de todos os pontos de equilíbrio externos em relação às soluções calculadas com um modelo mais realista, o modelo de poliedro, que se assume serem os valores reais de o sistema.

O trabalho desenvolvido neste Capítulo foi publicado na Revista *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (SANTOS et al., 2021).

### 8.1 Introdução

Como mencionado no Capítulo 7, Lan et al. (2017) propôs o modelo de tripolo de massa em rotação simétrica argumentando que pequenos corpos convexos podem ser aproximados por este modelo. Lan et al. (2017) mostrou que, a partir de cinco parâmetros (que são determinados com a ajuda do modelo poliédrico), é possível definir a forma geométrica e obter as características físicas de um asteroide, obtendo assim seu campo gravitacional.

O modelo usando a simetria axial formado por uma ligação de partículas tripla, usado por Lan et al. (2017), considera os pontos de massa distribuído no plano  $xy$  do asteroide (configuração bidimensional). Mas sabemos que os asteroides têm uma distribuição espacial de massa (eixo  $xyz$ ). Diante disso, o objetivo deste trabalho é melhorar o modelo bidimensional simétrico de ligação tripla de partículas (tripolo 2D), mantendo um formato simplificado, mas considerando a modelagem matemática tridimensional, dando mais um passo em direção a um cenário mais realista.

Contamos com a otimização não linear para encontrar os parâmetros do nosso modelo proposto, como veremos mais adiante neste Capítulo. As vantagens deste modelo são descritas a seguir.

- i) Como o modelo proposto considera a distribuição de massa em três dimensões, este modelo reproduz a dinâmica do veículo espacial de maneira mais realista quando comparado ao tripolo de massa em rotação com simetria axial bidimensional, e, conseqüentemente, que o modelo dipolo de massa em rotação.
- ii) Embora este seja um modelo simplificado, é benéfico realizar uma investigação qualitativa para analisar os efeitos dos parâmetros do modelo na dinâmica orbital. Análises qualitativas podem ser usadas para investigar os efeitos de alguns parâmetros, tais como relacionar as características do movimento ao redor de asteroides alongados e as propriedades dinâmicas do corpo (YANG et al., 2015) ou analisar a distribuição de órbitas periódicas estáveis próximo ao plano equatorial (LAN et al., 2017), etc. Além disso, a análise qualitativa tem o potencial de realizar um projeto preliminar de missão real (YANG et al., 2018), deixando estudos detalhados para um estágio posterior baseado em modelos mais precisos, que exigem mais tempo computacional, mas estudam um pequeno número de trajetórias.

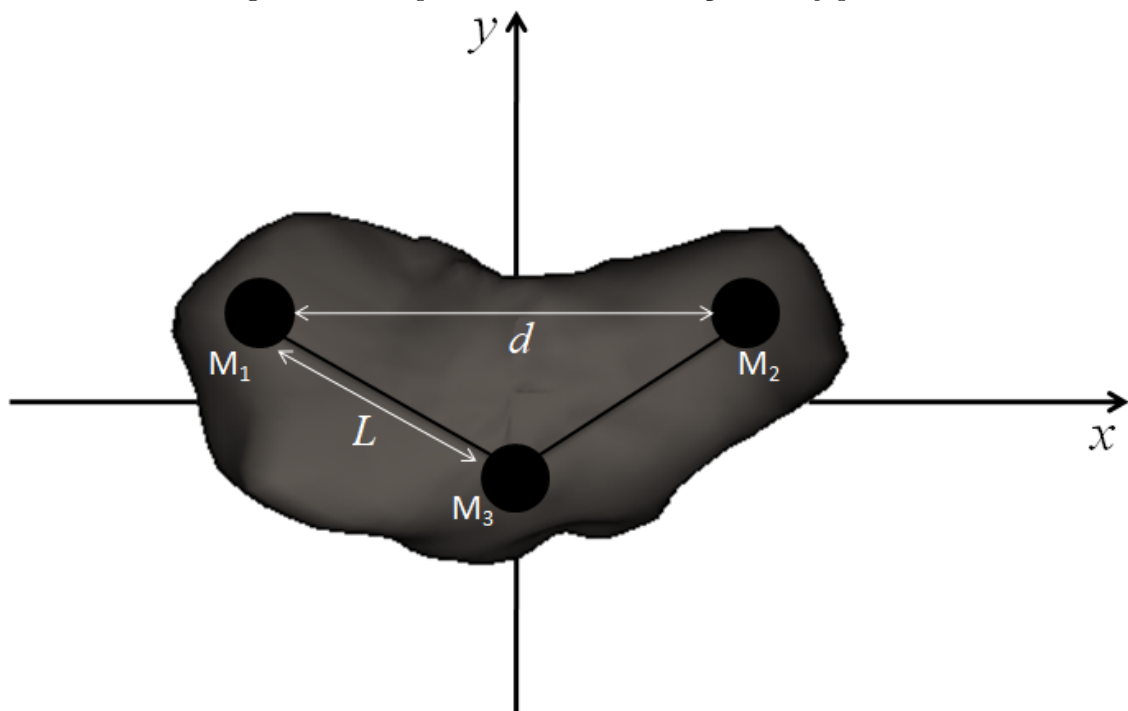
Este Capítulo está organizado da seguinte forma. A Seção 8.2 fornece a equação normalizada do movimento de uma partícula de massa pontual em torno de asteroides alongados que podem ser modelados como um tripolo de massa em rotação com simetria axial bidimensional e tridimensional. Uma equação é fornecida de forma geral, onde podemos derivar a equação do movimento para as situações planares ou espaciais dos pontos de massas no asteroide na estrutura relativa e girante. Posteriormente, a metodologia adotada para determinar os parâmetros do modelo simplificado usando um método de otimização não linear é apresentada na Seção 8.3. Na Seção 8.4, a metodologia e o modelo propostos são aplicados a três asteroides irregulares: 1620 Geographos, 433 Eros e 243 Ida. Uma comparação do tripolo de massa em rotação tridimensional com simetria axial e do tripolo de massa em rotação bidimensional com simetria axial em relação ao modelo poliédrico é realizada na Seção 8.4.1, cujo objetivo é mostrar a vantagem deste novo modelo. Na Seção 8.6, realizamos simulações numéricas em que construímos grades de condições iniciais, relacionando o semi-eixo maior e a excentricidade, para caracterizar regiões delimitadas e ilimitadas em torno dos asteroides 1620 Geographos, 433 Eros e 243 Ida. Finalmente, a Seção 8.8 fornece nossas conclusões.

## 8.2 Dinâmica do movimento

Nesta Seção, apresentamos o modelo matemático do problema restrito de quatro corpos, que é uma base para o modelo tridimensional do tripolo de massa em rotação.

A Figura 8.1 mostra três pontos de massa ( $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ ) dispostos dentro de um corpo (asteroide ou cometa) que possui uma forma irregular. As equações de movimento desenvolvidas no sistema de coordenadas girante consideram o sistema asteroide-espaçonave, o que significa que perturbações de outros corpos celestes e outras forças externas não são consideradas. Supõe-se que as hastes que conectam  $M_1$  a  $M_3$  e  $M_2$  a  $M_3$ , mostradas na Figura 8.1, tenham massa desprezível e o mesmo comprimento  $L$ . Esse comprimento  $L$  (em unidade canônica) pode variar dependendo do asteroide (ou cometa) em estudo. A distância entre  $M_1$  e  $M_2$  é indicada por  $d$  e é definida como 1 unidade canônica.

Figura 8.1 - Tripolo de massa em rotação no  $xy$  plano.

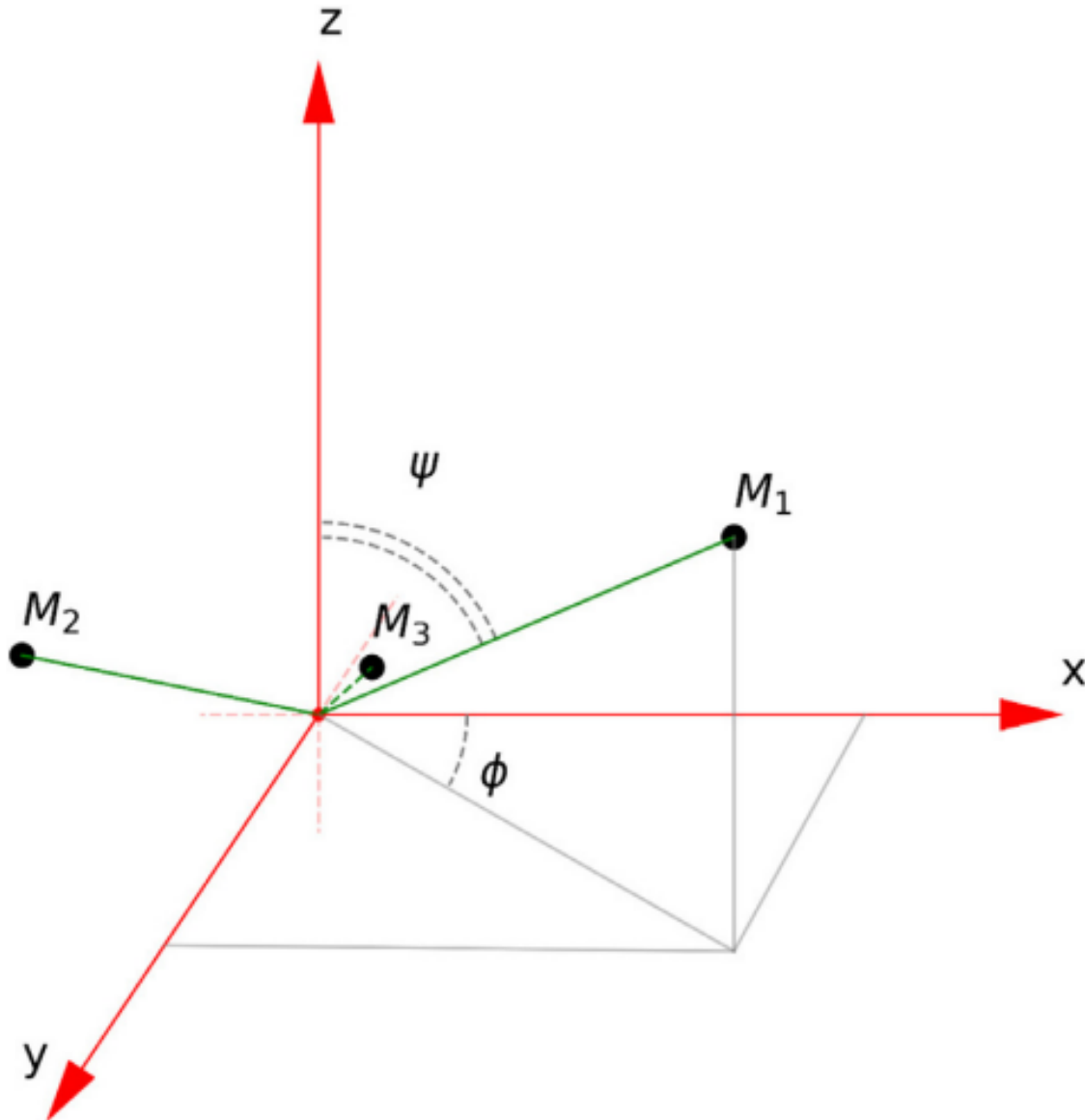


Observe na Figura 8.1 que é possível ver a disposição dos pontos de massa no plano  $xy$ . Como este estudo utiliza um modelo tridimensional, temos que analisar o arranjo desses pontos de massa no espaço. A Figura 8.2 fornece uma imagem representativa

da posição de  $M_2$  no espaço  $xyz$ . Para determinar a posição espacial completa dos corpos primários, consideramos dois ângulos e, denominaremos de ângulo azimutal ( $\Phi$ ) e ângulo de elevação ( $\Psi$ ). Observe que a configuração geométrica do asteroide (ou cometa) depende de  $\Phi$  e  $\Psi$ .

Quando  $\Phi = 0^\circ$ , o corpo celeste tem a posição  $y = 0$ . Quando  $\Psi = 90^\circ$ , temos o caso restrito, cujo modelo é o tripolo de massa em rotação planar (bidimensional). Consideramos que o centro de massa do asteroide é a origem do sistema de referência ( $xyz$ ).

Figura 8.2 - Perspectiva das posições dos corpos  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  no espaço tridimensional.



Neste trabalho, consideramos que ambas as hastes têm comprimento  $L$ , fazem o mesmo ângulo  $\Phi$ , em magnitude, com o eixo  $x$  e o mesmo ângulo  $\Psi$  com o eixo  $z$ .

Agora, supomos que uma partícula de massa desprezível esteja localizado na posição  $P(x, y, z)$ . A unidade de tempo considerada aqui é o período de rotação do tripolo 3D (fornecido por  $2\pi$ ). Supõe-se também que a soma das massas dos corpos primários tem o valor unitário. Também consideramos a unidade de medida de modo que a constante gravitacional universal  $G$  seja também unitária, então  $G(m_1 + m_2 + m_3) = 1$ , onde  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  são as massas de  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  em unidade canônica, respectivamente. Assumimos nesse estudo que  $m_1 = m_2$ . As coordenadas dos corpos  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ , em unidades canônicas, são, respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned}x_1 &= -L \cos \Phi \sin \Psi; , \\y_1 &= (1 - 2\mu^*)L \sin \Phi, \\z_1 &= L \cos \Phi \cos \Psi,\end{aligned}\tag{8.1}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= L \cos \Phi \sin \Psi, \\y_2 &= (1 - 2\mu^*)L \sin \Phi, \\z_2 &= L \cos \Phi \cos \Psi,\end{aligned}\tag{8.2}$$

$$\begin{aligned}x_3 &= 0, \\y_3 &= -2\mu^*L \sin \Phi, \\z_3 &= -2\mu^*L \cos \Phi \cos \Psi / (1 - 2\mu^*),\end{aligned}\tag{8.3}$$

em que  $\mu^*$  é a razão de massa definida como

$$\mu^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\tag{8.4}$$

A partir das unidades canônicas mencionadas anteriormente, a função lagrangiana

do sistema é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{rotating}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = & (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + (xy - yx)/2 + (x^2 + y^2)/2 \\ & + k(\mu^*/r_1 + \mu^*/r_2 + (1 - 2\mu^*)/r_3) \end{aligned} \quad (8.5)$$

onde

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \quad (8.6)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2} \quad (8.7)$$

$$r_3 = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2} \quad (8.8)$$

$k$  é denominada de razão de força e é dada pela Equação 8.9 (ZENG et al., 2015)

$$k = \frac{G^* M}{\omega^{2*} d^{*3}} \quad (8.9)$$

Observe que  $k$  é uma quantidade adimensional e depende do vetor de velocidade angular do asteroide, indicado por  $\omega^* = [0, 0, \omega^*]^T$ , em radianos por segundo,  $M$  é a massa total do corpo em estudo em quilogramas e  $d^*$  é a distância entre  $M_1$  e  $M_2$ , em metros e  $G^*$  é a constante de gravitação universal, dada no sistema internacional de unidades (LAN et al., 2017).

A formulação Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - \mathcal{L}_{rotating}. \quad (8.10)$$

Depois de algumas simplificações, nós obtemos o correspondente

$$\mathcal{H}(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2} - \frac{(xp_y - yp_x)}{2} - k \left( \frac{\mu^*}{r_1} + \frac{\mu^*}{r_2} + \frac{1 - 2\mu^*}{r_3} \right) \quad (8.11)$$

Observe que o Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  é uma função das coordenadas e do momento conjugado  $p$  da partícula. Devido ao fato de o Hamiltoniano ser independente do tempo, é possível dizer que seu valor é conservado (BENACCHIO, 2007; BROUCKE, 1968; WORTHINGTON, 2012).  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  estão associados ao momento conjugado da espaçonave em relação ao eixo  $x$ , eixo  $y$  e eixo  $z$ , respectivamente.



Definimos o potencial efetivo por

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + k \left( \frac{\mu^*}{r_1} + \frac{\mu^*}{r_2} + \frac{1 - 2\mu^*}{r_3} \right) \quad (8.12)$$

Da função Hamiltoniana, dada pela Equação 8.11, é possível determinar as equações de movimento da espaçonave no sistema de referência girante, dadas por:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \quad (8.13)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y, \quad (8.14)$$

$$\ddot{z} = \Omega_z. \quad (8.15)$$

onde  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$  e  $\Omega_z$  é o gradiente do potencial efetivo em função de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

As equações consideradas nesta Seção, em particular a função Hamiltoniana (Equação (8.11)) e as equações de movimento dadas pelas Equações (8.13 - 8.15), podem ser usadas para o modelo de tripolo de massa em rotação bidimensional (tripole 2D) ou tridimensional (tripole 3D). As equações do movimento dada pelas Equações 8.13 - 8.15 são necessárias para determinar os principais parâmetros do asteroide em estudo, conforme veremos na Seção 8.3.

Na Seção 8.6, realizamos simulações numéricas considerando a força gravitacional do corpo na qual queremos colocar um veículo espacial em órbita (asteroide ou cometa), levando em consideração a pressão da radiação solar e a atração gravitacional do Sol. A equação de movimento usada na simulação numérica considera um sistema de referência centrado no centro de massa do asteroide. Para isso, consideramos que o Sol orbita em torno desse sistema de referência. Para gerar as condições iniciais do Sol, foi feito o seguinte procedimento: Primeiro consideramos a equação do movimento circular (iniciando no perigeu) do Sol em torno do centro de massa do asteroide, dada por

$$r_a = \frac{a_{sun}(1 - e^2)}{(1 + e \cos[f_0 + \omega_{sun}T])}, \quad (8.16)$$

em que  $a_{sun}$  e  $e$  são, respectivamente, o semi-eixo maior do Sol e a excentricidade da órbita do Sol em torno do centro de massa do asteroide em estudo.  $f_0$  é a anomalia média inicial do Sol, que consideramos  $\pi$ . Finalmente,  $\omega_{sun}$  é a velocidade angular do sol em torno do centro de massa do asteroide em análise. Depois de encontrar  $r_a$  em metros, nós dividimos por  $d^*$  objetivando encontrar os valores de  $r_a$  em unidade

canônica. O fator de normalização  $d^*$  pode ser determinado pela Equação 8.9. Feito isso, nós podemos determinar a posição do Sol no sistema cartesiano, dado por

$$\begin{aligned}x_{sun} &= r_a \cos(f_0 + \omega_{sun}T) \\y_{sun} &= r_a \sin(f_0 + \omega_{sun}T)\end{aligned}\tag{8.17}$$

Podemos observar pela Equação 8.17 que consideramos o movimento do Sol circular em torno do centro de massa do asteroide (como se o Sol estivesse sempre no perigeu objetivando perturbar bastante o sistema). Os dados orbitais do Sol em relação ao centro de massa dos asteroides são mostrados na Tabela 8.1. Os dados fornecidos

Tabela 8.1 - Dados orbitais do Sol em relação ao centro de massa dos asteroides.

Asteroide Massa ( $\times 10^{15}$ kg)	$a_{sun}(\times 10^8 km)$	$e$	$\omega_{sun}(rad/s)$
Geographos 0,004	1,8629	0,3354	$1,43158 \times 10^{-7}$
243 Ida 100	4,281	0,0452	$4,11292 \times 10^{-8}$
433 Eros 6,69	2,181	0,223	$1,1306 \times 10^{-7}$

na Tabela 8.1 foram retirados do site da NASA que pode ser visto através do link <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/asteroidfact.html>.

A equação de movimento usada na simulação numérica é mostrada a seguir.

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{k\mu^*(x' - x'_1)}{r'_1{}^3} - \frac{k\mu^*(x' - x'_2)}{r'_2{}^3} - \frac{k(1 - 2\mu^*)(x' - x'_3)}{r'_3{}^3} - P_{rad_x} \\ &\quad + k_{sun} \frac{M_{sun}}{M_{ast}} \left( \frac{(x_{sun} - x')}{r'_{sun}{}^3} - \frac{x_{sun}}{r'_{sun}{}^3} \right),\end{aligned}\tag{8.18}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -\frac{k\mu^*(y' - y'_1)}{r'_1{}^3} - \frac{k\mu^*(y' - y'_2)}{r'_2{}^3} - \frac{k(1 - 2\mu^*)(y' - y'_3)}{r'_3{}^3} - P_{rad_y} \\ &\quad + k_{sun} \frac{M_{sun}}{M_{ast}} \left( \frac{(y_{sun} - y')}{r'_{sun}{}^3} - \frac{y_{sun}}{r'_{sun}{}^3} \right),\end{aligned}\tag{8.19}$$

$$\ddot{z} = -\frac{k\mu^*(z' - z'_1)}{r'_1{}^3} - \frac{k\mu^*(z' - z'_2)}{r'_2{}^3} - \frac{k(1 - 2\mu^*)(z' - z'_3)}{r'_3{}^3} - P_{rad_z} + k_{sun} \frac{M_{sun}}{M_{ast}} \left( \frac{(z_{sun} - z')}{r'_{sun}{}^3} - \frac{z_{sun}}{r_{sun}^3} \right), \quad (8.20)$$

onde  $k_{sun}$  é a razão de força do Sol,  $M_{sun}/M_{ast}$  é a massa do Sol em unidade canônica,  $x_{sun}$ ,  $y_{sun}$  e  $z_{sun}$  definem a posição do Sol no eixo  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Nas simulações, consideramos que o Sol está no plano  $xy$ , conseqüentemente,  $z_{sun} = 0$ . As posições dos corpos primários  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ , na estrutura inercial é dado pelas próximas equações, respectivamente.

$$\begin{aligned} x'_1 &= -L \cos \Phi \sin \Psi \cos T - (1 - 2\mu^*)L \sin \Phi \sin T, \\ y'_1 &= -L \cos \Phi \sin \Psi \sin T + (1 - 2\mu^*)L \sin \Phi \cos T, \\ z'_1 &= L \cos \Phi \cos \Psi, \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$\begin{aligned} x'_2 &= L \cos \Phi \sin \Psi \cos T - (1 - 2\mu^*)L \sin \Phi \sin T, \\ y'_2 &= L \cos \Phi \sin \Psi \sin T + (1 - 2\mu^*)L \sin \Phi \cos T, \\ z'_2 &= L \cos \Phi \cos \Psi, \end{aligned} \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} x'_3 &= 2\mu^*L \sin \Phi \sin T, \\ y'_3 &= -2\mu^*L \sin \Phi \cos T, \\ z'_3 &= -2\mu^*L \cos \Phi \cos \Psi / (1 - 2 * \mu^*). \end{aligned} \quad (8.23)$$

onde  $T$  é o tempo. A distância da partícula de massa pontual dos corpos  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ , no sistema relativa ao asteroide é, respectivamente, dada pelas Equações, 8.24 até 8.26. 8.26.

$$r_1 = \sqrt{(x' - x'_1)^2 + (y' - y'_1)^2 + (z' - z'_1)^2}, \quad (8.24)$$

$$r_2 = \sqrt{(x' - x'_2)^2 + (y' - y'_2)^2 + (z' - z'_2)^2}, \quad (8.25)$$

$$r_3 = \sqrt{(x' - x'_3)^2 + (y' - y'_3)^2 + (z' - z'_3)^2}. \quad (8.26)$$

Por outro lado,  $r'_{sun}$  e  $r_{sun}$  é a distância da partícula-Sol e a distância Sol-asteroide,

respectivamente, dadas pelas Equações 8.27 e 8.28.

$$r'_{sun} = \sqrt{(x' - x_{sun})^2 + (y' - y_{sun})^2 + (z' - z_{sun})^2}, \quad (8.27)$$

$$r_{sun} = \sqrt{x_{sun}^2 + y_{sun}^2 + z_{sun}^2}, \quad (8.28)$$

onde  $x_{sun}$ ,  $y_{sun}$  e  $z_{sun}$ , definem a posição do Sol no sistema inercial no eixo  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. O valor que adotamos para a massa da espaçonave nas simulações foi de  $m = 100$  kg e a área do painel solar foi de  $A = 1,0$   $m^2$ , então  $A/m = 0,01$   $m^2/kg$ .

### 8.3 Determinação dos parâmetros para o modelo simétrico de ligação tripla de partículas em 2D e 3D

Dois modelos diferentes de ligação tripla de partículas foram apresentadas nesta Tese, tripolo 2D (Seção 7) e tripolo 3D (Seção tripolo3D). Cada modelo de ligação de partículas possui parâmetros desconhecidos, e esses parâmetros precisam ser determinados para fornecer um conjunto completo de equações para o modelo. Neste estudo, considerando o modelo simplificado, a massa total e a velocidade angular dos asteroides são equivalentes aos valores reais desses mesmos asteroides. Portanto, o modelo de ligação de partículas triplas 2D possui apenas quatro parâmetros desconhecidos, que são  $\Phi$  [rad],  $L$  [unidade canônica],  $k$  [adimensional] e  $\mu^*$  [unidade canônica]. O modelo tridimensional de ligação de partículas triplas é mais complicado. Ele possui cinco parâmetros desconhecidos, que são  $\Phi$  [rad],  $\Psi$  [rad],  $L$  [unidade canônica],  $k$  [sem dimensão] e  $\mu^*$  [unidade canônica].

Os parâmetros desconhecidos são determinados usando as posições dos pontos de equilíbrio, semelhante à abordagem usada por Yang et al. (2018). Devido ao fato de que queremos determinar os principais parâmetros para representar o campo gravitacional de um asteroide específico considerando o modelo de ligação tripla, inicialmente focamos que só existe esse asteroide no espaço, uma vez que suas características físicas não dependem da presença de outros corpos celestes. A ideia principal é encontrar os parâmetros que geram pontos de equilíbrio o mais próximo possível dos obtidos usando o modelo poliédrico. A localização dos pontos de equilíbrio  $[\hat{x}_E, \hat{y}_E, \hat{z}_E]$  pode ser determinada como mostrado pela Equação 8.29.

$$\Omega_x(\hat{x}_E, \hat{y}_E, \hat{z}_E) = \Omega_y(\hat{x}_E, \hat{y}_E, \hat{z}_E) = \Omega_z(\hat{x}_E, \hat{y}_E, \hat{z}_E) = 0. \quad (8.29)$$

A ideia de Yang et al. (2018) é encontrar os parâmetros do modelo do tripolo que

minimizem as diferenças de todos os pontos de equilíbrio externos entre o modelo simplificado e o poliédrico. O método usado para determinar os parâmetros para o modelo do tripolo de massa em rotação tridimensional é descrito abaixo.

As variáveis de otimização para o modelo simplificado são  $X = [\Phi, \Psi, L, k, \mu^*]$ . Antes da otimização, definimos as restrições para cada variável usando os limites inferiores  $[\Phi_{min}, \Psi_{min}, L_{min}, k_{min}, \mu_{min}^*]$  e o limites superiores  $[\Phi_{max}, \Psi_{max}, L_{max}, k_{max}, \mu_{max}^*]$  para esses parâmetros. Para problemas de otimização não linear, o índice de desempenho é definido como

$$\mathbf{J}(\Phi, \Psi, L, k, \mu^*) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\hat{x}_{T_i} d^* - x_{P_i})^2 + (\hat{y}_{T_i} d^* - y_{P_i})^2 + (\hat{z}_{T_i} d^* - z_{P_i})^2}, \quad (8.30)$$

onde  $[\hat{x}_{T_i}, \hat{y}_{T_i}, \hat{z}_{T_i}]$  são as posições, em unidades canônicas, dos pontos de equilíbrio obtidos pelos métodos simplificados (modelos tripolo 2D ou 3D). Observe que  $d^*$  pode ser obtido na Equação 8.9. Por outro lado,  $[x_{P_i}, y_{P_i}, z_{P_i}]$  representam os locais dos pontos de equilíbrio (em metros) obtidos pelo modelo do poliedro. O índice  $i$  corresponde ao  $i$ -ésimo ponto de equilíbrio e, finalmente,  $n$  é o número total de pontos de equilíbrio externos. As restrições de igualdade ( $c_{eq} = 0$ ) para os modelos do tripolo 2D e 3D são mostradas nas Equações. 8.31 e 8.32, respectivamente,

$$c_{eq} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 - 1 \\ L \cos \Phi - 1/2 \end{bmatrix}, \quad (8.31)$$

$$c_{eq} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 - 1 \\ L \cos \Phi \sin \Psi - 1/2 \end{bmatrix}. \quad (8.32)$$

Estas restrições são determinadas para determinar os parâmetros em unidades canônicas, uma vez que a soma das massas tem que ser igual a unidade e o comprimento total das hastes ( $2L$ ) tem que valer uma unidade canônica.

Matematicamente, podemos escrever o índice de desempenho como uma minimização restrita, conforme mostrado na Equação 8.33.

$$\min \mathbf{J}(\Phi, \Psi, L, k, \mu^*) \text{ de tal forma que } c_{eq} = 0, \quad (8.33)$$

onde  $\mathbf{J}(\Phi, \Psi, L, k, \mu^*)$  é uma função que retorna um escalar e  $c_{eq}$  são funções que retornam vetores. Aqui, usamos rotinas de otimização não linear desenvolvidas pelo Matlab para encontrar as soluções ideais com o objetivo de minimizar  $\mathbf{J}$ . O problema de otimização é definido e resolvido com um método de programação não

linear (PNL).

## 8.4 Aplicação a asteroides alongados realistas

Nesta Seção, aplicamos os modelos de ligação de partículas mencionados nas seções anteriores a três asteroides alongados realistas. Os asteroides são: 1620 Geographos, 433 Eros e 243 Ida. O método de otimização é usado para determinar os parâmetros do modelo simplificado, conforme mostrado nesta Seção. Depois disso, demonstramos o desempenho aprimorado do modelo de ligação tripla de partículas com simetria axial tridimensionais em relação ao modelo de ligação tripla de partículas com simetria axial bidimensional.

### 8.4.1 Parâmetros da amostra de asteroides alongados

Os parâmetros físicos e orbitais dos asteroides 1620 Geographos, 433 Eros e 243 Ida foram obtidos de (ROZITIS; GREEN, 2014; CARRY, 2012) e (BAER et al., 2011), respectivamente, e podem ser encontrados na Tabela 8.2. Neste estudo, também aplicamos a estrutura de gravidade Mascon usando uma fonte poliédrica modelada para representar com precisão o campo gravitacional desses asteroides (CHANUT et al., 2015a). Recomendamos que os leitores revisem os detalhes deste método em (ALJBAAE et al., 2017).

Depois de adaptar a forma de cada asteroide ao nosso estudo, de acordo com o procedimento apresentado em (CHANUT et al., 2015b), usamos a abordagem Mascon para calcular com precisão as posições dos pontos de equilíbrio. A tabela 8.2 fornece os resultados.

Lembrando que consideraremos apenas os pontos de equilíbrio externos, devido ao fato de que os pontos de equilíbrio interno não têm significado físico.

Para realizar as simulações, é necessário determinar o limite de restrições de cada asteroide em estudo usando o modelo de ligação de partículas, onde são escolhidas da seguinte forma:

a) modelo 3D de ligação tripla de partículas:

Para cada asteroide,  $[\Phi_{min}, \Phi_{max}]$  são definidos como  $[-0,5, 0,5]$  rad,  $[\Psi_{min}, \Psi_{max}]$  são definidos como  $[1.39626, 1.91986]$ ,  $[L_{min}, L_{max}]$  são definidos como  $[0, 2]$ ,  $[k_{min}, k_{max}]$  são definidos como  $[0, 9]$  e  $[\mu_{min}^*, \mu_{max}^*]$  estão definidos como  $[0,001, 0,999]$

Tabela 8.2 - Parâmetros físicos e Mascon dos asteroides 1620 Geographos, 433 Eros and 243 Ida.

<b>Asteroide</b>	<b>densidade aparente</b> ( $g\ cm^{-3}$ )	<b>Período de rotação</b> (hours)	<b>M</b> (kg)	<b>Vertices &amp; Faces</b>
1620 Geographos	$2.15 \pm 0.5$	5.2233	$1.65 \times 10^{13}$	1022 & 2040
433 Eros	$2.67 \pm 0.03$	5.2702	$6.69 \times 10^{15}$	856 & 1708
243 Ida	$2.35 \pm 0.29$	4.63	$3.82 \times 10^{16}$	1022 & 2040

Tabela 8.3 - Posição dos pontos de equilíbrio para 1620 Geographos, 433 Eros e 243 Ida.

<b>Asteroide</b>	$E_1$ (km)	$E_2$ (km)	$E_3$ (km)	$E_4$ (km)
1620 Geographos	[2.6318, 0.0046]	[ - 0.0352, 1.9315, 0.0017]	[ - 2.6812, 0.2003, - 0.0039]	[ - 0.0196, -1.9698, 0.0019]
433 Eros	[19.1246, 0.1449]	[-2.5756, 0.4637, 14.7338, -0.06604]	[-19.6711, -3.2861, - 0.1231]	[-0.4469, -13.991, - 0.0791]
243 Ida	[29.7950, 0.6870]	[-2.5972, -0.5688, 25.9245, - 0.1113]	[-30.3092, -1.8763, 0.3958]	[-0.4906, -25.7145, - 0.0993]

b) modelo 2D de ligação tripla de partículas:

Para cada asteroide,  $[\Phi_{min}, \Phi_{max}]$  são configurados para  $[-0,5, 0,5]$  rad,  $[L_{min}, L_{max}]$  são configurados para  $[0, 2]$ ,  $[k_{min.}, k_{max}]$  estão definidos como  $[0, 9]$  e  $[\mu_{min}^*, \mu_{max}^*]$  estão definidos para  $[0,001, 0,999]$

As restrições de limite dos parâmetros geométricos  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $L$  são determinadas com base nas formas reais dos asteroides. Devido à forma geométrica do corpo e às informações obtidas dos pontos de equilíbrio do modelo de alta fidelidade, observamos que os pontos de equilíbrio  $E_1$  e  $E_3$  não possuem valores altos no eixo  $y$ , fazendo-nos considerar o ângulo do azimute variando de  $-30^\circ$  a  $+30^\circ$ . Observando os valores dos pontos de equilíbrio no eixo  $z$ , é possível notar que esses asteroides não possuem uma distribuição de massa muito alta no eixo  $z$ , portanto, consideramos o ângulo de elevação variando entre  $-20^\circ$  e  $+20^\circ$ . Finalmente, sabendo que, pela definição teórica de nosso estudo, de que a distância entre  $M_1$  e  $M_2$  é uma unidade canônica, logo concluímos que o valor de  $L$  não está muito acima desse valor numérico.

As restrições de limite dos parâmetros físicos,  $k$  e  $\mu^*$ , foram determinadas da seguinte forma. Através dos artigos da literatura que utilizam o modelo de partículas ligadas (LAN et al., 2017; YANG et al., 2018; ZENG et al., 2015), observamos que o valor de  $k$  encontrado nos asteroides variam entre 0,4 e 9, por isso consideramos como estimativa inicial os valores entre 0 e 9. Por outro lado, as restrições de contorno das massas foram definidas com base em seus intervalos teóricos.

Após a otimização, se o valor de um dos parâmetros estiver próximo do limite do contorno, modificamos sua faixa e realizamos a otimização novamente. Este procedimento é realizado até que os valores dos parâmetros otimizados estejam localizados entre os limites especificados. As estimativas iniciais para os modelos 2D e 3D foram escolhidos da seguinte maneira:

a) modelo 3D de ligação tripla de partículas:

Para 1620 Geographos, é  $[\Phi; \Psi; L; k; \mu^*] = [0,36; 1,5; 1; 0,2; 0,24]$ , 433 Eros é  $[\Phi; \Psi; L; k; \mu^*] = [0,3, 1,5, 0,5, 0,2, 0,28]$  e para 243 Ida é  $[\Phi, \Psi, L, k, \mu^*] = [0,3, 1,5, 1, 0,4, 0,2]$ .

b) modelo 2D de ligação tripla de partículas:

Para 1620 Geographos, é  $[\Phi; \Psi; L; k; \mu^*] = [0,36; \pi/2; 1; 0,2; 0,24]$ , 433 Eros é  $[\Phi, \Psi; L; k; \mu^*] = [0,3; \pi/2; 0,5; 0,2; 0,28]$  e 243 Ida é  $[\Phi; \Psi; L; k; \mu^*] = [0,3; \pi/2; 1; 0,4; 0,2]$



Os valores ótimos dos parâmetros  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $L$ ,  $k$  e  $\mu^*$  obtidos usando o método de otimização mencionado acima são mostrados nas Tabelas 8.4 e 8.5, onde vemos o índice de desempenho  $J_{max}$  e  $J_{min}$ . Esses índices de desempenho fornecem os erros relativos (máximo e mínimo) para cada ponto de equilíbrio. Esses índices são definidos da seguinte forma

$$\mathbf{J}_{\max}(\Phi, \Psi, L, k, \mu^*) = \max \left( \frac{\sqrt{(\hat{x}_{T_i}d - x_{P_i})^2 + (\hat{y}_{T_i}d - y_{P_i})^2 + (\hat{z}_{T_i}d - z_{P_i})^2}}{L} \right) \times 100\%, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (8.34)$$

$$\mathbf{J}_{\min}(\Phi, \Psi, L, k, \mu^*) = \min \left( \frac{\sqrt{(\hat{x}_{T_i}d - x_{P_i})^2 + (\hat{y}_{T_i}d - y_{P_i})^2 + (\hat{z}_{T_i}d - z_{P_i})^2}}{L} \right) \times 100\%, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (8.35)$$

Foi calculado o índice de desempenho de cada ponto de equilíbrio, mas na Tabela 8.5 nós inserimos apenas o ponto de equilíbrio que mais divergiu em relação ao modelo poliédrico ( $J_{max}$ ) e o que mais convergiu ( $J_{min}$ ).

## 8.5 Comparação entre o modelo simplificado e o poliédrico

Verificamos que as posições dos pontos de equilíbrio no modelo simplificado em comparação ao modelo de poliedros são próximas, mostrando a primeira evidência da validação do modelo simplificado. Em seguida, analisamos as classificações dos pontos de equilíbrio dos três asteroides estudados neste Capítulo e descobrimos que nossa análise é consistente com a análise feita usando o modelo de poliedros. Em seguida, comparamos os erros relativos entre o potencial estimado pelo modelo de tripole 3D e a abordagem Mascon (CHANUT et al., 2015a) para justificar o modelo simplificado. O erro relativo  $U_{rel}$  calculado é dado pela Equação 8.36

$$U_{rel} = (U_{inercial\ Tri} - U_{inercial\ polied})/U_{inercial\ polied}; \quad (8.36)$$

onde  $U_{inercialTri}$  é o potencial do asteroide modelado como um tripolo de massa em rotação no sistema inercial e  $U_{Polinercialpolied}$  é o potencial gravitacional do asteroide modelado utilizando o método do poliédrico no sistema inercial. Observe nas Figuras 8.3, 8.4 e 8.5 os erros relativos dos potenciais gravitacionais entre os dois modelos (modelo simplificado e poliédrico) do asteroide 1620 Geographos, 433 Eros e 243 Ida,

Tabela 8.4 - Resultados de otimização para o modelo 3D tripole.

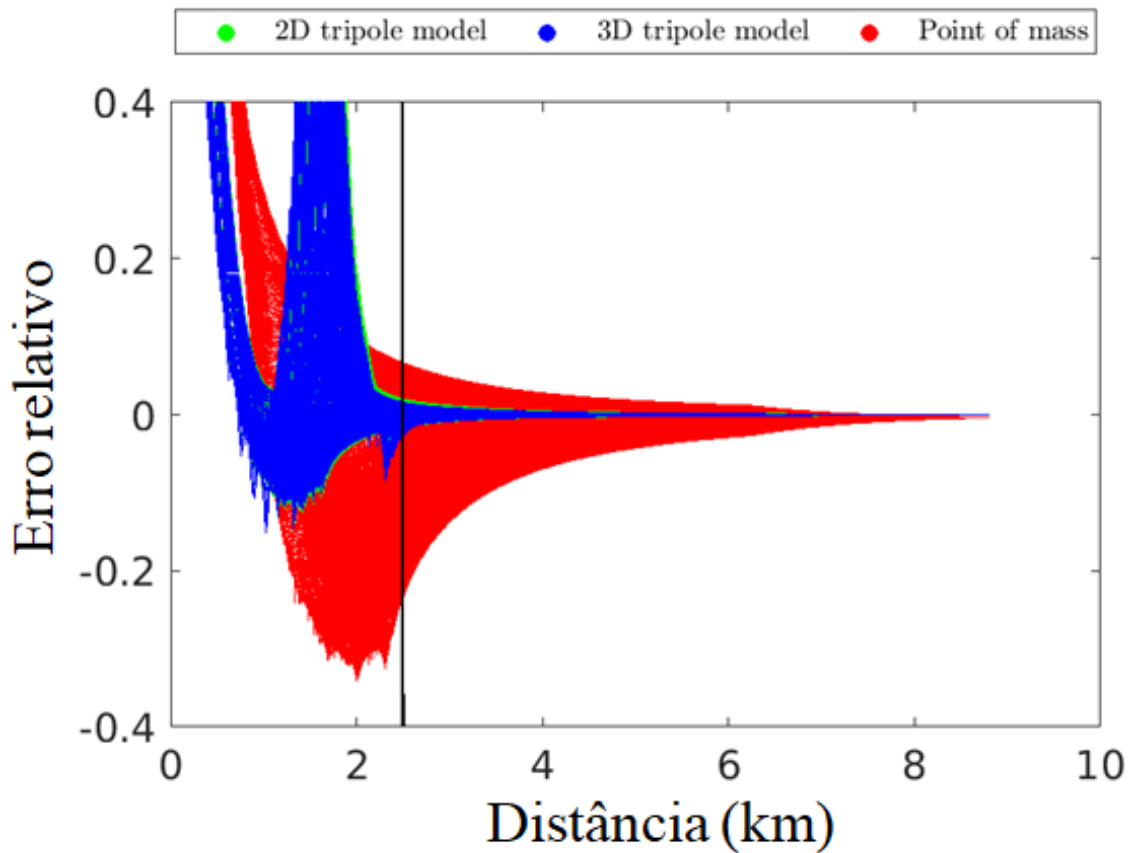
<b>Asteroide</b>	$\Phi$ [deg]	$\Psi$ [deg]	$L$ [c. u.]	$k$ [adim]	$\mu^*$ [c. u.]	$\mathbf{J}$ [km]	$J_{max}$ %	$J_{min}$ %
1620 Geographos	7.1780	89.7773	0.5039	0.2991	0.2024	0.120	1.5342	0
433 Eros	-19.892	88.7891	0.5318	0.5195	0.2815	1.743	3.313	0
243 Ida	-6.3105	87.2621	0.5036	0.6529	0.1636	2.005	2.975	0

Tabela 8.5 - Resultados de otimização para o modelo 2D tripole.

<b>Asteroide</b>	$\Phi$ [grau]	$\Psi$ [grau]	$L$ [u. c.]	$k$ [adim]	$\mu^*$ [u. c.]	$\mathbf{J}$ [km]	$J_{max}$ %	$J_{min}$ %
1620 Geographos	7.0884	90	0.5038	0.2843	0.1971	0.147	1.348	0.373
433 Eros	-18.935	90	0.5286	0.4454	0.2619	2.144	3.529	1.359
243 Ida	-7.3614	90	0.5041	0.7169	0.1672	5.020	7.438	3.125

respectivamente. A linha vertical preta refere-se à posição da superfície do asteroide em relação ao centro de massa do asteroide. O lado esquerdo da linha preta vertical é o erro relativo do potencial dentro do asteroide e não tem significado para o objetivo deste trabalho. Por outro lado, fora do asteroide, observamos o erro relativo do potencial quando consideramos o asteroide como um ponto de massa (vermelho), modelo do tripolo 2D (verde) e modelo do tripolo 3D (azul).

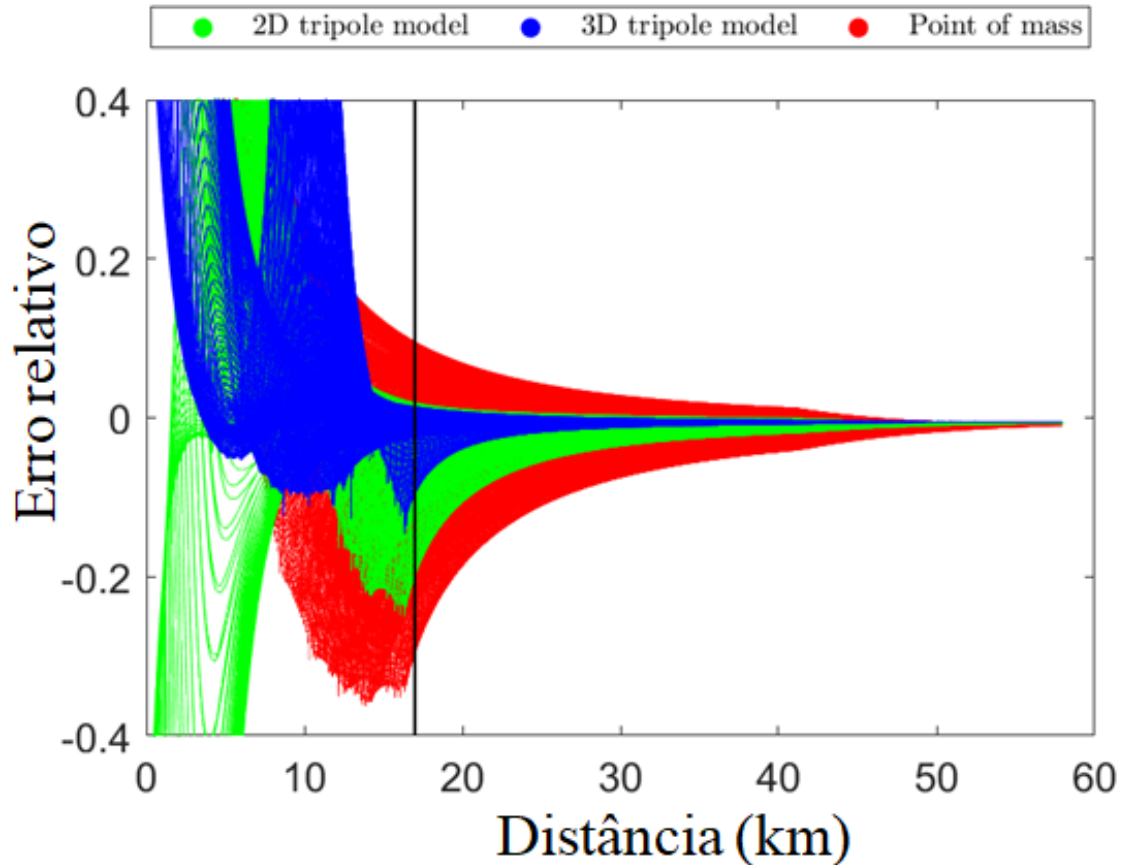
Figura 8.3 - Erro relativo do potencial gravitacional do asteroide 1620 Geographos.



Vemos na Figura 8.3 que, quando a espaçonave está perto do asteroide 1620 Geographos (a menos de 10 km do centro), não podemos considerar o asteroide como um ponto de massa, devido ao alto erro relativo entre os potenciais gravitacionais. Por outro lado, quando modelamos o asteroide como um tripolo de massa em rotação (modelo 2D ou 3D), o resultado mostra uma boa concordância entre os modelos. O modelo de tripolo 3D tem quase a mesma precisão que o modelo de tripolo 2D, devido ao fato da distribuição de massa desse asteroide estar predominantemente no eixo  $xy$ .

A Figura 8.4 mostra o erro relativo entre os potenciais do asteroide 433 Eros. Em contraste com o 1620 Geographos, o modelo do tripolo 3D é mais preciso que o modelo 2D quando a espaçonave está a menos de 60 km do centro do asteroide.

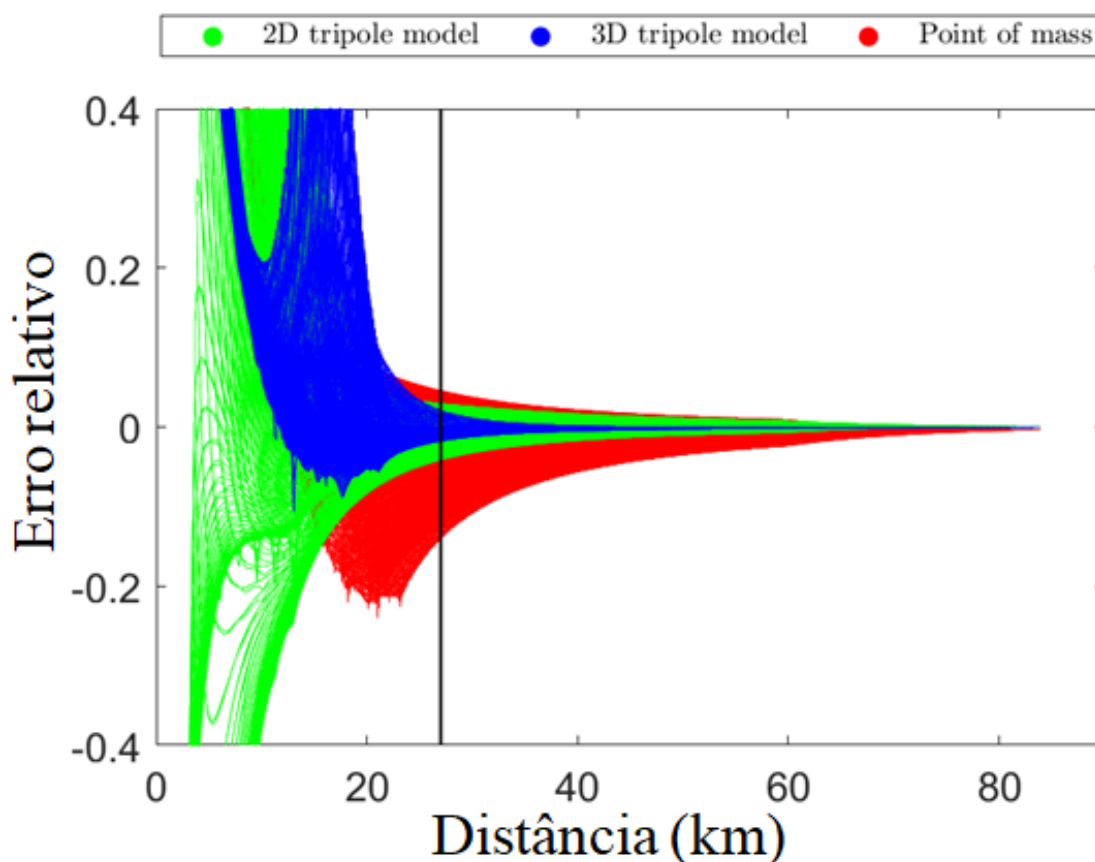
Figura 8.4 - Erro relativo do potencial gravitacional do asteroide 433 Eros.



Finalmente, a Figura 8.5 mostra um comportamento semelhante ao caso de 433 Eros. O modelo do tripolo 3D para o asteroide 243 Ida é mais preciso que o modelo 2D.

Estes resultados indicam que o modelo do tripolo 3D aproxima com boa precisão o potencial externo de alguns asteroides com formatos alongados. Além disso, vale ressaltar que o modelo do tripolo pode aproximar potenciais externos de 1030225 pontos distribuídos uniformemente no espaço  $xyz$  em torno de um asteroide em cerca de 3 segundos usando um processador Intel de 3,6 GHz, isto é cerca de 200 vezes mais rápido que a abordagem Mascon mostrada em [Chanut et al. \(2015a\)](#), que leva cerca de 10 minutos.

Figura 8.5 - Erro relativo do potencial gravitacional do asteroide 243 Ida.



Assim, para uma primeira análise de uma missão espacial cujo objetivo é visitar um asteroide, é possível usar o modelo do tripolo 3D para obter resultados preliminares, uma vez que este modelo se aproxima do modelo de alta precisão (modelo poliédrico) e exige muito menos tempo computacional para realizar as simulações.

## 8.6 Investigação numérica

Uma espaçonave que fica próxima à superfície de um asteroide passa por perturbações complexas, que podem levá-la a colidir com o asteroide ou até escapar do domínio de seu campo gravitacional. Compreender essas perturbações é extremamente importante para determinar regiões no espaço onde é possível encontrar órbitas naturais ao redor de asteroides. Essas regiões permitem que uma espaçonave orbite um asteroide por um longo tempo, que chamaremos de regiões limitadas. Por outro lado, nas regiões ao redor dos asteroides, onde nenhuma órbita natural é possível, chamaremos regiões ilimitadas.

A presente Seção foi desenvolvida com o objetivo de encontrar possíveis regiões nas proximidades dos asteroides 1620 Geographos, 433 Eros e 243 Ida, capazes de manter uma espaçonave por um longo tempo sem a necessidade de manobras orbitais.

Nas simulações realizadas aqui, consideramos o campo gravitacional do asteroide (modelado como um tripolo de massa em rotação tridimensional) no qual se deseja orbitar o veículo, o campo gravitacional do Sol (modelado como ponto de massa), bem como a pressão da radiação solar. Os resultados são mostrados no sistema de referência fixo no asteroide com uma origem que coincide com o centro de massa do asteroide em análise. Nas simulações que levamos em consideração a pressão da radiação solar, assumimos que a relação área/massa ( $A/m$ ) é equivalente a  $0,01 \text{ m}^2/\text{kg}$ . A metodologia adotada e os resultados obtidos são descritos a seguir.

### 8.6.1 Metodologia das simulações numéricas

Para determinar as condições iniciais da espaçonave para iniciar as simulações, inicialmente consideramos a posição da espaçonave em termos dos elementos Keplerianos  $\kappa = [a, e, i, \Omega, \omega, f]$ . Para realizar as simulações numéricas e construir as grades de condições iniciais, iniciamos a órbita com excentricidade 0 e variamos até excentricidade = 0,99, utilizando um passo de 0,01. O semi-eixo maior da espaçonave varia de uma posição inicial  $a_i$  para a posição final  $a_f$ , cujos valores dependem do asteroide que estamos analisando. Neste estudo, investigamos órbitas diretas ( $i_0 = 0^\circ$ ) e órbitas retrógradas ( $i_0 = 180^\circ$ ). O tempo máximo de integração é de 365 dias. Utilizamos o método Runge-Kutta 7/8 de passo variável com um intervalo de tempo, em unidade canônica, de 0,01. Consideramos os elementos Keplerianos iniciais como mostrado na Tabela 8.6.

Tabela 8.6 - Elementos keplerianos iniciais.

Semi-eixo maior inicial [metros]	$a_i \in [a_{initial}, a_{final}]$
Excentricidade inicial [adim]	$e_0 \in [0, 0.99]$
Inclinação inicial [grau]	$i_0 \in [0 \text{ and } 180]$
Ascensão reta do nodo ascendente [grau]	$\Omega_0 = 0$
Argumento do periastro inicial [grau]	$\omega_0 = 0$
Anomalia verdadeira inicial [grau]	$f_0 = 0$

Nesta consideração inicial, assumimos que existe apenas o asteroide que desejamos orbitar e a espaçonave. O asteroide, inicialmente, é modelado como um ponto de massa. Com base nas condições iniciais (a órbita osculadora da espaçonave), ob-

temos as condições iniciais de posição ( $\rho_0 = ([\mathbf{x}'_0, \mathbf{y}'_0, \mathbf{z}'_0]^T)$ ) e velocidade ( $\eta_0 = ([\dot{\mathbf{x}}'_0, \dot{\mathbf{y}}'_0, \dot{\mathbf{z}}'_0]^T)$ ) da espaçonave no sistema cartesiano, dada por  $\mathbf{X}_0 = [\rho_0, \eta_0]$ , a ser usada nas equações de movimento.  $\rho_0$  e  $\eta_0$  definem o vetor de estado da nave espacial em  $t = 0$  no problema restrito, onde o vetor  $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^6$ ,  $\rho_0 \in \mathbb{R}^3$  (posição inicial) e  $\eta_0$  (velocidade inicial)  $\in \mathbb{R}^3$ . As condições iniciais obtidas, no plano cartesiano, podem ser escritas como,  $\mathbf{X}_0 = [x'_0, 0, 0, 0, \pm \dot{y}'_0, 0]^T$ . Atribuimos  $+\dot{y}'_0$  quando a órbita é direta ( $i_0 = 0^\circ$ ) e  $-\dot{y}'_0$  para órbitas retrógradas ( $i_0 = 180^\circ$ ).

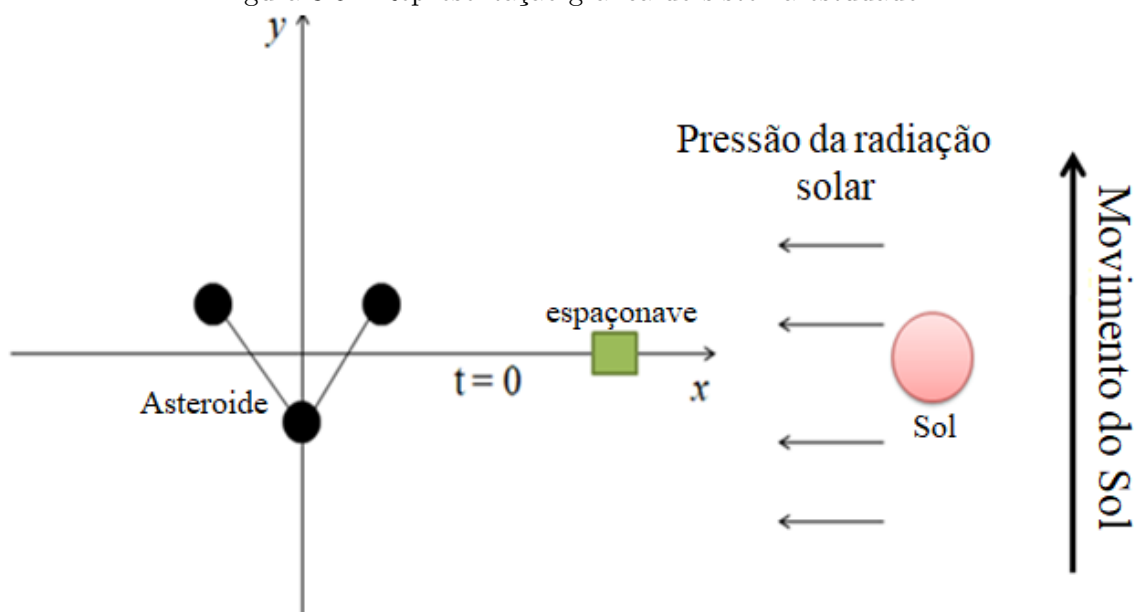
Uma vez que as condições iniciais são determinadas no sistema cartesiano, a integração numérica é realizada, incluindo a forma do asteroide (tripolo 3D) e a perturbação do sol. Em relação à perturbação do Sol, em algumas simulações, consideramos apenas a perturbação da gravidade solar, enquanto em outras consideramos tanto a perturbação da gravidade solar quanto a pressão da radiação solar. Inicialmente, ( $t = 0$ ) os três corpos (Asteroide, espaçonave e Sol) estão alinhados, conforme mostrado na Figura 8.6 (fora de escala). Toda simulação é realizada no sistema fixo no asteroide. Para determinar as condições iniciais do Sol, atribuimos o valor do semi-eixo maior e excentricidade de acordo com as referências Rozitis e Green (2014), CARRY (2012), Baer et al. (2011) para os 1620 Geographos, 433 Eros e 243 Ida, respectivamente. Os outros elementos keplerianos são considerados iguais a zero. Isso significa que, inicialmente, o asteroide está localizado no periélio de sua órbita ao redor do Sol. Escolhemos esta posição inicial porque o asteroide está em uma região próxima à Terra. Depois disso, convertemos os elementos keplerianos iniciais do asteroide em elementos cartesianos e usamos nas Equações 8.18, 8.19 e 8.20.

Durante a integração numérica, monitoramos as partículas que sobreviveram durante o tempo de integração, as partículas que colidiram com o asteroide e as partículas que foram ejetadas do sistema. Na dinâmica da espaçonave, considera-se que ocorre uma colisão com o asteroide quando a espaçonave atravessa o disco com o raio médio do asteroide. Consideramos uma ejeção quando a distância do veículo espacial ao asteroide atinge um valor maior que o raio de Hill do asteroide (MURRAY; DERMOTT, 1999). A fórmula para o cálculo da esfera de Hill é dada pela Equação 8.37.

$$r_{Hill} = r \approx a_{sun}(1 - e) \sqrt[3]{\frac{M_{ast}}{3M_{sun}}} \quad (8.37)$$

onde  $r_{Hill}$  é o raio da esfera de Hill centrada no asteroide,  $a$  é o semi-eixo maior da órbita (elíptica) do asteroide em torno do Sol (ou do Sol em torno do asteroide),  $e$  é a excentricidade da órbita,  $M_{ast}$  é a massa do asteroide e  $M_{sun}$  é a massa do Sol.

Figura 8.6 - Representação gráfica do sistema estudado.



## 8.7 Resultados numéricos

Os resultados são apresentados em gráficos que mostram a vida útil do veículo espacial, para cada conjunto de condições iniciais, semi-eixo maior e excentricidade da órbita inicial. As regiões nas quais a espaçonave sobrevive por 1 ano são chamadas regiões limitadas. As regiões nas quais o veículo espacial sobrevive por apenas alguns dias são chamadas regiões instáveis.

As Figuras 8.7 (a) e 8.7 (b) mostram órbitas diretas e órbitas retrógradadas, respectivamente, levando em consideração o formato do asteroide 433 Eros e a perturbação da gravidade solar. Eles fornecem a duração das órbitas em função do semi-eixo maior inicial e da excentricidade da partícula em torno de 433 Eros. O código de cores fornece o tempo que a partícula permanece em órbita para cada condição inicial. A área branca na Figura 8.7 apresenta regiões onde as condições iniciais da espaçonave estão dentro do asteroide, portanto não possui significado físico.

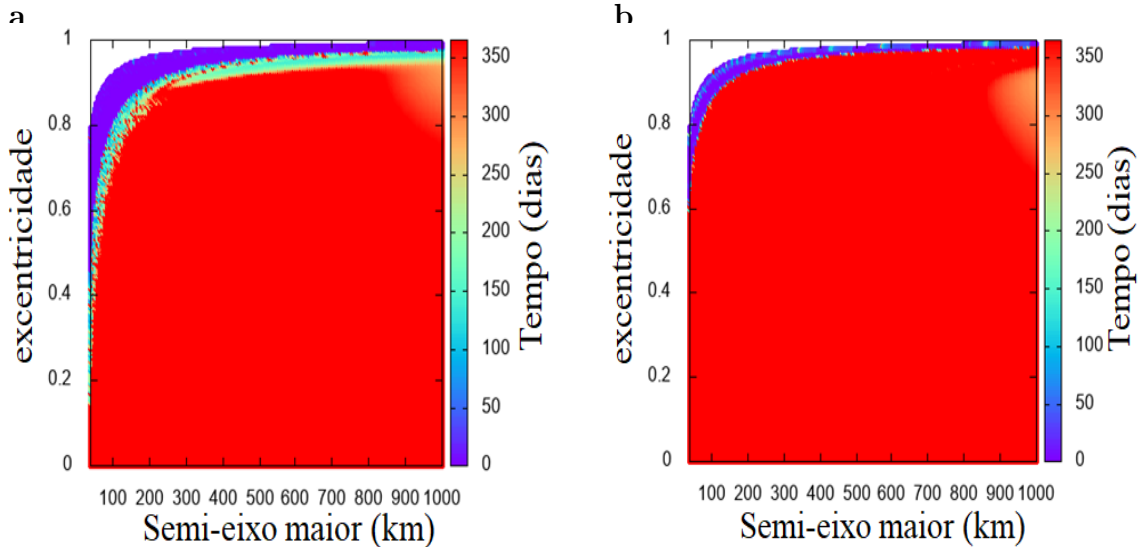
Observamos então que a perturbação da gravidade solar tem pouco efeito na dinâmica de uma espaçonave nas proximidades do asteroide 433 Eros, enquanto o campo gravitacional não esférico próximo ao asteroide afeta significativamente o movimento de uma partícula.

Resultados semelhantes foram encontrados para o asteroide 1620 Geographos e 243



Ida. Os próximos resultados levam em consideração a forma do asteroide (tripolo 3D), a perturbação da gravidade solar e a pressão da radiação solar.

Figura 8.7 - Gráficos de  $a_0$  versus  $e_0$  mostrando a evolução da vida útil na região próxima ao asteroide 433 Eros (órbitas diretas 8.7(a) e órbita retrógrada 8.7(b)) desconsiderando a pressão da radiação solar.



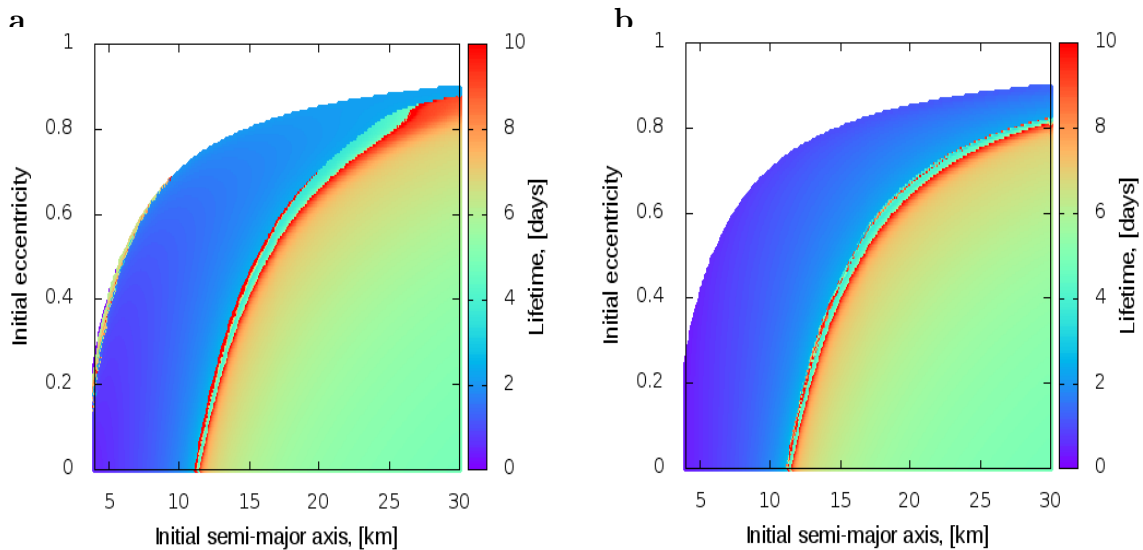
A Figura 8.8 fornece as grades de condições iniciais nas proximidades do asteroide 1620 Geographos, onde a Figura 8.8 (a) mostra órbitas diretas e 8.8 (b) órbitas retrógradas. Observe que a espaçonave não pode orbitar naturalmente o asteroide 1620 Geographos por um período de 365 dias. A duração máxima é de 10 dias, mas esse tempo é bom o suficiente para fazer observações ao redor do asteroide, então estas órbitas encontradas podem ter aplicações práticas. Esses resultados ocorrem devido à pequena massa do asteroide 1620 Geographos, que faz com que a pressão da radiação solar se torne significativa, fazendo com que a nave colida com o asteroide ou escape da esfera de sua influência.

Observe que há uma faixa estreita de cor vermelha. São regiões nas quais as órbitas sobrevivem por mais tempo, tanto para as órbitas diretas quanto para as retrógradas. Para tempos mais longos que isso, a sonda escapará do sistema ou colidirá com o asteroide. É possível observar que as órbitas sobrevivem de 4 a 8 dias nas regiões do lado direito da faixa estreita vermelha, enquanto as órbitas na região à esquerda da faixa vermelha sobrevivem de 0 a 3 dias. O raio do periastro ( $r_p = a(1 - e)$ ) coincide com a posição da *faixa estreita vermelha* (FEV), e chamaremos aqui de  $r_{PFV}$ .

As regiões em que  $r_p < r_{pFEV}$  estão próximas ao asteroide. Nesta região, o campo gravitacional do asteroide é forte, fazendo com que a espaçonave seja atraída pelo asteroide ou realize um swing-by e escape rapidamente do sistema. Por outro lado, em regiões onde  $r_p > r_{pRNS}$ , a perturbação do Sol, especialmente o PRS, domina a dinâmica e leva a espaçonave a escapar do sistema em poucos dias.

Observe que há uma faixa estreita a aproximadamente 7 km da superfície do asteroide 1620 Geographos, onde as órbitas duram 60 dias. Essas regiões nas quais as órbitas sobrevivem por mais tempo existem para órbitas diretas e retrógradas, sendo maiores para as órbitas retrógradas. Chamaremos essas regiões de faixa limitada, cujo semi-eixo maior será chamado de  $a_{bounded\ range}$ . Vale a pena notar que a faixa limitada não são as regiões limitadas, pois definimos regiões limitadas como o espaço onde a vida útil da sonda dura pelo menos 1 ano. Para órbitas diretas (Figura 8.8 (a)), as órbitas sobrevivem por 60 dias com baixa excentricidade ( $e_0 < 0,3$ ). Por outro lado, para órbitas retrógradas (Figura 8.8 (b)), as órbitas sobrevivem por 2 meses para excentricidades de até  $e_0 \sim 0.8$ .

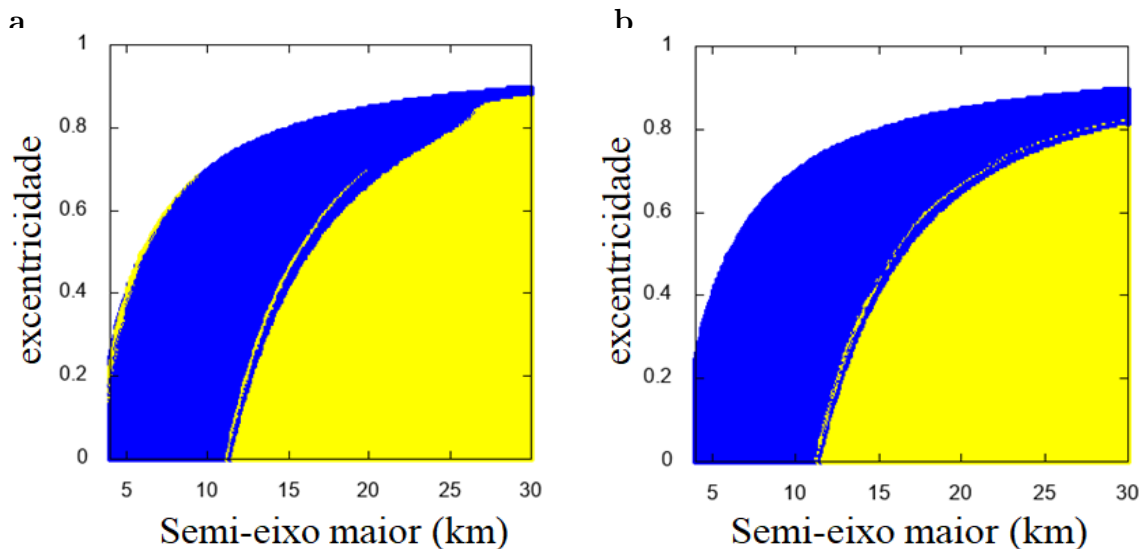
Figura 8.8 - Gráficos de  $a_0$  versus  $e_0$  mostrando o tempo de vida útil na região próxima ao asteroide Geographos (órbitas diretas 8.8 (a) e órbitas retrógradas 8.8 (b)) considerando a pressão da radiação solar.



As Figuras 8.9 (a) e 8.9 (b) fornecem informações sobre o destino final das órbitas após o tempo de integração mostrado nas Figuras 8.8 (a) e 8.8 (b), respectivamente. As regiões amarelas indicam que a sonda escapou da esfera de influência do asteroide. As regiões azuis mostram as condições iniciais que levam a sonda a colidir

com o asteroide. Comprovando nosso argumento, observe que, para órbitas que comecem próximas a superfície do asteroide Geographos, a espaçonave é capturada, terminando em colisão com o asteroide. Órbitas com  $r_p > r_{pFEV}$  fazem com que as partículas sejam ejetadas do sistema. Observe que o limite entre as regiões azul e amarela é justamente a estreita faixa vermelha de 1620 Geographos. É esse limite que define se a órbita será capturada ou ejetada do sistema. No geral, vemos que uma espaçonave não pode orbitar o asteroide 1620 Geographos por um longo período.

Figura 8.9 - Órbitas diretas 8.9 (a) e órbitas retrógradas 8.9 (b) em torno do asteroide Geographos. Regiões de colisão com o asteroide (azul) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). A região branca representa os locais com condições iniciais dentro do asteroide.

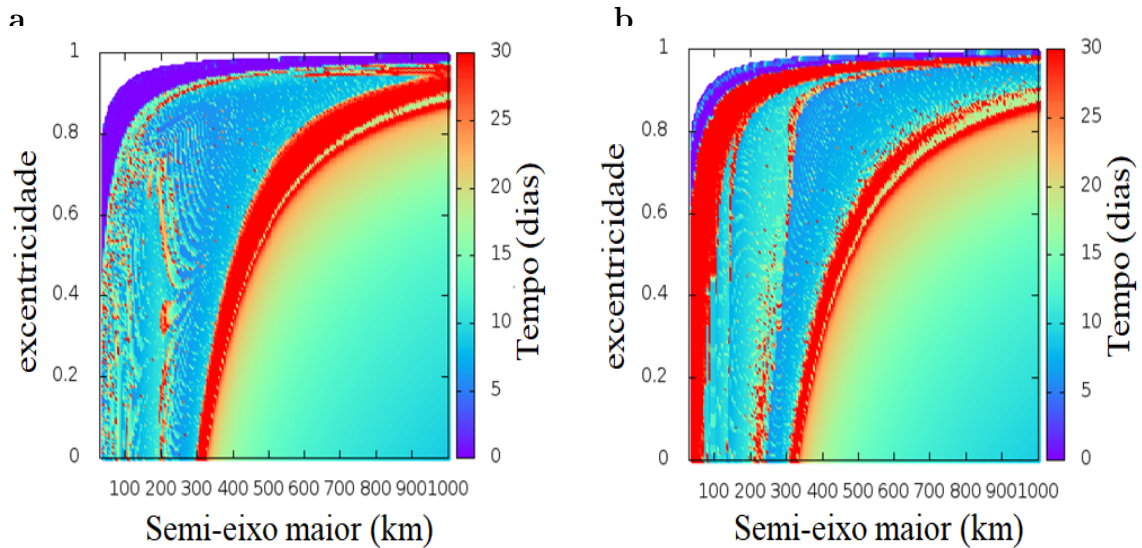


Também fizemos uma análise considerando 433 Eros. Alguns estudos anteriores analisaram a dinâmica orbital em torno deste asteroide, negligenciando as perturbações do Sol ou considerando apenas a perturbação da gravidade solar, devido ao domínio gravitacional do asteroide (SCHEERES et al., 2000; CHANUT et al., 2014; ??). Para realizar uma investigação complementar aos resultados disponíveis na literatura, investigamos a dinâmica orbital de uma espaçonave com  $40km \leq a_0 \leq 1000$  km, levando em consideração o efeito da gravidade solar e da pressão da radiação solar. Nossos resultados são apresentados na Figura 8.10 (a) para as órbitas diretas e 8.10 (b) para órbitas retrógradas. Vemos que há uma faixa estreita vermelha (começando em aproximadamente  $a_0 \approx 200$  km e  $e_0 = 0$ ) em que a espaçonave sobrevive por cerca de 30 dias. Essa região corresponde ao  $r_{pFEV}$  do asteroide 433 Eros.

Observe que, em órbitas diretas, quando  $r_p < r_{pFEV}$ , o movimento da partícula em torno do asteroide 433 Eros é instável devido à forma de 433 Eros e às perturbações provenientes do Sol. Observe que, fazendo uma pequena variação nas condições iniciais, isto gera trajetórias completamente diferentes para a partícula, refletindo na vida útil das órbitas e, conseqüentemente, no destino final da partícula. Por outro lado, existem regiões com soluções que permanecem delimitadas próximas ao asteroide 433 Eros quando consideramos órbitas retrógradadas (veja Figura 8.10 (b)).

A poeira espacial geralmente existe em torno de asteroides e planetas em órbitas diretas. Por outro lado, é improvável que órbitas retrógradadas surjam naturalmente. Portanto, regiões onde órbitas retrógradadas sobrevivem e órbitas diretas não sobrevivem são ótimas opções para colocar uma espaçonave, devido ao fato de que, nessas regiões, a probabilidade de haver poeira espacial é baixa, diminuindo o risco de uma espaçonave colidir com alguma partícula de poeira (ARAUJO et al., 2015b; ARAUJO et al., 2017).

Figura 8.10 - Gráficos de  $a_0$  versus  $e_0$  mostrando a evolução da vida útil na região próxima ao asteroide 433 Eros (órbitas diretas 8.7(a) e órbita retrógrada 8.7(b)) considerando a pressão da radiação solar.

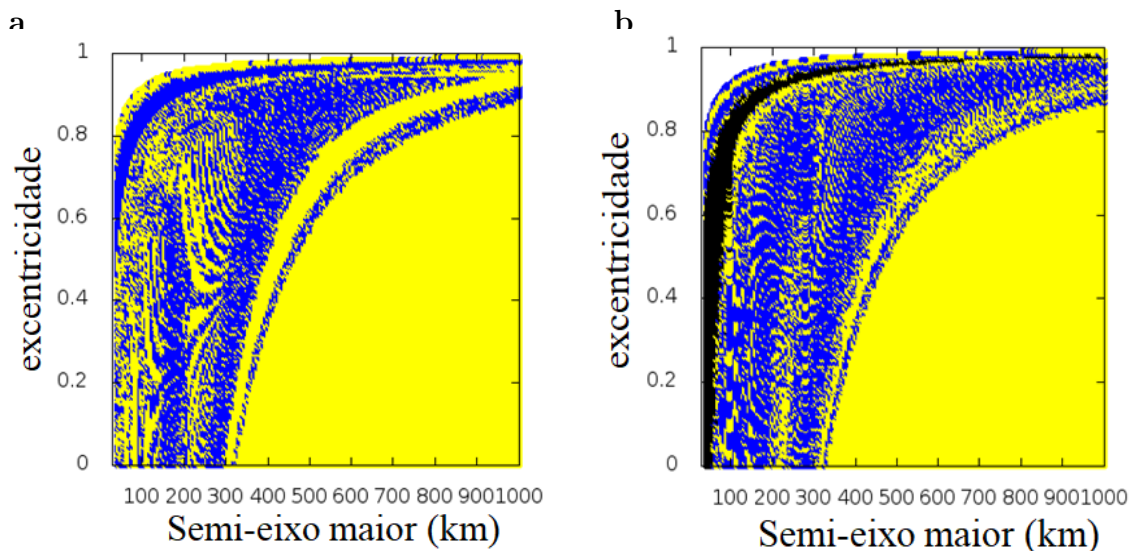


Observe que, quando consideramos a pressão da radiação solar, as órbitas delimitadas que existiam ao redor de Eros deixam de existir. Esse fato mostra que o efeito da perturbação da pressão da radiação solar é muito maior que a perturbação da gravidade solar. Isso ocorre porque a perturbação da gravidade solar envolve termos diretos e indiretos, ou seja, a diferença entre a ação do Sol na nave espacial e

do asteroide, como mostra as Equações 8.18 - 8.20, estas diferenças são pequenas quando a espaçonave está próxima do asteroide ( $\sim 10^{-7}$ ). Por outro lado, a PRS atua diretamente no veículo, sem termo indireto para compensá-lo, e isso torna o efeito da pressão da radiação solar muito maior ( $\sim 10^{-4}$ ). Não há dúvida de que, se diminuirmos a relação de massa da área  $A/m$ , ou se usarmos um menor coeficiente de refletividade ( $C_r$ ), poderemos encontrar uma região cada vez maior onde a espaçonave permanecerá em órbita ao redor do asteroide por mais tempo.

As Figuras 8.11 (a) e 8.11 (b) fornecem informações sobre o destino final das órbitas após o tempo de integração mostrado nas figuras 8.10 (a) e 8.10 (b), respectivamente. Observe que, para órbitas diretas, quando  $r_p < r_{pFEV}$  km, a sonda colide com o asteroide ou escapa da esfera de influência do asteroide devido à dinâmica complexa do movimento. Para órbitas retrógradadas, vemos que existem órbitas próximas à superfície do asteroide (em preto) que sobrevivem por toda integração numérica, ou seja, que permanecem limitadas.

Figura 8.11 - Órbitas diretas 8.11 (a) e órbitas retrógradadas 8.11 (b) em torno do asteroide 433 Eros. Regiões de colisão com o asteroide (azul), orbitas que sobrevivem por 365 dias (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). A região branca representa os locais com condições iniciais dentro do asteroide.

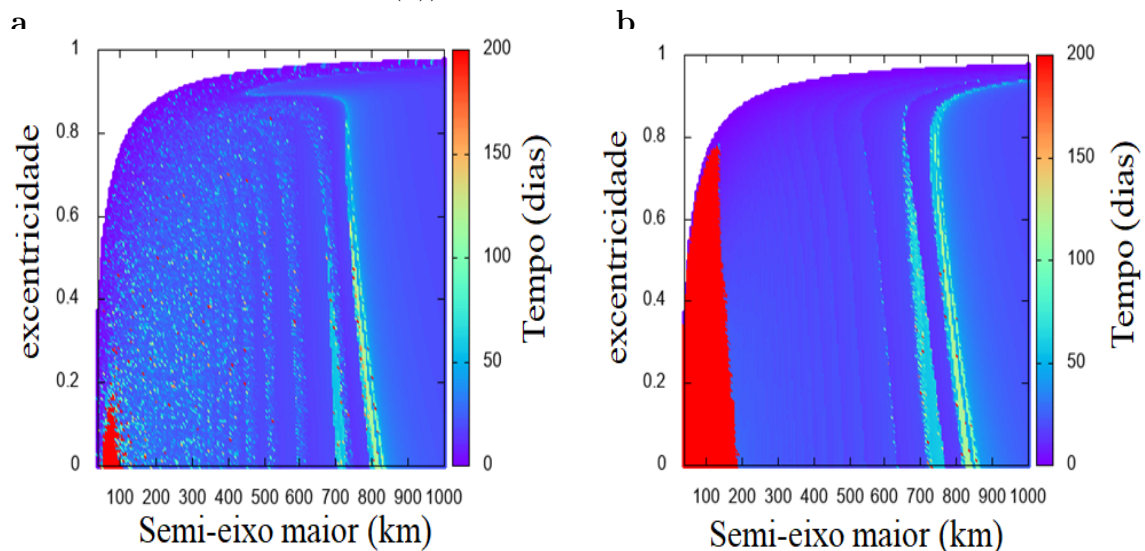


Através das Figuras 8.10 (a) e 8.10 (b), vemos que quando  $r_p > r_{pFEV}$ , para diferentes condições iniciais, o tempo de vida da espaçonave é semelhante. Observe que, para pequenas variações das condições iniciais, a espaçonave tem aproximadamente o mesmo tempo de vida e provavelmente o mesmo destino final. Esta afirmação pode

ser vista nas Figuras 8.11 (a) e 8.11 (b). Note que para  $r_p > r_{pFEV}$ , todas as órbitas são ejetadas do sistema (amarelo). Isso acontece porque, à medida que nos afastamos do corpo central, o efeito perturbador do Sol se torna maior e, conseqüentemente, faz com que a espaçonave (ou partícula de poeira) escape da esfera de influência do asteroide.

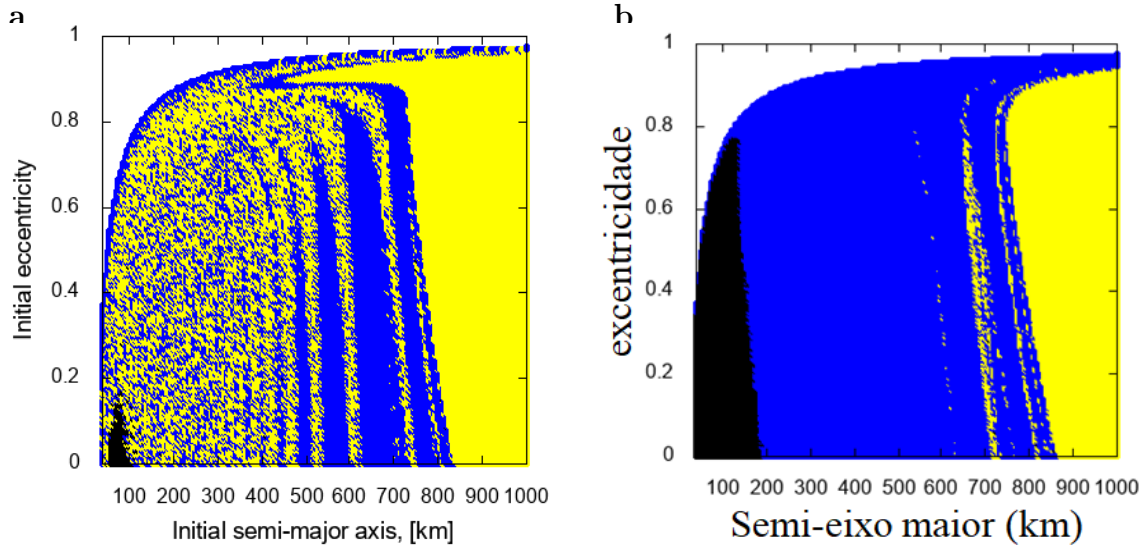
Finalmente, grades de condições iniciais foram usadas para investigar o movimento de uma espaçonave em torno de 243 Ida, como mostrado nas Figuras 8.12 (a) e 8.12 (b). Os elementos orbitais usados para construir as grades de condições iniciais mostradas na Figura 8.12 são idênticas às utilizadas no asteroide 433 Eros. Observe que, para órbitas diretas próximas ao asteroide ( $50 \text{ km} < a_0 < 108 \text{ km}$ ) e baixa excentricidade, é possível observar soluções que permanecem limitadas em torno do asteroide 243 Ida. Foi precisamente nessa região que uma lua foi observada orbitando o asteroide 243 Ida, denominada de Dactyl, em que é a prova de que a técnica usada aqui funciona muito bem.

Figura 8.12 - Gráficos de  $a_0$  versus  $e_0$  mostrando o tempo de vida de uma espaçonave na região próxima ao asteroide 243 Ida (órbitas diretas 8.12(a) e órbitas retrógradas 8.12(b)) considerando a pressão da radiação solar.



Por outro lado, existe uma grande região com soluções que permanecem limitadas em torno de 243 Ida quando consideramos órbitas retrógradas e  $a_0 < 200 \text{ km}$ , conforme mostrado na Figura 8.12 (b) (SANCHEZ; PRADO, 2019). Observe que essas regiões existem mesmo quando a excentricidade é alta.

Figura 8.13 - Órbitas diretas 8.13 (a) e órbita retrógrada 8.13 (b) em torno do asteroide 433 Eros. Regiões de colisão com o asteroide (azul), orbitas que sobrevivem por 365 dias (preto) e regiões de ejeção do sistema (amarelo). A região branca representa os locais com condições iniciais dentro do asteroide.



A Figura 8.13 fornece informações sobre o destino final das órbitas após o tempo de integração mostrado na Figura 8.11. A partir das informações mostradas na Figura 8.13 (a), é possível concluir que as órbitas diretas ao redor do asteroide 243 Ida são instáveis quando  $a_0 > 120$  km. Observe que pequenas variações na condição inicial fazem com que o destino final da nave espacial mude completamente, fazendo com que a nave colida ou se afaste do asteroide.

Para órbitas retrógradas, observe que, quando  $200 \text{ km} < a_0 < 850$  km, a maioria das órbitas colide com o asteroide 243 Ida. Existem algumas órbitas que são ejetadas do sistema quando  $a_0 \sim 700$  km. Quando  $a_0 > 850$  km, devido à baixa força gravitacional de 243 Ida, as órbitas tendem a escapar da esfera de influência do asteroide.

Da mesma forma que ocorreu com o asteroide 433 Eros, é possível encontrar regiões em torno do asteroide 243 Ida nas quais, para as órbitas diretas a região é instável, enquanto para as órbitas retrógradas a região é limitada, são locais interessantes para colocar uma espaçonave, como já explicado.

## 8.8 Considerações

Neste trabalho, desenvolvemos um modelo simplificado para representar o campo gravitacional de asteroides alongados (convexos ou não) com distribuição de massa espacial, inspirado no modelo de partículas ligadas existente. O objetivo deste modelo simplificado é usar um modelo de ligação tripla de partículas tridimensional com simetria axial que consiste essencialmente de partículas de três pontos distribuídas no espaço e duas hastes rígidas com massa desprezível. Comparado ao modelo de ponto de massa, foi demonstrado que existem faixas de distâncias entre asteroides e partícula onde a precisão do modelo proposto é melhor, mas ainda mantém um pequeno tempo de processamento em comparação aos modelos de alta fidelidade. O modelo simplificado foi então aplicado aos asteroides 1620 Geographos, 433 Eros e 243 Ida. Os resultados indicam que o tripolo de massa em rotação tridimensional tem vantagens sobre o modelo do tripolo de massa em rotação bidimensional em termos de precisão e obtém resultados próximos aos modelos de alta fidelidade usando muito menos tempo e esforço computacional.

Os resultados focaram no estudo dinâmico de uma espaçonave em torno dos asteroides 1620 Geographos, 433 Eros e 243 Ida, para órbitas diretas e retrógradas, considerando uma relação área/massa  $A/m = 0,01 \text{ m}^2/\text{kg}$ . Encontramos soluções que permanecem limitadas nas proximidades desses asteroides. Além disso, essas regiões indicam bons lugares para procurar um novo membro do sistema de asteroides, como exemplificado pelo asteroide 243 Ida.

Observou-se que nenhuma órbita sobrevive por 365 dias ao redor do asteroide Geographos quando consideramos a pressão da radiação solar. Por outro lado, encontramos órbitas que permanecem limitadas em torno dos asteroides 433 Eros e 243 Ida. Algumas soluções existem para órbitas diretas, enquanto outras existem para órbitas retrógradas. Considerando o asteroide 433 Eros, as órbitas que permanecem limitadas existem apenas para órbitas retrógradas. Por outro lado, quando investigamos o asteroide 243 Ida, encontramos órbitas que permanecem limitadas nas duas formas, tanto nas órbitas diretas quanto nas retrogradas. A determinação dessas regiões é importante quando se trata de aplicações astronáuticas, porque as regiões no espaço em que as órbitas permanecem limitadas para órbitas retrógradas e que escapam do asteroide para órbitas diretas são adequadas para colocar uma espaçonave, devido ao baixo risco de colisões com partículas de poeira e fornecem estabilidade para a órbita, reduzindo as manobras orbitais necessárias para manter a espaçonave orbitando o asteroide. Assim, modelos simplificados podem ser usados para auxiliar no



pré-projeto de missões reais.

Finalmente, vale mencionar que devido a pequena dimensão dos corpos celestes aqui analisados nossos objetivos nos permitem negligenciar com segurança o fenômeno de sombreamento na pressão da radiação solar. No entanto, aplicações futuras desse modelo podem envolver o estudo de órbitas polares, considerando os efeitos do fenômeno de sombreamento na pressão da radiação solar.



## 9 CONCLUSÕES

As considerações finais e a visão crítica da Tese podem ser divididas em várias contribuições:

Uma configuração do sistema binário de asteroide síncrono utilizando um modelo de dipolo em rotação. Conduzir uma investigação dinâmica de uma espaçonave em torno de um sistema de múltiplos asteroides oferece um ambiente extremamente rico. Extrair informações precisas através de abordagens analíticas é bastante desafiador e requer um número significativo de suposições restritivas. Por esse motivo, no Capítulo 6.5 é oferecida uma abordagem numérica à dinâmica de um veículo espacial nas proximidades de um sistema de asteroides binário. Utilizamos as equações do movimento de uma partícula no problema restrito de quatro corpos síncronos (PR4CS) para modelar um sistema de asteroide binário. O principal objetivo deste capítulo é construir grades de condições iniciais, que relacionam o semi-eixo maior e a excentricidade, a fim de quantificar a vida útil de uma espaçonave quando liberada próxima do corpo menos massivo do sistema binário (modelado como um dipolo de massa em rotação). Realizamos uma análise do tempo de vida da espaçonave, considerando várias razões de massa de um sistema binário de asteroides e investigando o comportamento de um veículo espacial nas proximidades deste sistema. Analisamos órbitas diretas e retrógradas. Este estudo investigou órbitas que sobrevivem por, pelo menos, 500 períodos orbitais do sistema (que é de aproximadamente um ano) sem colidir ou escapar do sistema. Neste trabalho, levamos em consideração as forças gravitacionais do sistema de asteroides binários e a pressão de radiação solar ( $P_{rad}$ ). Encontramos várias regiões onde as órbitas diretas e retrógradas de uma espaçonave sobrevivem durante todo o tempo de integração (um ano) quando a pressão da radiação solar é levada em consideração. Evidências numéricas mostram que as órbitas retrógradas têm uma região maior de condições iniciais que geram órbitas que sobrevivem por um ano, em comparação às órbitas diretas.

No Capítulo 2 a partir da equação do movimento do problema restrito de quatro corpos síncrono no sistema de referência girante, foi possível encontrar órbitas planares em torno dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$ . Toda a metodologia para encontrar as órbitas periódicas necessária foi detalhada, que em geral se dá, através da linearização das equações do movimento em forma matricial e da transformação dessa matriz para a forma diagonal. A partir daí, foi possível determinar as condições iniciais, do vetor no espaço de fase, que geram soluções periódicas neste modelo, que até então não tinha sido realizada em nenhum outro trabalho. Nós observamos a influência

que a dimensão do asteroide menos massivo e da razão de massa do sistema tem na dinâmica de uma espaçonave que está localizada em uma órbita planar em torno de um ponto de equilíbrio colinear. Mais especificamente, observamos como o período, a amplitude e a forma da órbita é modificada com mudança desses parâmetros ( $d$  e  $\mu^*$ ). Baseado na teorema do cilindro, encontramos uma família de órbitas em torno dos pontos de equilíbrio colineares ( $L_1$  e  $L_2$ ).

Dando um passo mais adiante, e inspirado nos asteroides do tipo A, nós calculamos famílias de órbitas periódicas (planares e halo), bem como suas estabilidades e bifurcações. Famílias de órbitas planares e Halo foram calculadas em torno desses pontos de equilíbrio e descobrimos que quanto mais próximas as órbitas periódicas estão do ponto de equilíbrio, mais instáveis elas são. Observamos que a estabilidade das órbitas periódicas em torno dos pontos de equilíbrio depende do tamanho do corpo secundário e da razão de massa do sistema. Observamos que quanto mais alongado o corpo secundário, mais instáveis são as órbitas planares. Além disso, detectamos órbitas halo instáveis e estáveis quando  $d = 0$  e quando  $d \neq 0$ . Também observamos que, mantendo a distribuição de massa constante, quanto mais alongado o corpo secundário, menores são os períodos orbitais das órbitas planares e halo em torno dos pontos de equilíbrio.

Inspirado nos asteroides Tipo B (sistemas totalmente síncronos), no Capítulo 5 nós determinamos os pontos de equilíbrio e realizamos uma análise das curvas de velocidade zero no Problema Restrito de Três Corpos Totalmente Síncronos. Para executar esta tarefa, foi necessário obter as equações de movimento, em um referencial girante, de uma espaçonave com massa desprezível que orbita em torno de um sistema constituído por dois corpos massivos. Assumimos que os dois corpos massivos possuíam formas irregulares e foram modelados como um dipolo de massa em rotação. Esta é uma maneira mais geral de usar o modelo do dipolo de massa em rotação, quando comparada aos capítulos anteriores. As coordenadas dos pontos de equilíbrio foram determinadas nos casos em que  $y = 0$  e  $y \neq 0$ . Foram encontrados cinco pontos de equilíbrio, todos eles no plano do movimento dos corpos primários. Os resultados mostraram que quando variamos a dimensão do corpo  $M_2$ , a posição do ponto de equilíbrio colinear mais distante de  $M_2$  ( $L_3$ ) praticamente não é alterado. Ou seja, uma partícula que está localizada neste ponto de equilíbrio não percebe a dimensão do corpo  $M_2$ . Por outro lado, os pontos de equilíbrio colineares mais próximos de  $M_2$  ( $L_1, L_2$ ), modificam consideravelmente suas posições quando alteramos a dimensão do corpo  $M_2$ . Observamos também que, os pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_2$  se afastam de  $M_2$ , quando a massa de  $M_2$  aumenta. Isso se deve

ao fato de que o aumento da massa de  $M_2$  é diretamente proporcional ao aumento da força gravitacional deste corpo, tornando necessária uma nova configuração para obter o equilíbrio. Também realizamos uma análise do movimento dos pontos de equilíbrio colineares quando modificamos a dimensão do corpo  $M_1$ . Foi possível observar que a medida que aumentamos a dimensão de  $M_1$ , as posições dos pontos de equilíbrio  $L_1$ , e  $L_2$  praticamente permanecem inalterados, devido a estes pontos estarem distantes do corpo  $M_1$ . Em compensação, a posição do ponto de equilíbrio  $L_3$  é influenciado pela variação da dimensão do corpo  $M_1$ . As regiões de contorno da partícula de massa desprezível foram obtidas usando a Curva de Velocidade Zero (CVZ) para diferentes valores da constante de Jacobi. No sistema analisado aqui, as regiões permitidas para o movimento de uma partícula aumentam quando o valor da constante de Jacobi diminui.

No Capítulo 6 foi investigado a dinâmica de um veículo espacial na vizinhança de um sistema específico de asteroide binário (2017YE5). Sua escolha foi devido a um artigo recentemente submetido a revista MNRAS em que evidências observacionais sugerem que este sistema é possivelmente um cometa adormecido da família de Júpiter. As características deste sistema indicam que o sistema 2017 YE5 tem características superficiais semelhantes aos núcleos cometários, e tendo em vista que o binário 2017 YE5 tem uma órbita típica de cometas, esse objeto é possivelmente um cometa extinto da família de Júpiter, sendo o primeiro assim identificado. Nós investigamos as órbitas periódicas em torno desse sistema utilizando como ferramenta as seções de Poincaré. Foi encontrado várias órbitas periódicas na vizinhança desse sistema, e foi possível calcular a estabilidade dessas órbitas periódicas. Em seguida, vimos a influencia da pressão da radiação solar em um veículo espacial que se encontra nessas órbitas periódicas encontradas. Finalmente, calculamos os valores mínimos que uma manobra impulsiva precisa aplicar a um veículo espacial para permitir transferências entre os pontos de equilíbrio colineares. Vimos que durante o tempo de tranferências, a influencia do Sol não altera significativamente a energia necessária para realizar a manobra e nem a trajetória percorrida pelo veículo espacial.

No Capítulo 7 nós utilizamos o modelo disponível na literatura do tripolo de massa. Mas diferentemente dos trabalhos encontrado na literatura, que focaram na validação do modelo de tripolo simétrico e assimétrico, nós realizamos uma investigação semi-analítica do modelo do tripolo devido a esta análise não ter sido ainda realizada nos trabalhos da literatura com esse modelo. Neste capítulo, investigamos a dinâmica qualitativa na vizinhança de um asteroide de forma convexa usando um modelo de tripolo baseado na existência de três pontos de massa ligados entre si por

hastes com comprimentos determinados e massas desprezíveis. Investigamos de que forma os pontos de equilíbrio (tanto suas posições quanto as condições de existência) dependem dos principais parâmetros de um asteroide, tal como rotação, forma e distribuição de massa. Observamos que, dependendo da configuração do asteroide, é possível encontrar de quatro até seis pontos de equilíbrio externos. Fizemos também uma análise topológica das curvas de velocidade zero em função do ângulo azimutal do asteroide. Um caso particular ocorre quando consideramos  $\Phi = 90^\circ$ , onde retornamos ao Problema Restrito Clássico de Três Corpos. Todos os resultados que obtemos foram aplicadas a quatro corpos celeste, validando assim toda a análise semi-analítica realizada neste capítulo.

Finalmente, com objetivo de dar um passo em direção a um cenário mais realista, e mesmo assim mantendo uma modelagem simplificada, no Capítulo 8 nós determinamos toda a equação matemática do modelo do tripolo tridimensional. Buscamos este modelo devido ao fato de que os asteroides tem distribuição de massa espacial. Um método de otimização não linear é usado para determinar os parâmetros do nosso modelo tridimensional, minimizando os erros dos pontos de equilíbrio externo em relação às soluções calculadas de forma mais realista, o modelo poliédrico, que são assumidos como os valores reais do sistema. O modelo considerado neste artigo é então aplicado a três asteroides irregulares reais, estes são, 1620 Geographos, 433 Eros e 243 Ida. Os resultados mostram que o atual modelo de ligação tripla de partículas tridimensional fornece melhor precisão quando comparado com o modelo de ponto de massa ou o modelo axissimétrico de ligação tripla de partículas disponível na literatura (bidimensional). Além disso, é possível aproximar bastante da modelagem mais realista (modelo do poliedro) mas mantendo menos tempo e esforço computacional nas simulações. A partir deste modelo tridimensional, realizamos simulações para caracterizar regiões com soluções que permanecem limitadas ou que escapam de cada asteroide sob análise. Investigamos utilizando uma inclinação inicial de  $0^\circ$  (órbitas diretas) e  $180^\circ$  (órbitas retrógradas). Nas simulações, consideramos o campo gravitacional do asteroide, a atração gravitacional do Sol e a pressão da radiação solar. Evidências numéricas mostraram que uma espaçonave não sobrevive por muito tempo nas proximidades do asteroide 1620 Geographos quando consideramos a pressão de radiação solar. Por outro lado, encontramos regiões com soluções que permanecem delimitadas em torno dos asteroides 433 Eros e 243 Ida. Comparamos nossos resultados aos resultados obtidos usando o modelo gravitacional do Mascon baseado em uma forma poliédrica. Nós encontramos uma boa concordância entre os dois modelos. O tempo computacional para gerar o potencial gravitacional utilizando o nosso modelo tridimensional é cerca de 200 vezes

mais rápido que a abordagem de Mascon, utilizada em [Chanut et al. \(2015a\)](#).

Trabalhos futuros podem ser desenvolvidos utilizando este modelo, considerando, por exemplo, uma órbita elíptica do primário menos massivo em torno do centro de massa do sistema. Na verdade este trabalho foi realizado por [Idrisi et al. \(2021\)](#) inspirado no modelo criado por nós. Mas uma sugestão seria agora, considerar os dois corpos como o dipolo de massa em rotação no problema elíptico. Também se pode investigar a influência da dimensão do dipolo nas órbitas tridimensional, fazendo uma análise, por exemplo, das grades de condição inicial do semi-eixo maior versus inclinação da órbita. Outro trabalho que pode ser realizado a partir deste modelo é considerar diferente a massa do dipolo e até mesmo a forma achatada de cada dipolo, uma vez que consideramos em nossa análise que as duas massa do dipolo são pontuais e possuem a mesma massa.

Finalmente, como linhas de pesquisa para trabalhos futuros sugere-se o desenvolvimento de uma análise semi-analítica do modelo do tripolo tridimensional para compreender a influencia dos principais parâmetros na dinâmica de uma espaçonave na vizinhança de um asteroide convexo, isto seria um bom ponto de partida. Também é possível utilizar o modelo do tripolo em um sistema binário de asteroides, em que o segundo asteroide pode ser modelado como um ponto de massa, um dipolo de massa em rotação, um corpo modelado com um elipsoide triaxial, dentre outros. Analisar de que forma o ângulo azimutal e de elevação influenciam na estabilidade das órbitas periódicas é também uma continuação natural deste trabalho.





## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGARWAL, J.; JEWITT, D.; MUTCHLER, M.; WEAVER, H.; LARSON, S. A binary main-belt comet. **Nature**, v. 549, n. 7672, p. 357–359, set. 2017. 3
- ALJBAAE, S. et al. The dynamical environment of asteroid 21 lutetia according to different internal models. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 464, n. 3, p. 3552–3560, jan. 2017. 7, 200
- ALJBAAE, S.; SANCHEZ, D. M.; PRADO, A. F. B. A.; SOUCHAY, J.; TERRA, M. O.; NEGRI, R. B.; MARCHI, L. O. First approximation for spacecraft motion relative to (99942) apophis. **arXiv e-prints**, p. arXiv:2012.06781, dez. 2020. 148
- ARAUJO, R. A. N.; MORAES, R. V.; PRADO, A. F. B. A.; WINTER, O. C. Mapping stable direct and retrograde orbits around the triple system of asteroids (45) eugenia. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 472, n. 4, p. 3999–4006, dez. 2017. 214
- ARAUJO, R. A. N.; WINTER, O. C.; PRADO, A. F. B. A. Stable retrograde orbits around the triple system 2001 sn263. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 153, p. 1143–1163, 2015. 88
- ARAUJO, R. A. N.; WINTER, O. C.; PRADO, A. F. B. A. Stable retrograde orbits around the triple system 2001 sn263. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 449, n. 4, p. 4404–4414, jun. 2015. 214
- ARAUJO, R. A. N.; WINTER, O. C.; PRADO, A. F. B. A.; MARTINS, R. V. Sphere of influence and gravitational capture radius: a dynamical approach. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 391, p. 675–684, dez. 2008. 88
- ARAUJO, R. A. N.; WINTER, O. C.; PRADO, A. F. B. A.; SUKHANOV, A. Stability regions around the components of the triple system 2001sn263. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 423, p. 3058–3073, 2012. 88
- BAER, J.; CHESLEY, S. R.; MATSON, R. D. Astrometric masses of 26 asteroids and observations on asteroid porosity. **The Astronomical Journal**, v. 141, n. 5, p. 143, maio 2011. 200, 209
- BARTCZAK, P.; BREITER, S. Double material segment as the model of irregular bodies. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 86, n. 2, p. 131–141, jun. 2003. 6

- BELLEROSE, J.; SCHEERES, D. J. Restricted full three-body problem: application to binary system 1999 kw4. **Journal of Guidance Control Dynamics**, v. 31, p. 162–171, jan. 2008. 6
- BENACCHIO, T. **Stability of L4 and L5 in the restricted planar three-body problem**. Tese (Master Mathematics) — Universit'a degli studi di Padova, 2007. 17, 194
- BEUTLER, G. **Methods of celestial mechanics**. Berlin: [s.n.], 2005. 80, 82, 87, 141
- BHATNAGAR, K. B.; CHAWLA, J. M. A study of the lagrangian points in the photogravitational restricted three-body problem. **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 10, p. 1443–1451, jan. 1979. 15
- BLESA, F. Periodic orbits around simple shaped bodies. **Monografias del Seminario Matematico Garcia de Galdeano**, v. 33, p. 67–74, 2006. 8
- BOSANAC, N. **Exploring the influence of a three-body interaction added to the gravitational potential function in the circular restricted three-body problem: a numerical frequency analysis**. Dissertação (Mestrado) — Purdue University, jan. 2012. 35
- BOSANAC, N. **Leveraging natural dynamical structures to explore multi-body systems**. Tese (Doutorado) — Purdue University, jan. 2016. 32, 33, 34, 35, 59, 61
- BOSANAC, N. **Leveraging natural dynamical structures to explore multi-body systems**. Tese (Doutorado) — Purdue University, jan. 2016. 127
- BRAKWELL, J. V.; BROWN, J. V. The 'halo' family of 3-dimensional periodic orbits in the earth-moon restricted 3-body problem. **Celestial Mechanics**, v. 20, n. 4, p. 389–404, nov. 1979. 31, 34, 35
- BROSCHART, S. B.; SCHEERES, D. J. Control of hovering spacecraft near small bodies: application to asteroid 25143 itokawa. **Journal of Guidance Control Dynamics**, v. 28, n. 2, p. 343–354, mar. 2005. 8
- BROUCKE, R. Stability of periodic orbits in the elliptic, restricted three-body problem. **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, v. 7, p. 1003–1009, jan. 1969. 16, 33, 58, 131

- BROUCKE, R. A. **Periodic orbits in the restricted three-body problem with earth-moon masses.** [S.l.: s.n.], 1968. [17](#), [194](#)
- BURNS, J. A.; LAMY, P. L.; SOTER, S. Radiation forces on small particles in the solar system. *Icarus*, v. 40, n. 1, p. 1–48, out. 1979. [82](#)
- CANALIAS, E.; MASDEMONT, J. J. Homoclinic and heteroclinic transfer trajectories between planar lyapunov orbits in the sun-earth and earth-moon systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, v. 14, n. 2, p. 261, 2016. [14](#), [15](#)
- CARRY, B. Density of asteroids. *Planetary and Space Science*, v. 73, n. 1, p. 98–118, dez. 2012. [200](#), [209](#)
- CHANUT, T. G. G.; ALJBAAE, S.; CARRUBA, V. Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 450, n. 4, p. 3742–3749, jul. 2015. [7](#), [200](#), [203](#), [206](#), [225](#)
- CHANUT, T. G. G.; WINTER, O. C.; AMARANTE, A.; ARAUJO, N. C. S. 3d plausible orbital stability close to asteroid (216) kleopatra. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 452, n. 2, p. 1316–1327, set. 2015. [200](#)
- CHANUT, T. G. G.; WINTER, O. C.; TSUCHIDA, M. 3d stability orbits close to 433 eros using an effective polyhedral model method. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 438, n. 3, p. 2672–2682, mar. 2014. [213](#)
- CHAPPAZ, L.; HOWELL, K. C. Exploration of bounded motion near binary systems comprised of small irregular bodies. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v. 123, n. 2, p. 123–149, out. 2015. [53](#), [75](#)
- CHERMNYKH, S. V. Stability of libration points in a gravitational field. *Leningradskii Universitet Vestnik Matematika Mekhanika Astronomiia*, p. 73–77, abr. 1987. [13](#)
- CHERNIKOV, Y. A. The photogravitational Restricted Three-Body Problem. *Soviet Astronomy*, v. 14, p. 176, ago. 1970. [15](#)
- CUI, P.; QIAO, D. The present status and prospects in the research of orbital dynamics and control near small celestial bodies. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, v. 4, n. 1, p. 14 pp., 2014. [6](#)

- DUTT, P.; ANILKUMAR, A. K. Planar fly-by trajectories to moon in the restricted three-body problem. **Advances in Space Research**, v. 54, p. 2050–2058, 2014. 18, 19
- DUTT, P.; SHARMA, R. Evolution of periodic orbits near the lagrangian point l2. **Advances in Space Research**, v. 47, n. 10, p. 1894–1904, Junho 2011. 112
- ELIPE, A.; LARA, M. A. Simple model for the chaotic motion around (433) eros. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 51, n. 52, p. 391–404, Dec. 2003. 6
- ELIPE, A.; RIAGUAS, A. Nonlinear stability under a logarithmic gravity field. **International Journal of Mathematics**, v. 3, n. 4, p. 435–453, Jan. 2003. 6
- ESCRIBANO, T. M. V. **Spacecraft transfer trajectory design exploiting resonant orbits in multi-body environments**. Tese (Doutorado) — Purdue University, 2013. 33, 34
- FENG, J.; NOOMEN, R.; VISSER, P.; Yuan, J. Numerical analysis of orbital motion around a contact binary asteroid system. **Advances in Space Research**, v. 58, n. 3, p. 387–401, ago. 2016. 54, 62
- FERRARI, F.; LAVAGNA, M.; HOWELL, K. Dynamical model of binary asteroid systems through patched three-body problems. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 125, n. 4, p. 413–433, 2016. 5
- FINK, U.; RUBIN, M. The calculation of  $af\rho$  and mass loss rate for comets. **Icarus**, v. 221, n. 2, p. 721–734, nov. 2012. 141
- FOLTA, D. Formation flying design and applications in weak stability boundary regions. **Annals of the New York Academy of Sciences**, v. 1017, n. 1, p. 95–111, maio 2004. 15
- GABERN, F.; KOON, W. S.; MARSDEN, J. E.; SCHEERES, D. J. Binary asteroid observation orbits from a global dynamical perspective. **SIAM Journal on Applied Dynamical Systems**, v. 5, n. 2, p. 252–279, jan. 2006. 8
- GEISSLER, P. et al. Erosion and ejecta reaccretion on 243 ida and its moon. **Icarus**, v. 120, n. 1, p. 140–157, mar. 1996. 7
- GIDEA, M.; MASDEMONT, J. J. Geometry of homoclinic connections in a planar circular restricted three-body problem. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 17, n. 4, p. 1151, jan. 2007. 123

- GREBOW, D. J. **Generating periodic orbits in the circular restricted three-body problem with applications to lunar south pole coverage.** Dissertação (Mestrado) — Purdue University, 2006. 63
- HAAPALA, A. F. **Trajectory design using periapse maps and invariant manifolds.** Tese (Doutorado) — Purdue University, 2010. 32
- HAAPALA, A. F.; HOWELL, K. C.; FOLTA, D. C. Incorporating the evolution of multi-body orbits into the trajectory trade space and design process. **Acta Astronautica**, v. 112, p. 1–18, jul. 2015. 24, 56
- HAMILTON, D. P.; BURNS, J. A. Orbital stability zones about asteroids: II. the destabilizing effects of eccentric orbits and of solar radiation. **Icarus**, v. 96, n. 1, p. 43–64, 1992. ISSN 0019-1035. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/001910359290005R>>. 82
- HECHLER, M.; MORA, M. B.; NOGALES, M. S.; YÁÑEZ, A. Orbit concepts at  $l_2$  for soyuz launches from kourou. **Acta Astronautica**, v. 62, p. 140–150, jan. 2008. 14
- HOBSON, E. **The theory of spherical and ellipsoidal harmonics.** New York: Chelsea, 1955. 6
- HOWELL, K. C. Three-dimensional, periodic, 'Halo' orbits. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 32, p. 73, jan. 1984. 24, 31, 35, 56, 73, 75
- HUBER, M. C. E.; BONNET, R. M.; DALE, D. C.; ARDUINI, M.; FRÖHLICH, C.; DOMINGO, V.; WHITCOMB, G. The history of thge soho mission. **ESA Bulletin**, v. 86, p. 25–35, maio 1996. 14
- IDRISI, M. J.; ULLAH, M. S.; KUMAR, V. Elliptic restricted synchronous three-body problem (ers3bp) with a mass dipole model. **New Astronomy**, v. 82, p. 101449, jan. 2021. 225
- IZIDORO, A.; TORRES, K. de S.; WINTER, O. C.; HAGHIGHIPOUR, N. A compound model for the origin of earth's water. **The Astrophysical Journal**, v. 767, n. 1, p. 54, abr. 2013. 122
- JACOBSON, S. A.; SCHEERES, D. J. Dynamics of rotationally fissioned asteroids: source of observed small asteroid systems. **Icarus**, v. 214, n. 1, p. 161–178, jul. 2011. 4

JAIN, R.; SINHA, D. Stability and regions of motion in the restricted three-body problem when both the primaries are finite straight segments. **Astrophysics and Space Science**, v. 351, n. 1, p. 87–100, maio 2014. 8

JEWITT, D.; HUI, M.-T.; KIM, Y.; MUTCHLER, M.; WEAVER, H.; AGARWAL, J. The nucleus of interstellar comet 2i/borisov. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 888, n. 2, p. L23, jan. 2020. 141

JIANG, Y. Equilibrium points and periodic orbits in the vicinity of asteroids with an application to 216 kleopatra. **Earth Moon and Planets**, v. 115, n. 1-4, p. 31–44, jul. 2015. 23

JIANG, Y.; BAOYIN, H. Parameters and bifurcations of equilibrium points in the gravitational potential of irregular-shaped bodies subjected to a varying external shape. **Advances in Space Research**, v. 62, n. 11, p. 3199–3213, dez. 2018. 6

JIANG, Y.; BAOYIN, H.; LI, J.; LI, H. Orbits and manifolds near the equilibrium points around a rotating asteroid. **Astrophysics and Space Science**, v. 349, n. 1, p. 83–106, jan. 2014. 8

KIRPICHNIKOV, S. N.; KOKORIEV, A. A. On the stability of stationary collinear lagrangian motions in the system of two attracting bodies: an axisymmetrical, peer-like and spherically symmetric. **Leningradskii Universitet Vestnik Matematika Mekhanika Astronomiia**, v. 3, n. 1, p. 73–83, 1988. 13

KNUTSON, A.; HOWELL, K. Using kane’s method to incorporate attitude dynamics in the circular restricted three body problem. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 143, p. 2095–2114, 01 2012. 14, 15

KOKORIEV, A. A.; KIRPICHNIKOV, S. N. On the stability of stationary triangular lagrangian motions in the system of two attracting bodies: an axisymmetrical, peer-like and spherically symmetric. **Leningradskii Universitet Vestnik Matematika Mekhanika Astronomiia**, v. 1, n. 1, p. 75–84, 1988. 13

KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, J. E.; ROSS, S. D. **Dynamical systems, the three-body problem and space mission design**. [S.l.: s.n.], 2006. 2

KUMARI, R.; KUSHVAH, B. S. Stability regions of equilibrium points in restricted four-body problem with oblateness effects. **Astrophysics and Space Science.**, v. 349, p. 693–704, 2014. 24

KUNITSYN, A. L.; TURESHBAEV, A. T. On the collinear libration points in the photo-gravitational three-body problem. **Celestial Mechanics**, v. 35, n. 2, p. 105–112, fev. 1985. 15

LAN, L.; YANG, H.; BAOYIN, H.; LI, J. Retrograde near-circular periodic orbits near equatorial planes of small irregular bodies. **Astrophysics and Space Science**, v. 362, n. 9, p. 169, set. 2017. 7, 8, 159, 160, 162, 184, 185, 189, 190, 194, 202

LIANG, Y. et al. The bifurcation of periodic orbits and equilibrium points in the linked restricted three-body problem with parameter  $\omega$ . **Chaos**, v. 29, n. 10, p. 103110, out. 2019. 53

LIU, X.; BAOYIN, H.; MA, X. Equilibria, periodic orbits around equilibria, and heteroclinic connections in the gravity field of a rotating homogeneous cube. **Astrophysics Space Science**, v. 333, n. 2, p. 409–418, jun. 2011. 8

\_\_\_\_\_. Periodic orbits in the gravity field of a fixed homogeneous cube. **Astrophysics and Space Science**, v. 334, n. 2, p. 357–364, ago. 2011. 8

LUKYANOV, L. G. On the family of the libration points in the restricted photogravitational three-body problem. **Astronomicheskii Zhurnal**, v. 65, p. 422–432, abr. 1988. 15

MARGOT, J.-L.; PRAVEC, P.; TAYLOR, P.; CARRY, B.; JACOBSON, S. Asteroid systems: binaries, triples, and pairs. In: MICHEL, P.; DEMEO, F. E.; BOTTKER, W. F. (Ed.). **Asteroids IV**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 355–374. 3

MASAGO, B. Y. P. L. et al. Developing the  $\omega$ -precessing inclined bi-elliptical four-body problem with radiation pressure- to search for orbits in the triple asteroid 2001sn263. **Advances in Space Research.**, v. 57, p. 962–982, 2016. 87

MASSAGO, B. Y. P. L.; PRADO, A. F. B. A.; CHIARADIA, A. P. M.; GOMES, V. M. Searching for some natural orbits to observe the double asteroid 2002ce26. **Astrophysics and Space Science.**, v. 362, n. 7, p. 130, 2017. 3

MCCUSKEY, S. W. **Introduction to celestial mechanics**. USA: Addison-Wesley, 1963. 18, 19, 24, 54, 85, 112, 122, 123, 126, 162, 163, 180

MCINNIS, C. R. **Solar sailing technology, dynamics and mission applications**. Chichester, UK: Berlin: Springer-Verlag, 1999. 80

- MEGAN, S. R. **Interplanetary transfer trajectories using the invariant manifolds of halo orbits**. Dissertação (Mestrado) — California Polytechnic State University, San Luis Obispo, Jul. 2018. 1
- MERLINE, W. J. et al. **Asteroids do have Satellites**. Tucson: University of Arizona, 2002. 5
- MEYER, K. R.; HALL, G. R. **Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem**. [S.l.: s.n.], 1992. 25, 34, 37
- MIRELES, J. D. J. **Celestial mechanics notes Set 4: the circular restricted three body problem**. [S.l.: s.n.], 2006. 25, 26, 27, 42
- \_\_\_\_\_. **Celestial mechanics notes Set 5: symmetric periodic orbits of the circular restricted Three Body Problem and their Stable and Unstable Manifolds**. [S.l.: s.n.], 2006. 34, 35, 37, 42
- MOLTON, F. R. **An introduction to celestial mechanics**. 4. ed. New York: The Macmillan Company, 1960. 18, 19, 31, 85, 122, 123
- MONTEIRO, F. et al. Physical characterization of equal-mass binary near-earth asteroid 2017 ye5: a possible dormant jupiter-family comet. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, ago. 2021. 121, 122, 124, 148
- MONTENBRUCK, O.; GILL, E. **Satellite orbits**. Berlin: [s.n.], 2000. 81, 87
- MONTENBRUCK, O.; GILL, E.; LUTZE, F. Satellite orbits: models, methods, and applications. **Applied Mechanics Reviews**, v. 55, n. 2, p. B27, jan. 2002. 141
- MORBIDELLI, A. et al. Source regions and timescales for the delivery of water to the earth. **Meteoritics Planetary Science**, v. 35, p. 1309–1320, ago. 2020. 122
- MORRIS, W. H.; SMALEL, S.; DEVANEY, R. L.; STEPHEN, S. **Differential equations, dynamical systems, and linear algebra**. 1. ed. USA: Academic Press, 1974. 25
- MOULTON, F. R. **An introduction to celestial mechanics**. [S.l.: s.n.], 1914. 180
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. [S.l.: s.n.], 1999. 25, 26, 163, 180, 209



NAIDU, S. P. et al. Radar observations and a physical model of binary near-earth asteroid 65803 didymos, target of the dart mission. **Icarus**, v. 348, p. 113777, set. 2020. [121](#)

OLIVEIRA, G. M. C.; PRADO, A. F. Bertachini de A.; SANCHEZ, D. M.; GOMES, V. M. Orbital transfers in an asteroid system considering the solar radiation pressure. **Astrophysics Space Science**, v. 362, n. 10, p. 187, out. 2017. [145](#), [146](#), [148](#)

PADDACK, S. J. Rotational bursting of small celestial bodies: effects of radiation pressure. **Journal of Geophysical Research**, v. 74, n. 17, p. 4379–4381, jan. 1969. [3](#), [185](#)

PAMELA, W.; MISRA, A. K. **Dynamics and control of a spacecraft near binary asteroids**. 5. ed. New York: The Macmillan Company, 2011. [2](#)

PAMELA, W.; MISRA, A. K.; KESHMIRI, M. On the planar motion in the full two-body problem with inertial symmetry. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.**, v. 117, p. 263–277, 2013. [2](#), [3](#)

PICK, E.; PICHA, J.; VYSKOCIL, V. **Theory of the Earth's gravity field**. New York: Elsevier Scientific, 1973. [6](#)

PRADO, A. Mapping orbits around the asteroid 2001sn263. **Advances in Space Research**, v. 53, 03 2014. [83](#)

PRADO, A. F. B. A. Traveling between the lagrangian points and the earth. **Acta Astronautica**, v. 39, n. 7, p. 483–486, out. 1996. [147](#)

PRAVEC, P. Photometric survey for asynchronous binary asteroids. **Society for Astronomical Sciences Annual Symposium**, v. 24, p. 61, maio 2005. [3](#)

PRAVEC, P.; HARRIS, A. W. Binary asteroid population. 1. angular momentum content. **Icarus**, v. 190, n. 1, p. 250–259, set. 2007. [3](#), [4](#), [53](#)

PRAVEC, P.; HARRIS, A. W.; WARNER, B. D. Nea rotations and binaries. In: VALSECCHI, G. B.; VOKROUHLICKÝ, D.; MILANI, A. (Ed.). **Near Earth objects, our celestial neighbors: opportunity and risk**. [S.l.: s.n.], 2007. (IAU Symposium, v. 236), p. 167–176. [3](#)

PRAVEC, P. et al. Photometric survey of binary near-earth asteroids. **Icarus**, v. 181, p. 63–93, mar. 2006. [3](#), [4](#)

\_\_\_\_\_. Binary asteroid population. 3. secondary rotations and elongations. **Icarus**, v. 267, p. 267–295, mar. 2016. [4](#), [5](#)

PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; KRAMER, P. B. Numerical recipes: the art of scientific computing. **Physics Today**, v. 40, n. 10, p. 120, jan. 1987. [146](#)

PUSHPARAJ, N.; SHARMA, R. K. Oblateness effect of saturn on halo orbits of l1 and l2 in saturn-satellites restricted three-body problem. **International Journal of Astronomy and Astrophysics**, v. 6, n. 4, p. 347–377, jan. 2016. [19](#)

REN, Y.; SHAN, J. Low-energy lunar transfers using spatial transit orbits. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 19, p. 554–569, 2014. [18](#), [19](#), [112](#)

RIAGUAS, A.; ELIPE, A.; LARA, M. Periodic orbits around a massive straight segment. In: HENRARD, J.; FERRAZ-MELLO, S. (Ed.). **Impact of modern dynamics in astronomy**. [S.l.: s.n.], 1999. p. 169. [6](#), [8](#)

RIAGUAS, A.; ELIPE, A.; L'ÓPEZ-MORATALLA, T. Non-linear stability of the equilibria in the gravity field of a finite straight segment. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 81, n. 3, p. 235–248, nov. 2001. [8](#)

RIBAS, F. B. et al. A ring system detected around the centaur (10199) chariklo. **Nature**, v. 508, p. 72–75, 2014. [2](#)

RICHARDSON, D. L. Halo orbit formulation for the isee-3 mission. **Journal of Guidance Control Dynamics**, v. 3, n. 6, p. 543–548, nov. 1980. [14](#)

ROZITIS, B.; GREEN, S. F. Physical characterisation of near-earth asteroid (1620) geographos. reconciling radar and thermal-infrared observations. **Astronomy Astrophysics**, v. 568, p. A43, ago. 2014. [200](#), [209](#)

RUSSELL, R. P. Global search for planar and three-dimensional periodic orbits near europa. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 54, n. 2, p. 199–226, jun. 2006. [35](#)

SANCHEZ, D. M.; PRADO, A. F. B. A. Searching for less-disturbed orbital regions around the near-earth asteroid 2001 sn263. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 56, n. 6, p. 1775–1785, nov. 2019. [216](#)

SANDFORD, S. A. The power of sample return missions - stardust and hayabusa. In: CERNICCHARO, J.; BACHILLER, R. (Ed.). **The molecular universe**. [S.l.: s.n.], 2011. (IAU Symposium, v. 280), p. 275–287. 2

SANTOS, L.; PRADO, A. F. B. A.; SANCHEZ, D. M. Equilibrium points in the restricted synchronous three-body problem using a mass dipole model. **Astrophysics and Space Science**, v. 362, n. 3, p. 61, mar. 2017. 7, 8, 19, 24, 27, 54, 85

\_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. **Astrophysics and Space Science**, v. 362, n. 3, p. 61, mar. 2017. 27, 53

SANTOS, L. B. T.; MARCHI, L. O.; A., S.-S. P.; A., S.; PRADO, A. F. B. de A.; SANCHEZ, D. M. Dynamics around an asteroid modeled as a mass tripole. **Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica**, v. 56, p. 269–286, out. 2020. 159

SANTOS, L. B. T.; MARCHI, L. O.; ALJBAAE, S.; SOUSA-SILVA, P. A.; Sanchez, D. M.; PRADO, A. F. B. A. A particle-linkage model for elongated asteroids with three-dimensional mass distribution. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 502, n. 3, p. 4277–4289, abr. 2021. 189

SANTOS, L. B. T.; PRADO, A. F. B. A.; SANCHEZ, D. M. Equilibrium points in the restricted synchronous three-bodyproblem using a mass dipole model. **Astrophysics and Space Science**, v. 362, n. 61, p. 60, 2017. 14, 19, 20, 109, 124

SANTOS, L. B. T.; PRADO, A. F. B. de A.; SANCHEZ, D. M. Lifetime of a spacecraft around a synchronous system of asteroids using a dipole model. **Astrophysics and Space Science**, v. 362, n. 11, p. 202, nov. 2017. 14, 79

SANTOS, L. B. T.; SOUSA-SILVA, P. A.; PRADO, A. F. B. de A.; SANCHEZ, D. M. Searching for orbits around equilibrium points in a binary asteroid system modeled as a mass dipole. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 167, p. 421, 2018. 14

SCHEERES, D. J. Close proximity operations at small bodies: orbiting, hovering, and hopping. In: BELTON, M. J. S.; MORGAN, T. H.; SAMARASINHA, N. H.; YEOMANS, D. K. (Ed.). **Mitigation of hazardous comets and asteroids**. [S.l.: s.n.], 2004. p. 313. 8

\_\_\_\_\_. Stability of relative equilibria in the full two-body problem. **Annals of the New York Academy of Sciences**, v. 1017, p. 81–94, maio 2004. 6

- \_\_\_\_\_. Minimum energy configurations in the n-body problem and the celestial mechanics of granular systems. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 113, n. 3, p. 291–320, jul. 2012. 163
- SCHEERES, D. J.; WILLIAMS, B. G.; MILLER, J. K. Evaluation of the dynamic environment of an asteroid: applications to 433 eros. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 23, n. 3, p. 466–475, 2000. 5, 6, 7, 213
- SHARMA, R. K. The linear stability of libration points of the photogravitational restricted three-body problem when the smaller primary is an oblate spheroid. **Astrophysics Space Science**, v. 135, n. 2, p. 271–281, jul. 1987. 15
- SOUZA-FELICIANO, A. C.; PRÁ, M. D.; PINILLA-ALONSO, N.; ALVAREZ-CANDAL, A.; FERNÁNDEZ-VALENZUELA, E.; LEÓN, J. D.; BINZEL, R.; ARCOVERDE, P.; RONDÓN, E.; EVANGELISTA, M. S. Analysis in the visible range of nasa lucy mission targets: eurybates, polymele, orus and donaldjohanson. **Icarus**, v. 338, p. 113463, mar. 2020. 122
- SUKHANOV, A. A.; VELHO, H. F. C.; MACUA, E. E.; WINTER, O. C. The aster project: flight to a near earth asteroid. **Cosmic Research**, v. 48, n. 5, p. 455 pp., 2010. 83
- SZEBEHELY, V. **Theory of orbits**. New York; London: Academic Press, 1967. 18, 19, 31, 85, 112, 122, 123, 124, 156, 162, 163, 180
- THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical dynamics of particles and systems**. 5. ed. United States: Brooks Cole, 2011. 17
- TRACY, M. B. et al. Physical modeling of triple near-earth asteroid (153591) 2001 sn263 from radar and optical light curve observations. **Icarus**, v. 248, p. 499–515, 2015. 83
- VENDITTI, F. C. F. **Orbital maneuvers around irregularly shaped bodies**. Tese (Doutorado) — National Institute for Space Research (INPE), São José dos Campos, 2013. 7
- WALSH, K. J.; RICHARDSON, D. C.; MICHEL, P. Rotational breakup as the origin of small binary asteroids. **Nature**, v. 454, n. 7201, p. 188–191, jul. 2008. 3
- WANG, W.; YANG, H.; ZHANG, W.; MA, G. Capture orbits around asteroids by hitting zero-velocity curves. **Astrophysics and Space Science**, v. 362, n. 12, p. 229, dez. 2017. 7

WANG, X.; JIANG, Y.; GONG, S. Analysis of the potential field and equilibrium points of irregular-shaped minor celestial bodies. **Astrophysics and Space Science**, v. 353, n. 1, p. 105–121, set. 2014. [184](#), [185](#)

WERNER, R. A. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 59, n. 3, p. 253–278, 1994. [6](#), [7](#), [8](#)

WERNER, R. A.; SCHEERES, D. J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 castalia. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 65, n. 3, p. 313–344, jan. 1997. [6](#), [7](#)

WORTHINGTON, J. **A study of the planar circular restricted three body problem and the vanishing twist**. Tese (Master Mathematics) — University of Sydney, 2012. [17](#), [194](#)

YAKUBOVICH, V. A.; STARZHINSKII, V. M. **Differential equations with periodic coefficients**. [S.l.: s.n.], 1975. [33](#)

YANG, H.; BAOYIN, H.; BAI, X.; LI, J. Bounded trajectories near collinear-like equilibrium points of elongated asteroids using linear control. **Astrophysics and Space Science**, v. 362, n. 2, p. 27, fev. 2017. [7](#)

YANG, H.; LI, S.; XU, C. A particle-linkage model for non-axisymmetric elongated asteroids. **Research in Astronomy and Astrophysics**, v. 18, n. 7, p. 084, jul. 2018. [7](#), [159](#), [184](#), [185](#), [190](#), [198](#), [202](#)

YANG, H.-W.; ZENG, X.-Y.; BAOYIN, H. Feasible region and stability analysis for hovering around elongated asteroids with low thrust. **Research in Astronomy and Astrophysics**, v. 15, n. 9, p. 1571, set. 2015. [7](#), [190](#)

YEOMANS, D. K.; ANTREASIAN, P. G.; BARRIOT, J. P.; CHESLEY, S. R.; DUNHAM, D. W.; FARQUHAR, R. W.; GIORGINI, J. D.; HELFRICH, C. E.; KONOPLIV, A. S.; MCADAMS, J. V.; MILLER, J. K.; OWEN, W. M.; SCHEERES, D. J.; THOMAS, P. C.; VEVERKA, J.; WILLIAMS, B. G. Radio science results during the near-shoemaker spacecraft rendezvous with eros. **Science**, v. 289, n. 5487, p. 2085–2088, set. 2000. [2](#)

ZENG, X.; LIU, X.; LI, J. Extension of the rotating dipole model with oblateness of both primaries. **Research in Astronomy and Astrophysics**, 2016. First online. [13](#)

- ZENG, X. et al. Generalized flyby trajectories around elongated minor celestial bodies as a rotating mass dipole. **Acta Mechanica Sinica**, v. 32, n. 3, p. 535–545, 2016. 13
- ZENG, X.; ZHANG, Y.; YU, Y.; LIU, X. The dipole segment model for axisymmetrical elongated asteroids. **The Astronomical Journal**, v. 155, n. 2, p. 85, fev. 2018. 14, 162
- ZENG, X. Y.; BAOYIN, H.; LI, J. Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary (ii): Out-of-plane equilibria and their stability. **Astrophysics and Space Science**, v. 361, n. 1, p. 15, 2016. 13, 24, 162
- ZENG, X. Y.; GONG, S.; LI, J.; ALFRIEND, K. Equilibrium points of elongated celestial bodies as the perturbed rotating mass dipole. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 39, n. 6, p. 1223 pp., 2016. 13
- ZENG, X. Y.; LI, J.; BAOYIN, H. Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary (i): equilibria in the equator and their stability. **Astrophysics and Space Science**, v. 361, n. 1, p. 14, 2016. 13, 160
- ZENG, X. Y. et al. Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies. **Astrophysics and Space Science**, v. 356, p. 29–42, 2015. 7, 8, 54, 194, 202
- \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. **Astrophysics and Space Science**, v. 356, p. 29–42, 2015. 13
- ZHANG, R.; WANG, Y.; SHI, Y.; XU, S. Libration points and periodic orbit families near a binary asteroid system with different shapes of the secondary. **Acta Astronautica**, v. 177, p. 15–29, dez. 2020. 3
- ZIMOVAN-SPREEN, E. M.; HOWELL, K. C.; DAVIS, D. C. Near rectilinear halo orbits and nearby higher-period dynamical structures: orbital stability and resonance properties. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 132, n. 5, p. 28, jun. 2020. 58, 73

## **PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE**

### **Teses e Dissertações (TDI)**

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

### **Manuais Técnicos (MAN)**

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

### **Notas Técnico-Científicas (NTC)**

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

### **Relatórios de Pesquisa (RPQ)**

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

### **Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)**

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

### **Publicações Didáticas (PUD)**

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

### **Publicações Seriadas**

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Contam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

### **Programas de Computador (PDC)**

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

### **Pré-publicações (PRE)**

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.