



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

## **ÓRBITAS DE SATÉLITES ARTIFICIAIS DA LUA CONSIDERANDO A SUA DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE MASSA**

Melissa Frigi Mendes

Relatório de Iniciação Científica do programa PIBIC, orientada pelo Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes e Dr. Hélio Koiti Kuga.

INPE  
São José dos Campos  
2022



## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes, por ter me oferecido a oportunidade de participar deste projeto e pelas orientações e aulas dedicadas a esta pesquisa, e também ao Prof. Dr Hélio Koiti Kuga e ao Dr. Jean Paulo dos Santos Carvalho por também terem contribuído com seus conhecimentos e fornecimento de dados essenciais, além de toda ajuda necessária para conduzir-me pelas etapas deste estudo.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) por ter me admitido na realização deste projeto em nome de sua instituição.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de estudos através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC/INPE).

Aos meus amigos e familiares, em especial minha mãe e irmãos, por todo o incentivo e apoio aos meus estudos e escolhas em minha carreira.



## RESUMO

Os Satélites artificiais são empregados em diversas atividades, dentre as quais podemos citar: exploração espacial, realização de experiências em ambiente de micro gravidade, estudos geodinâmicos, monitoramento do clima, etc. Deste modo, os satélites artificiais permitiram deslocar o horizonte das observações para distâncias não atingíveis do nosso planeta, mas para que as medidas feitas através de satélites possam ser convenientemente utilizadas, é essencial que suas órbitas e altitudes sejam conhecidas, em cada instante, com precisões adequadas às finalidades da missão para a qual o satélite foi planejado. Nasce daí a necessidade de construção de teorias ou métodos especiais, geralmente adaptados a específicas missões. A partir de tal premissa, neste presente trabalho, utilizando-se as equações planetárias de Lagrange, são analisadas as variações de elementos orbitais de satélites lunares devido à distribuição não uniforme de massa da Lua, considerando alguns coeficientes associados aos harmônicos de ordem e grau menores que 9, para algumas condições iniciais. Soluções analíticas aproximadas são comparadas com a integração numérica das equações para algumas simulações astrodinâmicas, dentre os quais são realizados através de programas elaborados em linguagem Python, para o cálculo de variações dos elementos orbitais, considerando-se modelos simplificados para as perturbações.

Palavras-chave: Satélites artificiais. Astrodinâmicas. Satélites lunares.



# **ARTIFICIAL SATELLITES ORBITS OF THE MOON CONSIDERING ITS NON-UNIFORM MASS DISTRIBUTION**

## **ABSTRACT**

Artificial satellites are used in several activities, among which we can mention: space exploration, carrying out experiments in a micro gravity environment, geodynamic studies, climate monitoring, etc. Thereby, artificial satellites made it possible to move the horizon of observations to distances not reachable from our planet, but for these measurements made through satellites could be conveniently used, it is essential that their orbits and altitudes are known, at all times, with precision. suited to the purposes of the mission for which the satellite was designed for. Hence the need to build theories or special methods, generally adapted to specific missions. Based on this principle, in this present work, using Lagrange's planetary equations, the variations of orbital elements of lunar satellites due to the non-uniform distribution of the Moon's mass are analyzed, considering some coefficients associated with harmonics of order and degree lower than 9 for some initial conditions. Approximated analytical solutions are compared with the numerical integration of the equations for some astrodynamics simulations, among which these are made through programs developed in Python language, for the calculation of variations of the orbital elements, considering simplified models for the perturbations.

Key words: Artificial satellites. Astrodynamics. Lunar satellites.





## LISTA DE FIGURAS

	<b><u>Pág.</u></b>
Figura 2.1 - Sistema de coordenadas no problema de dois corpos.....	16
Figura 2.2 – Elementos orbitais de um corpo celeste.....	17
Figura 2.3 - Harmônicos Tesserais.....	18
Figura 2.4 - Harmônicos Zonais.....	18
Figure 2.5 - Harmônicos Setoriais.....	18
Figura 2.6 - Gráfico da Anomalia Média com J2.....	28
Figura 2.7 - Gráfico da Longitude no Nodo Ascendente com J2.....	29
Figura 2.8 - Gráfico do Argumento do Perigeu com J2.....	29
Figura 2.9 – Anomalia Média com J3.....	30
Figura 2.10 – Argumento do Perigeu com J3.....	30
Figura 2.11 – Excentricidade com J3.....	30
Figura 2.12 – Longitude do Nodo Ascendente com J3.....	31
Figura 2.13 - Inclinação com J3.....	31
Figura 2.14 – Anomalia Média com J4.....	32
Figura 2.15 – Argumento do Perigeu com J4.....	32
Figura 2.16 - Excentricidade com J4.....	32
Figura 2.17 - Inclinação com J4.....	33
Figura 2.18 – Longitude do Nodo Ascendente com J4.....	33
Figura 2.19 - Anomalia Média com J2 para parâmetros 2.....	34
Figura 2.20 - Longitude do Nodo Ascendente com J2 para parâmetros 2.....	34
Figura 2.21 – Argumento do Perigeu com J2 para parâmetros 2.....	35
Figura 2.22 - Anomalia Média com J3 para parâmetros 2.....	35
Figura 2.23 - Argumento do Pericentro com J3 para parâmetros 2.....	35
Figura 2.24 - Excentricidade com J3 para parâmetros 2.....	36
Figura 2.25 - Inclinação com J3 para parâmetros 2.....	36
Figura 2.26 - Longitude no Nodo Ascendente com J3 para parâmetros 2.....	36
Figura 2.27 - Anomalia Média com J4 para parâmetros 2.....	37
Figura 2.28 -vArgumento do Pericentro com J4 para parâmetros 2.....	37
Figura 2.29 - Excentricidade com J4 para parâmetros 2.....	37
Figura 2.30 - Inclinação com J4 para parâmetros 2.....	38

Figura 2.31 - Longitude no Nodo Ascendente com J4 para parâmetros 2. .... 38

## SUMÁRIO

	<b><u>Pág.</u></b>
1 INTRODUÇÃO .....	13
1.1 Objetivo.....	14
2 DESENVOLVIMENTO .....	14
2.1 Problema de Dois Corpos.....	14
2.2 Elementos Orbitais Keplerianos.....	16
2.3 Potencial Gravitacional .....	17
2.4 Equações Planetárias de Lagrange .....	19
2.4.1 Funções de Perturbação .....	20
2.5 Variações dos Elementos Angulares .....	21
2.6 Simulações e Resultados .....	22
3 CONCLUSÃO .....	39
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	40



## 1 INTRODUÇÃO

Os satélites artificiais permitiram deslocar o horizonte das observações para distâncias não atingíveis do nosso planeta e são empregados em diversas atividades e entre elas podemos citar: exploração espacial, realização de experiências em ambiente de micro gravidade, estudos geodinâmicos, monitoramento do clima, estudo da atmosfera e do campo magnético terrestre, como elo em telecomunicações, aplicações militares, etc.

Satélites artificiais lunares começaram a ser colocados em órbita inicialmente na década de 60 durante o período de Guerra Fria e a Corrida Espacial, mais precisamente pela União Soviética em 31 de março de 1966 dentro uma série de missões lunares denominadas Luna, quando lançou o primeiro satélite artificial lunar chamado de Luna 10. Seguindo-se o sucesso da missão, várias outras foram feitas em sucessão como as missões denominadas Chang'e realizadas pela China, e encontram-se ainda em andamento com a missão Chang'e 5. Existem mais países que fazem missões lunares, e muitas delas envolvem satélites destinados a orbitar a lua por diversos motivos de pesquisa, e isso desperta interesse e curiosidade em muitas áreas acadêmicas gerando novas áreas de pesquisas relacionadas.

Dentro de tal contexto, para que as medidas feitas através de satélites possam ser convenientemente utilizadas, é essencial que suas órbitas e atitudes sejam conhecidas, em cada instante, com precisões adequadas às finalidades da missão para a qual o satélite foi planejado. Nasce daí a necessidade de construção de teorias ou métodos especiais, geralmente adaptados a específicas missões.

Quando se estuda o potencial de um satélite artificial ao redor da Lua utilizando os polinômios de Legendre, observa-se que a ordem de grandeza de alguns coeficientes associados à ordem e grau dos polinômios não são hierarquicamente proporcionais à ordem e grau dos polinômios. Por exemplo, diferente do caso da Terra, a ordem do coeficiente associado ao  $C_{22}$  é apenas um décimo menor que o coeficiente associado ao  $J_2$ ; também, como exemplo, a ordem de grandeza do coeficiente associado ao  $J_9$  é maior que a ordem de grandeza do coeficiente associado ao  $J_3$ . Isto faz com que o comportamento do movimento orbital de satélites lunares, sob alguns aspectos, seja diferente do comportamento do movimento orbital de satélites artificiais da Terra.

## 1.1 Objetivo

Este projeto possui como objetivo, utilizando-se as equações planetárias de Lagrange e conceitos de mecânica celeste, analisar as variações de elementos orbitais de satélites lunares devido à distribuição não uniforme de massa da Lua, considerando alguns coeficientes associados aos harmônicos de ordem e grau menores que 9, para algumas condições iniciais. Soluções analíticas aproximadas são comparadas com a integração numérica das equações para algumas simulações realizadas inteiramente na linguagem Python.

## 2 DESENVOLVIMENTO

Os conceitos iniciais para o entendimento e realização deste trabalho começam com o problema de dois corpos, teoria da mecânica geral relacionado aos movimentos Keplerianos.

### 2.1 Problema de Dois Corpos

Dado um sistema inercial com coordenadas de origem 0, temos que se situam nos pontos  $P_1$  e  $P_2$  dois pontos materiais de massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente. De acordo com a Lei de Newton, tais corpos se atraem de acordo com a equação:

$$\vec{f}_{1,2} = -Gm_1m_2 \frac{P_1-P_2}{r^3} \quad (2.1)$$

Onde  $G$  é a constante gravitacional universal e  $r$ , módulo de  $\vec{r}$ , é a distância de  $P_i$  e  $P_j$ . Deseja-se determinar o movimento de  $P_1$  e  $P_2$  e para isso temos as seguintes equações:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{P_1-P_2}{r} \quad (2.2)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{P_2-P_1}{r} \quad (2.3)$$

A partir destas, é formado um sistema de 6 equações diferenciais de segunda ordem, ou 12 equações diferenciais de primeira ordem, o que demanda 12 constantes de integração para a sua solução completa.

Temos que a equação vetorial que descreve tal movimento de  $P_1$  em relação a  $P_2$  se dá por:

$$\ddot{\vec{r}} = - \frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.4)$$

Sendo:

$$\mu = G (m_1 + m_1) \quad (2.5)$$

Essas equações formam um sistema de ordem 6 que para resolvê-lo, é necessário utilizar-se das integrais do centro de massa, para chegar então à equação final do raio:

$$r = \frac{P}{1+e \cos(\varphi-\omega)} \quad (2.6)$$

Sendo:

$$P = \frac{C^2}{\mu} = a(1 - e^2) \quad (2.7)$$

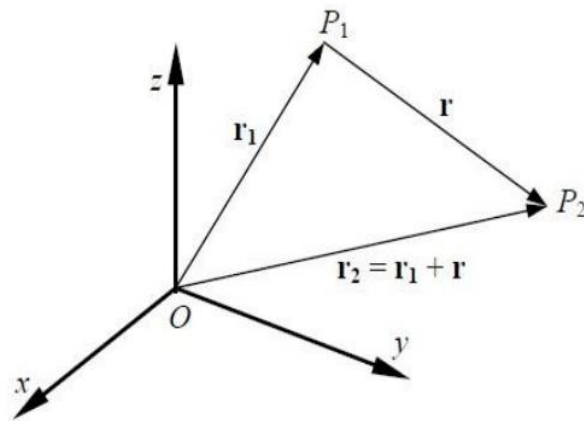
Assim como,

$$e = \sqrt{\frac{2EC}{\mu^2} - 1} \quad (2.8)$$

Note que  $r$  é uma equação de uma cônica em coordenadas polares com  $P$  sendo o semi latusrectum,  $a$  é o semieixo maior,  $e$  é a excentricidade da cônica,  $(\varphi - \omega)$  é o ângulo polar, e  $E$  e  $C$  são constantes em que  $C = r^2 \dot{\varphi}$  e  $E = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\mu}{r}$ .

Portanto, se  $E < 0$  e  $e < 1$ , a cônica será uma elipse e é a premissa para os parâmetros trabalhados neste projeto.

Figura 2.1 - Sistema de coordenadas no problema de dois corpos.



Fonte: Kuga et al., 2008.

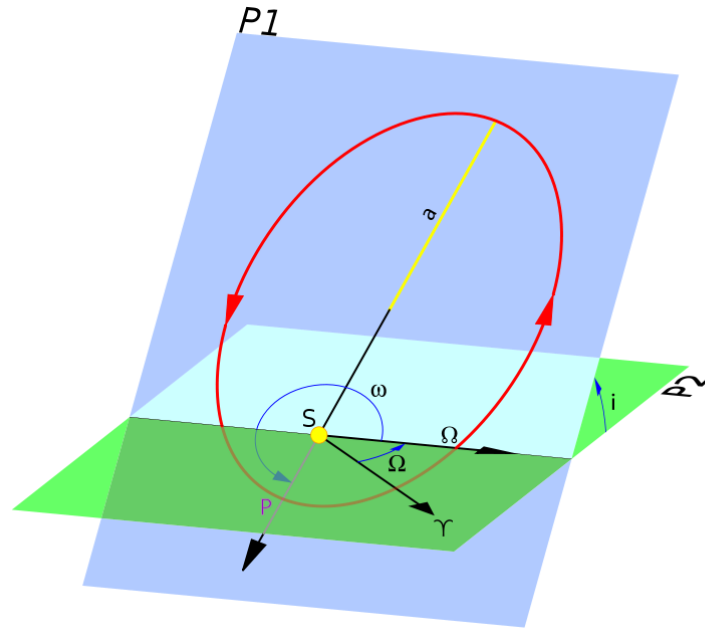
## 2.2 Elementos Orbitais Keplerianos

Em mecânica celeste há um conjunto de 6 parâmetros que descrevem um movimento orbital, chamados também de elementos orbitais keplerianos, dos quais se pode citar no caso elíptico: o semieixo maior da órbita ( $a$ ), ou seja, a distância do centro da elipse ao periélio; excentricidade da órbita ( $e$ ), que representa a razão entre a metade da distância entre os focos e o semieixo maior; a inclinação orbital ( $i$ ) mede o ângulo entre o plano de referência e o plano orbital; o argumento do pericentro ( $\omega$ ) é o ângulo medido no plano orbital do corpo entre o nodo ascendente até o pericentro, correspondendo seu sentido de rotação; a ascensão reta do nodo ascendente ( $\Omega$ ), ou longitude do nodo ascendente, é a longitude eclíptica do nodo ascendente da órbita; e, por fim, a anomalia média ( $M$ ) é a conversão para ângulo da época de passagem do corpo pelo periastro.

Temos ainda que ‘ $a$ ’, ‘ $e$ ’ e ‘ $i$ ’ são denominadas como variáveis métricas, e ‘ $\omega$ ’, ‘ $\Omega$ ’ e ‘ $M$ ’ como as variáveis angulares.



Figura 2.2 – Elementos orbitais de um corpo celeste.



Fonte: Wikipedia, Elementos Orbitais.

### 2.3 Potencial Gravitacional

Seja um satélite artificial sob a força de potencial gravitacional de um corpo central, e que orbita um corpo com distribuição não uniforme de massa, considera-se a seguinte expressão para o potencial gravitacional (Morando, 1974):

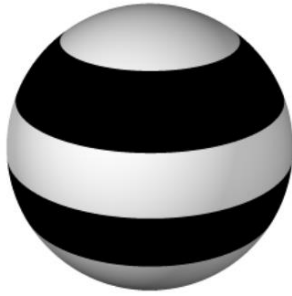
$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n a_e^n}{r^n} P_n(\sin \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{J_{n,m} a_e^n}{r^n} P_{n,m}(\sin \phi) \cos m(\lambda - \lambda_{n,m}) \right] \quad (2.9)$$

Em que  $\mu$  é a constante gravitacional,  $r$  representa a distância entre o satélite e o centro de massa do corpo com distribuição não uniforme de massa,  $J_n$ ,  $J_{n,m}$  e  $\lambda_{n,m}$  são elementos do corpo central,  $a_e$  é o raio equatorial do corpo central, os índices  $n$  e  $m$  representam o grau e a ordem do polinômio associado de Legendre,  $P_{n,m}$  são os polinômios associados de Legendre, e os ângulos  $\phi$  e  $\lambda$  representam a latitude e a longitude em ângulos.

Abaixo está representado três exemplos de harmônicos em corpos esféricos, os setorais, os zonais e os tesserais. As harmônicos zonais são polinômios de grau  $n$ , sendo

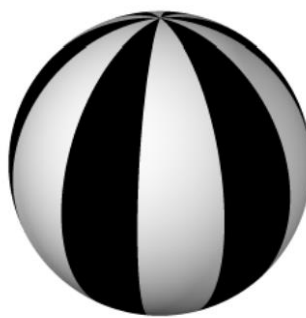
$m = 0$  e independentes da longitude  $\lambda$ , os harmônicos zonais dividem a esfera em setores positivos e negativos e possuem os graus  $n = m$ , e os harmônicos tesserais possuem funções  $\cos m\lambda$  e de grau  $2m$ .

Figure 2.3 - Harmônicos Setoriais.



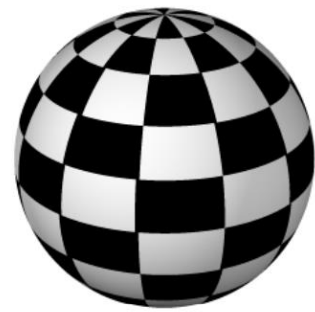
Fonte: Kuga et al., 2011.

Figure 2.4 - Harmônicos Zonais.



Fonte: Kuga et al., 2011.

Figure 2.5 - Harmônicos Tesserais.



Fonte: Kuga et al., 2011.

Neste projeto, é utilizado os seguintes coeficientes zonais de  $J_2$  a  $J_6$  para a lua, destacando-se também a importância dos elementos  $J_7$ , que ainda está em desenvolvimento, e do harmônico setorial  $C_{22}$ .

Figura 2.4 - Harmônicos Zonais e Setorial

Coefficients	
$J_2$	$+2.070 \times 10^{-4}$
$J_3$	$+4.900 \times 10^{-6}$
$J_4$	$+8.000 \times 10^{-7}$
$J_5$	$-3.600 \times 10^{-6}$
$J_6$	$-1.100 \times 10^{-6}$
$J_7$	$-2.870 \times 10^{-5}$
$C_{22}$	$+2.447305 \times 10^{-5}$

Fonte: Carvalho et al. (2011)

## 2.4 Equações Planetárias de Lagrange

As equações planetárias de Lagrange permitem determinar a velocidade e a localização de um corpo celeste em uma órbita, e são descritas em termos dos elementos orbitais keplerianos mencionados anteriormente:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \quad (2.10)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M} \quad (2.11)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial \omega} \quad (2.12)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (2.13)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (2.14)$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (2.15)$$

As expressões que contêm  $\frac{\partial R}{\partial M}$  e  $\frac{\partial R}{\partial \Omega}$ , neste caso, são denominadas de equações de curto período, e as que contêm  $\frac{\partial R}{\partial \omega}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial i}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial e}$  e  $\frac{\partial R}{\partial a}$ , são denominadas de longo período. A proposta deste projeto envolve apenas as equações de longo período, mas salienta-se a importância dos elementos equacionais de curto período para um estudo mais elaborado das perturbações.

### 2.4.1 Funções de Perturbação

Abaixo estão as funções de perturbação em função dos harmônicos zonais  $J_2$  a  $J_6$  e do harmônico  $C_{22}$  da lua utilizados ao longo desta pesquisa, obtidas a partir do artigo científico Planetary Satellite Orbiters: Applications for the Moon (Carvalho et al., 2011):

$$\langle\langle R_{J_2} \rangle\rangle = -\frac{1}{4} R_M^2 J_2 \frac{n^2}{(1-e^2)^{3/2}} (-2 + 3s_i^2), \quad (2.16)$$

$$\langle\langle R_{J_3} \rangle\rangle = -\frac{3}{8} R_M^3 J_3 \frac{n^2 s_i e}{a(1-e^2)^{5/2}} (-4 + 5s_i^2) \sin \omega, \quad (2.17)$$

$$\langle\langle R_{J_4} \rangle\rangle = \frac{3}{128} R_M^4 J_4 \frac{n^2}{a^2(1-e^2)^{7/2}} \quad (2.18)$$

$$\times (10 e^2 s_i^2 (7s_i^2 - 6) \cos(2\omega) - (3e^2 + 2)(35s_i^4 - 40s_i^2 + 8)),$$

$$\langle\langle R_{J_5} \rangle\rangle = \frac{5}{256} R_M^5 J_5 \frac{n^2 s_i e}{a^3(1-e^2)^{9/2}} \quad (2.19)$$

$$\times (14e^2 s_i^2 (9s_i^2 - 8) \cos(2\omega) + e^2(-315s_i^4 + 448s_i^2 - 144)$$

$$-24(21s_i^4 - 28s_i^2 + 8)) \sin \omega,$$

$$\langle\langle R_{J_6} \rangle\rangle = -\frac{5}{4096} R_M^6 J_6 \frac{n^2}{a^4(1-e^2)^{11/2}} \quad (2.20)$$

$$\times (-2(15e^4 + 40e^2 + 8)(231s_i^6 - 378s_i^4 + 168s_i^2 - 16)$$

$$-63e^4(11s_i^2 - 10)s_i^4 \cos(4\omega) + 210e^2(e^2 + 2)$$

$$\times (33s_i^4 - 48s_i^2 + 16)s_i^2 \cos(2\omega)),$$

$$\langle\langle R_{C_{22}} \rangle\rangle = \frac{3}{2} R_M^2 \bar{C}_{22} \frac{n^2}{(1-e^2)^{3/2}} s_i^2 \cos(2(\Omega - \gamma_{Mt})) \quad (2.21)$$

É necessário citar que a equação para  $R_{J_7}$  está em processo de desenvolvimento pelo autor e, por  $R_{C_{22}}$  conter termos de curto período, não foi utilizado no processo de desenvolvimento neste estudo.

## 2.5 Variações dos Elementos Angulares

As expressões para a variação dos elementos angulares utilizadas como parâmetros no desenvolvimento dos gráficos mostrados durante os tópicos seguintes foram publicadas por B. Morando (1974):

$$\begin{aligned} \omega &= n_{\omega}t + \omega_0 = \\ &\left( nJ_2 \left( \frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \left( -\frac{3}{5} + \frac{15}{4} \cos^2 i \right) \right) t + \omega_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \Omega &= n_{\Omega}t + \Omega_0 = \\ &\left( -nJ_2 \left( \frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \frac{3}{2} \cos i \right) t + \Omega_0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} M &= nt + n_M t + M_0 = \\ &nt + \left( 3nJ_2 \left( \frac{a_e}{a} \right)^2 \left( -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 i \right) (1-e^2)^{-\frac{3}{2}} \right) t + M_0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Em que  $n$  representa o movimento médio em graus por dia do corpo celeste, sendo  $n = \sqrt{\mu \cdot a^3}$ ,  $\Omega_0$  é o valor inicial da longitude no nodo ascendente,  $\omega_0$  é o valor inicial do argumento do pericentro e  $M_0$  é o valor inicial da anomalia média. Todos os valores das constantes utilizadas nos cálculos de tais equações, assim como os resultados obtidos, estão contidos nos Parâmetros 1 e 2 mostrados no tópico a seguir.

## 2.6 Simulações e Resultados

Primeiramente, com as equações das funções de perturbação anteriormente mencionadas, um programa na linguagem Python foi elaborado para o cálculo das derivadas parciais de cada uma delas considerando cada harmônico zonal  $J_1$  até  $J_6$ . Note que em  $RJ_2$  não há a constante  $\omega$  e  $a$ , logo as derivadas de  $\partial RJ_2/\partial \omega$  e  $\partial RJ_2/\partial a$  resultarão em 0.

$$\text{Resultado de } \partial R/\partial i \text{ para } RJ_2: \quad \frac{1.5J_{dois}RaioL^2in^2}{(1 - e^2)^{1.5}} \quad (2.25)$$

$$\text{Resultado de } \partial R/\partial e \text{ para } RJ_2: \quad \frac{0.75J_{dois}RaioL^2en^2 \cdot (3i^2 - 2)}{(1 - e^2)^{2.5}} \quad (2.26)$$

$$\text{Resultado de } \partial R/\partial \omega \text{ para } RJ_3: \quad \frac{0.375J_{tres}RaioL^3ein^2 \cdot (5i^2 - 4) \cos(w)}{a(1 - e^2)^{2.5}} \quad (2.27)$$

$$\text{Resultado de } \partial R/\partial a \text{ para } RJ_3: \quad \frac{0.375J_{tres}RaioL^3ein^2 \cdot (5i^2 - 4) \sin(w)}{a^2(1 - e^2)^{2.5}} \quad (2.28)$$

Resultado de  $\partial R/\partial i$  para  $RJ_3$ :

$$\frac{3.75J_{tres}RaioL^3ei^2n^2 \sin(w)}{a(1 - e^2)^{2.5}} - \frac{0.375J_{tres}RaioL^3en^2 \cdot (5i^2 - 4) \sin(w)}{a(1 - e^2)^{2.5}} \quad (2.29)$$

Resultado de  $\partial R/\partial e$  para  $RJ_3$ :

$$\frac{1.875J_{tres}RaioL^3e^2in^2 \cdot (5i^2 - 4) \sin(w)}{a(1 - e^2)^{3.5}} - \frac{0.375J_{tres}RaioL^3in^2 \cdot (5i^2 - 4) \sin(w)}{a(1 - e^2)^{2.5}} \quad (2.30)$$

Resultado de  $\partial R/\partial \omega$  para RJ4:

$$\frac{0.46875 J_{quatro} R_{aio} L^4 e^2 i^2 n^2 \cdot (7i^2 - 6) \sin(2w)}{a(1 - e^2)^{3.5}} \quad (2.31)$$

Resultado de  $\partial R/\partial a$  para RJ4:

$$\frac{0.0234375 J_{quatro} R_{aio} L^4 n^2 \cdot (10e^2 i^2 \cdot (7i^2 - 6) \cos(2w) - (3e^2 + 2) (35i^4 - 40i^2 + 8))}{a^2 (1 - e^2)^{3.5}} \quad (2.32)$$

Resultado de  $\partial R/\partial i$  para RJ4:

$$\frac{0.0234375 J_{quatro} R_{aio} L^4 n^2 \cdot (140e^2 i^3 \cos(2w) + 20e^2 i (7i^2 - 6) \cos(2w) + (-3e^2 - 2) (140i^3 - 80i))}{a(1 - e^2)^{3.5}} \quad (2.33)$$

Resultado de  $\partial R/\partial e$  para RJ4:

$$\begin{aligned} & \frac{0.1640625 J_{quatro} R_{aio} L^4 e n^2 \cdot (10e^2 i^2 \cdot (7i^2 - 6) \cos(2w) - (3e^2 + 2) (35i^4 - 40i^2 + 8))}{a(1 - e^2)^{4.5}} \\ & + \frac{0.0234375 J_{quatro} R_{aio} L^4 n^2 \cdot (20e i^2 \cdot (7i^2 - 6) \cos(2w) - 6e (35i^4 - 40i^2 + 8))}{a(1 - e^2)^{3.5}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Resultado de  $\partial R/\partial \omega$  para RJ5:

$$\frac{0.546875 J_4 R_{aio} L^5 e^3 i^3 n^2 \cdot (9i^2 - 8) \sin(w) \sin(2w)}{a^3 (1 - e^2)^{4.5}} + \frac{0.01953125 J_4 R_{aio} L^5 e i n^2 \cdot (14e^2 i^2 \cdot (9i^2 - 8) \cos(2w) + e^2 (-315i^4 + 448i^2 - 144) - 504i^4 + 672i^2 - 192) \cos(w)}{a^3 (1 - e^2)^{4.5}} \quad (2.35)$$

Resultado de  $\partial R/\partial a$  para RJ5:

$$\frac{0.05859375J_5Raiol^5ein^2 \cdot (14e^{2i^2} \cdot (9i^2 - 8) \cos(2w) + e^2(-315i^4 + 448i^2 - 144) - 504i^4 + 672i^2 - 192) \sin(w)}{a^4(1 - e^2)^{4.5}} \quad (2.36)$$

Resultado de  $\partial R/\partial i$  para RJ5:

$$\frac{0.01953125J_5Raiol^5ein^2 \cdot (252e^{2i^3} \cos(2w) + 28e^{2i}(9i^2 - 8) \cos(2w) + e^2(-1260i^3 + 896i) - 2016i^3 + 1344i) \sin(w)}{a^3(1 - e^2)^{4.5}} + \frac{0.01953125J_5Raiol^5en^2 \cdot (14e^{2i^2} \cdot (9i^2 - 8) \cos(2w) + e^2(-315i^4 + 448i^2 - 144) - 504i^4 + 672i^2 - 192) \sin(w)}{a^3(1 - e^2)^{4.5}} \quad (2.37)$$

Resultado de  $\partial R/\partial e$  para RJ5:

$$\frac{0.17578125J_5Raiol^5e^2in^2 \cdot (14e^{2i^2} \cdot (9i^2 - 8) \cos(2w) + e^2(-315i^4 + 448i^2 - 144) - 504i^4 + 672i^2 - 192) \sin(w)}{a^3(1 - e^2)^{5.5}} + \frac{0.01953125J_5Raiol^5ein^2 \cdot (28ei^2 \cdot (9i^2 - 8) \cos(2w) + 2e(-315i^4 + 448i^2 - 144)) \sin(w)}{a^3(1 - e^2)^{4.5}} + \frac{0.01953125J_5Raiol^5in^2 \cdot (14e^{2i^2} \cdot (9i^2 - 8) \cos(2w) + e^2(-315i^4 + 448i^2 - 144) - 504i^4 + 672i^2 - 192) \sin(w)}{a^3(1 - e^2)^{4.5}} \quad (2.38)$$

Resultado de  $\partial R/\partial \omega$  para RJ6:

$$\frac{0.001220703125J_6Raiol^6n^2 \cdot (252e^{4i^4} \cdot (11i^2 - 10) \sin(4w) - 420e^{2i^2}(e^2 + 2)(33i^4 - 48i^2 + 16) \sin(2w))}{a^4(1 - e^2)^{5.5}} \quad (2.39)$$

Resultado de  $\partial R/\partial a$  para RJ6:



$$\frac{0.0048828125J_6RaioL^6n^2(-63e^4i^4 \cdot (11i^2 - 10) \cos(4w) + 210e^2i^2(e^2 + 2)(33i^4 - 48i^2 + 16) \cos(2w) + (-30e^4 - 80e^2 - 16)(231i^6 - 378i^4 + 168i^2 - 16))}{a^5(1 - e^2)^{5.5}}$$

(2.40)

Resultado de  $\partial R/\partial i$  para RJ6:

$$\frac{0.001220703125J_6RaioL^6n^2(-1386e^4i^5 \cos(4w) - 252e^4i^3 \cdot (11i^2 - 10) \cos(4w) + 210e^2i^2(e^2 + 2)(132i^3 - 96i) \cos(2w) + 420e^2i(e^2 + 2)(33i^4 - 48i^2 + 16) \cos(2w) + (-30e^4 - 80e^2 - 16)(1386i^5 - 1512i^3 + 336i))}{a^4(1 - e^2)^{5.5}}$$

(2.41)

Resultado de  $\partial R/\partial e$  para RJ6:

$$\frac{0.013427734375J_6RaioL^6en^2(-63e^4i^4 \cdot (11i^2 - 10) \cos(4w) + 210e^2i^2(e^2 + 2)(33i^4 - 48i^2 + 16) \cos(2w) + (-30e^4 - 80e^2 - 16)(231i^6 - 378i^4 + 168i^2 - 16))}{a^4(1 - e^2)^{6.5}}$$

$$\frac{0.001220703125J_6RaioL^6n^2(-252e^3i^4 \cdot (11i^2 - 10) \cos(4w) + 420e^3i^2 \cdot (33i^4 - 48i^2 + 16) \cos(2w) + 420ei^2(e^2 + 2)(33i^4 - 48i^2 + 16) \cos(2w) + (-120e^3 - 160e)(231i^6 - 378i^4 + 168i^2 - 16))}{a^4(1 - e^2)^{5.5}}$$

(2.42)

Após calculadas as derivadas parciais das funções de perturbação, pôde-se completar as equações de Lagrange (2.16) à (2.21) para cada harmônico  $J_n$  como consta abaixo:

Equação de Lagrange  $d\Omega/dt$  para  $J_2$ : 
$$\frac{1.5J_2RaioL^2in}{a^2(1 - e^2)^{2.0} \sin(i)}$$
 (2.43)

Equação de Lagrange  $de/dt$  para  $J_2$ : 0.

Equação de Lagrange  $d\omega/dt$  para J2:

$$\frac{1.5J_{dois}RaioL^2in \cos(i)}{a^2(1-e^2)^{2.0} \sin(i)} - \frac{0.75J_{dois}RaioL^2n(3i^2-2)}{a^2(1-e^2)^{2.0}} \quad (2.44)$$

Equação de Lagrange  $dM/dt$  para J2:  $\frac{0.75J_{dois}RaioL^2n(3i^2-2)}{a^2(1-e^2)^{1.5}} + n$  (2.45)

Equação de Lagrange  $di/dt$  para J2: 0

Equação de Lagrange  $d\Omega/dt$  para J3:

$$\frac{-\frac{3.75J_{tres}RaioL^3e^2n^2 \sin(w)}{a(1-e^2)^{2.5}} - \frac{0.375J_{tres}RaioL^3en^2(5i^2-4) \sin(w)}{a(1-e^2)^{2.5}}}{a^2n\sqrt{1-e^2} \sin(i)} \quad (2.46)$$

Equação de Lagrange  $de/dt$  para J3:

$$\frac{0.375J_{tres}RaioL^3in(5i^2-4) \cos(w)}{a^3(1-e^2)^{2.0}} \quad (2.47)$$

Equação de Lagrange  $dM/dt$  para J3:

$$-\frac{0.75J_{tres}RaioL^3ein(5i^2-4) \sin(w)}{a(1-e^2)^{2.5}} + n - \frac{(1-e^2) \left( -\frac{1.875J_{tres}RaioL^3e^2in^2(5i^2-4) \sin(w)}{a(1-e^2)^{3.5}} - \frac{0.375J_{tres}RaioL^3in^2(5i^2-4) \sin(w)}{a(1-e^2)^{2.5}} \right)}{a^2en} \quad (2.48)$$

Equação de Lagrange  $d\omega/dt$  para J3:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left( -\frac{3.75J_{tres}RaioL^3 e^2 n^2 \sin(w)}{a(1-e^2)^{2.5}} - \frac{0.375J_{tres}RaioL^3 e n^2 \cdot (5i^2 - 4) \sin(w)}{a(1-e^2)^{2.5}} \right) \cos(i)}{a^2 n \sqrt{1-e^2} \sin(i)} \\
 & + \frac{\sqrt{1-e^2} \left( -\frac{1.875J_{tres}RaioL^3 e^2 i n^2 \cdot (5i^2 - 4) \sin(w)}{a(1-e^2)^{3.5}} - \frac{0.375J_{tres}RaioL^3 i n^2 \cdot (5i^2 - 4) \sin(w)}{a(1-e^2)^{2.5}} \right)}{a^2 e n}
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Equação de Lagrange  $di/dt$  para J3:

$$\frac{0.375J_{tres}RaioL^3 e i n (5i^2 - 4) \cos(i) \cos(w)}{a^3 (1-e^2)^{3.0} \sin(i)} \tag{2.50}$$

Equação de Lagrange  $d\Omega/dt$  para J4:

$$\frac{0.0234375J_{quatro}RaioL^4 n (140e^2 i^3 \cos(2w) + 20e^2 i (7i^2 - 6) \cos(2w) + (-3e^2 - 2) (140i^3 - 80i))}{a^3 (1-e^2)^{4.0} \sin(i)} \tag{2.51}$$

Equação de Lagrange  $de/dt$  para J4:

$$\frac{0.46875J_{quatro}RaioL^4 e i^2 n (7i^2 - 6) \sin(2w)}{a^3 (1-e^2)^{3.0}} \tag{2.52}$$

Equação de Lagrange  $d\omega/dt$  para J4:

$$\begin{aligned}
 & \frac{0.0234375J_{quatro}RaioL^4 n (140e^2 i^3 \cos(2w) + 20e^2 i (7i^2 - 6) \cos(2w) + (-3e^2 - 2) (140i^3 - 80i)) \cos(i)}{a^3 (1-e^2)^{4.0} \sin(i)} \\
 & + \frac{\sqrt{1-e^2} \left( \frac{0.1640625J_{quatro}RaioL^4 e n^2 (10e^2 i^2 (7i^2 - 6) \cos(2w) - (3e^2 + 2) (35i^4 - 40i^2 + 8))}{a(1-e^2)^{4.5}} + \frac{0.0234375J_{quatro}RaioL^4 n^2 (20e^2 i (7i^2 - 6) \cos(2w) - 6e (35i^4 - 40i^2 + 8))}{a(1-e^2)^{3.5}} \right)}{a^2 e n}
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Equação de Lagrange dM/dt para J4:

$$n - \frac{2 \left( -0.234375 J_{quatro} Raio L^4 e^2 i^2 n^2 \cdot (7i^2 - 6) \cos(2w) - (3e^2 + 2) (35i^4 - 40i^2 + 8) \right)}{a n (1 - e^2)^{3.5}} - \frac{(1 - e^2) \left( \frac{0.1640625 J_{quatro} Raio L^4 e i^2 (10e^2 i^2 (7i^2 - 6) \cos(2w) - (3e^2 + 2) (35i^4 - 40i^2 + 8))}{a (1 - e^2)^{4.5}} + \frac{0.0234375 J_{quatro} Raio L^4 n^2 (20e^2 (7i^2 - 6) \cos(2w) - 6e (35i^4 - 40i^2 + 8))}{a (1 - e^2)^{3.5}} \right)}{a^2 e n} \quad (2.54)$$

Equação de Lagrange di/dt para J4:

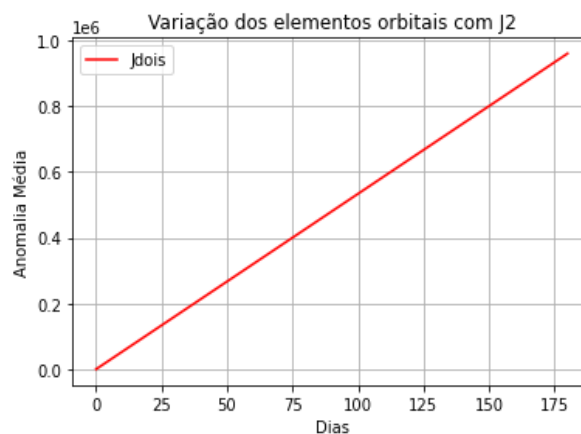
$$\frac{0.46875 J_{quatro} Raio L^4 e^2 i^2 n (7i^2 - 6) \sin(2w) \cos(i)}{a^3 (1 - e^2)^{4.0} \sin(i)} \quad (2.55)$$

Os gráficos para comparação gerados seguem até o harmônico J4, logo as equações de Lagrange para J5 e J6 não serão necessários.

Após o cálculo do período n e das variações dos elementos angulares, foram considerados dois parâmetros para os cálculos das integrais a partir das equações de Lagrange, o parâmetro 1 considera a constante  $a_1 =$  raio da Lua + 50 km e  $a_2 =$  raio da Lua + 100km, assim como as excentricidades  $e_1 = 0,01$  e  $e_2 = 0,02$ .

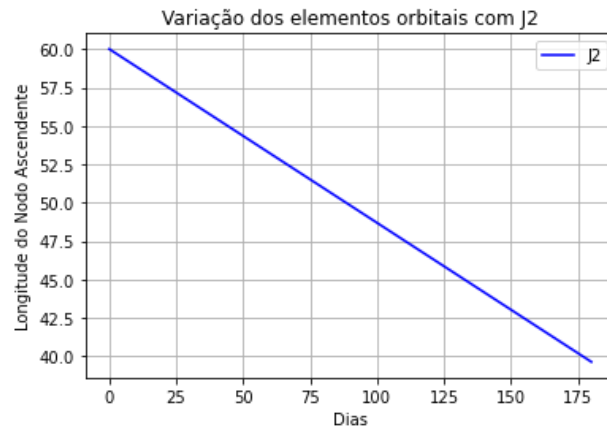
Temos que os parâmetros 1 são: n: 26,05130 rad/dia = 1492,629541 graus por dia,  $\Omega$ : -0,25286,  $\omega$ : 0,60222, M: - 0,12313 e  $i$ : 30 graus. Assim, obteve-se os seguintes gráficos:

Figura 1 - Gráfico da Anomalia Média com J2.



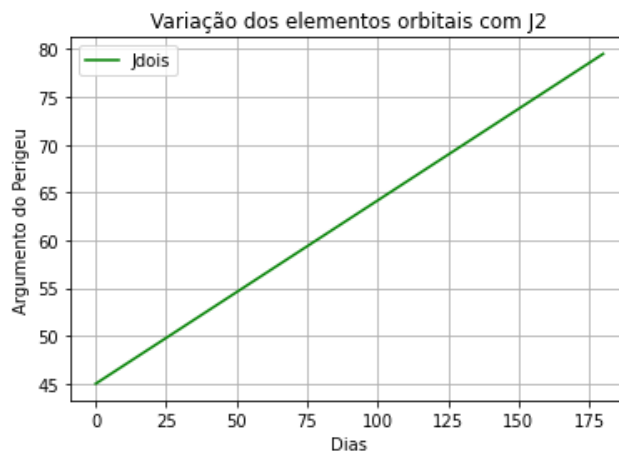
Fonte: Produção da autora.

Figure 1 - Gráfico da Longitude no Nodo Ascendente com J2.



Fonte: Produção da autora.

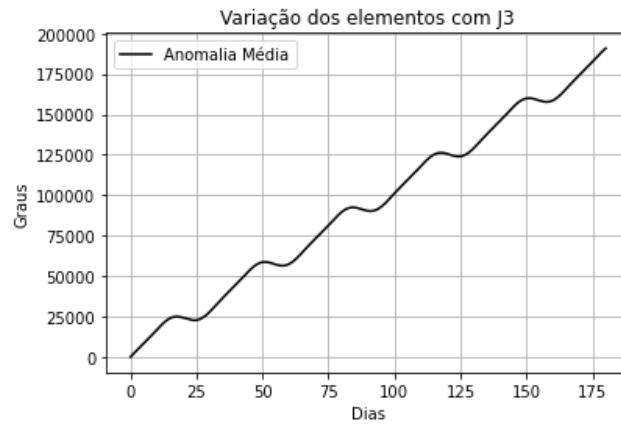
Figure 2 - Gráfico do Argumento do Perigeu com J2.



Fonte: Produção da autora.

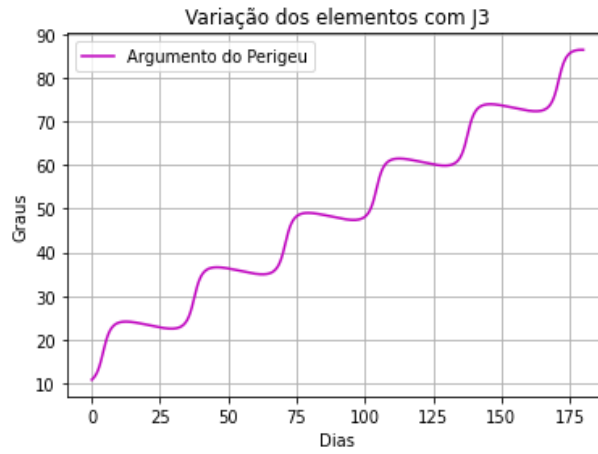
Para os harmônicos zonais J3, obteve-se:

Figure 2.6 – Anomalia Média com J3.



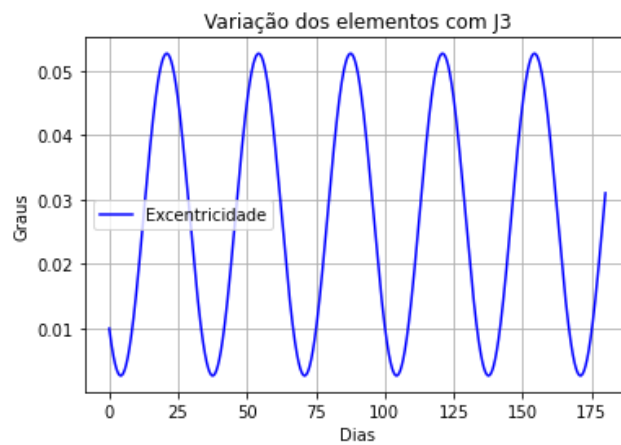
Fonte: Produção da autora.

Figure 2.7 – Argumento do Perigeu com J3.



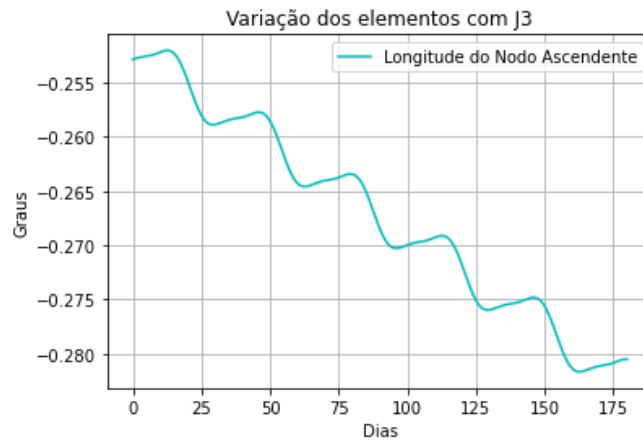
Fonte: Produção da autora.

Figure 2.8 – Excentricidade com J3.



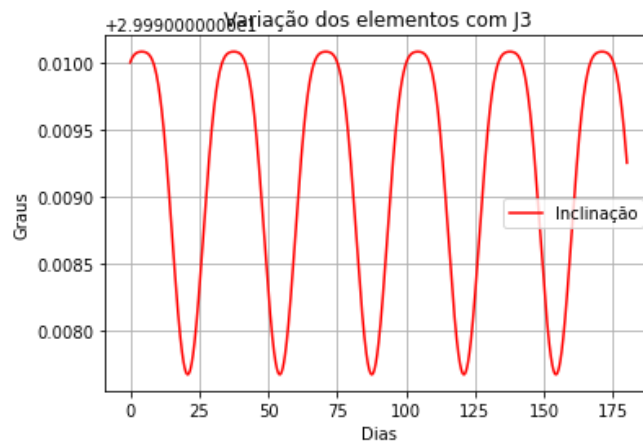
Fonte: Produção da autora.

Figure 2.9 – Longitude do Nodo Ascendente com J3.



Fonte: Produção da autora.

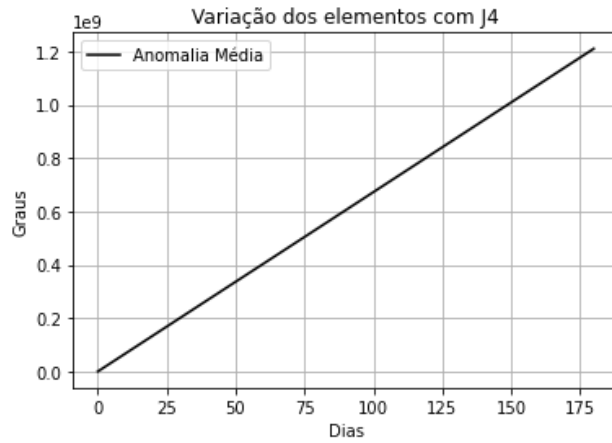
Figure 2.10 - Inclinação com J3.



Fonte: Produção da autora.

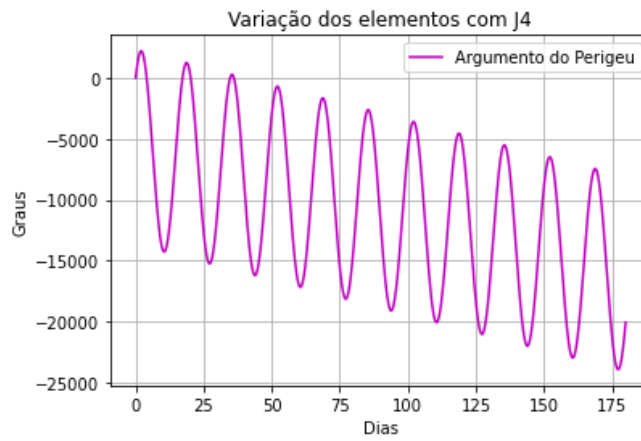
Para os harmônicos zonais J4, temos:

Figure 2.11 – Anomalia Média com J4.



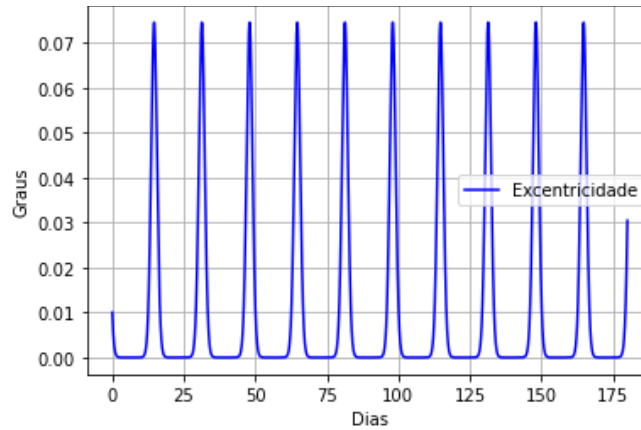
Fonte: Produção da autora.

Figure 2.12 – Argumento do Perigeu com J4.



Fonte: Produção da autora.

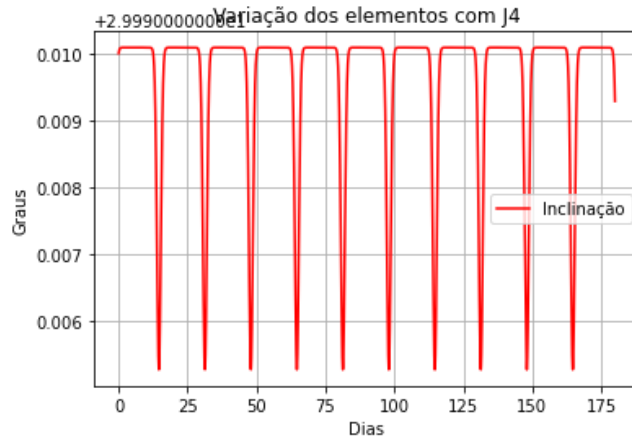
Figure 2.13 - Excentricidade com J4.



Fonte: Produção da autora.

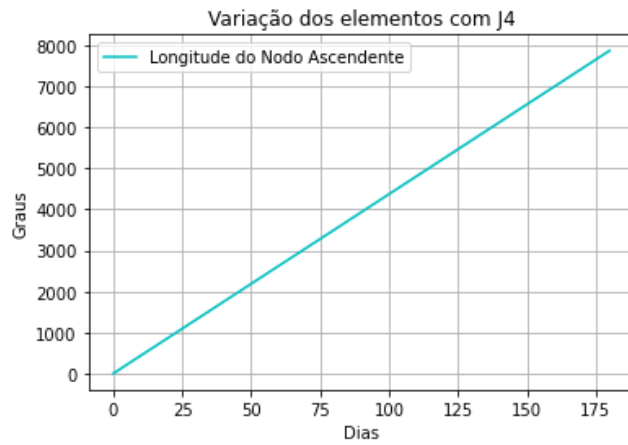


Figure 2.14 - Inclinação com J4.



Fonte: Produção da autora.

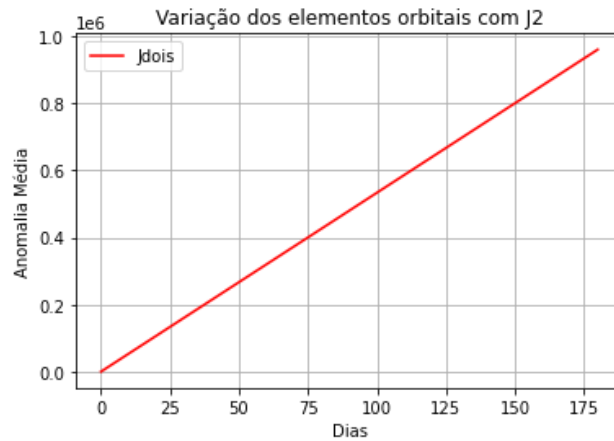
Figure 2.15 – Longitude do Nodo Ascendente com J4.



Fonte: Produção da autora.

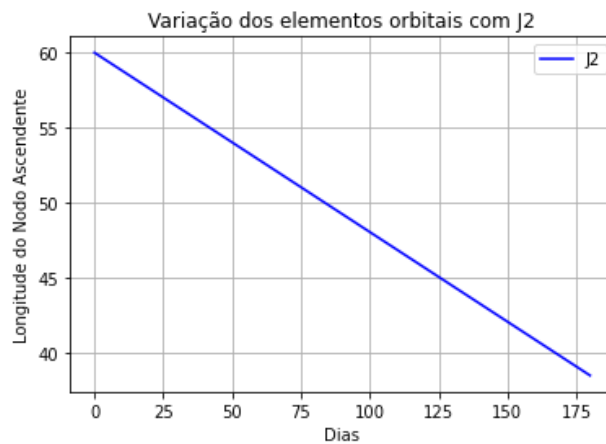
Em seguida, sabe-se que os parâmetros 2 obtidos são  $n$ : 25,69440 rad/dia = 1472,180677 graus por dia,  $\Omega$ : -0,23615,  $\omega$ : 0,56242,  $M$ : -0,11488 e  $i$ : 30 graus. Deste modo, obtemos:

Figure 2.16 - Anomalia Média com J2 para parâmetros 2.



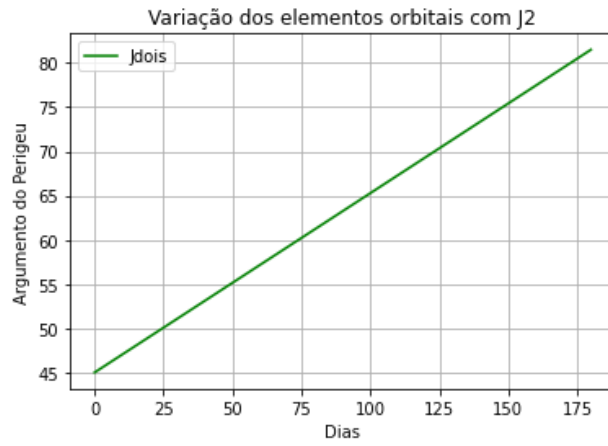
Fonte: Produção da autora.

Figure 2.17 - Longitude do Nodo Ascendente com J2 para parâmetros 2.



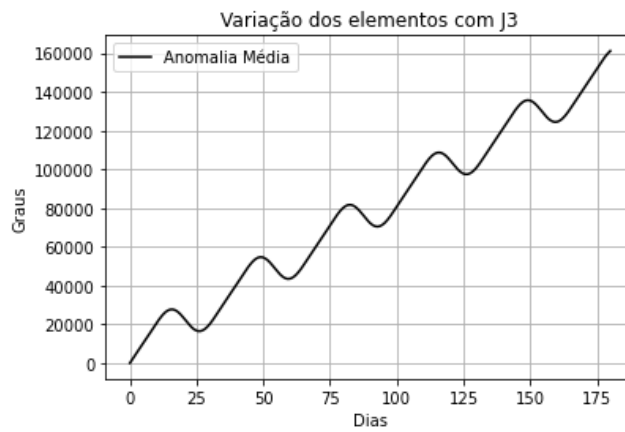
Fonte: Produção da autora.

Figure 2.18 – Argumento do Perigeu com J2 para parâmetros 2.



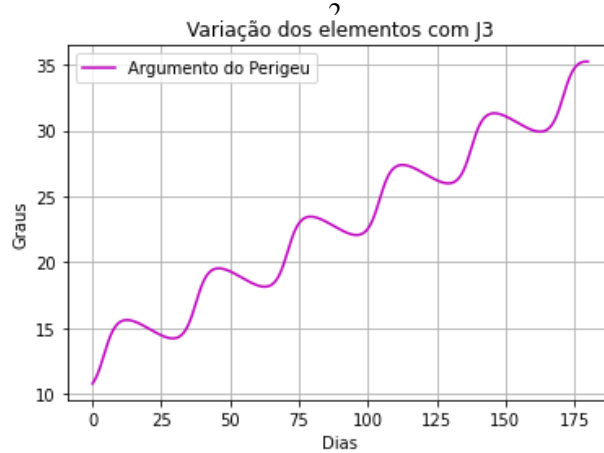
Fonte: Produção da autora.

Figure 2.19 - Anomalia Média com J3 para parâmetros 2.



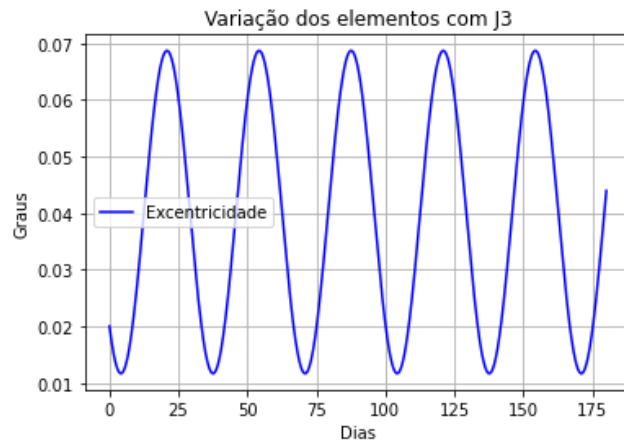
Fonte: Produção da autora.

Figure 2.20 - Argumento do Pericentro com J3 para parâmetros 2



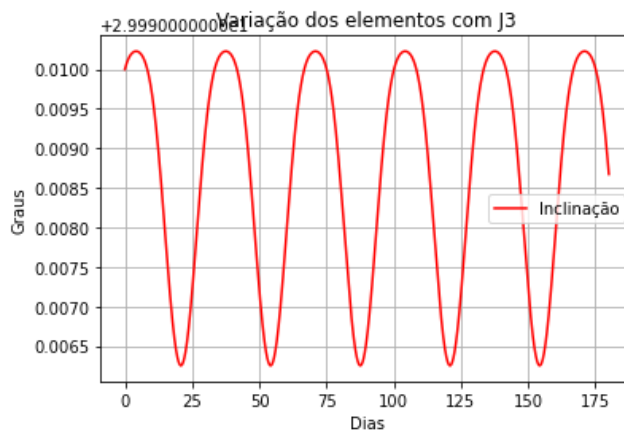
Fonte: Produção da autora.

Figure 2.21 - Excentricidade com J3 para parâmetros 2.



Fonte: Produção da autora.

Figure 2.22 - Inclinação com J3 para parâmetros 2.



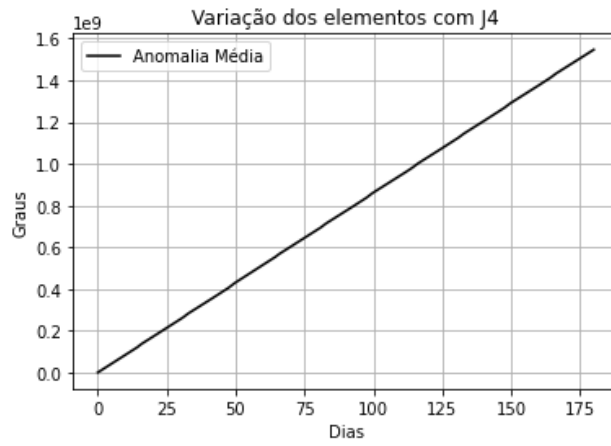
Fonte: Produção da autora.

Figure 2.23 - Longitude no Nodo Ascendente com J3 para parâmetros 2.



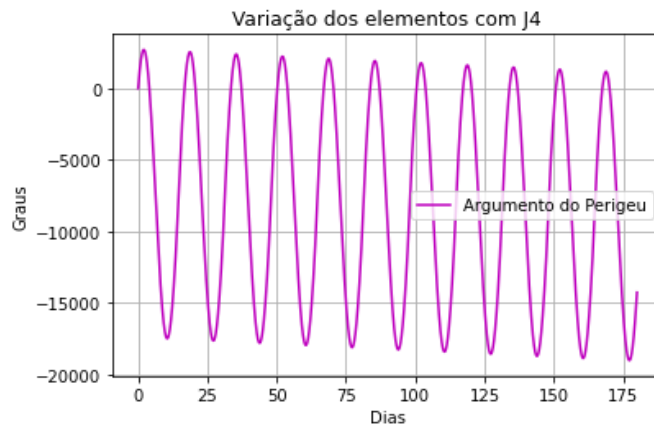
Fonte: Produção da autora.

Figure 2.24 - Anomalia Média com J4 para parâmetros 2.



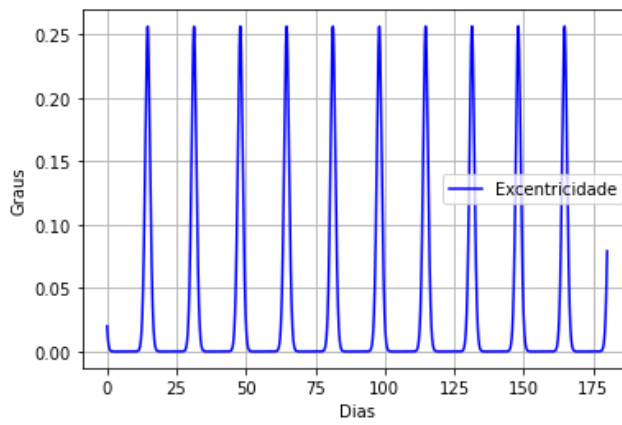
Fonte: Produção da autora.

Figure 2.25 - Argumento do Pericentro com J4 para parâmetros 2.



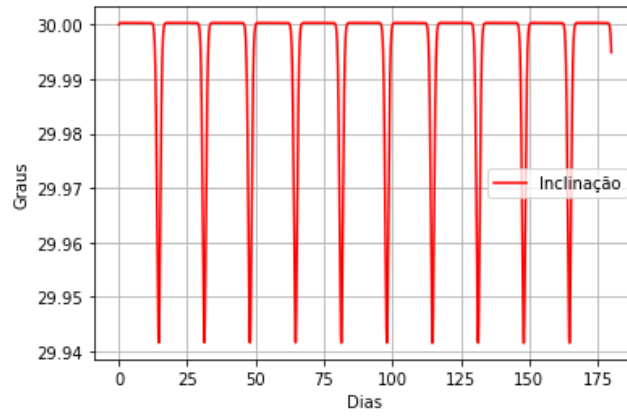
Fonte: Produção da autora.

Figure 2.26 - Excentricidade com J4 para parâmetros 2.



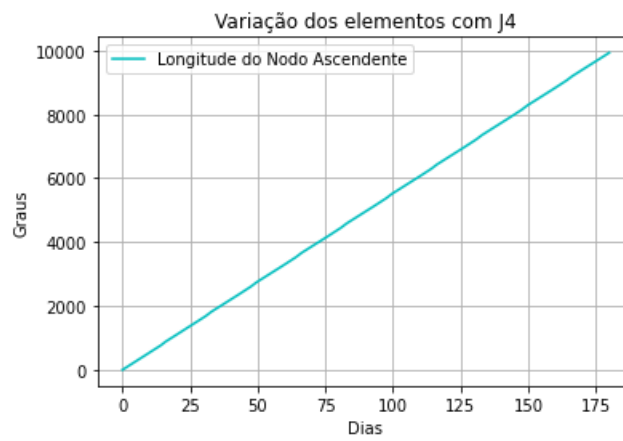
Fonte: Produção da autora.

Figure 2.27 - Inclinação com J4 para parâmetros 2.



Fonte: Produção da autora.

Figure 2.28 - Longitude no Nodo Ascendente com J4 para parâmetros 2.



Fonte: Produção da autora.

### **3 CONCLUSÃO**

Verifica-se por meio deste estudo que as influências nas perturbações considerando os harmônicos zonais torna-se notoriamente grande a partir de J3, sendo J4 o harmônico que mais influenciou as órbitas, principalmente com relação aos graus da inclinação e à excentricidade da órbita. Tais resultados produzidos são apenas para os harmônicos separados, e levam a crer que J5, J6 e C22 acarretam em influências ainda maiores nos satélites orbitando a Lua, e tais hipóteses podem ser estudadas com estudos posteriores.

Ademais, além dos estudos de influências dos harmônicos separadamente, para um resultado mais completo e claro sobre todas as perturbações estudadas nas órbitas, deve ser levado em consideração a soma dos harmônicos no cálculo dos gráficos a fim de se obter maior entendimento em relação à influência que os harmônicos em conjunto realizam sobre a órbita em questão.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEUTLER, G., MERVART, L., VERDUN, A. **Methods of Celestial Mechanics: Theory, Applications and Computer Programs**, Vol. 1, Springer, Berlin, 2005.

BROUWER, D. and CLEMENCE, G. **Methods of Celestial Mechanics**. 3ª ed. New York: Academic Press, 1961.

CARVALHO, J. P. S. ; PRADO, A. F. B. A. ; Vilhena de Moraes, R. . **Some orbital characteristics of lunar artificial satellites**. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, v. 108, p. 371-388, 2010.

CARVALHO, J. P. S. ; PRADO, A. F. B. A. ; Vilhena de Moraes, R. . **Planetary Satellite Orbiters: Applications for the Moon**. *Mathematical Problems in Engineering*, doi :10.1155/2011/187478, 2011.

CARVALHO, J. P. S., VILHENA DE MORAES, R., PRADO, A. F. B. A. **Nonsphericity of the Moon and Near Sun-Synchronous Polar Lunar Orbits**. *Mathematical Problems in Engineering*, doi: 10.1155/2009/740460, 2009.

CHOBOTOV, V.A. **Orbital Mechanics**. 3ª ed Virginia: AIAA Educational Series, 2002.

KUGA, H. K., RAO, K. R., CARRARA, V. **Introdução à Mecânica Orbital**, 2ª Edição, INPE, S. J. Campos - SP, 2008.

KUGA, H. K., RAO, K. R., CARRARA, V. **Satélites Artificiais, Movimento Orbital**, 1ª Edição, INPE, S. J. Campos - SP, 2011.

MORANDO, M. B. **Mouvement d'un satellite artificiel de la Terre**. Gordon & Breach, Paris, 1974.

PRADO, A. F. B. A. and KUGA, H. H. **Fundamentos de Tecnologia Espacial**. São José dos Campos: INPE, 2001.

VILHENA DE MORAES, R. **Trajatória de Veículos Espaciais**, São José dos Campos, Publicação Interna, ITA, 1978.

WALTER, U. **Astronautics: The Physics of Space Flight**, Wiley/VCH, Weinmach, 2008.



WILLIAMS, David R. Soviet Lunar Missions. **NASA Space Science Data Coordinated Archive**, 2005. Disponível em:

<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/lunar/lunarussr.html#:~:text=The%20Soviet%20Lunar%20program%20had,probe%20to%20return%20to%20Earth>. Acesso em 28 de set. de 2022.

CHANG'E 5 Test Mission. **Spaceflight 101**, 2022. Disponível em:

<https://spaceflight101.com/change/change-5-test-mission/>. Acesso em 28 de set. de 2022.