



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



## **ÓRBITAS DE SATÉLITES ARTIFICIAIS TERRESTRES CONSIDERANDO A DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE MASSA DA TERRA**

Guilherme de Oliveira Paes

Relatório de Iniciação Científica do  
programa PIBIC, orientado pelo Dr.  
Rodolpho Vilhena de Moraes e pelo Dr.  
Helio Koiti Kuga.

URL do documento original:  
<<http://urlib.net/>>

INPE  
São José dos Campos  
2022



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



## **ÓRBITAS DE SATÉLITES ARTIFICIAIS TERRESTRES CONSIDERANDO A DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE MASSA DA TERRA**

Guilherme de Oliveira Paes

Relatório de Iniciação Científica do  
programa PIBIC, orientado pelo Dr.  
Rodolpho Vilhena de Moraes e pelo Dr.  
Helio Koiti Kuga.

URL do documento original:  
<<http://urlib.net/>>

INPE  
São José dos Campos  
2022



## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar agradeço ao meu orientador Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes pela oportunidade, apoio, disposição e ajuda, sempre com bom humor.

Aos professores Dr. Helio Koiti Kuga (coorientador), Dra. Marisa Atsuko Nitto e Dr. Jean Paulo dos Santos Carvalho por todo conhecimento compartilhado e dúvidas sanadas.

Aos meus familiares e amigos mais próximos pela compreensão e apoio.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) pela oportunidade de realizar esta pesquisa.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

À minha namorada Thais pela compreensão, paciência, apoio e por toda ajuda durante o período de realização deste trabalho.



## RESUMO

Os satélites artificiais terrestres possuem diversas aplicações, entre elas a telecomunicação (internet, TV, GPS), observação da Terra, exploração espacial (telescópios espaciais), meteorologia (monitoramento do clima, queimadas, desmatamentos, níveis de poluição), realização de experiências em ambiente de micro gravidade, estudos geodinâmicos, aplicações militares, etc. Quando se estuda o movimento orbital de um satélite artificial terrestre, é imprescindível que os efeitos das forças perturbadoras sejam analisados. Devido as perturbações, a órbita de um satélite se afasta da órbita elíptica de dois corpos, e dessa forma, a órbita se deforma. O presente trabalho refere-se ao estudo do movimento orbital de satélites artificiais ao redor da Terra, utilizando as equações planetárias de Lagrange para analisar as variações (seculares e periódicas) dos elementos orbitais tendo em vista perturbações em virtude da distribuição não uniforme de sua massa. Foram quantificados os efeitos dos coeficientes zonais  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $J_4$ ,  $J_2+J_3$  e  $J_2+J_3+J_4$  separadamente, sobre o semieixo maior da órbita de satélites artificiais da Terra em órbita inicial de 700 km de altura, fixando inclinações de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$  e para excentricidades 0,01 e 0,02. Fora, também, quantificados os efeitos dos coeficientes zonais sobre o semieixo maior de 690 km de altura. Soluções analíticas aproximadas foram comparadas com soluções numéricas realizadas em Python para as simulações e análise dos resultados.

Palavras-chave: Satélites artificiais. Perturbações. Órbitas



## ABSTRACT

The terrestrial artificial satellites have several applications, among them the telecommunication (internet, TV, GPS), Earth observation, space exploration (space telescopes), meteorology (weather, fire, deforestation, pollution level monitoring), the execution of experiences in microgravity environment, geodynamic studies, military applications, etc. When one studies the orbital movement of a terrestrial artificial satellites, it's indispensable that the effects of perturbing forces are analysed. Due to the perturbations, the satellite orbit moves away from the two-body elliptic orbit, and thus, the orbit deform itself. The present paper refers to the study of the artificial satellites orbital movement around the Earth, using the Lagrange planetary equations to analyse the variations (secular and periodic) of orbital elements in view of perturbations due to the non-uniform distribution of its mass. The zonal term effects were quantified separately  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $J_4$ ,  $J_2+J_3$  e  $J_2+J_3+J_4$ , over the orbit semi-major axis of the terrestrial artificial satellites in initial orbit of 700 km height, fixating inclinations of  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$  and for 0,01 and 0,02 eccentricity. The zonal terms effects over the 690 km height semi-major axis were also quantified. Approximated analytical solutions are compared with numerical solutions executed in Python for the result simulations and analysis.

Keywords: Satélites artificiais. Perturbações. Órbitas





## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 2.1 - Sistema de coordenadas no problema dos dois corpos.....	3
Figura 2.2 - Geometria para definição dos elementos orbitais.....	6
Figura 2.3 - Harmônicos zonais.....	9
Figura 2.4 - Harmônicos tesserais. ....	10
Figura 2.5 - Harmônicos setoriais. ....	10
Figura 4.1 - Variação considerando o termo $J_2$ . ....	15
Figura 4.2 – Variação considerando $J_3$ .....	16
Figura 4.3 – Variação considerando $J_3$ .....	16
Figura 4.4 - Variação considerando $J_4$ . ....	17
Figura 4.5 - Variação considerando termos $J_2 + J_3$ e $J_2 + J_3 + J_4$ . ....	18



# SUMÁRIO

		<u>Pág.</u>
1	INTRODUÇÃO .....	1
2	DESENVOLVIMENTO.....	3
2.1.	O PROBLEMA DOS DOIS CORPOS.....	3
2.1.2.	SOLUÇÃO DO PROBLEMA DOS DOIS CORPOS.....	4
2.2.	ELEMENTOS ORBITAIS KEPLERIANOS.....	5
2.3.	PERTURBAÇÕES ORBITAIS.....	7
2.4.	POTENCIAL GRAVITACIONAL.....	7
2.5.	HARMÔNICOS ESFÉRICOS .....	9
2.6.	EQUAÇÕES PLANETÁRIAS DE LAGRANGE .....	10
3	METODOLOGIA.....	12
3.1.	VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS.....	12
3.1.1.	CONSIDERANDO O TERMO $J_2$ DO GEOPOTENCIAL .....	12
3.1.2.	CONSIDERANDO O TERMO $J_3$ DO GEOPOTENCIAL .....	13
3.2.	PARÂMETROS UTILIZADOS NAS INTEGRAÇÕES NUMÉRICAS .....	14
4	RESULTADOS .....	15
4.1.	VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS CONSIDERANDO $J_2$ .....	15
4.2.	VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS CONSIDERANDO $J_3$ .....	15
4.3.	VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS CONSIDERANDO $J_4$ .....	17
4.4.	VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS CONSIDERANDO $J_2 + J_3$ E $J_2 + J_3 + J_4$ .....	17
4.5.	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	18
4.5.1.	ANÁLISE PARA $J_2$ .....	18
4.5.2.	ANÁLISE PARA $J_3$ .....	19
4.5.3.	ANÁLISE PARA $J_4$ .....	19
4.5.4.	ANÁLISE PARA $J_2 + J_3$ E $J_2 + J_3 + J_4$ .....	19
5	CONCLUSÃO .....	20
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	21



## 1 INTRODUÇÃO

Satélites artificiais terrestres são empregados em diversas atividades e entre elas podemos citar: observação da Terra, exploração espacial, realização de experiências em ambiente de micro gravidade, estudos geodinâmicos, monitoramento do clima, estudo da atmosfera e do campo magnético terrestre, como elo em telecomunicações, aplicações militares, etc. Os satélites artificiais permitiram deslocar o horizonte das observações para distâncias não atingíveis do nosso planeta

Para que as medidas feitas através de satélites possam ser convenientemente utilizadas, é essencial que suas órbitas e atitudes sejam conhecidas, em cada instante, com precisões adequadas às finalidades da missão para a qual o satélite foi planejado. Nasce daí a necessidade de construção de teorias ou métodos especiais, geralmente adaptados a específicas missões.

Trajetórias (órbitas) de satélites artificiais não perturbadas são curvas planas (cônicas), em um plano fixo em relação a um sistema de referência inercial e podem ser descritas em termos de seis constantes, chamadas de elementos keplerianos: semieixo maior, excentricidade, inclinação do plano orbital em relação ao plano de referência, longitude do nodo ascendente, argumento do período e instante de passagem pelo perifoco. Este satélite, em órbita kepleriana, está sujeito somente à atração gravitacional do corpo central com toda massa centrada no centro de massa

Observando a órbita de um satélite artificial, nota-se que a mesma varia com o passar do tempo, não seguindo o movimento kepleriano. Isso se deve às perturbações orbitais, que alteram a órbita do satélite e para que este continue em uma órbita desejada, é necessário que haja uma correção em sua trajetória. Entre as principais forças (ou efeitos) perturbativas estão a não homogeneidade de massa do corpo central, pressão da radiação solar, arrasto atmosférico, perturbações gravitacionais por outros corpos, marés, etc.

A modelagem matemática do estudo das órbitas de satélites artificiais parte do problema dos dois corpos utilizando as leis de Kepler, as Leis de Newton, Lei da Gravitação Universal de Newton, onde se estuda o movimento de dois corpos

atraindo-se exclusivamente sob a atração da força gravitacional. A seguir, supondo que um dos corpos tem massa muito pequena e que este não atrai o corpo maior, reduzimos o problema ao estudo do movimento do corpo pequeno em relação ao corpo maior. O movimento é descrito matematicamente por um sistema de 6 equações diferenciais ordinárias, que fornecem em cada instante a posição e a velocidade do corpo menor em relação ao centro de massa do maior. Utilizando coordenadas polares deduz-se que a solução deste problema é uma cônica, dependendo das condições iniciais podendo ser uma elipse uma parábola ou uma hipérbole.

Quando consideramos perturbações, os elementos orbitais variam e uma das formas de analisar as variações é utilizar as equações planetárias de Lagrange obtidas através de métodos de teoria de perturbações. Caso as perturbações sejam por forças que não derivam de um potencial as equações de Lagrange são colocadas na chamada forma de Gauss.

O presente projeto refere-se à análise do movimento orbital de satélites artificiais da Terra, levando-se em conta perturbações devidas à distribuição não uniforme de sua massa. Especificamente foram quantificados os efeitos dos coeficientes  $J_2$ ,  $J_2+J_3$  e  $J_2+J_3+J_4$ , separadamente, sobre o semieixo maior da órbita de satélites artificiais Terra em órbita inicial de 700 km de altura, fixando inclinações de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$  e para excentricidades 0,01 e 0,02. Fora, também, quantificados os efeitos dos coeficientes zonais sobre o semieixo maior de 600 km de altura.

Soluções analíticas aproximadas e soluções numéricas foram utilizadas para análise de resultados.

## 2 DESENVOLVIMENTO

### 2.1. O PROBLEMA DOS DOIS CORPOS

Considera-se dois pontos materiais  $P_1$  e  $P_2$ , de massas  $m_1$  e  $m_2$  respectivamente, em um sistema de referência Galileano sujeitos somente à ação de uma força central. Deseja-se estudar o movimento de  $P_2$  em relação a  $P_1$  (VILHENA DE MORAES, 1978).

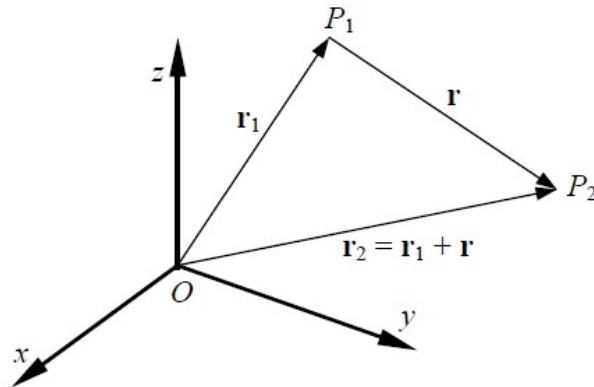
#### 2.1.1. REDUÇÃO DO PROBLEMA DOS DOIS CORPOS

De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, a força que  $m_j$  exerce sobre  $m_i$ , com  $i \neq j$  é dada por:

$$\vec{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{P_i - P_j}{r^3}, \quad (2.1)$$

em que  $r = |\vec{r}|$ .

Figura 2.1 - Sistema de coordenadas no problema dos dois corpos.



Fonte: Kuga et al. (2012).

Da segunda lei de Newton tem-se:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r} \frac{P_1 - P_2}{r^2}, \quad (2.2)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r} \frac{P_2 - P_1}{r^2}. \quad (2.3)$$



As Equações (2.2) e (2.3) formam um sistema de 6 equações diferenciais de 2ª ordem, isto é, 12 equações diferenciais de 1ª ordem. Dessa forma, a solução completa deste problema exige 12 constantes de integração.

A partir das Equações (2.2) e (2.3), obtêm-se as equações do movimento relativas ao centro de massa, e por fim, a equação vetorial do movimento de um corpo em relação ao outro.

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.4)$$

onde

$$\mu = G(m_1 + m_2), \quad (2.5)$$

que fornece o movimento de P<sub>2</sub> em relação a P<sub>1</sub>, com  $\mu$  sendo o parâmetro gravitacional.

### 2.1.2. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DOS DOIS CORPOS

O sistema de equações diferenciais fora reduzido de 12 para 6 equações diferenciais, e assim, são necessárias 6 constantes de integração para sua solução. Como o sistema não possui influência de forças externas, a aceleração de seu centro de massa é nula. Além disto, como a força é central, o momento angular é constante, logo movimento é plano e trabalhando no plano do movimento, a ordem do sistema se reduz de 6 para 4 (VILHENA DE MORAES, 1978).

Utilizando a integral das áreas (movimento plano) e a integral da energia (energia constante), isto é, duas integrais primeiras do movimento orbital, obtêm-se que a solução do problema dos dois corpos é uma trajetória cônica, que em coordenadas polares, utilizando

$$P = \frac{C^2}{\mu} = a(1 - e^2) \quad (2.6)$$

e

$$e = \sqrt{\frac{2EC^2}{\mu^2} + 1} \quad (2.7)$$

tem-se:

$$r = \frac{P}{1 + e \cos(\phi - \omega)} \quad (2.8)$$

em que  $P$  é o semi *latusrectum*,  $a$  o semieixo maior,  $e$  a excentricidade da cônica e  $(\phi - \omega)$  o ângulo polar.

Da Equação (2.7) pode-se observar:

- Se  $E < 0$ , então  $e < 1$ , isto é, a órbita será elíptica;
- Se  $E = 0$ , então  $e = 1$ , isto é, a órbita será parabólica;
- Se  $E > 0$ , então  $e > 1$ , isto é, a órbita será parabólica.

Nota-se que foram obtidos 3 constantes de integração,  $E$ ,  $C$ ,  $\omega$  (ou  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$ ). Obtêm-se a quarta constante utilizando do seguinte fato:

Da conservação do momento angular

$$r^2 \dot{\phi} = C, \quad (2.9)$$

e obtêm-se da Equação (2.8),  $r = r(\theta)$ . Deste modo, a quarta constante de virá da integração

$$\int_{\tau}^t dt = \frac{1}{C} \int_{\phi_0}^{\phi_1} r^2(\phi) d\phi. \quad (2.10)$$

Comumente escolhe-se para  $\tau$  o instante de passagem pelo pericentro (VILHENA DE MORAES, 1978).

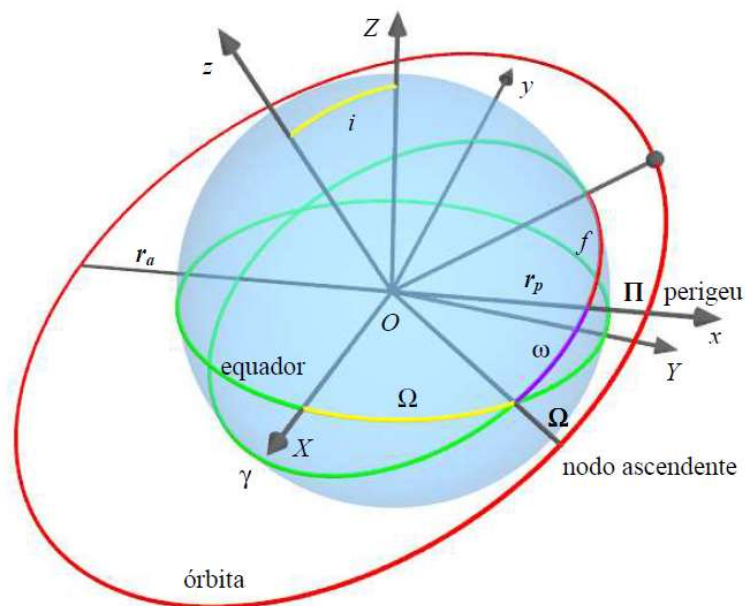
## 2.2. ELEMENTOS ORBITAIS KEPLERIANOS

Através dos elementos orbitais keplerianos é possível determinar completamente a posição de um corpo natural ou artificial em relação a outro em uma órbita elíptica. São eles:

- $a$ : semieixo maior da órbita;
- $e$ : excentricidade da órbita;
- $i$ : inclinação da órbita em relação ao Equador;
- $\Omega$ : longitude do nodo ascendente;
- $\omega$ : argumento do pericentro;
- $M$ : anomalia média.

No movimento plano foram definidos 3 elementos orbitais,  $a$ ,  $e$  e  $M$ , que definem a elipse e localizam o satélite no plano da elipse. Os elementos  $i$ ,  $\Omega$  e  $\omega$ , também chamados de ângulos de Euler localizam a órbita espacialmente (KUGA et al., 2012).

Figura 2.2 - Geometria para definição dos elementos orbitais.



Fonte: Kuga et al., (2012)

Através da Figura (2.2) nota-se que o plano fundamental OXY está no plano do Equador. O eixo OX se dirige no ponto vernal  $\gamma$  e, portanto, o sistema OXYZ é considerado inercial. Além disso, pode-se dizer que o semieixo maior  $a$  e a

excentricidade  $e$  determinam o tamanho e forma da órbita respectivamente, o argumento do periastro  $\omega$  orienta a órbita em seu plano, a longitude do nodo ascendente  $\Omega$  e a inclinação  $i$  indicam o plano da órbita, enquanto o instante de passagem pelo pericentro  $\tau$  (ou anomalia média  $M$ ) possibilitam situar o corpo em sua órbita (KUGA, et al., 2012).

### 2.3. PERTURBAÇÕES ORBITAIS

No problema dos dois corpos, as equações de movimento foram derivadas através da lei da gravitação de Newton e leis de Kepler do movimento orbital, onde sua solução em coordenadas polares é uma trajetória cônica, considerando que a massa do corpo central é distribuída uniformemente.

Devido aos efeitos perturbativos ou forças perturbadoras, a Equação (2.4) pode ser usada apenas como uma estimação do movimento orbital real, pois no problema dos dois corpos os elementos orbitais keplerianos são constantes, isto é, o satélite tem uma órbita fixa em um plano fixo. Em uma órbita real, à medida que o tempo de propagação aumenta os elementos orbitais vão variando com o tempo. Tais forças perturbadoras incluem a não homogeneidade de massa do corpo central, arrasto atmosférico, perturbações gravitacionais por outros corpos, marés, etc. A forma geral das equações do movimento perturbado é dada por (CHOBOTOV, 2002)

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}r + a_p, \quad (2.11)$$

onde  $a_p$  é a soma de todas as acelerações perturbadoras.

Neste trabalho serão consideradas apenas as perturbações devido a não homogeneidade de massa da Terra. Por simplicidade, será chamado de perturbação devido ao geopotencial.

### 2.4. POTENCIAL GRAVITACIONAL

É necessário introduzir o conceito de potencial gravitacional para se ter uma visão clara dos harmônicos gravitacionais. Se assumir a massa do corpo central uniformemente distribuída em uma esfera, a função para o potencial é dada por

$$\phi = \frac{\mu}{r}, \quad (2.12)$$

indicando que a força do potencial gravitacional é diretamente proporcional à massa e inversamente proporcional à distância do corpo central. Entretanto, devido a distribuição não uniforme de massa da Terra, deve-se considerar um esferoide no desenvolvimento do potencial, onde pode ser embasado por

$$\phi = k^2 \int \frac{dm}{s}, \quad (2.13)$$

onde  $dm$  é um elemento infinitesimal de massa do corpo central e  $s$  é a distância deste elemento de massa para o ponto material atraído para o centro do corpo central. Através da Equação (2.12) obtêm-se

$$\phi = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n p_n^q(w) C_{n,q} \cos q\lambda + S_{n,q} \sin q\lambda, \quad (2.14)$$

onde  $C_{n,q}$  e  $S_{n,q}$  são coeficientes a determinar,  $a_e$  é o raio equatorial do corpo,  $p_n^q(w)$  são os polinômios de Legendre e  $\lambda$  é a longitude do satélite nas coordenadas do corpo fixo.

A função do geopotencial expresso em termos dos coeficientes esféricos, é dada por (CHOBOTOV, 2002):

$$U = -\frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_e}{r}\right)^n P_n \sin \phi \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n J_{nm} \left(\frac{R_e}{r}\right) P_{nm}(\sin \phi) \cos m(\lambda - \lambda_{nm}) \right] \quad (2.15)$$

onde:

- $r$  – vetor posição do satélite;
- $\phi$  – latitude do satélite;
- $\lambda$  – longitude do satélite;

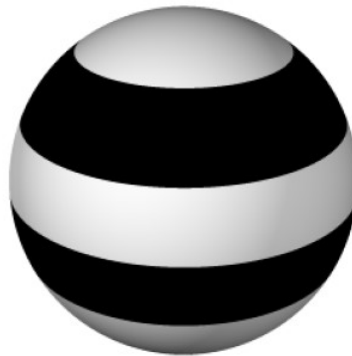
- $\mu$  – constante gravitacional do corpo central;
- $R_e$  – raio do corpo central;
- $P_{nm}$  – polinômio associado de Legendre de grau  $n$  e ordem  $m$ ;
- $P_n$  – polinômio associado de Legendre de grau  $n$  e ordem zero;
- $J_n, J_{nm}, \lambda_{nm}$  – características do corpo central o qual o satélite orbita.

A perturbação causada pela distribuição não uniforme da Terra deriva de um potencial, pois a força gravitacional é conservativa.

## 2.5. HARMÔNICOS ESFÉRICOS

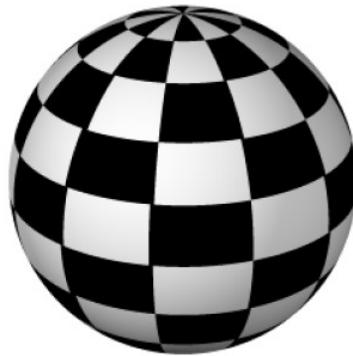
Os harmônicos esféricos descrevem o achatamento do corpo central e os termos fatorados  $J_n$  e  $J_{nm}$  estão relacionados com os mesmos. Os harmônicos esféricos podem ser representados geometricamente, onde depende do grau  $n$  e da ordem  $m$ . Se  $m = 0$ , os harmônicos mudam o sinal no intervalo de  $0 \leq \theta \leq \pi$  e não dependem da longitude  $\lambda$ . Eles dividem a esfera em zonas e são denominados harmônicos zonais e podem ser vistos na figura 2.3. Para este trabalho, serão considerados somente os harmônicos zonais, desconsiderando os harmônicos setoriais e tesserais (KUGA et al., 2012).

Figura 2.3 - Harmônicos zonais.



Fonte: Kuga et al., 2012

Figura 2.4 - Harmônicos tesserais.



Fonte: Kuga et al., 2012.

Figura 2.5 - Harmônicos setoriais.



Fonte: Kuga et al., 2012.

## 2.6. EQUAÇÕES PLANETÁRIAS DE LAGRANGE

Quando um corpo está sujeito somente à atração gravitacional do corpo central, é dito que a órbita deste corpo é um movimento kepleriano. No problema dos dois corpos, o movimento é kepleriano e os elementos orbitais são constantes. Quando as perturbações orbitais são consideradas, estes elementos variam no tempo e as equações planetárias de Lagrange informam quanto eles variam. As equações são dadas por (BEUTLER et al., 2005):

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2} \frac{\partial R}{\partial M} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

onde  $R$  é a função perturbadora e  $n$  é o movimento médio de um satélite artificial. Os elementos  $a$ ,  $e$  e  $i$  são os elementos métricos e os elementos  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $M$  são os elementos angulares. Embora  $M$  se comporte como elemento métrico, é um elemento angular e uma constante de integração (instante de passagem pelo pericentro  $\tau$ ).

Esta forma das equações planetárias de Lagrange são para perturbações por forças que derivam de um potencial.



### 3 METODOLOGIA

A modelagem do problema fora feita através do problema dos dois corpos, onde o corpo primário é a Terra e o corpo em órbita é um satélite artificial de massa infinitesimal (pois a massa da Terra é muito maior que a massa do satélite), onde o movimento orbital perturbado está sujeito somente à atração gravitacional da Terra.

Para encontrar as variações dos elementos orbitais é necessário utilizar as equações planetárias de Lagrange. Será considerado apenas a perturbação devido ao geopotencial considerando os harmônicos zonais correspondentes aos termos em  $J_2$ ,  $J_3$  e  $J_4$ , através de métodos analíticos e numéricos.

São considerados apenas termos de longo período, ou seja, excluindo os termos que aparecem a anomalia média da expressão do potencial.

As equações foram obtidas através da linguagem de programação Python, bem como as simulações, gráficos e integração numérica das equações da Lagrange.

#### 3.1. VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS

##### 3.1.1. CONSIDERANDO O TERMO $J_2$ DO GEOPOTENCIAL

A partir de manipulações matemáticas se obtêm a expressão do potencial (Equação (2.15)) em termos dos elementos orbitais keplerianos. O método para obtenção das expressões é chamado de método da média, onde se encontram apenas os termos de longo período. A expressão é dada por (TRESACO et al., 2018):

$$\langle\langle R_{J_2} \rangle\rangle = -\frac{1}{4} R_m^2 J_2 \frac{n^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} (-2 + 3 \sin^2 i), \quad (3.1)$$

onde  $R_m$  é o raio equatorial.

Substituindo a Equação (3.1) na Equação (2.16), as derivadas temporais dos elementos métricos em relação aos elementos angulares são iguais a zero, pois a Equação (3.1) só possui termos seculares e, portanto, os parâmetros  $a$ ,  $e$  e  $i$  são constantes. Em contrapartida, as derivadas temporais dos elementos

angulares em relação aos elementos métricos são diferentes de zero. Desse modo, considerando somente o termo  $J_2$  do potencial, a órbita do satélite terá apenas variações seculares, onde o semieixo maior, a excentricidade e a inclinação da órbita não variam.

### 3.1.2. CONSIDERANDO O TERMO $J_3$ DO GEOPOTENCIAL

Utilizando o mesmo procedimento para o termo  $J_3$ , se obtêm a expressão para o potencial

$$\langle\langle R_{J_3} \rangle\rangle = -\frac{3}{8} R_m^3 J_3 \frac{n^2 \sin i e}{a(1-e^2)^2} (-4 + 5 \sin^2 i) \sin \omega. \quad (3.2)$$

Nota-se que a Equação (3.2) depende do elemento angular  $\omega$  além dos elementos métricos  $a$ ,  $e$  e  $i$ , o que causará variações periódicas nos elementos métricos e angulares, exceto do semieixo maior, que permanecerá constante. Vale ressaltar que a Equação (3.2) não possui solução analítica, podendo apenas ser integrada numericamente.

### 3.1.3. CONSIDERANDO O TERMO $J_4$ DO GEOPOTENCIAL

A expressão para o potencial considerando somente o termo  $J_4$  é dada por:

$$\begin{aligned} \langle\langle R_4 \rangle\rangle = & -\frac{3}{128} R_m^4 J_4 \frac{n^2}{a^2(1-e^2)^2} \\ & x (10e^2 \sin^2 i (7 \sin^2 i - 6) \cos(2\omega) \\ & - (3e^2 + 2)(35 \sin^4 i - 40 \sin^2 i + 8)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

O termo  $J_4$  causará variações seculares nos elementos angulares e nos elementos métricos, com exceção do semieixo maior da órbita, que permanecerá constante.

Assim com o termo  $J_3$  a Equação (3.3) possui apenas soluções numéricas, realizadas em Python.

### 3.2. PARÂMETROS UTILIZADOS NAS INTEGRAÇÕES NUMÉRICAS

Foram utilizados os seguintes parâmetros implementados em Python, através da biblioteca SciPy e da rotina integrate.odeint, que utiliza a função Isoda da biblioteca odepack de FORTRAN para integrar sistemas de equações diferenciais:

Tabela 3.1 – Constantes utilizadas nas integrações numéricas.

<b>Raio da Terra</b>	<b><math>J_2</math></b>	<b><math>J_3</math></b>	<b><math>J_4</math></b>	<b><math>\mu</math></b>
6.378,14 km	$1,082 \cdot 10^{-3}$	$-2,5 \cdot 10^{-6}$	$-1,6 \cdot 10^{-6}$	$3,98 \cdot 10^5$

Fonte: Produção do autor.

As condições iniciais para realizar as integrações numéricas são:

Tabela 3.2 – Condições iniciais.

<b><math>a_0</math></b>	<b><math>e_0</math></b>	<b><math>i_0</math></b>	<b><math>\Omega_0</math></b>	<b><math>\omega_0</math></b>	<b><math>M_0</math></b>
7000km e 6900 km	0,1 e 0,2	30°, 45° e 60°	60°	45°	60°

Fonte: Produção do autor.

A propagação da órbita será de 0 a 180 dias e o tamanho do passo da integração numérica será de 0,01.

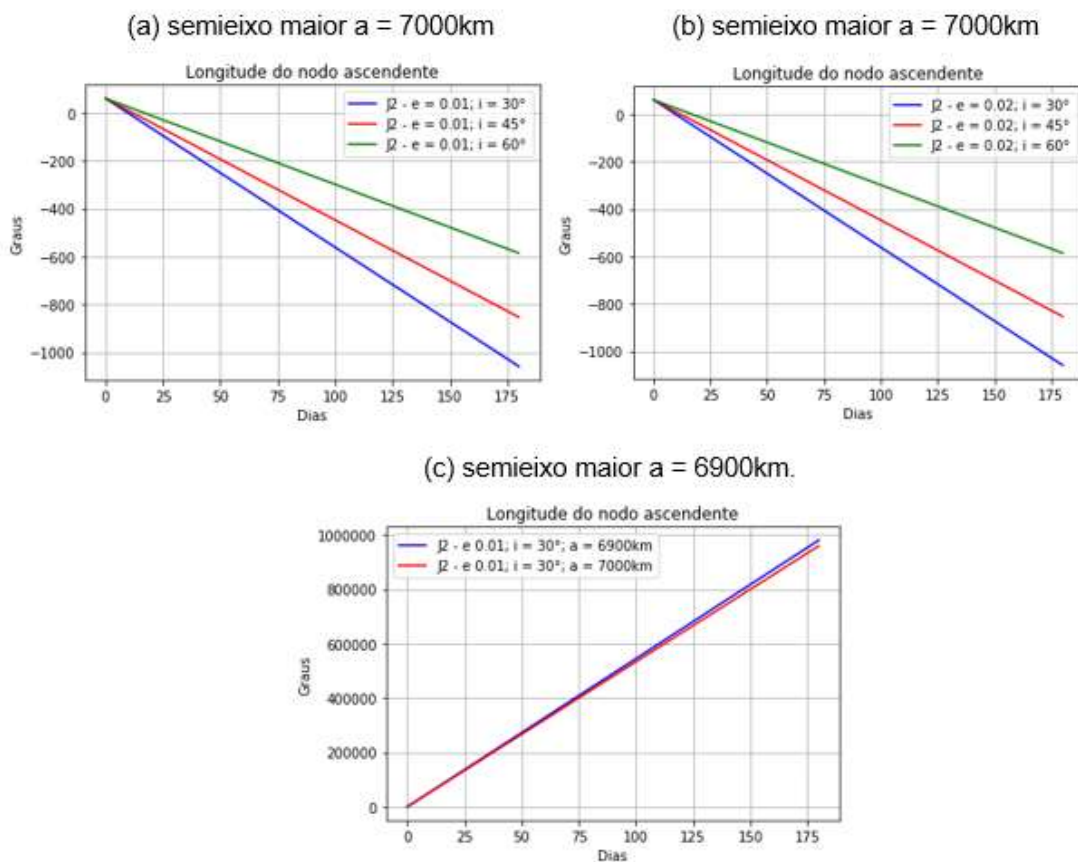
## 4 RESULTADOS

A seguir serão exibidos alguns resultados obtidos durante o desenvolvimento deste trabalho.

### 4.1. VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS CONSIDERANDO $J_2$

Para um satélite em órbita da Terra considerando somente o termo  $J_2$  do geopotencial, têm-se os seguintes resultados:

Figura 4.1 - Variação considerando o termo  $J_2$ .

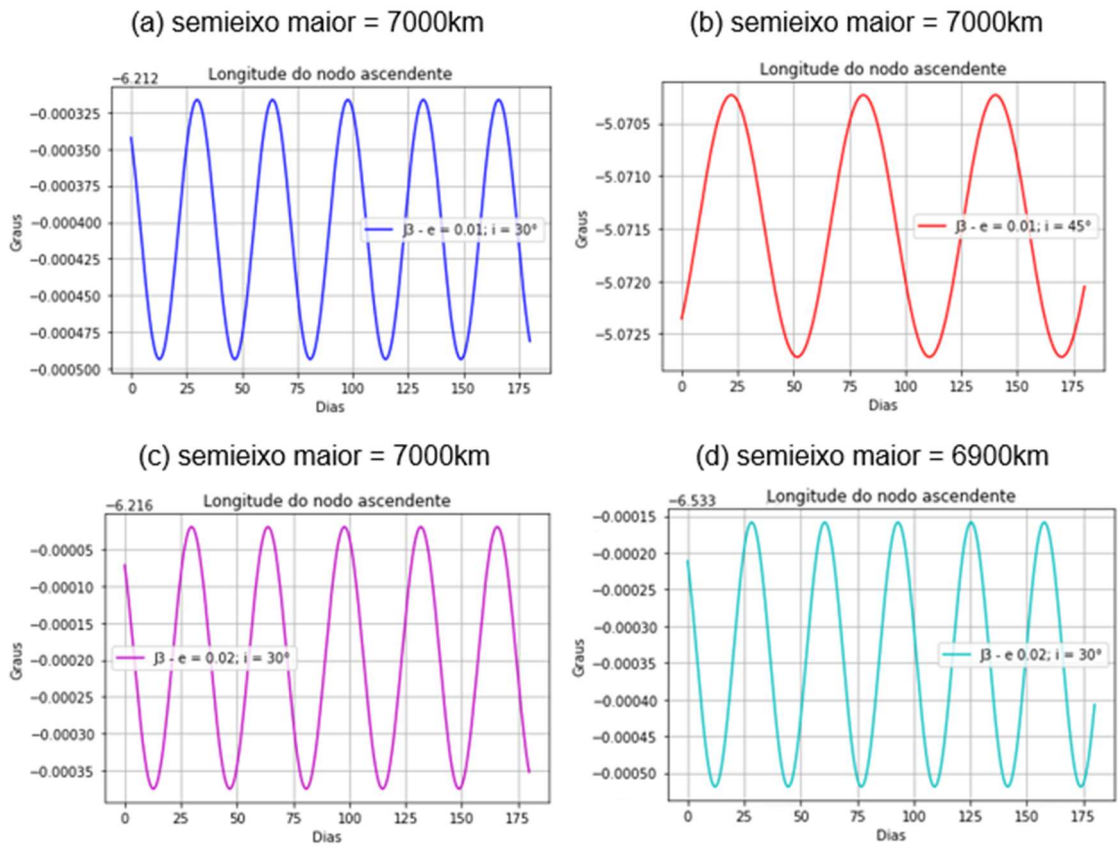


Fonte: Produção do autor.

### 4.2. VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS CONSIDERANDO $J_3$

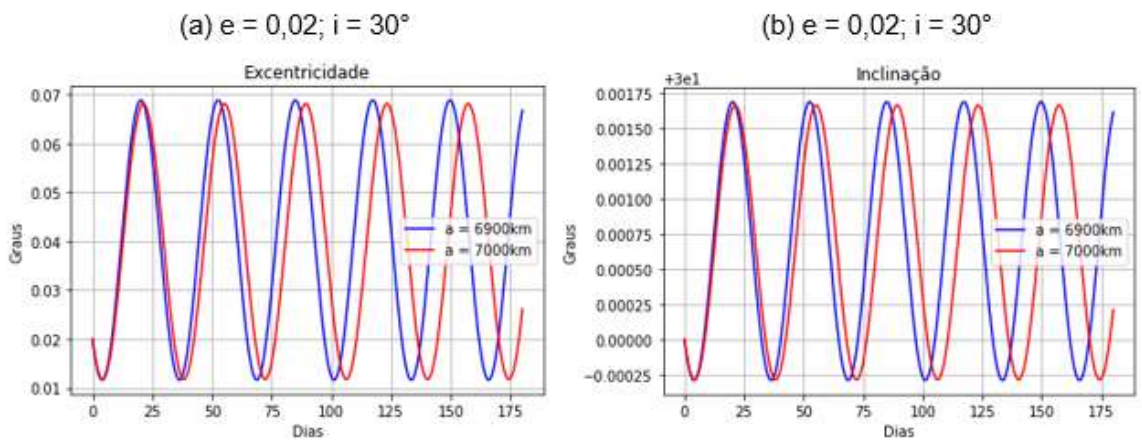
Para um satélite em órbita da Terra considerando somente o termo  $J_3$  do geopotencial, têm-se os seguintes resultados:

Figura 4.2 – Variação considerando  $J_3$ .



Fonte: Produção do autor.

Figura 4.3 – Variação considerando  $J_3$ .

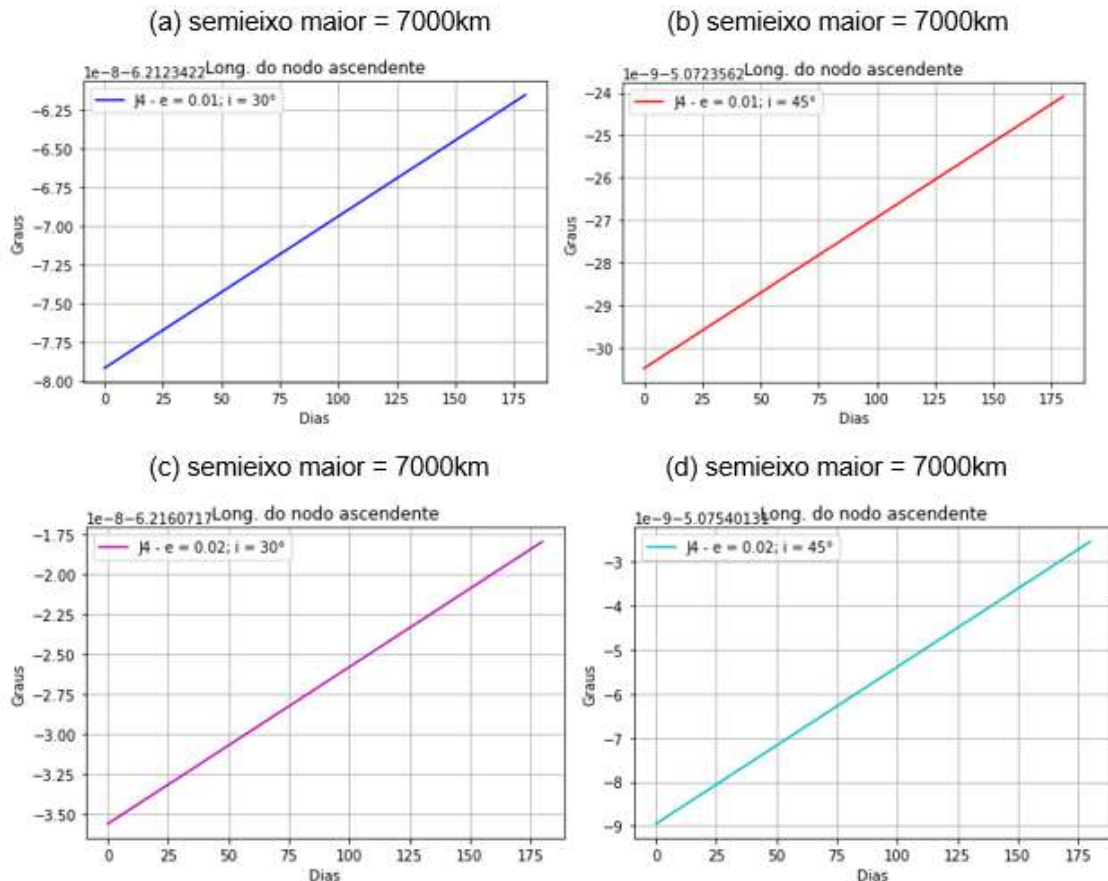


Fonte: Produção do autor.

### 4.3. VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS CONSIDERANDO $J_4$

Para um satélite em órbita da Terra considerando somente o termo  $J_4$  do geopotencial, têm-se os seguintes resultados:

Figura 4.4 - Variação considerando  $J_4$ .



Fonte: Produção do autor.

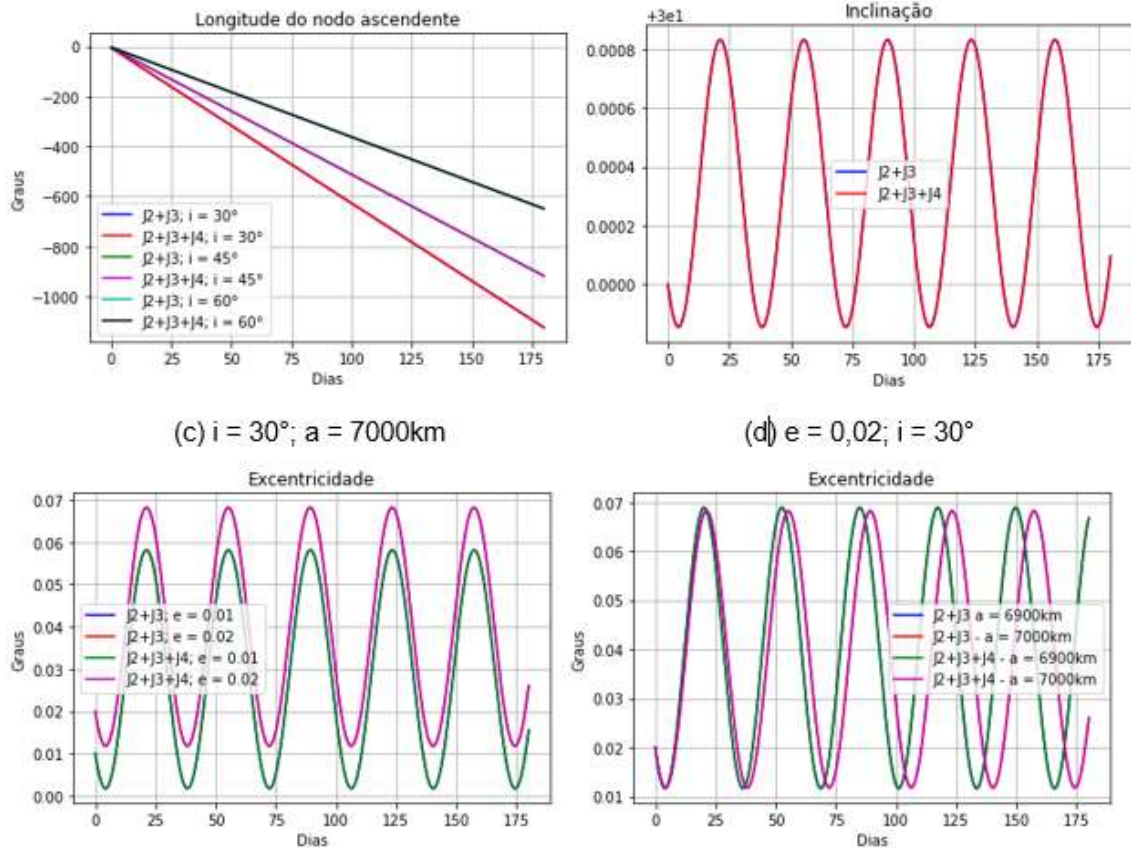
### 4.4. VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS CONSIDERANDO $J_2 + J_3$ E $J_2 + J_3 + J_4$

Para um satélite em órbita da Terra considerando os termos  $J_2 + J_3$  e  $J_2 + J_3 + J_4$  do geopotencial, têm-se os seguintes resultados:

Figura 4.5 - Variação considerando termos  $J_2 + J_3$  e  $J_2 + J_3 + J_4$ .

(a)  $e = 0,01$ ;  $a = 7000\text{km}$

(b)  $e = 0,01$ ;  $i = 30^\circ$ ;  $a = 7000\text{km}$



Fonte: Produção do autor.

## 4.5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 4.5.1. ANÁLISE PARA $J_2$

A partir dos resultados exibidos é possível notar que quando se considera somente o termo  $J_2$  do geopotencial, os elementos métricos permanecem constantes e há variação secular nos elementos angulares. Além disso, é possível notar que para excentricidades  $e = 0,01$  e  $0,02$ , os efeitos da perturbação parece não sofrer variações consideráveis. Para diferentes inclinações, à medida que o ângulo de inclinação vai aumentando, aumentam também os efeitos da perturbação. Quando os efeitos são comparados em semieixos maiores diferentes, é possível notar que para  $a = 6900\text{km}$ , o satélite sente mais os efeitos perturbativos se comparado ao semieixo maior  $a = 7000\text{km}$ .

#### 4.5.2. ANÁLISE PARA $J_3$

Observando os resultados para o termo  $J_3$  do geopotencial, é possível observar que ocorrem variações periódicas nos elementos angulares e métricos, com exceção do semieixo maior, que permanece constante. Observa-se que as variações são bem pequenas, sendo que para  $e = 0,01$  e  $i = 30^\circ$ , elas ocorrem a partir da quarta casa decimal. Ademais, é possível observar que assim como para o termo  $J_2$ , ao aumentar o ângulo de inclinação, os efeitos perturbativos também aumentam. Para excentricidades  $e = 0,01$  e  $0,02$ , nota-se que ao aumentar a excentricidade, os efeitos perturbativos também aumentam e quando o valor do semieixo maior é diminuído de  $7000\text{km}$  para  $6900\text{km}$ , nota-se um aumento nos efeitos perturbativos.

#### 4.5.3. ANÁLISE PARA $J_4$

Analisando os resultados obtidos considerando somente o termo  $J_4$  do geopotencial, nota-se que os efeitos são parecidos com os obtidos em  $J_2$ , isto é, quando somente o termo  $J_4$  é considerado haverá variações seculares nos elementos angulares.

#### 4.5.4. ANÁLISE PARA $J_2 + J_3$ E $J_2 + J_3 + J_4$

Observando os resultados obtidos, percebe-se que para os elementos angulares, prevalece os efeitos causados pelo termo  $J_2$  com variações seculares e periódicas nos elementos métricos e angulares. O fato do efeito periódico causado pelo termo  $J_3$  não estar visível no gráfico, se deve ao termo  $J_2$  ser da ordem de 1000 vezes maior que o termo  $J_3$ . Além disso, é possível notar as mesmas diferenças causadas por diferentes valores dos elementos métricos. Quando a inclinação  $i$  aumenta, os efeitos perturbativos também aumentam. Quando a excentricidade aumenta, os efeitos perturbativos também aumentam. E por fim, quando o semieixo maior é diminuído, o satélite sente os efeitos perturbativos mais presentes.



## **5 CONCLUSÃO**

Verificou-se que para um satélite em órbita baixa ao redor da Terra, a influência dos efeitos perturbativos deve ser considerada. As perturbações causadas pela não homogeneidade na distribuição de massa da Terra são mais fortes para órbitas mais baixas e variam de acordo com a inclinação do plano da órbita. Quanto a sua forma, pode-se concluir que quanto mais elíptica for a órbita, isto é, quanto maior a excentricidade, mais os efeitos perturbativos estarão presentes.

Apesar da influência causada pelo termo  $J_2$  ser predominante no modelo considerado, as perturbações causadas pelos demais termos devem ser consideradas de acordo com a proposta da missão.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BROUWER, D. and CLEMENCE, G. **Methods of Celestial Mechanics**. 3<sup>a</sup> ed. New York: Academic Press, 1961.

BATE, R. R., MUELLER, D. D. and WHITE, J. E. **Fundamentals of Astrodynamics**. 2<sup>a</sup> ed. New York: Dover, 1972.

CHOBOTOV, V.A. **Orbital Mechanics**. 3<sup>a</sup>. ed Virginia: AIAA Educational Series, 2002.

BEUTLER, G., MERVART, L., VERDUN, A. **Methods of Celestial Mechanics: Theory, Applications and Computer Programs**, Vol. 1, Springer, Berlin, 2005

PRADO, A. F. B. A. and KUGA, H. H. **Fundamentos de Tecnologia Espacial**. São José dos Campos: INPE, 2001.

VILHENA DE MORAES, R. **Trajatória de Veículos Espaciais**, São José dos Campos, Publicação Interna, ITA, 1978.

KUGA, K. H., CARRARA, V., RAO, R. K. **Satélites Artificiais – Movimento Orbital**, São José dos Campos, INPE, 2011.

WALTER, U. **Astronautics: The Physics of Space Flight**, Wiley/VCH, Weinmach, 2008.

TRESACO, E., CARVALHO, J.P.S., PRADO, A.F.B.A. et al. **Averaged model to study long-term dynamics of a probe about Mercury**. *Celest Mech Dyn Astr* 130, 9 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10569-017-9801-9>

