



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

TRANSFORMADAS WAVELET E FERRAMENTAS ASSOCIADAS APLICADAS À GEOFPISICA ESPACIAL

Pedro Marcos Mossulin Ferreira

Relatório de Iniciação Científica do
Programa PIBIC, orientado pela
Dra. Margarete Oliveira Domin-
gues e pelo Dr. Luciano Aparecido
Magrini.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/xx/yy>](http://urlib.net/xx/yy)

INPE
São José dos Campos

2021

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6923/6921

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

**COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO
DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):****Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Membros:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Amauri Silva Montes - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espaciais (ETE)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas
(CEA)

Dr. Joaquim José Barroso de Castro - Centro de Tecnologias Espaciais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos
(CPT)

Dr^a Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Duca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação
(SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

TRANSFORMADAS WAVELET E FERRAMENTAS ASSOCIADAS APLICADAS À GEOFPISICA ESPACIAL

Pedro Marcos Mossulin Ferreira

Relatório de Iniciação Científica do
Programa PIBIC, orientado pela
Dra. Margarete Oliveira Domin-
gues e pelo Dr. Luciano Aparecido
Magrini.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/xx/yy>](http://urlib.net/xx/yy)

INPE
São José dos Campos
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Ferreira, Pedro Marcos Mossulin.

Cutter Transformadas Wavelet e Ferramentas Associadas Aplicadas à Geofísica Espacial / Nome Completo do Autor1; Nome Completo do Autor2. – São José dos Campos : INPE, 2021.

ix + 42 p. ; ()

Dissertação ou Tese (Mestrado ou Doutorado em Nome do Curso) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, AAAA.

Orientador : José da Silva.

1. Palavra chave. 2. Palavra chave 3. Palavra chave. 4. Palavra chave. 5. Palavra chave I. Título.

CDU 000.000



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](#).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](#).

Informar aqui sobre marca registrada (a modificação desta linha deve ser feita no arquivo publicacao.tex).

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar a utilização da transformada *wavelet* contínua como uma ferramenta futura de análise de dados geoespaciais. O bolsista teve contato com a parte teórica da análise *wavelet* acompanhando cursos e seminários e estudando alguns artigos e livros fundamentais no tema. Dois estudos iniciais são desenvolvidos nesta iniciação científica como base para o entendimento de futuras aplicações a geofísica. O primeiro é um estudo acerca das propriedades que envolvem a função *wavelet* de Morse, que é uma função analisadora da transformada *wavelet* contínua no domínio frequencial. Essa função *wavelet* é analítica e engloba outras famílias de funções *wavelets*. Estuda-se as propriedades da *wavelet* de Morse a partir de uma investigação numerico-computacioanal que busca entender o efeito causado pela variação dos parâmetros que determinam sua condição de admissibilidade. Nessa etapa verifica-se que a condição de admissibilidade da *wavelet* de Morse tende exponencialmente a zero a quando esses parâmetros que determinam o seu comportamento crescem. O segundo estudo visa verificar o efeito causado pela variação do parâmetro que determina o comportamento da *wavelet* de Morlet na aplicação da Transformada *Wavelet* Contínua juntamente com a realização de uma discussão em torno da propriedade de linearidade da Transformada *Wavelet* verificando-se essa propriedade através da comparação entre a aplicação da CWT em um sinal com a aplicação da CWT nesse mesmo sinal normalizado pela média e desvio padrão. Nesse conclui-se que o incremento do parâmetro que determina a *wavelet* de Morlet deixa as bandas de frequências mais bem localizadas enquanto a linearidade garante que a normalização do sinal afeta apenas as suas amplitudes. Para complementar o estudo realizado são também estudadas ferramentas de edição científica como o \LaTeX , ambientes com o Beamer e modelos como o utilizado neste relatório. Além disso, ferramentas de computação científica para a visualização das funções e dados e ambientes de programação em GNU/OCTAVE e Python para os algoritmos e um reforço de treinamento em aspectos teóricos de integração também fizeram parte desta iniciação científica.

Palavras-chave: Funções *Wavelets*. Transformada *Wavelet*. *Wavelet de Morse*. *Wavelet de Morlet*.

WAVELET TRANSFORMS AND ASSOCIATED TOOLS APPLIED TO SPATIAL GEOPHYSICS

ABSTRACT

This work aims to study the use of the continuous *wavelet* transform as a future tool for geospatial data analysis. The scholarship holder had contact with the theoretical part of the analysis *wavelet* following courses and seminars and studying some articles and fundamental books on the subject. Two initial studies are developed in this scientific initiation as a basis for the understanding of future applications to geophysics. The first is a study about the properties that involve the Morse function *wavelet*, which is an analyzer function of the continuous *wavelet* transform in the frequency domain. This *wavelet* function is analytic and encompasses other families of *wavelets* functions. The properties of the *wavelet* of Morse are studied from a numerical-computational investigation that seeks to understand the effect caused by the variation of the parameters that determine its admissibility condition. In this step, it is verified that the admissibility condition of the *wavelet* of Morse exponentially tends to zero when these parameters that determine its behavior grow. The second study aims to verify the effect caused by the variation of the parameter that determines the behavior of Morlet's *wavelet* in the application of the Continuous *Wavelet* Transform together with the realization of a discussion around the linearity property of the Transform *Wavelet* verifying this property by comparing the application of CWT on a signal with the application of CWT on the same signal normalized by the mean and standard deviation. This study concludes that increasing the parameter that determines Morlet's *wavelet* leaves the frequency bands better located, while linearity guarantees that the normalization of the signal changes only their amplitudes. To complement the study, scientific editing tools such as L^AT_EX, environments with Beamer and models such as the one used in this report are also studied. In addition, scientific computing tools for the visualization of functions and data and programming environments in GNU/OCTAVE and Python for the algorithms and a reinforcement of training in theoretical aspects of integration were also part of this scientific initiation.

Keywords: Wavelets Functions. Morse Wavelet. Wavelet Transform. Morlet Wavelet.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 <i>wavelet</i> de Marr e sua FT	5
2.2 <i>Wavelet</i> de Morlet	6
2.3 FT da <i>wavelet</i> de Morlet para $\omega_0 = 5,6 e 9$	8
2.4 O efeito causado pelo incremento do parâmetro γ no comportamento e na resposta em frequência da <i>wavelet</i> de Morse	10
2.5 Resposta em frequência da <i>wavelet</i> de Morse quando $\gamma = 3$	11
2.6 Resultado da investigação realizada em torno dos parâmetros e da condição de admissibilidade da <i>wavelet</i> de Morse	13
3.1 Resultado da investigação realizada em torno do parâmetro da <i>wavelet</i> de Morlet e da linearidade da CWT	20

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivo Geral	2
1.2 Objetivos Específicos	2
2 FUNÇÕES WAVELET: Chápeu Mexicano, Morlet e Morse . . .	3
2.1 <i>Wavelet</i> chapéu mexicano	4
2.2 <i>Wavelet</i> de Morlet	4
2.3 <i>Wavelet</i> de Morse	8
2.4 Estudo realizado: Admissibilidade da <i>wavelet</i> de Morse	12
2.4.1 Estratégia de análise e resultados	12
3 TRANSFORMADA WAVELET CONTINUA	15
3.1 Propriedade Linear da Transformada <i>Wavelet</i> Contínua	16
3.2 Estudo realizado: Efeito da linearidade da CWT	19
3.3 Estratégias de análise	19
3.4 Resultados	20
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	21
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	23
APÊNDICE A - FUNÇÕES DE QUADRADO-INTEGRÁVEIS . . .	25
APÊNDICE B - TRANSFORMADA DE FOURIER.	27
ANEXO A - RESUMO APRESENTADO CNMAC 2021	31
ANEXO B - CERTIFICADO DE PARTICIPAÇÃO: CNMAC 2021.	33
ANEXO C - RESUMO APRESENTADO NO EICPOG 2021	35
ANEXO D - CERTIFICADO DE PARTICIPAÇÃO NO EICPOG 2021	39
ANEXO E - CERTIFICADO DE PARTICIPAÇÃO NO XWWLET 2021	41

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho sintetiza as pesquisas desenvolvidas na Iniciação Científica do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) do INPE, no período de agosto de 2020 até fevereiro de 2022, que estuda a transformada wavelet contínua como uma futura ferramenta de análise de dados espaciais, além de estudar a implementação computacional dessa transformada.

A Transformada *wavelet* é uma transformada integral que recentemente vem sendo utilizada como uma potente ferramenta de análise de dados. Essa transformada tem como função analisadora as chamadas funções *wavelets* que caracterizam-se por serem localizadas no tempo, idealmente também em frequência, e terem energia finita no sentido do espaço de funções quadrado integráveis. Justifica-se a escolha em estudar essa transformada pelas muitas possibilidades de aplicação incluindo a análise de dados exploratória.

Inicialmente o bolsista teve contato com a parte teórica da análise *wavelet* acompanhando cursos e seminários e estudando alguns artigos e livros fundamentais no tema. Estudos iniciais são desenvolvidos nesta iniciação científica como base para o entendimento de futuras aplicações a geofísica. O primeiro é um estudo acerca das propriedades que envolvem a função *wavelet* de Morse, que é uma função analisadora da transformada *wavelet* contínua no domínio frequencial. Essa função *wavelet* é analítica e engloba outras famílias de funções *wavelets*. Particularmente, se propõe a investigar numericamente o efeito causado pela variação dos parâmetros que determinam o comportamento da *wavelet* de Morse na sua condição de admissibilidade. A escolha por essa investigação se dá, pois as características da função *wavelet* analisadora escolhida impactam diretamente o resultado da transformada *wavelet* e a escolha em se estudar especificadamente as características da *wavelet* de Morse se deu pelo fato de: ela ser uma *wavelet* analítica e pela por ela englobar outras famílias de funções *wavelet*.

Além disso, este trabalho se propõe a estudar tanto a propriedade de linearidade da CWT como o impacto causado pelo parâmetro que determina a *wavelet* de Morlet na aplicação da Transformada *Wavelet*. A escolha em estudar a *wavelet* de Morlet justifica-se pelo fato de essa função ser uma função *wavelet* muito difundida na área de análise de sinais e os estudos e discussões feitos em torno da linearidade da CWT justificam-se pela importância que essa propriedade tem na utilização da Transformada *Wavelet* como ferramenta analisadora de sinais.

1.1 Objetivo Geral

Investigar numérica e computacionalmente a aplicação e a implementação da transformada *wavelet* e posteriormente as ferramentas associadas no contexto da análise de dados espaciais.

1.2 Objetivos Específicos

- a) Estudar e caracterizar teoricamente as funções *wavelets* e da transformada *Wavelet*.
- b) Investigar numericamente o efeito causado pela variação dos parâmetros que determinam o comportamento da *wavelet* de Morse e sua condição de admissibilidade.
- c) Discutir os impactos causadas pela propriedade de linearidade da Transformada Wavelet Contínua e pelas propriedades da *wavelet* de Morlet na utilização da Transformada Wavelet Contínua na análise de sinais.

Os capítulos restantes deste relatório estão organizados da seguinte maneira:

- O Capítulo 2: aborda as funções *wavelet* chapéu mexicano (Marr), Morlet e Morse.
- O Capítulo 2.4: aborda os estudos referentes a condição de admissibilidade da *wavelet* de Morse.
- O Capítulo 3: transformada contínua e os estudos feitos em torno da *wavelet* de Morlet e da linearidade da Transformada *Wavelet*.
- O Capítulo 4: aborda os comentários finais do trabalho, outras atividades realizadas.
- Os Apêndices apresentam uma descrição teórica da transformada de Fourier e de outras ferramentas matemáticas de auxílio ao estudo realizado.
- Os Anexos apresentam os trabalhos apresentados em jornadas de iniciação científica e documentos complementares.

2 FUNÇÕES WAVELET: Chápeu Mexicano, Morlet e Morse

Neste capítulo é apresentado em uma perspectiva teórica as funções *wavelets* chápeu mexicano, de Morlet e de Morse. Além disso, apresenta-se também um estudo dos efeitos na condição de admissibilidade devido variação de parâmetros da função de *wavelet* de Morse. É importante destacar que neste trabalho funções e sinais são considerados sinônimos. O termo *séries temporais* é utilizado também como sinônimo de sinais, porém, normalmente se refere ao aspecto discreto.

As funções *wavelets* são famílias de funções pertencentes ao espaço de funções quadrado-integráveis (L^2), ver Apêndice A, que são utilizadas como funções de análise na transformada *wavelet*. Essas funções são caracterizadas por terem um comportamento oscilatório, por serem muito bem localizadas no tempo e em frequência e por terem média nula, sendo essas características o que as torna ferramentas muito úteis na análise de dados (DAUBECHIES, 1992).

Uma função *wavelet* denotada por $\psi(t)$ pode ser definida da seguinte forma:

Definição 2.1. *Se $\psi(t) \in \mathbb{C}$ é uma função wavelet então $\psi(t) \in L^2(\mathbb{C})$ tal que $\psi(t)$ é não nula apenas em conjunto compacto $K \in \mathbb{C}$ e satisfaz :*

A) *Média nula, condição de admissibilidade*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.1)$$

B) *Energia finita*

$$B: \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1 \quad (2.2)$$

A condição A garante o comportamento oscilatório das funções *wavelets* sob o conjunto compacto K (DAUBECHIES, 1992; MAGRINI, 2020b). Outra forma de formalizar isso é :

$$C_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \quad (2.3)$$

Em que $\hat{\psi}(\omega)$ é a transformada de Fourier (Apêndice B) da função *wavelet* e ω é a variável frequencial.

No que diz respeito a transformada *wavelet* a condição de admissibilidade da função *wavelet* analisadora é particularmente importante, pois a transformada *wavelet* enquanto ferramenta matemática permite uma transformada inversa e essa trans-

formada inversa depende diretamente do valor da condição de admissibilidade da função *wavelet* analisadora escolhida (DAUBECHIES, 1992; MAGRINI, 2020b; DOMINGUES et al., 2016).

Outro conceito importante quando se trata de funções *wavelets* é a chamada frequência central. A frequência central permite encontrar a senoide/cossenoide que reproduz a oscilação de maior amplitude da função *wavelet*, mais detalhes em (CASTILHO et al., 2012) e referências citadas.

Definição 2.2. *Se $\psi(t)$ é um função wavelet então se define a sua frequência central, usando a notação ω_c , como sendo a frequência angular que apresenta o maior pico espectral.*

Atualmente existe uma quantidade variada e diversificada de funções *wavelets* com diferentes características, de forma que a escolha de uma delas como função analisadora envolve identificar aquela que melhor se adapta as características do sinal analisado. Três dessas funções são apresentadas a seguir.

2.1 *Wavelet chapéu mexicano*

Uma função *wavelet* muito conhecida é a *wavelet* chapéu mexicano (conforme Figura 2.1), também conhecida como *wavelet* de Marr, ou ainda Ricker na geofísica. Ela é uma função real, derivada da função de densidade de probabilidade gaussiana e muito utilizada em estudos em que a localização temporal é mais importante que a localização frequencial, como por exemplo descrito em (DOMINGUES et al., 2016).

Uma das equações que define a *wavelet* de Marr é:

$$\psi(t) = (1 - 2\pi^2 f_m^2 t^2) e^{-(f_m t)^2} \quad (2.4)$$

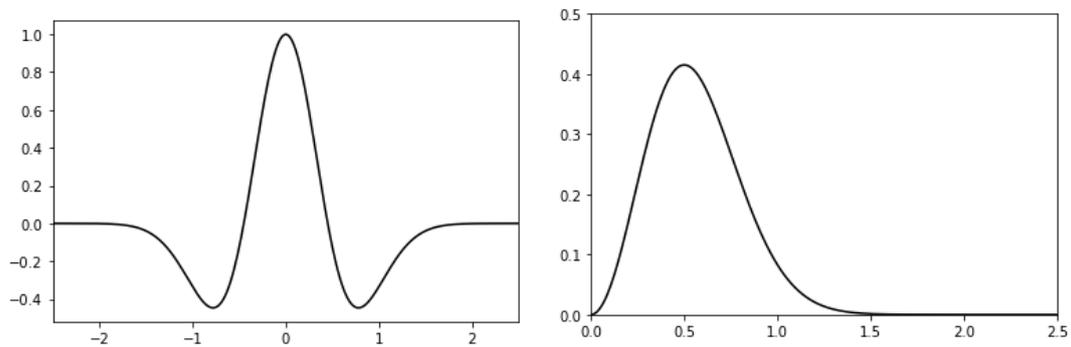
sendo f_m o pico de frequência da *wavelet* de forma que a equação 2.4 representa uma forma particular de se representar a *wavelet* de Marr também conhecida como *wavelet* de Ricker.

Na imagem a seguir tem-se a representação da *wavelet* chapéu mexicano tanto no domínio do tempo quanto no da frequência.

2.2 *Wavelet de Morlet*

Outra função *wavelet* muito conhecida é a *wavelet* de Morlet que é uma função complexa com muitas representações diferentes. Neste trabalho optou-se por escrever

Figura 2.1 - *wavelet* de Marr e sua FT



Fonte: Produção dos Autores.

a *wavelet* de Morlet na sua forma completa:

$$\psi(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}} \left(e^{-i\omega_0 t} - e^{-\frac{\omega_0^2}{2}} \right) \quad (2.5)$$

em que ω_0 é um parâmetro adimensional.

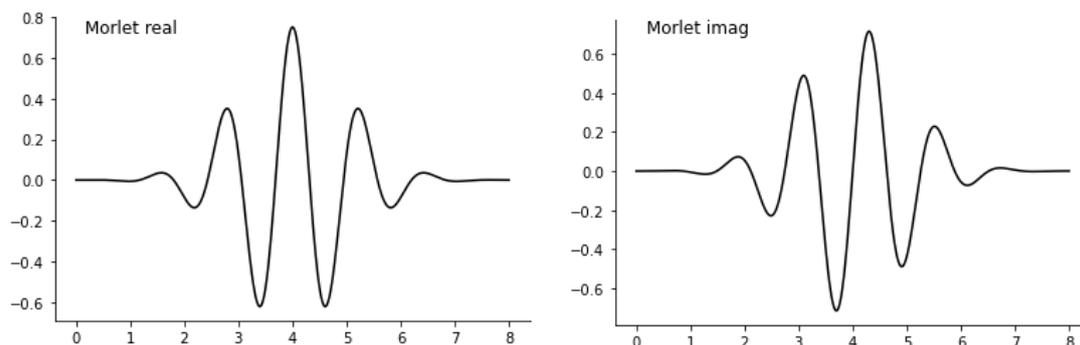
A *wavelet* de Morlet pode não satisfazer estritamente falando a condição de média nula das funções *wavelets*, porém para valores de $\omega_0 > 5$ é possível fazer com que a média da *wavelet* de Morlet seja suficientemente próxima de zero para que ela seja considerada uma função *wavelet*.

Outra característica importante que torna a *wavelet* de Morlet muito utilizada na análise de sinais é o fato de ela ser uma *wavelet* aproximadamente analítica, sendo a analiticidade de uma função *wavelet* uma característica muito importante na análise de sinais, pois funções *wavelets* com essa característica evitam que frequências espúrias negativas interfiram no resultado da análise do sinal, pois *wavelets* analíticas são funções que não apresentam conteúdo frequencial para frequências negativas.

Definição 2.3. Dado uma função *wavelet* $\psi(t)$ qualquer, ela será uma função analítica se $\hat{f}(\omega) = 0$ quando $\omega < 0$.

Na Figura 2.2 tem-se a representação gráfica da curva que descreve a *wavelet* de Morlet.

Figura 2.2 - Wavelet de Morlet



Fonte: Produção dos Autores.

Teorema 2.1. Considere a função wavelet de Morlet completa $\psi(t) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{t^2}{2}} \left(e^{-i\omega_0 t} - e^{-\frac{\omega_0^2}{2}} \right)$, a FT de $\psi(t)$, usando a notação $\hat{\psi}(\omega)$, é $\pi^{-\frac{1}{4}} \left(e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}} - e^{-\frac{\omega_0^2 + \omega^2}{2}} \right)$.

Demonstração 2.1. Aplicando a Transformada de Fourier na wavelet de Morlet tem-se:

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}} \left(e^{-i\omega_0 t} - e^{-\frac{\omega_0^2}{2}} \right) e^{-i\omega t} dt$$

Retirando as constantes da integração e reorganizando os termos,

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t - i\omega t - \frac{t^2}{2}} - e^{-\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{t^2}{2} - i\omega t} dt$$

Reescrevendo $e^{i\omega_0 t - i\omega t - \frac{t^2}{2}}$ e $e^{-\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{t^2}{2} - i\omega t}$ na forma de uma função gaussiana, põe-se o $-\frac{1}{2}$ em evidência e se reorganiza os termos.

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2 + 2it(\omega - \omega_0))} - e^{-\frac{1}{2}(\omega_0^2 + t^2 + 2i\omega t)} dt$$

em que $W = \omega - \omega_0$.

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2+2itW)} - e^{-\frac{1}{2}(\omega_0^2+t^2+2i\omega t)} dt$$

Aplicando propriedade de integração,

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2+2itW)} dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\omega_0^2+t^2+2i\omega t)} dt \right)$$

Reescrevendo $t^2 + 2itW$ e $t^2 + 2i\omega t$ como um trinômio do quadrado perfeito e reorganizando os termos.

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2+2itW-W^2)} e^{-\frac{W^2}{2}} dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2+2i\omega t-\omega^2)} e^{-\frac{1}{2}(\omega_0^2+\omega^2)} dt \right)$$

Em que $t^2 + 2itW - W^2 = (t + iW)^2$ e $t^2 + 2i\omega t - \omega^2 = (t + i\omega)^2$,

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{W^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+iW)^2} dt - e^{-\frac{1}{2}(\omega_0^2+\omega^2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+i\omega)^2} dt \right)$$

fazendo mudança de variável tal que $t + iW = u_1$ e $t + i\omega = u_2$ com $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$.

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{W^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u_1^2} dt - e^{-\frac{1}{2}(\omega_0^2+\omega^2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u_2^2} dt \right)$$

Como $e^{-\frac{1}{2}u_1^2}$ e $e^{-\frac{1}{2}u_2^2}$ são funções gaussianas tal que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u_1^2} dt = \sqrt{2\pi}$ e $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u_2^2} dt = \sqrt{2\pi}$, portanto

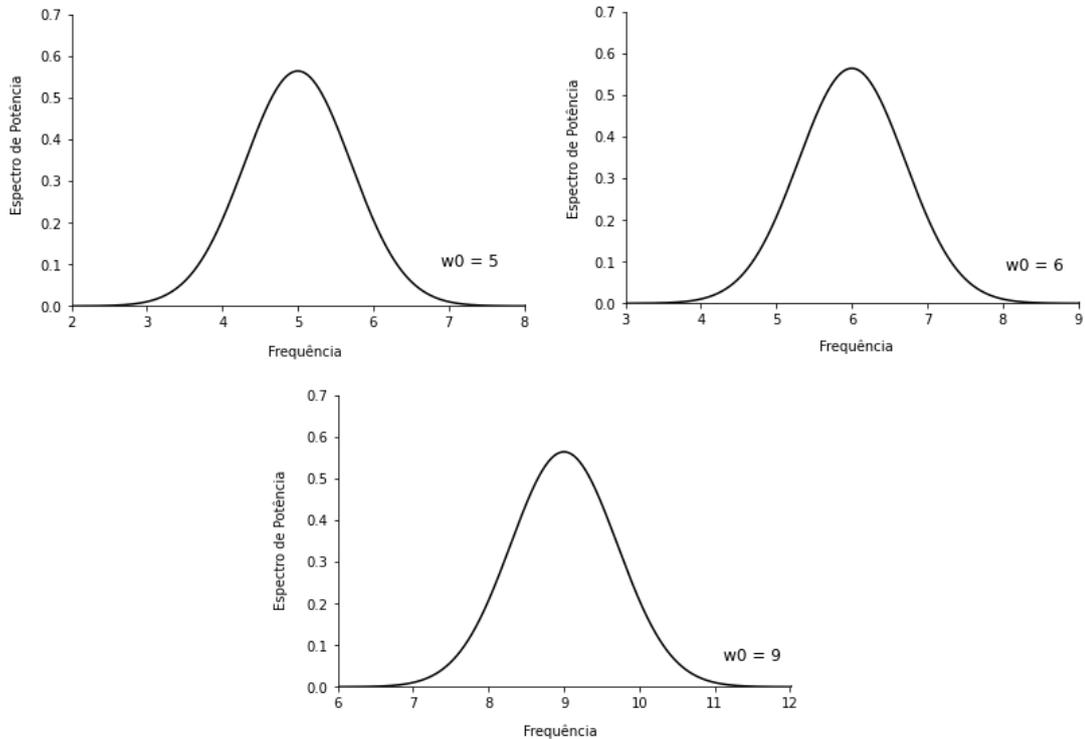
$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{W^2}{2}} \sqrt{2\pi} - e^{-\frac{1}{2}(\omega_0^2+\omega^2)} \sqrt{2\pi} \right)$$

Sendo $W = \omega - \omega_0$ e colocando $\sqrt{2\pi}$ em evidência,

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} \left(e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}} - e^{-\frac{\omega_0^2+\omega^2}{2}} \right) \quad (2.6)$$

Na figura 2.3 tem-se a representação gráfica da equação 2.6 para $\omega_0 = 5, 6$ e 9 .

Figura 2.3 - FT da *wavelet* de Morlet para $\omega_0 = 5, 6$ e 9 .



Fonte: Produção dos Autores.

2.3 Wavelet de Morse

A *wavelet* de Morse é uma função definida diretamente no domínio da frequência e se diferencia das outras funções *wavelets* justamente por ser definida no domínio das frequências. Além disso, diferente da *wavelet* de Morlet que é aproximadamente analítica, a *wavelet* de Morse é uma função exatamente analítica (LILLY; OLHEDE, 2009).

A Equação 2.7 que define a *wavelet* de Morse, usando a notação $\psi_{\beta,\gamma}$ de forma que a notação deixe claro a dependência dessa função em relação aos seus parâmetros, é:

$$\psi_{\beta,\gamma} = U(\omega) a_{\beta,\gamma} \omega^\beta e^{-\omega^\beta} \quad (2.7)$$

Sendo $U(\omega)$ a função passo unitário, $a_{\beta,\gamma}$ uma constante de normalização definida pela equação 2.8 e β e γ os parâmetros reais que determinam o comportamento da *wavelet* de Morse tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. A constante $a_{\beta,\gamma}$ assim como a função *wavelet* também depende dos valores dos parâmetros β e γ conforme mostra a equação a seguir:

$$a_{\beta,\gamma} = 2 \left(\frac{e\gamma}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\gamma}} \quad (2.8)$$

O fato de a *wavelet* de Morse ser dada em função dos dois parâmetros reais a torna uma função *wavelet* muito interessante no contexto da utilização da WT, pois a variação desses dois parâmetros permite dar a essa *wavelet* uma série de características sem que ela perca a sua analiticidade (LILLY; OLHEDE, 2010). Além disso, através da variação dos parâmetros, a *wavelet* de Morse engloba outras famílias de funções *wavelets* como, por exemplo, as *wavelets* de Cauchy.

Os parâmetros β e γ são responsáveis por determinar o comportamento da *wavelet* de Morse, de forma que o valor atribuído a esses parâmetros determina o quanto a *wavelet* vai ser oscilatória e determina o tamanho do seu suporte compacto. Além disso, o parâmetro γ ainda é responsável por determinar a simetria da resposta em frequência da *wavelet* de Morse (LILLY; OLHEDE, 2009).

As expressões em função dos parâmetros β e γ que descrevem o comportamento da *wavelet* de Morse são:

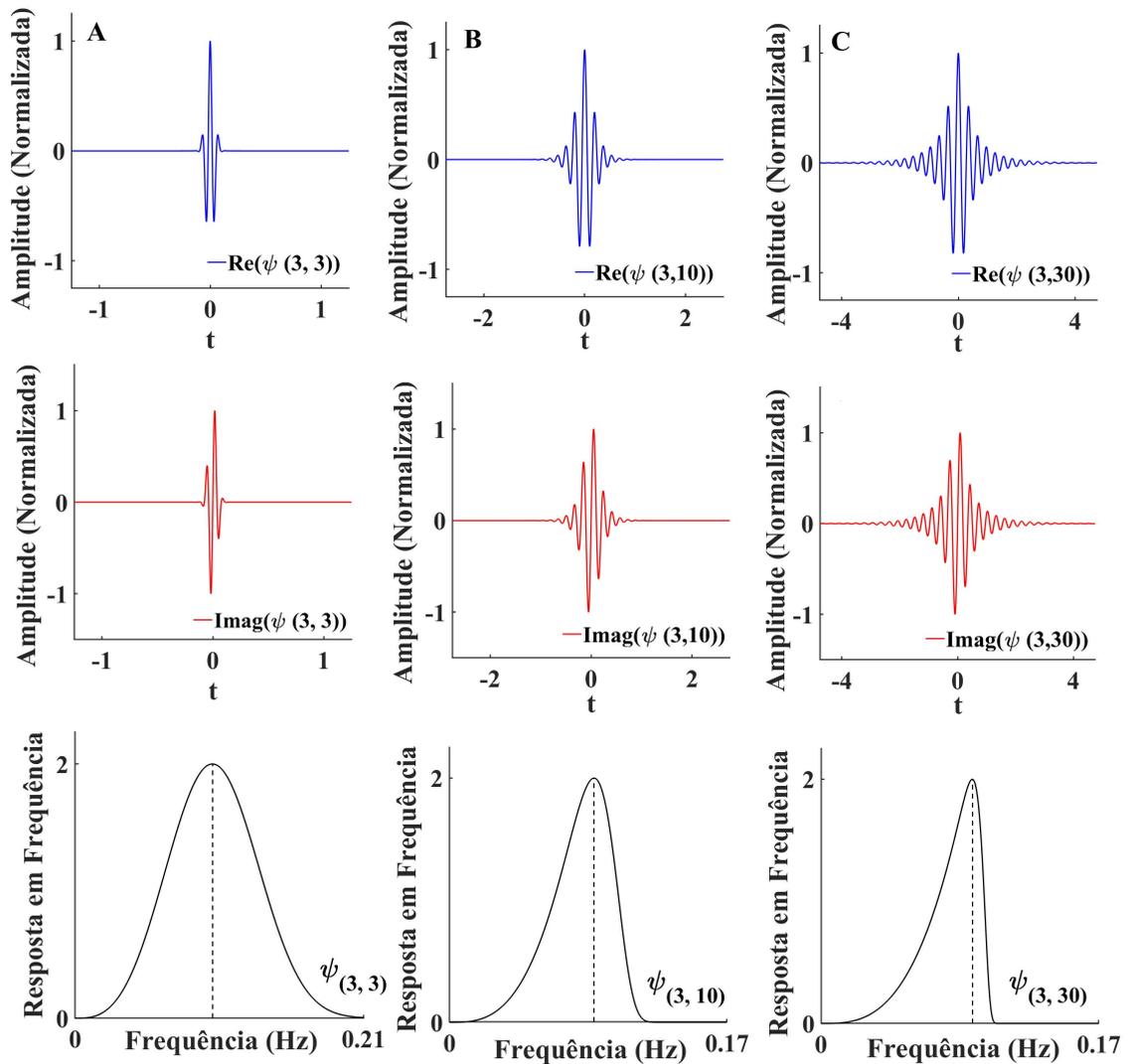
Suporte Compacto: $\sqrt{\beta\gamma}$

Simetria da Resposta em frequência: $-(3 - \gamma)P_{\beta,\gamma}^2$

Na figura 2.4 é possível observar que a maneira que o γ aumenta a *wavelet* de Morse se torna mais oscilatória no tempo enquanto a sua resposta em frequência fica cada vez mais a esquerda do pico de frequência.

É importante destacar que valores muito pequenos para γ geram *wavelets* muito contraídas dentro do suporte compacto, sendo que em um contexto de utilização da WT como ferramenta de análise de dados *wavelets* muito contraídas não são interessantes. Temos ainda o destaque para quando $\gamma = 3$ (figura 2.5), pois é quando *wavelet* de Morse tem a sua resposta em frequência simétrica e, para fins práticos, 3 é valor ideal para o parâmetro γ .

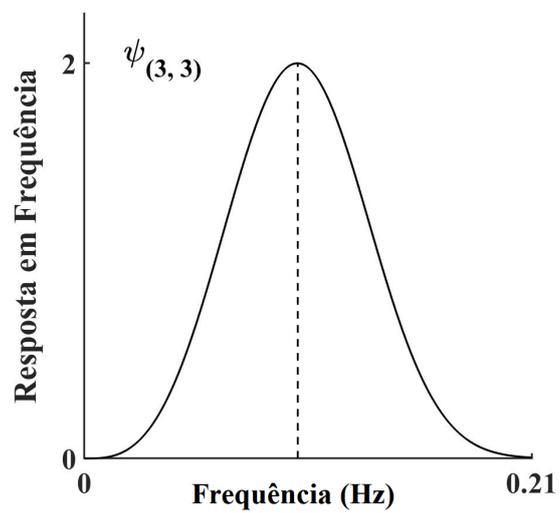
Figura 2.4 - O efeito causado pelo incremento do parâmetro γ no comportamento e na resposta em frequência da *wavelet* de Morse



Fonte: Produção dos Autores.

Por fim a analiticidade da *wavelet* de Morse e as características que podem ser atribuídas a ela a partir da variação dos seus parâmetros é o que a torna uma função analisadora da Transformada *Wavelet* com muito potencial e é o que justifica a escolha deste trabalho em realizar uma investigação em torno dos seus parâmetros e da sua condição de admissibilidade.

Figura 2.5 - Resposta em frequência da *wavelet* de Morse quando $\gamma = 3$



Fonte: Produção dos Autores.

2.4 Estudo realizado: Admissibilidade da *wavelet* de Morse

Neste capítulo é apresentado uma investigação numérica realizada em torno dos parâmetros da *wavelet* de Morse e da sua condição de admissibilidade, de forma que é apresentada a metodologia utilizada na pesquisa e os resultados obtidos.

O objetivo da análise é compreender de que forma a variação dos parâmetros β e γ que determinam o comportamento e a resposta em frequência da *wavelet* de Morse influencia no valor da sua condição de admissibilidade.

2.4.1 Estratégia de análise e resultados

A metodologia adotada envolve o conjunto $A = \{3, 10, 20, 50\}$ e o intervalo real $I =]0, 50]$. Em um primeiro estudo o parâmetro β assume os valores do conjunto A enquanto o parâmetro γ variava no intervalo I . No segundo estudo o parâmetro β varia no intervalo I enquanto o parâmetro γ assume os valores do conjunto A .

A escolha do intervalo I possibilita a percepção clara do comportamento da condição de admissibilidade. A escolha do conjunto A verifica se o incremento do parâmetro tomado fixo influencia de alguma forma a variação da condição de admissibilidade em função do parâmetro não fixado.

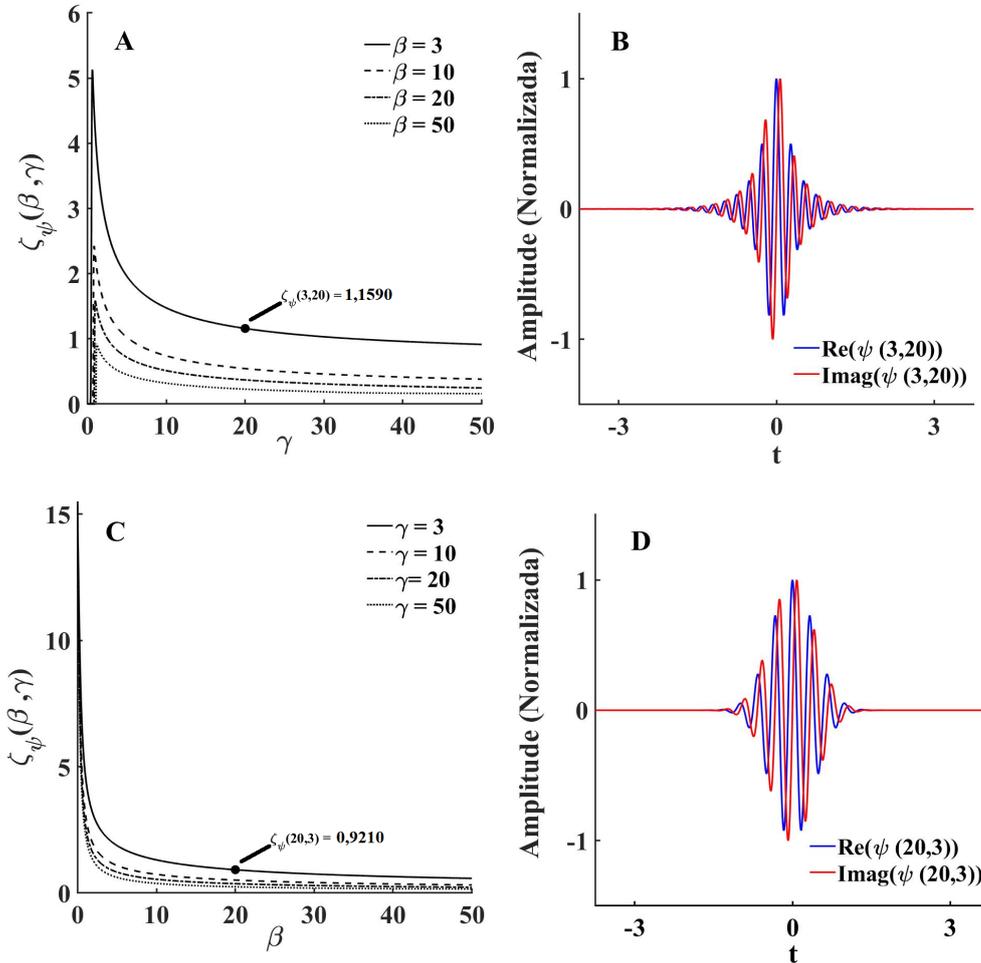
A Figura 2.6 apresenta os resultados. É possível concluir que quando ambos os parâmetros aumentam, a condição de admissibilidade tende exponencialmente a zero, de forma que quanto maior for o valor do parâmetro fixado maior é o decrescimento exponencial.

Tendo em mente que para fins práticos o valor ideal que o parâmetro γ deve assumir é 3, devido a simetria da resposta em frequência, e tendo em mente que a condição de admissibilidade assumindo valores muito próximos de zero pode gerar problemas na hora de se calcular a transformada *wavelet* inversa é possível concluir, a partir daí, que o ideal é que o parâmetro β não assuma valores significativamente grandes caso a *wavelet* de Morse seja utilizada como função analisadora da transformada *wavelet*.

Na Figura 2.6 ainda faz-se destaque aos valores da condição de admissibilidade para os parâmetros β e γ valendo respectivamente (3, 20) e (20, 3) e apresenta-se as respectivas *wavelets* geradas a partir desses parâmetros. A escolha por esses destaques teve o intuito de mostrar que a comutação dos valores atribuídos aos parâmetros geram não só *wavelets* diferentes como também valores diferentes para

a condição de admissibilidade.

Figura 2.6 - Resultado da investigação realizada em torno dos parâmetros e da condição de admissibilidade da *wavelet* de Morse



Fonte: Produção dos Autores.

Por fim se reforça a importância da *wavelet* de Morse quando se trata da sua utilização como função analisadora da Transformada *wavelet* devido tanto a possibilidade de fazer a sua resposta em frequência ter um comportamento gaussiano (simétrico) quanto ao fato dela ser uma função *wavelet* analítica, de forma que a investigação realizada auxilia o entendimento das características da *wavelet* de Morse.

3 TRANSFORMADA WAVELET CONTINUA

Neste capítulo é apresentado a equação que define a Transformada *Wavelet* Contínua e, é apresentado também, as propriedades dessa transformada que afetam diretamente a utilização dela no contexto da análise de sinais.

A Transformada *Wavelet* Contínua (CWT) é uma transformada integral linear que enquanto ferramenta matemática permite o estudo das frequências de sinais não estacionários, de forma que dado uma função pertencente ao espaço de funções quadrado-integráveis a CWT permite a representação dessa função no plano tempo-escala (DAUBECHIES, 1992). A CWT utiliza como função de análise as já discutidas neste trabalho funções *wavelets*.

Definição 3.1. *Dado uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ definimos a sua Transformada Wavelet usando a notação $\Psi_f^\psi(a, \tau)$ como:*

$$\Psi_f^\psi(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt \quad (3.1)$$

em a e τ são parâmetros reais com $a > 0$, ψ^* representa o complexo conjugado da função wavelet analisadora e $\frac{1}{\sqrt{a}}$ é uma constante de normalização.

O parâmetro a da CWT é responsável pela contração ou dilatação da *wavelet* analisadora enquanto o parâmetro τ é responsável pela translação dessa função e a variação desse parâmetro determina as regiões do sinal que serão analisadas (DAUBECHIES, 1992; DOMINGUES et al., 2016).

Os resultados obtidos através da CWT e expressos através da notação $\Psi_f^\psi(a, \tau)$ são chamados de coeficientes *wavelets* e podem ser entendidos como o comprimento da função. Além disso, o valor absoluto elevado ao quadrado desses coeficientes podem ser interpretados como medidas locais de energia (DAUBECHIES, 1992; MAGRINI, 2020a).

Definição 3.2. *Definimos uma medida de energia no sentido de L^2 obtida por meio do coeficientes wavelets provenientes da CWT da seguinte maneira:*

$$E(a, \tau) = |\Psi_f^\psi(a, \tau)|^2 \quad (3.2)$$

As medidas locais de energia (coeficientes *wavelet em módulo ao quadrado* oferecidas

pela Equação 3.2) dependem do instante de tempo (τ) em que essas energias foram medidas, e das escalas.

Definição 3.3. *O espectro global wavelet é definido como a medida total de energia em cada instante de tempo e pode ser calculado, por meio da seguinte equação:*

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(a, \tau) d\tau \quad (3.3)$$

O espectro global *wavelet* apresenta as frequências que são presentes na função analisada de forma mais significativa, porém ele apresenta essas frequências de maneira mais suavizada quando comparado com o espectro de fourier. Essa propriedade permite a CWT lidar melhor com a análise de sinais que tenham altas frequências já que a tendência da CWT é suavizar essas frequências.

Além disso, como já apresentado anteriormente, o valor da condição de admissibilidade de uma função *wavelet* está diretamente relacionado a possibilidade que a transformada realizada admita transformada inversa.

Definição 3.4. *Dado a CWT de uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ representada pela notação $W_f^\psi(a, \tau)$, define-se a transformada wavelet inversa, usando a notação $IW_f^\psi(a, \tau)$, da seguinte forma:*

$$IW_f^\psi(a, \tau) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \Psi_f^\psi(a, \tau) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) \frac{da}{a^2} d\tau \quad (3.4)$$

em que ψ^* representa o complexo conjugado da função wavelet escolhida como função analisadora durante o cálculo da transformada da função f e C_ψ é a constante referente a condição de admissibilidade dessa função wavelet.

A Equação 3.4 evidencia a questão que *wavelets* que tenham condição de admissibilidade com valor muito próximo de zero podem gerar problemas no cálculo da Transformada *Wavelet* Inversa, *i.e.*, são instáveis e não devem ser usadas.

3.1 Propriedade Linear da Transformada *Wavelet* Contínua

Sendo a Transformada *Wavelet* uma transformada integral definida pela equação 3.1 as propriedades que a caracterizam são: Redundância, Produto interno, Linearidade e Convolução. A utilização da CWT na análise de sinais discretos faz dessa transformada redundante e isto a torna interessante em estudos exploratórios de sinas (MAGRINI, 2020a).

Matematicamente falando a CWT definida pela equação 3.1 pode ser compreendida como o produto interno de funções usualmente definido no $L^2(\mathbb{C})$ (Ver apêndice A) entre a função que se deseja analisar e o complexo conjugado da função *wavelet* analisadora (propriedade do produto interno). É essa propriedade que permite associar os valores dos coeficientes *wavelets* a idéia de medida de energia. Além disso, a propriedade de convolução garante que a CWT de uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ é equivalente a operação de convolução entre o sinal analisado e a função *wavelet* analisadora (Ver apêndice A). Esta propriedade é muito importante na aplicação da Transformada *wavelet*, pois através dela é possível definir a CWT diretamente no domínio da frequência de forma que o custo da implementação computacional da CWT aplicada no domínio da frequência é menor do que o custo da implementação computacional da CWT aplicada no domínio do tempo (MAGRINI, 2020a).

Definição 3.5. *Defini-se a CWT de uma função $f(t)$ qualquer pertencente ao $L^2(\mathbb{C})$ diretamente no domínio da frequência conforme a equação:*

$$\Psi_f^\psi(a, \tau) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}^*(\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.5)$$

em que $\hat{f}(\omega)$ e $\hat{\psi}^*(\omega)$ são, respectivamente, as transformadas de fourier da função $f(t)$ que esta sendo analisada e da função *wavelet* analisadora.

Segue da definição 3.5 a necessidade de se conhecer a representação no domínio da frequência da função *wavelet* analisadora.

Por fim a linearidade da CWT é uma propriedade particularmente interessante, pois ela possibilita a normalização do sinal estudado conforme forem os objetivos da análise a ser feita.

Teorema 3.1. *A CWT de uma função qualquer pertencente ao $L^2(\mathbb{C})$ é uma transformação linear.*

Demonstração 3.1. *Se a CWT é uma transformação linear verifica-se a seguinte propriedade:*

$$\Psi_{\alpha_1 f + \alpha_2 g}^\psi(a, \tau) = \alpha_1 \Psi_f^\psi(a, \tau) + \alpha_2 \Psi_g^\psi(a, \tau) \quad (3.6)$$

em que f, g são funções pertencentes aos $L^2(\mathbb{C})$ e α_1, α_2 pertencem ao \mathbb{R} .

Demonstrando a propriedade tem-se que, pela definição 3.1, $\Psi_{\alpha_1 f + \alpha_2 g}^\psi(a, \tau)$ é igual a:

$$\Psi_{\alpha_1 f + \alpha_2 g}^\psi(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha_1 f(t) + \alpha_2 g(t)] \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt$$

Aplicando a distributiva da multiplicação:

$$\Psi_{\alpha_1 f + \alpha_2 g}^\psi(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha_1 f(t)] \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt + [\alpha_2 g(t)] \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt$$

Aplicando propriedade de integração:

$$\Psi_{\alpha_1 f + \alpha_2 g}^\psi(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} [\alpha_1 f(t)] \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt + \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha_2 g(t)] \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt \right)$$

Sendo α_1 e α_2 constantes em relação a variável de integração então:

$$\Psi_{\alpha_1 f + \alpha_2 g}^\psi(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt + \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt \right)$$

Aplicando a distributiva da multiplicação:

$$\Psi_{\alpha_1 f + \alpha_2 g}^\psi(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt \right) + \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt \right)$$

Aplicando a associativa da multiplicação:

$$\Psi_{\alpha_1 f + \alpha_2 g}^\psi(a, \tau) = \alpha_1 \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt \right) + \alpha_2 \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt \right)$$

A partir da definição 3.1 é possível concluir que:

$$\Psi_{\alpha_1 f + \alpha_2 g}^\psi(a, \tau) = \alpha_1 \Psi_f^\psi(a, \tau) + \alpha_2 \Psi_g^\psi(a, \tau)$$

Portanto a CWT é uma transformação linear.

3.2 Estudo realizado: Efeito da linearidade da CWT

Neste estudo é apresentado o impacto causado pela variação do parâmetro que determina o comportamento da *wavelet* de Morlet na aplicação da Transformada *Wavelet* Contínua como ferramenta analisadora de sinais. É apresentado também a verificação da propriedade de linearidade da CWT através da comparação da aplicação dessa ferramenta em um sinal com a aplicação dessa ferramenta nesse mesmo sinal normalizado com média igual a zero e desvio padrão igual a um.

O objetivo dessas investigações é determinar a importância das propriedades da *wavelet* analisadora e própria transformada na aplicação da CWT na análise de sinais.

3.3 Estratégias de análise

A estratégia de análise utilizada consiste na aplicação da Transformada *Wavelet* Contínua para analisar a função $f(t) = 5\text{sen}(300\pi t) + 3\text{sen}(800\pi t)$, utilizando a *wavelet* de Morlet como função analisadora, em dois momentos distintos.

No primeiro momento analisa-se a função $f(t)$ usando $W_0 = 6$ e $W_0 = 9$, sendo W_0 o parâmetro que determina o comportamento da *wavelet* de Morlet conforme equação 2.5, com o intuito de observar de que maneira o incremento desse parâmetro afeta a aplicação da Transformada.

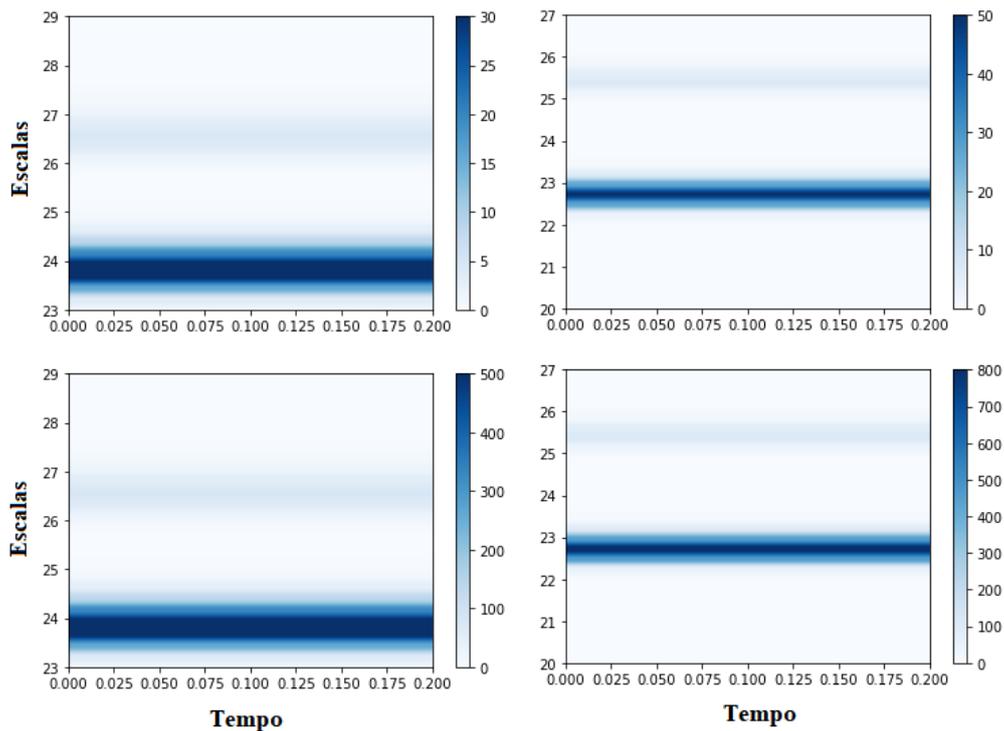
No segundo momento analisa-se a função $f(t)$ e a função $f(t)$ normalizada com média igual a zero e desvio padrão igual a um com o intuito de verificar a propriedade de linearidade da CWT.

A escolha da função $f(t)$ deu-se pelo fato de que já se conhece o seu conteúdo frequencial, pois se trata de uma soma de senos, possibilitando assim o foco na observação dos efeitos do incremento do parâmetro W_0 e da propriedade de linearidade no já conhecido resultado da aplicação da transformada *wavelet* na função $f(t)$.

3.4 Resultados

A Figura 2.2 apresenta a CWT da função $f(t) = 5\text{sen}(300\pi t) + 3\text{sen}(800\pi t)$ calculada para $f(t)$, parte inferior, e para $f(t)$ normalizada com média zero e desvio padrão igual a um, parte superior, onde a esquerda se vê a CWT calculada usando a *wavelet* de Morlet com $W_0 = 6$ e a direita se vê a CWT calculada para a *wavelet* de Morlet com $W_0 = 9$. O incremento do W_0 deixa as bandas de frequências mais bem localizadas enquanto a linearidade garante que não ocorra mudanças na escala do sinal analisado. Sendo possível observar como o incremento do parâmetro que determina a *wavelet* de Morlet estreita as bandas de frequências no escalograma, tornando-as mais bem localizadas. Também foi possível observar como a linearidade da CWT garante que não se tenha alterações nas escalas de um sinal diante da normalização.

Figura 3.1 - Resultado da investigação realizada em torno do parâmetro da *wavelet* de Morlet e da linearidade da CWT



Fonte: Produção dos Autores.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta iniciação científica contribuiu para a formação em matemática aplicada e computação científica do bolsista. O bolsista aprofundou estudos da Transformada de Fourier, iniciou estudos em análise *wavelet*, participou de atividades de pesquisa e seminários, foi exposto a ambientes de computação científica e desenvolveu uma análise numérica da condição de admissibilidade da *wavelet* de Morse que foi apresentada no Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional em setembro 2021. A análise de referente aos parâmetros da *wavelet* de Morlet e da linearidade da CWT foi exposta no VI Encontro de Iniciação Científica e Pós-Graduação do Campus São Paulo 2021. Além disso, o bolsista ainda participou do X WWlet *Wavelets and Applications* onde pode observar as principais pesquisas feitas em torno da Transforma *wavelet* e ferramentas associadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CASTILHO, J. E.; DOMINGUES, M. O.; MENDES, O.; PAGAMISSE, A. Introdução ao mundo das wavelets. **São Carlos: SBMAC**, 2012. 4
- DAUBECHIES, I. **Ten lectures on wavelets**. [S.l.]: Siam, 1992. 3, 4, 15
- DOMINGUES, M.; MENDES, O.; KAIBARA, M.; MENCONI, V.; BERNARDES, E. Explorando a transformada wavelet contínua. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 38, n. 3, 2016. 4, 15
- LILLY, J. M.; OLHEDE, S. C. **Higher-order properties of analytic wavelets**. 2009. 146-160 p. 8, 9
- _____. **On the analytic wavelet transform**. 2010. 4135–4156 p. 9
- MAGRINI, L. A. **Funções Wavelet e Transformada Wavelet Contínua: Representação Simultânea nos Domínios do Tempo e da Frequência**. 2020. 17-32 p. 15, 16, 17
- MAGRINI, L. A. **Transformadas wavelet na análise de sinais com falhas e na detecção da sincronização das dinâmicas lenta e rápida em sistemas dinâmicos caóticos com múltiplas escalas de tempo**. 271 p. Tese (Doutorado em Computação Aplicação) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, 2020. 3, 4

APÊNDICE A - FUNÇÕES DE QUADRADO-INTEGRÁVEIS

Neste apêndice é apresentada uma introdução ao espaço das funções quadrado-integráveis.

O espaço de funções quadrado-integráveis ou o espaço $L^2(\mathbb{C})$ é definido como:

Definição A.1. *Se $f(t)$ é uma função tal que $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ então:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{A.1})$$

A norma, ou medida, de uma função pertencente ao $L^2(\mathbb{C})$ pode ser definida, usando a notação $\|f(t)\|_{L^2(\mathbb{C})}$, através da expressão (A.1), da seguinte forma:

$$\|f(t)\|_{L^2(\mathbb{C})} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt} \quad (\text{A.2})$$

Definido tanto o espaço de funções quadrado-integráveis como a norma desse espaço é preciso definir agora o produto interno.

Definição A.2. *Sendo as funções f e g quaisquer tal que $f(t)$ e $g(t) \in L^2(\mathbb{C})$, temos que o produto interno entre elas, usando a notação $\langle f(t), g(t) \rangle$ e considerando $g^*(t)$ o complexo conjugado da função $g(t)$, é definido usualmente por:*

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t) dt \quad (\text{A.3})$$

Os espaços de funções são importantes, pois a Transformada de Fourier é, em uma perspectiva teórica, equivalente ao produto interno de funções definido nesses espaços. O espaço de funções quadrado-integráveis, dentre os espaços de funções, é particularmente interessante, pois nele se verifica uma importante propriedade da FT que é a identidade de Parseval.

Algumas propriedades da Transformada de Fourier e da Transformada *Wavelet* envolvem a operação de convolução. Portanto definindo essa operação:

Definição A.3. *Sendo $f(t)$ e $g(t)$ funções quaisquer pertencentes ao espaço $L^2(\mathbb{C})$ a operação de convolução entre $g(t)$ e $f(t)$ é definida, usando a notação $f(t) * g(t)$, como:*

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u) du \quad (\text{A.4})$$

APÊNDICE B - TRANSFORMADA DE FOURIER

Neste apêndice é apresentada uma introdução à Transformada de Fourier (FT). Sendo a FT uma ferramenta matemática desenvolvida pelo matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) durante seus estudos sobre condução de calor, ela surge dos estudos de Fourier sobre a aproximação de funções periódicas por somas de senos e cossenos. A transformada de Fourier é responsável por decompor ou aproximar uma função geralmente definida no que se chama “domínio do tempo” por suas frequências fundamentais.

Dado funções não periódicas, localizadas no domínio do tempo, a Transformada de Fourier nos permite encontrar as principais frequências dessas funções. De forma genérica, podemos entender a FT como sendo responsável por levar uma função do domínio do tempo para o domínio da frequência, permitindo também, através da transformada Inversa de Fourier (IFT), levar uma função do domínio da frequência para o domínio do tempo. Uma das vantagens da FT e da IFT é que as mudanças de domínio podem ser feitas sem que se percam informações da função no processo.

Definição B.1. *Seja $f(t)$ uma função qualquer, tal que $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ vamos definir a Transformada de Fourier da $f(t)$, usando a notação $\hat{f}(\omega)$, como:*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{(-i\omega t)} dt \quad (\text{B.1})$$

Sendo a variável frequencial o ômega (ω) que é definido no intervalo $[0, 2\pi[$ e $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ uma constante de normalização.

Definido a Transformada de Fourier agora vamos definir a Transformada Inversa de Fourier. Ferramenta que leva uma função do domínio da frequência para o domínio do tempo.

Definição B.2. *Seja $f(t)$ uma função qualquer, tal que $f(t) \in L^2(\mathbb{C})$ e sendo $\hat{f}(\omega)$ a sua transformada de fourier. Vamos definir a Transforma Inversa de Fourier, usando a notação $f(t)$, como:*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{(i\omega t)} d\omega \quad (\text{B.2})$$

Observe que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ aparece novamente como uma constante de normalização, dessa

vez para IFT. No caso $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ é escolhido como constante de normalização para a FT de forma que essa escolha implica que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ seja também constante de normalização para a IFT. De modo geral, a escolha de uma constante de normalização para a Transformada de Fourier determina a constante de normalização para a Transformada Inversa de Fourier.

Determinado as frequências de uma função pertencente ao $L^2(\mathbb{C})$ existe ainda a necessidade de calcular a amplitude dessas frequências ou a energia delas. A partir daí, temos o espectro de potência de Fourier que é justamente a ferramenta que vai nos dar as amplitudes das frequências ou a energia da função e isso depende da norma utilizada para a realização do cálculo da FT.

Definição B.3. *Seja $f(t)$ uma função qualquer pertencente ao espaço $L^2(\mathbb{C})$ e seja $\hat{f}(\omega)$ a sua transformada de Fourier. Vamos definir o espectro de potência de Fourier de $f(t)$, usando a notação $S(\omega)$, como:*

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{B.3})$$

O espectro de potência, nos permite encontrar tanto as amplitudes das frequências que compõe uma função quanto a energia dela, tal que a ideia de energia de função é equivalente a ideia de energia cinética. Por fim uma característica importante da FT é o fato de que na passagem do domínio do tempo para o da frequência ou na passagem da frequência para o tempo a FT preserva a energia da função.

A FT tem muitas propriedades e todas elas são fundamentais para se enxergar a simetria existente entre os domínios do tempo e da frequência. Porém a identidade de Parseval é particularmente importante, pois garante que a norma de uma função se mantém a mesma tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Em síntese, a identidade de Parseval garante que a energia de uma função se mantém independente do domínio em que ela esteja.

Propriedade B.1. *Se $f(t)$ é um função do $L^2(\mathbb{C})$ e $\hat{f}(\omega)$ é a Transformada de Fourier da função $f(t)$, então:*

$$\|f(t)\|_{\mathbb{L}^2} = \|\hat{f}(\omega)\|_{\mathbb{L}^2} \quad (\text{B.4})$$

Demonstração. Vamos começar mostrando que:

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \langle \hat{f}(\omega), \hat{f}(\omega) \rangle$$

Temos a partir da IFT que a função $f(t)$ é da forma:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{B.5})$$

E temos a partir da TF que $\hat{f}(\omega)$ é da seguinte forma:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{B.6})$$

Substituindo a equação (B.6) na equação (B.5):

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega t} d\omega$$

A partir daí o produto interno da função $f(t)$ com a própria função $f(t)$, definido na equação (A.3) é da forma:

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega \cdot f^*(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Como tanto a função $f(t)$ como $f^*(t)$ são funções contínuas podemos mudar a ordem de integração de forma que:

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{i\omega t} dt \right] d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pela definição da TF:

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \cdot \hat{f}^*(\omega) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pela definição de produto interno:

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \langle \hat{f}(\omega), \hat{f}(\omega) \rangle \quad (\text{B.7})$$

Através da definição de norma (A.2) e da definição de produto interno (A.3) é possível concluir que:

$$\|f(t)\|_{\mathbb{L}^2} = (\langle f(t), f(t) \rangle)^2 \quad (\text{B.8})$$

Então se elevarmos ao quadrado os dois membros da equação (B.7) temos:

$$(\langle f(t), f(t) \rangle)^2 = (\langle \hat{f}(\omega), \hat{f}(\omega) \rangle)^2$$

Por fim da equação (B.8) segue que:

$$\|f(t)\|_{\mathbb{L}^2} = \|\hat{f}(\omega)\|_{\mathbb{L}^2}$$

□

ANEXO A - RESUMO APRESENTADO CNMAC 2021

Investigação Numérica da Condição de Admissibilidade da *Wavelet* de Morse

Pedro Marcos Mossulin Ferreira¹

Instituto Federal de São Paulo (IFSP), São Paulo, SP.

Luciano Aparecido Magrini²

Instituto Federal de São Paulo (IFSP), Votuporanga, SP.

Margarete Oliveira Domingues³

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, SP.

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo numérico da condição de admissibilidade da *wavelet* de Morse a partir dos parâmetros que controlam seu comportamento nos domínios do tempo e da frequência. A *wavelet* $\Psi_{\beta,\gamma}(\omega)$ de Morse é definida em frequência pela equação:

$$\Psi_{\beta,\gamma}(\omega) = U(\omega) a_{\beta,\gamma} \omega^\beta e^{-\omega^\gamma}, \quad (1)$$

em que $U(\omega)$ é a função passo unitário, β e γ são parâmetros reais positivos e $a_{\beta,\gamma}$ é uma constante de normalização [1,2]. A escolha da *wavelet* de Morse como objeto de estudo baseia-se em (a) sua capacidade de englobar outras famílias de funções *wavelet* como as de Cauchy e as relacionadas com as derivadas de Gaussianas, (b) sua analiticidade [1,2] e (c) no fato de que recentemente ela vem sendo aplicada na investigação da sincronização em sistemas dinâmicos caóticos com múltiplas escalas [3]. Além disso, o conhecimento do valor numérico da condição de admissibilidade de uma função *wavelet* é fundamental nas aplicações que envolvem a transformada *wavelet* inversa como a remoção de ruídos ou aproximação de um sinal utilizando apenas sub-bandas de energia significativa. A condição de admissibilidade para a *wavelet* de Morse é definida pela equação [1]:

$$\zeta_\psi(\beta, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi_{\beta,\gamma}(\omega)|}{|\omega|} d\omega$$

No que diz respeito a metodologia utilizada desenvolveram-se dois estudos acerca da condição de admissibilidade $\zeta_\psi(\beta, \gamma)$. No primeiro, β foi tomado fixo no conjunto $A = \{3, 10, 20, 50\}$ e γ variou no intervalo real $I =]0, 50]$. No segundo, fez-se γ fixo em A e β variou em I . A escolha dos valores pertencentes ao conjunto A deu-se com o objetivo de investigar se o incremento do parâmetro fixado influencia no comportamento da variação da condição de admissibilidade como função do parâmetro não fixado. O resultado é apresentado na Figura (1).

No painel superior vê-se em (A) comportamento da condição de admissibilidade com β no conjunto em A e γ variando em I com destaque para o valor numérico de $\zeta_\psi(3, 20)$ cuja correspondente *wavelet* de Morse está indicada em (B) com variável t não dimensional. No painel inferior tem-se o análogo do painel superior mas para o caso em que γ está fixo e β varia em I . Destacou-se o valor $\zeta_\psi(20, 3)$ pois neste caso a correspondente *wavelet* tem resposta em frequência gaussiana (curtose nula) e é especialmente adequada para a análise de sinais altamente oscilatórios uma vez que sua largura de banda é suficientemente estreita [1,2]. Já a escolha em se destacar $\zeta_\psi(3, 20)$ tem

¹mossulin.ferreira@aluno.ifsp.edu.br

²magrini@ifsp.edu.br

³margarete.domingues@inpe.br

ANEXO B - CERTIFICADO DE PARTICIPAÇÃO: CNMAC 2021

CERTIFICADO



Certificamos que

Pedro Ferreira

participou do XL Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC 2021 realizado de 13 a 17 de setembro de 2021 em formato virtual.

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Pablo", is written over a thin horizontal line.

Pablo Martin Rodriguez
Presidente
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

Organização:



Certification by Galoá



ANEXO C - RESUMO APRESENTADO NO EICPOG 2021

PROPRIEDADE LINEAR DA TRANSFORMADA WAVELET CONTÍNUA: UM ESTUDO DE CASO.¹

DOMINGUES, Margarete Oliveira²
FERREIRA, Pedro Marcos Mossulin Ferreira³
MAGRINI, Luciano Aparecido⁴

Formulário de avaliação VI EICPOG 2021 RESUMO

Este trabalho apresenta a família de funções wavelet de Morlet e investiga o efeito causado pela variação do parâmetro que determina essa wavelet na aplicação da Transformada Wavelet Contínua. Em seguida, discute-se a propriedade de linearidade dessa transformada e verifica-se essa propriedade através da comparação entre a aplicação da Transformada Wavelet em um sinal com a aplicação da Transformada Wavelet nesse mesmo sinal normalizado pela média e desvio padrão. Por fim, conclui-se que o incremento do parâmetro que determina a wavelet de Morlet deixa as bandas de frequências mais bem localizadas enquanto a linearidade garante que a normalização do sinal não altera as escalas afetando apenas as suas amplitudes.

Palavras-chave: Análise de Sinais, Funções Wavelets, Transformada Wavelet Contínua.

INTRODUÇÃO

A Transformada Wavelet Contínua (CWT) é uma ferramenta matemática utilizada na análise do conteúdo de variações temporais de bandas frequenciais de sinais não-estacionários. Além disso, a CWT é uma transformada que usa as funções wavelets como funções de análise, sendo as funções wavelets famílias de funções caracterizadas pelo seu comportamento oscilatório, média nula e energia finita. A partir daí, este trabalho contribui com algumas discussões em torno da wavelet de Morlet, da CWT e de algumas propriedades de interesse juntamente com demonstrações no contexto da prática da análise de sinais.

¹ Projeto de Pesquisa de Iniciação Científica, PIBIC edital de 2021-2022.

² Doutora em Matemática Aplicada e Pesquisadora Titular no Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada, INPE, São José dos campos, SP, email: margarete.oliveira.domingues@gmail.com

³ Graduando em Licenciatura em Matemática, IFSP, São Paulo, SP, email: pedromarcosmossulin@gmail.com

⁴ Doutor em Computação Aplicada e Professor Titular no Departamento de Ciências e Matemática, IFSP, Votuporanga, SP, email: magriniluciano1983@gmail.com

OBJETIVOS

Objetivo Geral: Discutir os impactos das propriedades da wavelet de Morlet e da linearidade da Transformada Wavelet Contínua na análise de sinais.

Objetivos Específicos:

- 1- Verificar a linearidade da Transformada Wavelet Contínua através da comparação entre a análise de um sinal com a análise do mesmo sinal normalizado pela média e desvio padrão.
- 2- Investigar o efeito causado pelo incremento do parâmetro que determina a wavelet de Morlet na aplicação da Transformada Wavelet Contínua.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As funções wavelets são famílias de funções que podem ser matematicamente definidas como funções $\psi(t)$ pertencentes ao espaço de funções $L^2(\mathbb{C})$ que satisfazem a seguinte condição de admissibilidade: $C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$. Sendo a wavelet de Morlet uma das funções wavelets ela tem como uma das suas muitas representações no domínio do tempo a equação: $\pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\omega_0 t}$, com ω_0 sendo o parâmetro que a determina. Entretanto a Wavelet de Morlet não satisfaz rigorosamente a condição de admissibilidade C_ψ de forma que ela só é suficientemente próxima de uma função wavelet para valores de $\omega_0 > 5$.

Formalmente, sendo $f(t)$ uma função pertencente ao espaço de funções $L^2(\mathbb{C})$ a CWT de $f(t)$ é definida pela equação: $\Psi_f^\psi(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt$ em que os parâmetros de dilatação a e o de translação τ da função wavelet são reais com $a > 0$. O símbolo $*$ representa o complexo conjugado da função wavelet analisadora $\psi(t)$ e o termo $\frac{1}{\sqrt{a}}$ é uma constante de normalização da transformada. Aos valores atribuídos a $\Psi_f^\psi(a, \tau)$ dá-se o nome de coeficientes de Fourier de forma que os valores do módulo ao quadrado desses coeficientes são interpretados como medidas locais de energia da função analisada. Uma ferramenta que auxilia na leitura desses coeficientes é o escalograma que consiste em um gráfico (de cores ou isolinhas) da variação do módulo do quadrado desses coeficientes varrendo os parâmetros a e τ . Tem-se ainda que sendo a CWT uma transformada integral verifica-se para ela a propriedade de linearidade que é definida como: $\Psi_{\alpha_1 f + \alpha_2 g}^\psi(a, \tau) = \alpha_1 \Psi_f^\psi(a, \tau) + \alpha_2 \Psi_g^\psi(a, \tau)$ em que f e g são funções pertencentes ao $L^2(\mathbb{C})$ e α_1 e α_2 pertencem aos \mathbb{R} .

METODOLOGIA

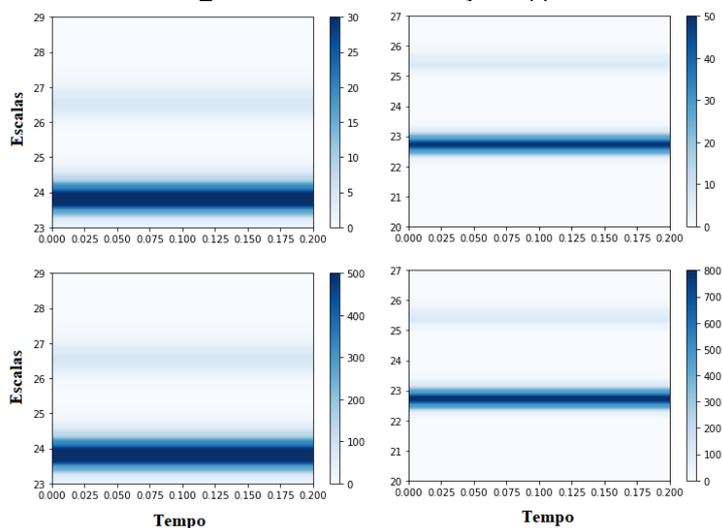
No que diz respeito a metodologia optou-se por analisar a função $f(t) = 5 \text{sen}(300\pi t) + 3 \text{sen}(800\pi t)$ em dois momentos. A escolha dessa função ocorreu devido ao fato de pôr se tratar de uma soma de senos já se conhece o seu conteúdo frequencial, de forma que no primeiro momento realiza-se a CWT da função $f(t)$ usando a wavelet de Morlet com dois parâmetros ω_0 distintos com o intuito de visualizar o efeito causado pela variação desse parâmetro na aplicação da CWT e no segundo momento realiza-se a CWT

da função $f(t)$ e da função $f(t)$ normalizada com média igual a zero e desvio padrão igual a um com o intuito de verificar a propriedade de linearidade da CWT.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 1 apresenta a CWT da função $f(t) = 5 \sin(300\pi t) + 3 \sin(800\pi t)$ calculada para $f(t)$, parte inferior, e para $f(t)$ normalizada com média zero e desvio padrão igual a um, parte superior, onde a esquerda se vê a CWT calculada usando a wavelet de Morlet com $\omega_0 = 6$ e a direita se vê a CWT calculada para a wavelet de Morlet com $\omega_0 = 9$. O incremento do ω_0 deixa as bandas de frequências mais bem localizadas enquanto a linearidade garante que não ocorra mudanças na escala do sinal analisado.

Figura 1: CWT da função $f(t)$.



Fonte: Produção dos autores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS/CONCLUSÃO

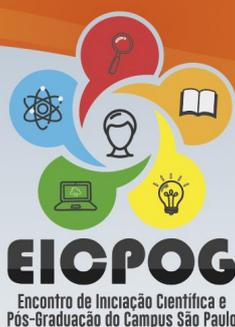
Nesse trabalho foi possível observar como o incremento do parâmetro que determina a wavelet de Morlet estreita as bandas de frequências no escalograma, tornando-as mais bem localizadas. Também foi possível observar como a linearidade da CWT garante que não se tenha alterações nas escalas de um sinal diante da normalização. Por fim, conclui-se ressaltando a importância da Transformada Wavelet na área de análise de sinais justamente pelos resultados que se obter através dela.

REFERÊNCIAS

DOMINGUES, Margarete Oliveira et al. Explorando a Transformada Wavelet Contínua. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 38, n. 3, p. 1-19, set. 2016.

MAGRINI, Luciano Aparecido. Funções Wavelets e Transformada Wavelet Contínua: Representação Simultânea nos Domínios do Tempo e da Frequência. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, [S. L.], v. 19, p. 17-32, dez. 2020.

ANEXO D - CERTIFICADO DE PARTICIPAÇÃO NO EICPOG 2021



CERTIFICADO

Certificamos que o trabalho *Propriedade Linear da Transformada Wavelet Contínua: um Estudo de caso*, da autoria de **Pedro Marcos Mossulin Ferreira, Margarete Oliveira Domingues e Luciano Aparecido Magrini**, foi apresentado no dia 13 de dezembro, durante o Sexto Encontro de Iniciação Científica e Pós-graduação, realizado no período de 13 a 15 de dezembro de 2021 nas salas virtuais do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – *campus* São Paulo.

São Paulo, 07 de fevereiro de 2022

Francisco Yastami Nakamoto
Presidente da Comissão Organizadora do VI EICPOG

ANEXO E - CERTIFICADO DE PARTICIPAÇÃO NO XWWLET 2021



Certified

We certify that *Pedro Marcos Mossulin* participated of the X WWlet Wavelets & Applications, carried out between the 10th and 11th of November 2021.



Prof. Gilcélia R. de Souza e Prof. Luciano Magrini
X-WWlet Wavelets & Applications Organizers

Scientific Committee: Margarete Domingues (INPE); Eniuce Menezes de Souza (UEM);
Organizers: Margarete Domingues (INPE); Luciano Magrini (IFSP); Gilcélia de Souza (UFSJ); Odím Mendes (INPE)



Thematic Committee: Multiscale and Wavelets Analysis – Theory, Development and Applications