



MINISTÉRIO DA
CIÊNCIA, TECNOLOGIA
E INOVAÇÕES



sid.inpe.br/mtc-m21d/2021/07.16.14.18-TDI

ESTUDO DE ÓRBITAS PARA VEÍCULOS ESPACIAIS EM TORNO DE ASTEROIDES

José Batista da Silva Neto

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Diogo Merguizo Sanchez, e Priscilla Andressa de Sousa Silva, aprovada em 21 de julho de 2021.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/454F6LL>>

INPE
São José dos Campos
2021

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Coordenação de Ensino, Pesquisa e Extensão (COEPE)
Divisão de Biblioteca (DIBIB)
CEP 12.227-010
São José dos Campos - SP - Brasil
Tel.:(012) 3208-6923/7348
E-mail: pubtc@inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):

Presidente:

Dra. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Coordenação-Geral de Ciências da Terra (CGCT)

Membros:

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação (CPG)
Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia, Tecnologia e Ciência Espaciais (CGCE)
Dr. Rafael Duarte Coelho dos Santos - Coordenação-Geral de Infraestrutura e Pesquisas Aplicadas (CGIP)
Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon
Clayton Martins Pereira - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)
André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Ivone Martins - Divisão de Biblioteca (DIBIB)
André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)



MINISTÉRIO DA
CIÊNCIA, TECNOLOGIA
E INOVAÇÕES



sid.inpe.br/mtc-m21d/2021/07.16.14.18-TDI

ESTUDO DE ÓRBITAS PARA VEÍCULOS ESPACIAIS EM TORNO DE ASTEROIDES

José Batista da Silva Neto

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Diogo Merguizo Sanchez, e Priscilla Andressa de Sousa Silva, aprovada em 21 de julho de 2021.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/454F6LL>>

INPE
São José dos Campos
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Silva Neto, José Batista da.
Si38e Estudo de órbitas para veículos espaciais em torno de
asteroides / José Batista da Silva Neto. – São José dos Campos :
INPE, 2021.
xxx + 197 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21d/2021/07.16.14.18-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia
Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de
Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2021.

Orientadores : Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida
Prado, Diogo Merguizo Sanchez, e Priscilla Andressa de Sousa
Silva.

1. Asteroides binários. 2. Variedades invariantes. 3. Órbitas
coorbitais. I.Título.

CDU 629.78:523.44



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).



MINISTÉRIO DA
CIÊNCIA, TECNOLOGIA
E INOVAÇÕES



INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

Serviço de Pós-Graduação - SEPGR

DEFESA FINAL DE TESE DE JOSÉ BATISTA DA SILVA NETO BANCA Nº 185/2021, REG 126942/2016.

No dia 21 de julho de 2021, as 14h, por teleconferência, o(a) aluno(a) mencionado(a) acima defendeu seu trabalho final (apresentação oral seguida de arguição) perante uma Banca Examinadora, cujos membros estão listados abaixo. O(A) aluno(a) foi APROVADO(A) pela Banca Examinadora, por unanimidade, em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de Doutor em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle.

Título: “Estudo de órbitas para veículos espaciais em torno de asteroides”

Membros da banca:

Dr. Rodolpho Vilhena De Moraes - Presidente - UNIFESP
Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado – Orientador – INPE
Dr. Diogo Merguizo Sanchez – Orientador - Colégio Cói Araras-SP/Fundamental II
Dra. Priscilla Andressa de Sousa Silva – Orientador - UNESP/São João da Boa Vista.
Dr. Francisco das Chagas Carvalho- Membro Interno -INPE
Dr. Tadashi Yokoyama – Membro Externo – UNESP/Rio Claro
Dra. Vivian Martins Gomes – Membro Externo – FEG/UNESP



Documento assinado eletronicamente por **Francisco das chagas carvalho (E), Usuário Externo**, em 10/08/2021, às 09:58 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodolpho Vilhena de Moraes (E), Usuário Externo**, em 10/08/2021, às 10:33 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tadashi Yokoyama (E), Usuário Externo**, em 10/08/2021, às 10:49 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Diogo Merguizo sanchez (E), Usuário Externo**, em 10/08/2021, às 16:32 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Priscilla AndRESSA DE SOUSA SILVA (E), Usuário Externo**, em 10/08/2021, às 19:11 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

Documento assinado eletronicamente por **Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Chefe do Serviço de Pós-Graduação**, em 12/08/2021, às 10:54 (horário oficial de Brasília), com fundamento no



§ 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Vivian Martins gomes (E), Usuário Externo**, em 12/08/2021, às 11:09 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <http://sei.mctic.gov.br/verifica.html>, informando o código verificador **7970801** e o código CRC **C159E1A1**.

“É verdade, o cachorro morreu. Cumpriu sua sentença e encontrou-se com o único mal irremediável, aquilo que é a marca de nosso estranho destino sobre a terra, aquele fato sem explicação que iguala tudo o que é vivo num só rebanho de condenados, porque tudo o que é vivo morre.”

CHICÓ
em “O Auto da Compadecida”
de ARIANO SUASSUNA, 1957

*A meus pais **João** e **Efigênia**, à minha irmã **Beatriz** e
aos meus sobrinhos **José Felipe**, **Luísa** e **Davi***

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, João Augusto da Silva e Efigênia de Sousa e Silva, pelo carinho e suporte ao longo dos anos de doutorado. Este trabalho não existiria sem esse apoio.

Aos meus orientadores, Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Diogo Merguizo Sanchez, Priscilla Andressa de Sousa Silva, pela amizade, apoio e encorajamento nos momentos de dúvida. Eles foram fundamentais na elaboração deste trabalho.

Aos professores, Josep J. Masdemont da Universidade Politécnic da Catalunha e Gerard Gomez da Universidade de Barcelona, pela amizade e conhecimento transmitido, que foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) e seus funcionários pela estrutura disponibilizada e apoio institucional que permitiu a realização desta pesquisa.

Aos amigos e colegas do INPE, pelos momentos de descontração e troca de conhecimento, que contribuíram para que o presente trabalho fosse possível.

À FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Processos n.º 2016/07248-6 e n.º 2018/22338-7) pelo apoio financeiro essencial para realização dessa pesquisa.

O presente trabalho também contou com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

RESUMO

Asteroides, desde o maior já catalogado (Ceres) até os pequenos fragmentos de rocha, estão entre os objetos de maior interesse na astrodinâmica. Esses corpos têm grande relevância científica, uma vez que são remanescentes da formação do Sistema Solar, mas também representam um potencial perigo para a vida na Terra e podem ser imprescindíveis para o futuro da exploração comercial do espaço. Assim, desde que a missão Galileo realizou o primeiro *fly-by* de um veículo espacial com o asteroide 951 Gaspra, asteroides são alvos de missões espaciais. As missões Hayabusa, NEAR Shoemaker e Rosetta são alguns exemplos de sucesso. O sucesso das missões já realizadas, das que estão em execução e das futuras depende diretamente do estudo de meios para explorar este tipo de objeto com mínimo custo, cumprindo todas as fases propostas e coletando a maior quantidade de dados possível. Dentre as futuras missões para asteroides em preparação destaca-se a missão AIDA, que será a primeira a estudar um sistema binário de asteroides. O alvo escolhido da missão é o asteroide 65803 Didymos (1996 GT). Este sistema é composto por um corpo central (Didymain), que tem 99% da massa total do sistema, e uma pequena lua (Didymoon). Neste contexto, por meio desta tese, são apresentadas alternativas para a exploração de sistemas binários de asteroides. Em que são apresentadas condições iniciais para cada uma das fases da missão AIDA. Os resultados apresentados foram encontrados com o uso do Problema Circular Planar Restrito de Três Corpos (PCPR3C), das coordenadas de McGehee, do conceito de variedades invariantes do infinito e do PCPR3C com pressão de radiação solar (SRP). O conceito de manobras orbitais através da manipulação da SRP com dispositivos de variação da área e/ou do coeficiente de reflectividade é apresentado como uma maneira simples de manobras um veículo espacial dentro de um sistema binário de asteroides. No geral, este tipo de sistema é muito perturbado, sendo as órbitas coorbitais alternativas para sua exploração. Esta parte do estudo foi realizada utilizando o problema de dois corpos perturbado, considerando as seguintes perturbações: C_{20} , C_{22} , Didymoon, Sol, Júpiter, Marte, Terra e SRP. Nesta análise, o conceito de integrais da aceleração foi utilizado para entender o papel de cada perturbador nos resultados encontrados.

Palavras-chave: asteroides binários. variedades invariantes. órbitas coorbitais.

STUDY OF ORBITS FOR SPACECRAFT TRAVELLING AROUND ASTEROIDS

ABSTRACT

Asteroids, from the largest ever cataloged (Ceres) to small fragments of rock, are among the objects of greatest interest in astrodynamics. These bodies have great scientific relevance, since they are reminiscent of the formation of the Solar System, but they also represent a potential danger to life on Earth and may be essential for the future of commercial space exploration. Thus, since the Galileo mission performed out the first fly-by of a space vehicle with the asteroid 951 Gaspra, asteroids are frequent targets of space missions. The missions Hayabusa, NEAR Shoemaker and Rosetta are some examples of successfully. The success of the missions already carried out, the ones that are being executed and the future ones depends directly on the study of means to explore this type of object with minimum cost, fulfilling all the proposed phases and collecting the largest amount of data possible. Among future asteroid missions in preparation, the AIDA mission stands out, which will be the first to study a binary asteroid system. The chosen target of the mission is the asteroid 65803 Didymos (1996 GT). This system consists of a central body (Didymain), which has 99 of the total mass of the system, and a small moon (Didymoon). In this context, through this thesis, alternatives are presented for the exploration of binary asteroid systems. Where initial conditions are presented for each phase of the AIDA mission. The results presented were found using the Restricted Planar Circular Three-Body Problem (PCPR3C), McGehee coordinates, the concept of invariant manifold of the infinity and the PCPR3C with solar radiation pressure (SRP). The concept of orbital maneuvers through the manipulation of the SRP with devices capable to vary the area and/or the reflectivity coefficient is presented as a simple way of maneuvering a space vehicle within a binary asteroid system. In general, this type of system is very perturbed, with coorbital orbits being alternatives for its exploration. This part of the study was fulfilled using the Two-Body Problem perturbed, considering the following perturbations: C_{20} , C_{22} , Didymoon, Sol, Jupiter, Mars, Earth and SRP. In this analysis, the concept of acceleration integrals was used to understand the role of each perturbation in the results found.

Keywords: binary asteroids. invariant manifold. coorbital orbits.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Planeta anão Ceres colorizado a partir de imagens em infravermelho feitas pela missão Dawn.	5
3.1 Geometria do Problema Circular Planar Restrito de Três Corpos (PCPR3C).	14
3.2 Curva de velocidade zero e pontos Lagrangianos do sistema Didymos em unidades adimensionais.	17
3.3 Variedades de um ponto de equilíbrio.	22
3.4 Projeção de $W_\infty^{s,u}$ para $\mu = 0$	23
3.5 Expansão de $W_\infty^{s,u}$ para $\mu = 0,009469696$, $\theta = 0^\circ$ e $C = 2, 8$	26
3.6 Recriação da Figura 3.5 com exclusão dos valores de p e q para os quais ω é complexo.	27
3.7 Geometria que apresenta o ângulo β	28
3.8 Resultados numéricos, incluindo a expansão das variedades (linha vermelha) para $\mu = 0,009469696$, $\theta = 0^\circ$ e $C = 2, 8$. (a) q vs. p . (b) q vs. β . (c) r [km] vs. β	29
3.9 Essas figuras mostram o tempo final das simulações para diferentes valores de C , de $-9,75$ a $-6,25$. Cada grade foi feita para condições iniciais de β entre -180° e 180° e distância do baricentro em quilômetro, de $0,4$ km a 9 km. O inicial $\theta = 0^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$	32
3.10 O mesmo das Figuras 3.9(a) - 3.9(o), mas para C entre $-6,00$ e $-2,50$	33
3.11 O mesmo das Figuras 3.9(a) - 3.9(o), mas para C entre $-2,25$ e $1,25$	34
3.12 O mesmo das Figuras 3.9(a) - 3.9(o), mas para C entre $1,5$ e 5	35
3.13 O mesmo das Figuras 3.9(a) - 3.9(o), mas para C entre $5,25$ e $8,75$	36
3.14 O mesmo das Figuras 3.9(a) - 3.9(o), mas para C entre 9 e $9,75$	37
3.15 Repetição da Figura 3.10(n), para $C = -2,75$ e $\theta = 0^\circ$, em que, trajetórias são apresentadas no referencial rotacional. Os pontos azuis marcam as posições das condições iniciais das trajetórias para as quais as setas azuis indicam. A condição inicial de cada trajetória é dada pela Tabela 3.2.	38

3.16	O mesmo da Figura 3.15, em que as mesmas trajetórias dadas na Tabela 3.2 são apresentadas no referencial inercial. Neste caso a trajetória descrita por Didymos está em azul, sendo que a trajetória de Didymain está sobreposta pelo corpo. Didymain e Didymoon estão localizados sobre suas condições para $t = 0$	39
3.17	Repetição da Figura 3.11(h), para $C = -0,5$ e $\theta = 0^\circ$, em que, trajetórias são apresentadas no referencial rotacional. Os pontos azuis marcam as posições da condições iniciais das trajetórias para as quais as setas azuis indicam. A condição inicial de cada trajetória é dada pela Tabela 3.3. . . .	41
3.18	Tempo final da simulação para $C = -0.5$ and $\theta = 180^\circ$. As trajetórias são apresentadas no referencial rotacional. Os pontos azuis marcam as posições da condições iniciais das trajetórias para as quais as setas azuis indicam. A condição inicial de cada trajetória é dada pela Tabela 3.4. . . .	43
3.19	Reapresentação das Figuras 3.17 e 3.18, mas neste caso a barra de cores apresenta o status final das órbitas, onde: azul, o veículo espacial escapou do sistema; verde, o veículo espacial colidiu com Didymain; amarelo, o veículo espacial colidiu com Didymoon; cinza, o veículo espacial escapou do raio de Hill. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$	45
3.20	Tempo final de grades de condições iniciais de distância do baricentro e β , para $C = -0.750$	47
3.21	Resultados que mostram o tempo final para simulações de 200 períodos, para diferentes condições iniciais de distância do baricentro e β . θ inicial igual a 240° , portanto o veículo espacial está posicionado no entorno de L_4 . $C = 2.9906199791$, valor esse no limite para o ponto L_4 estar aberto, ou seja, para valores maiores L_4 está fechado. As trajetórias são apresentadas no referencial rotacional e suas condições iniciais são dadas pela Tabela 3.5.	48
3.22	O mesmo da Figura 3.21, mas para θ inicial igual a 120° , portanto, o veículo espacial está posicionado no entorno de L_5 . As trajetórias são apresentadas no referencial rotacional e suas condições iniciais são dadas pela Tabela 3.6.	50
3.23	Sensibilidade das órbitas sobreviventes dos casos para C_{45} (Figuras 3.21 e 3.22) considerando desvios em C . As Figuras (a) e (c) mostram os resultados do desvio de 0 até $-0,01$ para L_4 e L_5 , respectivamente. As Figuras (b) e (d) mostram os resultados do desvio de 0 até $-0,09$ para L_4 e L_5 , respectivamente.	52

3.24	Esta figura mostra o tempo final das simulações para diferentes condições iniciais de θ e β . A distância inicial do baricentro é igual a 1,178452742 km, que é a mesma distância de L_4 e L_5 do baricentro. C é igual a 2.9906199791, o mesmo das Figuras 3.21 e 3.22. A condição inicial de cada trajetória é dada pela Tabela 3.9.	54
3.25	Sensibilidade das órbitas sobreviventes dos casos da Figura 3.24 à variações em C . A figura (a) mostra os resultados do desvio de 0 até $-0,01$. A figura (b) mostra os resultados do desvio de 0 até $-0,09$	56
3.26	Sensibilidade das órbitas sobreviventes dos casos da Figura 3.24 à variações na posição inicial. A figura (a) mostra os resultados para desvios de 0 até -160 metros. A figura (b) mostra os resultados para desvios de 0 até 180 metros.	56
3.27	Geometria utilizada para identificar a posição do pouso sobre Didymoon.	58
3.28	Valor de C na superfície de Didymoon para a velocidade de colisão de 8 cm/s , considerando valores diferentes para o raio de Didymoon.	59
3.29	Curvas de velocidade zero para C igual a 3, 3,07 e 3,14. Valores usados na integração numérica das Figuras 3.30(a)-3.30(l).	61
3.30	Grades para diferentes valores de C , de 3,0000 até 3,1400. Cada grade é calculada para condições iniciais de θ entre 0° e 360° ; e β entre -180° e 180° . A distância inicial em: (a), (b) e (c) estão sobre L_2 , a 1,350319548 km do baricentro; (d), (e) e (f) estão 200 metros além de L_2 ; (g), (h) e (i) estão 500 metros além de L_2 ; (j), (k) e (l) estão 1000 metros além de L_2	62
3.31	Lançamento do módulo MASCOT-2 200 metros além de L_2 em relação ao baricentro. $C = 3,0$	64
3.32	Lançamento do módulo MASCOT-2 200 metros além de L_2 em relação ao baricentro. $C = 3,07$	66
3.33	Lançamento do módulo MASCOT-2 200 metros além de L_2 em relação ao baricentro. $C = 3,14$	68
3.34	Sensibilidade das órbitas de pouso, para os casos das Figuras 3.33, considerando desvios na posição inicial. (a) Erro de 0 até -100 metros. (b) Erro de 0 até 100 metros.	70
3.35	Sensibilidade das órbitas de pouso para os casos das Figuras 3.33, considerando desvios em C . (a) Erro de 0 até 0,0095. (b) Erro de $-0,02$ até -3	70

3.36	Tempo final das simulações do PCPR3C com SRP, considerando diferentes valores de A/m , para as mesmas condições iniciais da Figura 3.15. (a) é a repetição da Figura 3.15 que não considera a SRP. (b) $A/m = 0,02kg/m^2$. (c) $A/m = 0,04kg/m^2$. (d) $A/m = 0,08kg/m^2$. (e) $A/m = 0,1kg/m^2$. (f) $A/m = 1kg/m^2$	71
3.37	Secções de Ponincaré do PCPR3C com SRP para C igual a -2.75 , com o hiperplano definido em $\theta = 0$. (a) $A/m = 0,00 kg/m^2$. (b) $A/m = 0,02 kg/m^2$	72
3.38	Tempo final das simulações do PCPR3C com SRP, considerando diferentes valores de A/m , para as mesmas condições iniciais da Figura 3.24. (a) é a repetição da Figura 3.24 que não considera a SRP. (b) $A/m = 0,02kg/m^2$. (c) $A/m = 0,04kg/m^2$. (d) $A/m = 0,08kg/m^2$. (e) $A/m = 0,1kg/m^2$. (f) $A/m = 1kg/m^2$	73
3.39	Tempo final das simulações do PCPR3C com SRP, considerando diferentes valores de A/m , para as mesmas condições iniciais da Figura 3.32. (a) é a repetição da Figura 3.32 que não considera a SRP. (b) $A/m = 0,02kg/m^2$. (c) $A/m = 0,04kg/m^2$. (d) $A/m = 0,08kg/m^2$. (e) $A/m = 0,1kg/m^2$. (f) $A/m = 1kg/m^2$	74
3.40	Velocidades finais das simulações das Figuras 3.39(a)-3.39(f).	75
3.41	Representação das etapas de funcionamento do controle de aumento e diminuição $\alpha = Cr * A/m$	76
3.42	Repetição da Figura 3.15 com a escala de cores mostrando o status final das simulações.	77
3.43	Status final das simulações com as mesmas condições iniciais da Figura 3.15, onde foi considerado um controle do tipo 1 com $\alpha_{min} = 0,03$ e $\alpha_{max} = 0,06 kg/m^2$	78
3.44	Status final das simulações com as mesmas condições iniciais da Figura 3.15, onde foi considerado um controle do tipo 2 com $\alpha_{min} = 0,03$ e $\alpha_{max} = 0,06 kg/m^2$	78
4.1	Tempo final de simulação para grade de condições iniciais de excentricidade (e) e inclinação(i). Para $i = [0^\circ, 89.999^\circ]$. $a_0 = 1,176263432867km$ e $\Delta\lambda = 60^\circ$ (para $\omega = 0^\circ$). As condições iniciais as trajetórias (a)-(m) (pontos azuis) são dadas na Tabela 4.5. As linhas vermelhas são as trajetórias do veículo espacial e as linhas cyan são as órbitas de Didymoon.	89

4.2	Tempo final de simulação para grade de condições iniciais de incremento no semi-eixo maior (Δa) em relação ao semi-eixo maior coorbital e longitude média relativa ($\Delta \lambda$). $e = 0,03$, $i = 0,001^\circ$ e $\omega = 0^\circ$. As condições iniciais as trajetórias (a)-(m) (pontos azuis) são dadas na Tabela 4.6. As linhas vermelhas são as trajetórias do veículo espacial e as linhas cyan são as órbitas de Didymoon.	91
4.3	Tempo final de simulação para grade de condições iniciais de incremento no semi-eixo maior (Δa) em relação ao semi-eixo maior coorbital e longitude média relativa ($\Delta \lambda$). $e = 0,1$, $i = 0,001^\circ$ e $\omega = 180^\circ$. As condições iniciais as trajetórias (a)-(m) (pontos azuis) são dadas na Tabela 4.7. As linhas vermelhas são as trajetórias do veículo espacial e as linhas cyan são as órbitas de Didymoon.	93
4.4	Propagação do semi-eixo maior (a), excentricidade (e), inclinação (i) e do ângulo ressoante ($\Delta \lambda$) das trajetórias (f) da Figura 4.2 (curva azul - (a) na legenda da figura) e (d) da Figura 4.3 (curva vermelha - (b) na legenda da figura).	94
4.5	Tempo final de simulação para grade de condições iniciais de excentricidade (e) e inclinação (i). Para $i = [90,001^\circ, 180^\circ]$. $a_0 = 1,176263432867km$ e $\Delta \phi = 60^\circ$ (para $\omega = 0^\circ$). As condições iniciais as trajetórias (a)-(m) (pontos azuis) são dadas na Tabela 4.8. As linhas vermelhas são as trajetórias do veículo espacial e as linhas cyan são as órbitas de Didymoon.	96
4.6	Tempo final de simulação para grade de condições iniciais de incremento no semi-eixo maior (Δa) em relação ao semi-eixo maior coorbital e longitude média relativa retrógrada (Δphi). $e = 0,325$, $i = 179,999^\circ$ e $\omega = 0^\circ$. As condições iniciais as trajetórias (a)-(m) (pontos azuis) são dadas na Tabela 4.9. As linhas vermelhas são as trajetórias do veículo espacial e as linhas cyan são as órbitas de Didymoon.	98
4.7	Tempo final de simulação para grade de condições iniciais de incremento no semi-eixo maior (Δa) em relação ao semi-eixo maior coorbital e longitude média relativa retrógrada (Δphi). $e = 0,325$, $i = 179,999^\circ$ e $\omega = 180^\circ$. As condições iniciais as trajetórias (a)-(m) (pontos azuis) são dadas na Tabela 4.10. As linhas vermelhas são as trajetórias do veículo espacial e as linhas cyan são as órbitas de Didymoon.	100
4.8	Propagação do semi-eixo maior (a), excentricidade (e), inclinação (i) e do ângulo ressoante para o caso retrógrado ($\Delta \phi$) das trajetórias (i) da Figura 4.6 (curva azul - (a) na legenda da figura) e (g) da Figura 4.7 (curva vermelha - (b) na legenda da figura).	102

4.9	Boxplot para o tempo final de um conjunto de 632 condições iniciais escolhidas entre as que sobreviveram por 1 ano. Essas condições iniciais foram propagadas por 10 anos.	103
4.10	Resultados das integrais do tipo i feitas para as simulações apresentadas na Figura 4.2 para Sol, Júpiter, Marte e Terra.	105
4.11	Resultados das integrais do tipo i feitas para as simulações apresentadas na Figura 4.2.	106
4.12	Resultados das integrais do tipo ii feitas para as simulações apresentadas na Figura 4.2.	107
4.13	Resultados das integrais do tipo iii feitas para as simulações apresentadas na Figura 4.2.	109
4.14	Resultados das integrais do tipo iv feitas para as simulações apresentadas na Figura 4.2.	110
4.15	Resultados das integrais do tipo i das simulações apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.5.(a) Perturbação devida a Didymoon para inclinação direta. (b) Perturbação devida a Didymon para inclinação retrógrada. (c) Perturbação devida a SRP para inclinação direta. (d) Perturbação devida a SRP para inclinação retrógrada.	111
4.16	Resultados das integrais do tipo i das simulações apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.5.(a) Perturbação devida a C_{20} para inclinação direta. (b) Perturbação devida a C_{22} para inclinação retrógrada. (c) Perturbação devida a C_{20} para inclinação direta. (d) Perturbação devida a C_{22} para inclinação retrógrada.	112
4.17	Resultados das integrais do tipo ii das simulações apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.5.(a) Perturbação devida a Didymoon para inclinação direta. (b) Perturbação devida a Didymon para inclinação retrógrada. (c) Perturbação devida a SRP para inclinação direta. (d) Perturbação devida a SRP para inclinação retrógrada.	113
4.18	Resultados das integrais do tipo ii das simulações apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.5.(a) Perturbação devida a C_{20} para inclinação direta. (b) Perturbação devida a C_{22} para inclinação retrógrada. (c) Perturbação devida a C_{20} para inclinação direta. (d) Perturbação devida a C_{22} para inclinação retrógrada.	114
4.19	Resultados das integrais do tipo iii das simulações apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.5.(a) Perturbação devida a Didymoon para inclinação direta. (b) Perturbação devida a Didymon para inclinação retrógrada. (c) Perturbação devida a SRP para inclinação direta. (d) Perturbação devida a SRP para inclinação retrógrada.	115

4.20	Resultados das integrais do tipo iii das simulações apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.5.(a) Perturbação devida a C_{20} para inclinação direta. (b) Perturbação devida a C_{22} para inclinação retrógrada. (c) Perturbação devida a C_{20} para inclinação direta. (d) Perturbação devida a C_{22} para inclinação retrógrada.	116
4.21	Resultados das integrais do tipo iv das simulações apresentadas nas Figuras 4.1 (a) e 4.5 (b).	117
A.1	Geometria do modelo de sombra.	131
D.1	Representação do hiperplano no gráfico de uma variável qualquer (ξ) sendo propagada no tempo (t).	139
E.1	Elipsoide tri-axial.	141
F.1	Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25. Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de 0,4 km a 9 km. $\theta = 15^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$	143
F.2	O mesmo das Figuras F.1(a)- F.1(l), mas para C entre -3.75 e 3.25	144
F.3	O mesmo das Figuras F.1(a)- F.1(l), mas para C entre 3.75 e 9.75	145
F.4	Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25. Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de 0,4 km a 9 km. $\theta = 45^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$	146
F.5	O mesmo das Figuras F.4(a)- F.4(l), mas para C entre -3.75 e 3.25	147
F.6	O mesmo das Figuras F.4(a)- F.4(l), mas para C entre 3.75 e 9.75	148
F.7	Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25. Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de 0,4 km a 9 km. $\theta = 75^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$	149
F.8	O mesmo das Figuras F.7(a)- F.7(l), mas para C entre -3.75 e 3.25	150
F.9	O mesmo das Figuras F.7(a)- F.7(l), mas para C entre 3.75 e 9.75	151
F.10	Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25. Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de 0,4 km a 9 km. $\theta = 105^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$	152
F.11	O mesmo das Figuras F.10(a)- F.10(l), mas para C entre -3.75 e 3.25	153
F.12	O mesmo das Figuras F.10(a)- F.10(l), mas para C entre 3.75 e 9.75	154

F.13	Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25. Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de 0,4 km a 9 km. $\theta = 135^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$	155
F.14	O mesmo das Figuras F.13(a)- F.13(l), mas para C entre -3.75 e 3.25	156
F.15	O mesmo das Figuras F.13(a)- F.13(l), mas para C entre 3.75 e 9.75	157
F.16	Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25. Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de 0,4 km a 9 km. $\theta = 165^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$	158
F.17	O mesmo das Figuras F.16(a)- F.16(l), mas para C entre -3.75 e 3.25	159
F.18	O mesmo das Figuras F.16(a)- F.16(l), mas para C entre 3.75 e 9.75	160
F.19	Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25. Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de 0,4 km a 9 km. $\theta = 195^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$	161
F.20	O mesmo das Figuras F.19(a)- F.19(l), mas para C entre -3.75 e 3.25	162
F.21	O mesmo das Figuras F.19(a)- F.19(l), mas para C entre 3.75 e 9.75	163
F.22	Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25. Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de 0,4 km a 9 km. $\theta = 225^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$	164
F.23	O mesmo das Figuras F.22(a)- F.22(l), mas para C entre -3.75 e 3.25	165
F.24	O mesmo das Figuras F.22(a)- F.22(l), mas para C entre 3.75 e 9.75	166
F.25	Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25. Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de 0,4 km a 9 km. $\theta = 255^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$	167
F.26	O mesmo das Figuras F.25(a)- F.25(l), mas para C entre -3.75 e 3.25	168
F.27	O mesmo das Figuras F.25(a)- F.25(l), mas para C entre 3.75 e 9.75	169
F.28	Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25. Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de 0,4 km a 9 km. $\theta = 285^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$	170
F.29	O mesmo das Figuras F.28(a)- F.28(l), mas para C entre -3.75 e 3.25	171
F.30	O mesmo das Figuras F.28(a)- F.28(l), mas para C entre 3.75 e 9.75	172

F.31	Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25. Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de 0,4 km a 9 km. $\theta = 315^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$	173
F.32	O mesmo das Figuras F.31(a)- F.31(l), mas para C entre -3.75 e 3.25	174
F.33	O mesmo das Figuras F.31(a)- F.31(l), mas para C entre 3.75 e 9.75	175
F.34	Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25. Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de 0,4 km a 9 km. $\theta = 345^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$	176
F.35	O mesmo das Figuras F.34(a)- F.34(l), mas para C entre -3.75 e 3.25	177
F.36	O mesmo das Figuras F.34(a)- F.34(l), mas para C entre 3.75 e 9.75	178
G.1	Resultados das integrais do tipo ii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \lambda_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 0,001^\circ$, $\omega = 0^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.	179
G.2	Resultados das integrais do tipo iii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \lambda_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 0,001^\circ$, $\omega = 0^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.	180
G.3	Resultados das integrais do tipo i feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \lambda_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 0,001^\circ$, $\omega = 180^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).	181
G.4	Resultados das integrais do tipo ii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \lambda_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 0,001^\circ$, $\omega = 180^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).	182
G.5	Resultados das integrais do tipo iii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \lambda_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 0,001^\circ$, $\omega = 180^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).	183
G.6	Resultados das integrais do tipo iv feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \lambda_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 0,001^\circ$, $\omega = 180^\circ$	184
G.7	Resultados das integrais do tipo i feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \phi_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 0^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).	185

G.8	Resultados das integrais do tipo ii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta\phi_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 0^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).	186
G.9	Resultados das integrais do tipo iii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta\phi_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 0^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).	187
G.10	Resultados das integrais do tipo iv feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta\lambda_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 0^\circ$	188
G.11	Resultados das integrais do tipo i feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta\phi_0$ para $e_0 = 0,325$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 180^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).	189
G.12	Resultados das integrais do tipo ii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta\phi_0$ para $e_0 = 0,325$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 180^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).	190
G.13	Resultados das integrais do tipo iii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta\phi_0$ para $e_0 = 0,325$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 180^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).	191
G.14	Resultados das integrais do tipo iv feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta\phi_0$ para $e_0 = 0,325$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 180^\circ$	192
G.15	Resultados das integrais do tipo i feitas para as simulações de e e i para $a_0 = 1,176263432867km$ e $\Delta\lambda_0 = 60^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.	192
G.16	Resultados das integrais do tipo ii feitas para as simulações de e e i para $a_0 = 1,176263432867km$ e $\Delta\lambda_0 = 60^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.	193
G.17	Resultados das integrais do tipo iii feitas para as simulações de e e i para $a_0 = 1,176263432867km$ e $\Delta\lambda_0 = 60^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.	194
G.18	Resultados das integrais do tipo i feitas para as simulações de e e i para $a_0 = 1,176263432867km$ e $\Delta\phi_0 = 60^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.	195

G.19 Resultados das integrais do tipo ii feitas para as simulações de e e i para $a_0 = 1,176263432867km$ e $\Delta\phi_0 = 60^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.	196
G.20 Resultados das integrais do tipo iii feitas para as simulações de e e i para $a_0 = 1,176263432867km$ e $\Delta\phi_0 = 60^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.	197

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Parâmetros do sistema Didymain-Didymos.	10
3.1 Posição e valor de C correspondentes aos pontos Lagrangianos do sistema Didymos.	16
3.2 Condições iniciais das trajetórias apresentadas nas Figuras 3.15 e 3.16.	40
3.3 Condições iniciais das trajetórias das Figuras 3.17.	42
3.4 Initial conditions of trajectories of Figure 3.18.	44
3.5 Condições iniciais das trajetórias da Figura 3.21.	49
3.6 Condições iniciais das trajetórias da Figura 3.22.	51
3.7 Módulo da velocidade do veículo espacial no torno de L_4 ou L_5 em cm/s , para C diminuindo de 2,9906199791 até 2,9806199791 e distância do bari-centro igual a 1,1788272742 km	52
3.8 Módulo da velocidade do veículo espacial no torno de L_4 ou L_5 em cm/s , para C diminuindo de 2,9906199791 até 2,9006199791 e distância do bari-centro igual a 1,1788272742 km	53
3.9 Condições iniciais das trajetórias da Figura 3.24.	55
3.10 C mínimo e máximo para a colisão a 8 cm/s para r_d^* igual a 0,0715, 0,0815 e 0,0915 e o correspondente ϕ	59
3.11 Velocidade para os valores de C da Figura 3.28 para a distância do bari-centro igual a 1,550319548 km	60
3.12 Condições iniciais das trajetórias da Figura 3.31.	65
3.13 Condições iniciais das trajetórias da Figura 3.32.	67
3.14 Condições iniciais das trajetórias da Figura 3.33.	69
4.1 Condições iniciais de Didymain e Didymoon utilizadas em todas as si-mulações.	87
4.2 Condições iniciais da Terra utilizada em todas as simulações.	87
4.3 Condições iniciais de Marte utilizada em todas as simulações.	87
4.4 Condições iniciais de Júpiter utilizada em todas as simulações.	88
4.5 Condições iniciais das trajetórias da Figura 4.1. O tempo final apresen-tado é para simulações de até 10 anos.	90
4.6 Condições iniciais das trajetórias da Figura 4.2. O tempo final apresen-tado é para simulações de até 10 anos.	92
4.7 Condições iniciais das trajetórias da Figura 4.3. O tempo final apresen-tado é para simulações de até 10 anos.	94

4.8	Condições iniciais das trajetórias da Figura 4.5. O tempo final apresentado é para simulações de até 10 anos.	97
4.9	Condições iniciais das trajetórias da Figura 4.6. O tempo final apresentado é para simulações de até 10 anos.	99
4.10	Condições iniciais das trajetórias da Figura 4.7. O tempo final apresentado é para simulações de até 10 anos.	101

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Métodos	2
1.3 Organização da Tese	3
2 ASTEROIDES E MISSÕES PARA ASTEROIDES	5
2.1 Métodos de aproximação de forma	6
2.2 Por que realizar missões para asteroides e cometas?	7
2.2.1 Asteroides e o sistema Solar	7
2.2.2 Risco de colisão com a Terra	7
2.2.3 Mineração de asteroide	8
2.3 Histórico de missões para asteroides	9
2.4 Missão AIDA e asteroide 65803 Didymos (1996 GT) Didymos	10
3 ANÁLISE DE SISTEMAS BINÁRIOS DE ASTEROIDES UTILIZANDO PCPR3C E COORDENADAS MCGEHEE	13
3.1 Problema circular planar restrito de três corpos	13
3.1.1 Pontos Lagrangianos e curvas de velocidade do sistema Didymos	15
3.2 PCPR3C com perturbação devida pressão de radiação solar	17
3.3 Coordenadas de McGehee	18
3.3.1 Variedades invariantes	21
3.3.2 Expansão da variedades invariantes	23
3.3.3 Geometria conveniente	28
3.4 Análise do sistema Didymos utilizando PCPR3C e coordenadas de McGehee	30
3.4.1 Resultados e estratégias gerais para uma abordagem mais próxima do veículo espacial mãe com o sistema Didymain-Didymoon	30
3.4.2 Órbitas ao redor de L_4 e L_5 do sistema Didymos	47
3.4.3 Trajetórias de pouso do módulo MASCOT-2 sobre Didymoon	57
3.5 Efeito da <i>SRP</i> no PCPR3C	71
3.5.1 Manipulação da SRP	75
4 PROBLEMA DE DOIS CORPOS COM PERTURBAÇÕES	81

4.1	Equação do movimento do veículo espacial	81
4.1.1	Perturbação devido a não esfericidade dos corpos	82
4.1.2	Perturbação pela presença de um terceiro corpo	83
4.2	Método de integrais da aceleração	83
4.3	Ressonância de movimento médio	85
4.4	Resultados para o sistema Didymain-Didymoon	85
4.4.1	Trajetórias coorbitais no sistema Didymain-Didymoon	88
4.4.2	Análise das perturbações pelas PIs	104
5	CONCLUSÃO	119
5.1	Trabalhos futuros	121
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123
	APÊNDICE A - MODELO DE SOMBRA	131
	APÊNDICE B - PROPAGAÇÃO DA POSIÇÃO APARENTE DO SOL NO PCPR3C	135
	APÊNDICE C - CONVERSÃO DE COORDENADAS	137
	APÊNDICE D - COMPUTAÇÃO DOS ESTADOS NO HIPERPLANO DA SECÇÃO DE POINCARÉ EM SIMULAÇÕES NUMÉRICAS.	139
	APÊNDICE E - HARMÔNICOS ESFÉRICOS DE UM ELIPSOIDE	141
	APÊNDICE F - SIMULAÇÕES EXTRAS PARA DIFERENTES θ e C	143
	APÊNDICE G - RESULTADOS DAS INTEGRAIS DA ACELERAÇÃO	179

1 INTRODUÇÃO

Asteroides e cometas têm grande relevância científica, uma vez que são remanescentes da formação do Sistema Solar (SHEPARD, 2015). Eles também representam um risco para a vida na Terra no caso de uma colisão (CHAPMAN et al., 1994). Assim como podem ser imprescindíveis para o futuro da exploração comercial do espaço, através de sua mineração (ROSS, 2001). Uma vantagem em explorar estes corpos é o fato de, em comparação com planetas e suas luas, possuírem baixo potencial gravitacional, o que permite um gasto mínimo de combustível nas manobras de manutenção da órbita do veículo espacial na sua vizinhança (TAKEI et al., 2020). O uso de órbitas periódicas e ressonâncias são uma alternativa, pois ajudam a diminuir as incertezas da missão na escolha da melhor trajetória para orbitar estes corpos. Contudo, novas soluções que otimizem ainda mais essas missões sempre devem ser buscada.

A sonda Galileo, lançada em 1989, fez os primeiros *fly-by* (sobrevoo) com asteroides, os asteroides 951 Gaspra e 243 Ida. A missão Hayabusa, lançada em 2003, orbitou o asteroide 25143 Itokawa, pousou em sua superfície e coletou material que foi trazido para a Terra (JOHNSON et al., 1992). A missão Rosetta, lançada em 2004, foi a primeira missão a orbitar e pousar em um cometa e, antes de atingir o cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko, realizou *fly-by* com os asteroides 2867 Steins e 21 Lutetia (ACCOMAZZO et al., 2010; SCHULZ et al., 2012). Todos esses momentos foram marcantes na história da exploração espacial. Um dos próximos passos na história da exploração espacial é a missão *Asteroid Impact & Deflection Assessment* (AIDA), que será a primeira a visitar um sistema binário de asteroides. O sistema 65803 Didymos (1996 GT) é formado por dois corpos, um central (Didymain) que tem aproximadamente 99% da massa total do sistema e uma lua (Didymoon). A missão AIDA é dividida em duas: a missão *Asteroid Impact Mission* (AIM) de responsabilidade da *European Space Agency* (ESA) que estudará o sistema binário de maneira geral e a missão *Double Asteroid Redirection Test* (DART) de responsabilidade da *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) onde será testado um impactor cinético que colidirá com Didymoon. As fases da missão AIM são: aproximação do veículo espacial mãe, posicionamento de CubeSats nos pontos L_4 e L_5 e lançamento do módulo de pouso MASCOT-2 sobre Didymoon (MICHEL et al., 2016).

O sistema Didymos e os objetivos da missão AIM foram base para grande parte desta Tese. Utilizando o problema Problema Circular Planar Restrito de Três Cor-

pos (PCPR3C) e, com o auxílio da versão do PCPR3C em coordenadas de McGehee apresentada em McGehee (1973) e da variedade invariante do infinito calculada a partir dessa versão em Llibre e Simó (1980), foram encontrados conjuntos de condições iniciais que satisfazem as fases da missão AIM. Condições iniciais essas que permitem: o veículo espacial mãe permanecer próximo ao sistema; os CubeSats permanecerem no ponto L_4 e L_5 ; e o módulo de pouso MASCOT-2 atingir Didymoon com uma velocidade menor que 8 cm/s (velocidade de escape). Nesta parte foi introduzido uma representação da variedade invariante do infinito utilizando um ângulo, o qual define o vetor velocidade em relação ao sistema de coordenadas de direção formado pela radial e transversal do veículo espacial, o que facilita a visualização dos resultados encontrados. Utilizando a versão do PCPR3C com SRP foi testada a manipulação da pressão de radiação solar como meio de manobrar o veículo espacial. O conceito de manipular a pressão de radiação solar (*solar radiation pressure* - SRP) aqui empregado é mais simples que uma vela solar, pode ser simplesmente ajustar a atitude do veículo espacial em relação ao Sol, de modo que com pequenas variações da relação de área-sobre-massa e/ou do coeficiente de refletividade atingir o objetivo desejado, como escapar do sistema ou causar o *de-orbit* (decaimento) e colisão com os corpos do sistema.

As órbitas coorbitais do sistema e os perturbadores orbitais (C_{20} , C_{22} , Sol, Júpiter, Marte, Terra e pressão de radiação solar) foram analisados de maneira geral com grades de condições iniciais dos elementos orbitais e com auxílio das integrais da aceleração o papel de cada perturbador foi analisado. Foram encontradas condições iniciais no plano e fora dele que podem ser úteis à missão AIDA.

1.1 Objetivos

O presente estudo tem por objetivo analisar o asteroide binário Didymos e apresentar conjuntos de trajetórias orbitais que atendam às principais fases da missão AIM. Em que, os métodos desenvolvidos para procurar por essas soluções possam ser aplicados na análise de qualquer outro sistema binário. Também serão analisadas as órbitas coorbitais à lua do sistema, Didymoon e será feita a análise das principais perturbações presentes no sistema.

1.2 Métodos

O estudo foi iniciado utilizando o Problema Circular Planar Restrito de Três Corpos (PCPR3C), onde foram implementadas as coordenadas de McGehee para auxiliar na análise dos resultados. A implementação das coordenadas de McGehee permitiu o

uso da expansão da variedade invariante do infinito, já desenvolvidas na literatura em Llibre e Simó (1980) e Martínez e Simó (2014), que auxiliou no entendimento dos resultados. A contribuição do presente estudo foi apresentar um novo modo de análise de sistemas binários com seu uso. Para isso, introduziu-se um ângulo como alternativas para apresentar a expansão. Este ângulo, chamado de β , está relacionado ao *flight-path-angle* (ângulo de sobrevoo), e tornou mais fácil e prática a classificação dos resultados encontrados. Nesta parte do estudo também foi utilizado o PCPR3C com SRP, onde apresentou-se um método de manobrar um veículo espacial através da manipulação da SRP.

A segunda parte do estudo utilizou o problema de dois corpos perturbados. As perturbações consideradas foram devidas a:

- não esfericidade do corpo central. Utilizando a aproximação por harmônicos esféricos para um elipsoide;
- presença de corpos adicionais (lua do sistema, Sol, Júpiter, Marte e Terra);
- pressão de radiação solar.

Esta parte do estudo focou nas órbitas coorbitais com a lua do sistema. Através de integrações de conjuntos de condições iniciais, procurou-se mapear regiões em que o veículo espacial sobrevivesse por até um ano. O método de “integrais da aceleração” foi utilizado para analisar cada uma das perturbações consideradas. As integrais foram resolvidas numericamente utilizando o método Simpson 1/3. Neste estudo, recorreu-se a integrações numéricas para resolver as equações do movimento do Problema Circular Planar Restrito de Três Corpos (PCPR3C) e do problema de dois corpos com perturbações. Utilizando computadores com processadores Xeon de 3,5 GHz, foram simuladas diversas grades de condições iniciais com o uso do integrador numérico de passo variável Runge-Kutta 7/8. Os códigos utilizados implementados em linguagem Fortran e todos os gráficos apresentados foram gerados utilizando o software livre Gnuplot. A única exceção foram as curvas de velocidade zero, que foram computadas utilizando o software livre Octave.

1.3 Organização da Tese

O Capítulo 1 apresenta a introdução, os objetivos, os métodos e a organização da tese.

O Capítulo 2 apresenta as motivações para estudar asteroides, os tipos de asteroides, o histórico de missões que analisaram asteroides e a missão AIDA.

O Capítulo 3 apresenta o PCPR3C em coordenadas de McGehee e métodos de análise que podem ser utilizadas no estudo de qualquer sistema binário. Estes métodos são apresentados de maneira aplicada através dos objetivos da missão AIM. No final é apresentado uma maneira de manobrar um veículo espacial com auxílio da SRP, sem a necessidade de um dispositivo complexo, como uma vela solar.

O Capítulo 4 apresenta as órbitas coorbitais do sistema Didymain-Didymoon e a análise do sistema com o uso das integrais da aceleração devidas as perturbações.

O Capítulo 5 apresenta a conclusão e as sugestões para trabalhos futuros.

2 ASTEROIDES E MISSÕES PARA ASTEROIDES

Figura 2.1 - Planeta anão Ceres colorizado a partir de imagens em infravermelho feitas pela missão Dawn.



Fonte: NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION (NASA) (2016).

O estudo dos asteroides é relativamente novo em relação ao tempo de história humana. Segundo Shepard (2015), no século 18, antes da descoberta do que hoje é conhecido como o cinturão de asteroides, os astrônomos apontavam para um vazio entre os planetas Marte e Júpiter, e procuravam por uma planeta “perdido”. No início do século 19, o astrônomo Giuseppe Piazzi (1746-1826) fez a primeira observação de um asteroide, que foi chamado de Ceres. No ano de 2006, Ceres foi reclassificado como um planeta anão. A Figura 2.1 apresenta uma imagem feita em infravermelho pela sonda da missão Dawn realizada pela NASA, a imagem foi colorizada de modo a simular como o Ceres seria visto pelo olho humano. Desde a descoberta de Ceres por Piazzi, o número de asteroides conhecidos não para de aumentar, sendo que o número de asteroides descobertos já ultrapassa o de 1 milhão. Os três principais grupos de asteroides são:

- Asteroides do cinturão - localizados entre as órbitas dos planetas Marte e Júpiter;
- Asteroides Troianos - localizados nos pontos Lagrangianos L_4 e L_5 do sis-

tema Sol-Júpiter;

- Asteroides próximos da Terra (*Near-Earth Asteroids-NEAs*) - possuem órbitas que passam próximas da Terra.

Os asteroides em sua maioria estão orbitando o Sol individualmente. Contudo, desde a descoberta revelada pela sonda Galileo, de que o asteroide (243) Ida possui uma lua (Dactyl), o que era uma desconfiança, virou uma certeza e muitos outros sistemas múltiplos foram descobertos (BELTON et al., 1996). Pravec et al. (2006) estima que aproximadamente $15 \pm 4\%$ dos NEAs com diâmetro maior que $0,3km$ são sistemas binários. O asteroide binário 65803 Didymos será o alvo da missão AIDA e é o principal objeto de análise do presente estudo, maiores detalhes são dados na Seção 2.4.

2.1 Métodos de aproximação de forma

Pequenos corpos como asteroides e cometas, em geral, possuem formatos irregulares. A representação destes corpos sempre é feita a partir de aproximações para formas geométricas conhecidas. Um dos modelos mais realistas é o método do poliedro, porém este método depende de uma boa observação do corpo, o que nem sempre é possível (WERNER; SCHEERES, 1996; CHANUT et al., 2015). Um conceito mais recente é o método do dipolo ou tripolo, onde o corpo é aproximado por pontos de massas interligados por uma barra rígida de peso nulo (ZENG et al., 2015; SANTOS et al., 2017a; SANTOS et al., 2017b; SANTOS et al., 2018). Uma maneira mais simples é fazer a aproximação do corpo para formas geométricas simplificadas, como um esferoide ou um elipsoide, e representar o potencial gravitacional através da expansão em harmônicos esféricos (BALMINO, 1994). Embora seja uma primeira aproximação, ela é muito utilizada na literatura por sua simplicidade Scheeres (1994), utilizando o problema restrito de três corpos, apresenta uma análise da estabilidade de orbitas em torno de asteroides com formato elipsoidal e os classificou em dois tipos: os do tipo 1, que possuem movimento estável em órbitas síncronas próximas; e os tipo 2, que possuem movimento instável em órbitas síncronas próximas. Scheeres et al. (1996) analisou órbitas em torno do asteroide 4769 Castalia. Em seguida, Scheeres et al. (1998) analisou órbitas em torno do asteroide 4179 Toutatis. Rossi et al. (1999) apresentou diferentes métodos de aproximação para o potencial gravitacional real de corpos celestes com formatos irregulares. Entre estes métodos está o de expansão do potencial em séries até a quarta ordem. Assim, é apresentado o método de cálculo dos coeficientes do potencial para um elipsoide tri-axial homogêneo. Scheeres (2002) estudou a estabilidade em sistemas de asteroides binários. Chappaz e Howell (2015)

estudaram o comportamento de uma espaçonave em sistemas binários de asteroides com os dois corpos massivos com formato elipsoidal. Também foram desenvolvidas leis para o controle do movimento da espaçonave na vizinhança do sistema. No final é feito um estudo de caso para o sistema binário 1999 KW4. Recentemente, [Xin et al. \(2015\)](#) estudou os pontos de equilíbrio para um asteroide com formato elipsoidal considerando o deslocamento destes pontos devido a presença da pressão de radiação solar. [Feng et al. \(2015\)](#) fez um estudo de orbitas periódicas na vizinhança de asteroides binários em contato, ou seja, com os dois componentes conectados um ao outro, o que resulta em uma forma altamente bifurcada. No seu estudo também foi considerado o caso de um elipsoide conectado a uma esfera.

2.2 Por que realizar missões para asteroides e cometas?

O estudo de asteroides tem sido bastante comum na literatura, tanto de astronomia quanto de engenharia aeroespacial. Existem diversas aplicações para missões dessa natureza. A seguir são apresentados algumas das principais motivações para estudar asteroides.

2.2.1 Asteroides e o sistema Solar

Um dos mais importantes aspectos ligados a questão de estudos de asteroides é a possibilidade de realização de experimentos científicos ligados à química e à biologia. Acredita-se que os asteroides mantenham material da época da formação do sistema solar ([SHEPARD, 2015](#)). A investigação sobre a composição química desses corpos pode ajudar os cientistas na verificação e validação de teorias sobre a origem do sistema solar e, talvez, da origem da vida na Terra. Para melhores resultados é preciso fazer uma boa escolha do asteroide, maximizando a possibilidade de encontrar respostas a perguntas de caráter científico. Logo, asteroides múltiplos são de grande importância, pois oferecem um espaço de pesquisa maior. Por outro lado, corpos múltiplos tornam o estudo da missão mais complexo do ponto de vista de astrodinâmica, devido a presença de mais de um corpo de forma irregular na dinâmica do sistema.

2.2.2 Risco de colisão com a Terra

Outro problema bastante estudado em relação a asteroides é a questão de uma possível colisão com a Terra. O programa da NASA “Near Earth Object Program” monitora o risco de colisão de cometas e asteroides conhecidos com a Terra, onde os dados encontrados mostram que, atualmente, há um baixo risco de colisão desses

objetos com a Terra. Contudo, no caso de de uma colisão, as consequências seriam muito graves. Em [Chapman et al. \(1994\)](#), é feita uma análise do risco de colisão de asteroides e cometas com a Terra. Também é feita a análise dos possíveis efeitos da colisão sobre a vida na Terra. [Bancelin et al. \(2012\)](#) apresentam a probabilidade de colisão do asteroide 99942 Apophis com a Terra. O 99942 Apophis já causou preocupação quando foi detectado. Inicialmente foi atribuída uma probabilidade de 2.7% de colisão, que foi logo descartada após nova análise. Nesse sentido, um maior conhecimento sobre os asteroides pode auxiliar tanto no calculo de suas trajetórias, logo ajudando a prever probabilidades de colisão. No caso de risco real de colisão será importante que existam métodos para mitigar esse risco. Para isso também é necessário um maior conhecimento sobre a composição e estrutura destes corpos. A partir dos dados de crateras de impacto de asteroides na Terra, estima-se que 2-4% das colisões foram de sistemas binários, e esses dados podem estar subestimados, pois a colisão dos dois corpos pode estar se sobrepondo ([MILJKOVIĆ et al., 2013](#)).

2.2.3 Mineração de asteroide

Asteroides são corpos ricos em sua composição mineral, muitas vezes com grandes quantidades de minérios importantes e raramente encontrados na Terra. Sendo assim, um assunto cada vez mais comum na literatura sobre esses corpos é a questão da extração e uso de seus componentes. [O'Leary \(1977\)](#) sugere a mineração dos asteroides das famílias Apollo e Amor. Depois disso, [O'Leary \(1988\)](#) sugere a mineração das superfícies da Lua e de Marte, bem como das luas de Marte, Phobos e Deimos, e de alguns asteroides. São apresentados os consumos em Delta-V para a realização da missão, assim como a quantidade de massa que deve ser retornada por unidade de massa lançada. [Sonter \(1997\)](#) apresenta uma análise mais abrangente sobre a industrialização espacial, com os asteroides próximos a Terra sendo os alvos primários. É apresentado de forma sumarizada o ciclo econômico em torno da exploração mineral de asteroides. [Ross \(2001\)](#) realizou um estudo mais abrangente sobre a viabilidade da mineração de asteroides, apresentando uma análise econômica detalhada, relacionando as substâncias encontradas bem como seus empregos na indústria. O trabalho propõe planos de missão para as famílias de asteroides Apollo, Atenas, Arjuna e cometas de curto período. De forma geral, a mineração de asteroides é uma realidade. Prova disso é a lei americana de novembro de 2015, que visa regular e impulsionar o mercado da mineração de asteroides ([UNITED STATE CONGRESS, 2015](#)).

2.3 Histórico de missões para asteroides

A seguir, é feita, uma breve revisão de missões espaciais que tiveram como alvo principal ou secundário asteroides.

Johnson et al. (1992) apresentam uma descrição completa da missão Galileo e de suas fases. Esta missão executada pela NASA teve como alvo principal Júpiter e suas Luas. Foi a primeira missão a realizar um *fly-by* de um veículo espacial com um asteroide na história, no caso o asteroide 951 Gaspra. Também foi realizado um *fly-by* com o asteroide 243 Ida onde descobriu-se que este era um sistema binário, com uma lua, batizada de Dactyl, orbitando o corpo principal (BELTON et al., 1996).

A missão NEAR Shoemaker executada pela NASA foi lançada em fevereiro de 1996. Nesta missão o veículo espacial realizou um fly-by com o asteroide 253 Mathilde, e obteve sucesso ao ser capturada e orbitar o asteroide 433 Eros, se chocando com sua superfície no final da missão em fevereiro de 2001 (PROCKTER et al., 2002).

Conforme Yoshikawa et al. (2015) a missão Hayabusa, executada pela *Japan Aerospace Exploration Agency* (JAXA), teve como alvo o asteroide 25143 Itokawa. A sonda foi lançada em maio de 2003 e alcançou o asteroide Itokawa em Setembro de 2005. Após a coleta de material do asteroide, retornou a Terra em junho de 2010. Foi a primeira missão a trazer de volta à Terra material recolhido da superfície de um asteroide. Maiores detalhes sobre a missão Hayabusa podem ser encontrados em Fujiwara et al. (2006), Yano et al. (2006), Kawaguchi et al. (2008).

A missão Rosetta, executada pela *European Space Agency* (ESA) teve como alvo principal o cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko. A espaçonave foi lançada em Março de 2004 alcançando o cometa em Agosto de 2014. Ao longo de sua trajetória realizou *fly-by* com os asteroide 2867 Steins em 2008 e 21 Lutetia em 2010 (ACCOMAZZO et al., 2010; SCHULZ et al., 2012).

A missão Hayabusa 2, executada pela JAXA teve como alvo o asteroide 162173 Ryugu. A espaçonave foi lançada em dezembro de 2014 alcançando o asteroide Ryugu em junho de 2018. Após a chegada diversas outras fases foram realizadas, como pouso de módulos sobre o asteroide e teste de impacto, atualmente é esperado seu retorno à Terra trazendo material coletado, com chegada prevista para Novembro-Dezembro de 2020 (TSUDA et al., 2020).

A missão *Origins Spectral Interpretation Resource Identification Security Regolith Explorer* (OSIRIS-REx) executada pela NASA tem como alvo o asteroide 101955

Benu. A espaçonave foi lançada em setembro de 2016, alcançando o asteroide em dezembro de 2018 e realizando a coleta de material em outubro de 2020, seguindo o planejamento de retorno, o veículo espacial com o material coletado deve chegar a Terra em 2023 (LAURETTA et al., 2017).

Outras missões estão em fase de planejamento, já com data para a execução, algumas que se destacam são as missões Lucy (NASA), Psyche (NASA) e AIDA (ESA), esta última é detalhada na Seção 2.4. A missão Lucy tem como objetivo estudar os asteroides Troianos, ela tem lançamento planejado para outubro de 2021 (NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION (NASA), 2021). A missão Psyche tem como objetivo estudar o asteroide metálico 16 Psique, ela tem lançamento planejado para 2022 (OH et al., 2019).

2.4 Missão AIDA e asteroide 65803 Didymos (1996 GT) Didymos

A missão espacial *Asteroid Impact & Deflection Assessment* (AIDA) é o próximo grande desafio na história das missões espaciais, pois será a primeira a estudar um sistema binário de asteroides e a analisar o uso de um colisor cinético. Este segundo objetivo da missão está ligado à defesa planetária. Mais detalhes sobre a missão podem ser encontrados em Michel et al. (2016). O asteroide 65803 Didymos é o alvo da missão. O sistema consiste em um corpo primário (Didymain), que possui aproximadamente 99% da massa do sistema, e um corpo secundário (Didymoon) que orbita o primário (lua do sistema), com parâmetros orbitais dados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Parâmetros do sistema Didymain-Didymos.

Corpo	65803 Didymos (1996 GT)	Didymoon
Orbita	Sol	Didymain
Semi-eixo maior [km]	246003643.42886	1.18
Excentricidade	0.38375	0.03
Inclinação [graus]	3.4076	0.005
Período	770.14 dias	11.92 horas
Raio [km]	0.39	0.0815
Massa [kg]	5.23×10^{11}	5×10^9
Obliquidade [graus]	171	–

A missão AIDA é dividida em duas partes. A *Asteroid Redirection Test* (DART) de responsabilidade da NASA, que tem como objetivo colidir um impactor cinético com Didymoon, mais detalhes essa fase da missão podem ser encontrado em Heberling et al. (2017), Stickle et al. (2017). A outra fase da missão denominada *Asteroid Impact Mission* (AIM), de responsabilidade da ESA, contará com um veículo espacial mãe,

dois Cubesats e um módulo de pouso. Especificamente, para a missão AIM, a nave mãe será posicionada na vizinhança do sistema. Já os Cubesat serão posicionados no pontos Lagrangianos L_4 e L_5 . Por fim, o módulo de pouso, chamado MASCOT-2, que não possui sistema de controle, será lançado sobre Didymoon (MICHEL et al., 2016; GOLDBERG et al., 2019; ANDREWS et al., 2019).

Por ser a primeira missão para um sistema binário de asteroides, a missão AIDA requer um suporte científico prévio, que apresente soluções para cada fase da missão. Capannolo et al. (2018), em um estudo inicial utilizando o Problema Restrito de Três Corpos, apresentam diversas famílias de órbitas periódicas no entorno dos corpos do sistema e de seus pontos Lagrangianos. Segundo Damme et al. (2017), em seu estudo utilizando um modelo mais robusto (forma dos corpos do sistema, pressão de radiação solar, etc), a presença de distúrbios, especialmente a pressão da radiação solar, significa que a maioria das órbitas no sistema Didymain-Didymoon não sobrevive por mais de 30 dias, e as órbitas mais estáveis, que estão no entorno de L_4 e L_5 , se manteriam por até 35 dias sem correções com propulsão. Dell'Elce et al. (2017), após descartar algumas órbitas como ideais para a missão, incluindo as órbitas em torno de L_4 e L_5 , concluiu que uma das principais candidatas são as *terminator orbits*. Essa órbitas são orientados de tal forma que vetor do momento angular é paralelo a direção do fluxo solar (BROSCHART et al., 2009).

3 ANÁLISE DE SISTEMAS BINÁRIOS DE ASTEROIDES UTILIZANDO PCPR3C E COORDENADAS MCGEHEE

Neste capítulo é feito o estudo de sistemas binários utilizando o Problema Circular Planar Restrito de Três Corpos (PCPR3C) na sua versão em coordenadas de McGehee.

3.1 Problema circular planar restrito de três corpos

O PCPR3C é uma simplificação do problema gravitacional de três corpos. O problema, conforme apresentado na Figura 3.1, considera dois corpos com massas, M_1 e M_2 , que estão em órbita circular ao redor do centro de massa dos respectivos corpos, e há um terceiro corpo de massa negligenciável, m_3 , que se move sobre a atração gravitacional de M_1 e M_2 . Esses últimos são os primários, sendo o mais massivo o primário e o menor o secundário. O problema é usualmente descrito utilizando as seguintes unidades adimensionais (SZEBEHELY, 1967):

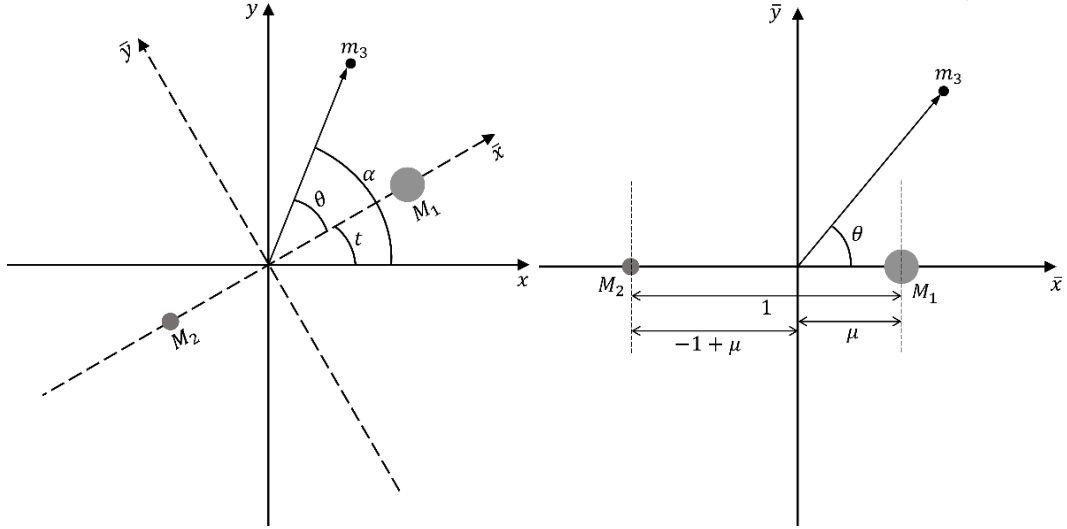
- a unidade de massa é tal que a soma das massas dos corpos M_1 e M_2 seja igual a 1. A massa relativa a M_2 é dada por:

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2},$$

e a massa relativa a M_1 é igual $1 - \mu$. O valor de μ é o chamado parâmetro de massa do sistema;

- a unidade de distância é escolhida de maneira que a distância entre M_1 e M_2 seja igual a 1;
- a unidade de tempo é escolhida de modo que o período das órbitas circulares de M_1 e M_2 seja igual a 2π . Assim, a velocidade angular (ω) de M_1 e M_2 é igual a 1;
- a constante gravitacional G é igual a 1.

Figura 3.1 - Geometria do Problema Circular Planar Restrito de Três Corpos (PCPR3C).



Sistema de coordenadas inercial plano $x-y$ e sistema de coordenadas rotacional plano $\bar{x}-\bar{y}$.

O movimento m_3 no sistema de coordenadas rotacional é dado por:

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{x}} + 2\dot{\bar{y}} - \bar{x} &= - \left[\frac{(1-\mu)(\bar{x}-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu(\bar{x}+1-\mu)}{r_2^3} \right], \\ \ddot{\bar{y}} - 2\dot{\bar{x}} - \bar{y} &= -\bar{y} \left[\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right],\end{aligned}\quad (3.1)$$

em que

$$\begin{aligned}r_1^2 &= (\bar{x}-\mu)^2 + \bar{y}^2, \\ r_2^2 &= (\bar{x}+1-\mu)^2 + \bar{y}^2.\end{aligned}\quad (3.2)$$

A Equação 3.1 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{x}} - 2\dot{\bar{y}} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}}, \\ \ddot{\bar{y}} + 2\dot{\bar{x}} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{y}}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

em que

$$\Omega(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}.\quad (3.4)$$

Multiplicando a primeira equação da Equação 3.3 por $\dot{\bar{x}}$ e a segunda por $\dot{\bar{y}}$, ao

somá-las e integrá-las, chega-se a:

$$2\Omega - C = \dot{\bar{y}}^2 + \dot{\bar{x}}^2, \quad (3.5)$$

em que C é a constante de Jacobi, que pode ser escrita como:

$$C = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 2 \left[\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right] - \dot{\bar{y}}^2 - \dot{\bar{x}}^2. \quad (3.6)$$

A Equação 3.6 é a integral de Jacobi e o valor de C é a constante de Jacobi.

A análise das Equações 3.1 e 3.6 permite identificar a existência de cinco pontos de equilíbrio e a existência da curva de velocidade zero, que define as regiões de movimento de m_3 permitidas no sistema rotacional. Nas seções seguintes essas duas importantes propriedades do PCR3B são apresentadas de maneira mais detalhada. Por conveniência, para apresentar de uma maneira mais prática esses conceitos, foi utilizada a massa do sistema Didymos, que possui μ igual a 0,009469696. A excentricidade da lua do sistema Didymoon é próxima de 0,03, assim é possível utilizar o PCR3B como uma aproximação razoável.

3.1.1 Pontos Lagrangianos e curvas de velocidade do sistema Didymos

Os pontos de equilíbrio do sistema dados pela Equação 3.3 são chamados de pontos Lagrangianos e são obtidos resolvendo o sistema de equações não lineares $\Omega_{\bar{x}} = \Omega_{\bar{y}} = 0$. Utilizando a Equação 3.6, o sistema de equações é dado por:

$$\begin{aligned} \Omega_{\bar{x}} &= \bar{x} - \frac{(1-\mu)(\bar{x}+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(\bar{x}-1+\mu)}{r_2^3} = 0, \\ \Omega_{\bar{y}} &= \bar{y} \left[1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

O sistema de Equações 3.7 tem cinco soluções (SZEBEHELY, 1967): três pontos de equilíbrio colineares, denotados L_1 , L_2 e L_3 ; dois pontos de equilíbrio triangulares, denotados L_4 e L_5 . As posições destes pontos em relação aos primários, Didymain (M_1) e Didymoon (M_2), no referencial rotacional podem ser vistas na Figura 3.2. A Tabela 3.1 mostra a posição dos pontos Lagrangianos no sistema de coordenadas $\bar{x}-\bar{y}$ do sistema Didymos e o C correspondente a cada um destes pontos.

Tabela 3.1 - Posição e valor de C correspondentes aos pontos Lagrangianos do sistema Didymos.

Ponto Lagrangiano	\bar{x}	\bar{y}	C
L_1	-0.8510370479	0.0000000000	3.1622391750
L_2	-1.1443386236	0.0000000000	3.1496227081
L_3	1.0039456603	0.0000000000	3.0094676581
L_4	-0.4905303040	-0.8660254038	2.9906199791
L_5	-0.4905303040	0.8660254038	2.9906199791

A primeira integral de Jacobi define as regiões permitidas de movimento de m_3 em função do valor da constante de Jacobi C . Deste modo, conforme a Equação 3.6:

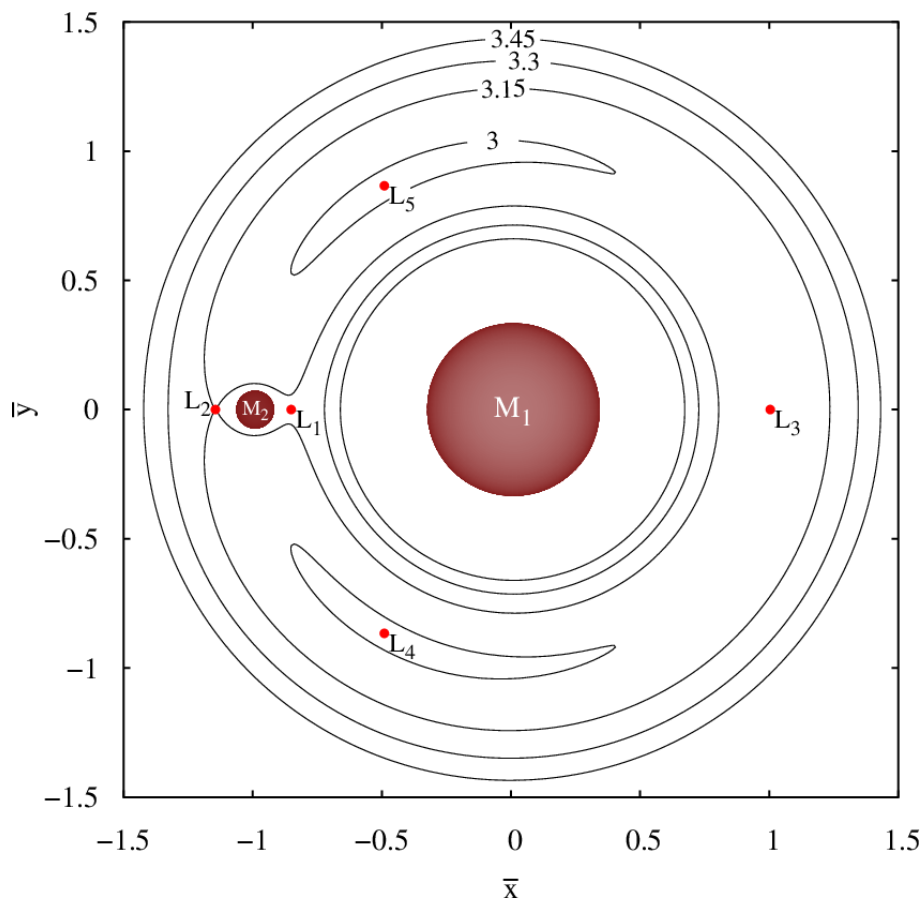
$$0 \leq \dot{y}^2 + \dot{x}^2 = 2\Omega - C, \quad (3.8)$$

a curva de velocidade zero é definida por,

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} = C. \quad (3.9)$$

A Figura 3.2 apresenta a curva de velocidade zero do sistema Didymos para diferentes valores de C .

Figura 3.2 - Curva de velocidade zero e pontos Lagrangianos do sistema Didymos em unidades adimensionais.



3.2 PCPR3C com perturbação devida pressão de radiação solar

A perturbação devida a pressão de radiação solar (SRP - *Solar Radiation Pressure*), dependendo do sistema, é a principal força perturbadora na trajetória de um veículo espacial em órbita de um corpo com pouca massa, como asteroides e cometas. A melhor maneira de apresentar o método de cálculo da aceleração devido a pressão de radiação solar é fazendo um paralelo com o arrasto atmosférico, onde as partículas da atmosfera trocam momento linear com o satélite. No caso da pressão de radiação solar, são os fótons emitidos pelo Sol que trocam momento linear com o veículo espacial. Portanto, a aceleração devida a pressão de radiação solar (\mathbf{P}_{SRP}) é dada por (MONTENBRUCK; GILL, 2012):

$$\mathbf{P}_{SRP} = -4.5 \times 10^{-6} C_{r\nu} \frac{A}{m} \frac{\mathbf{r}_{\odot}}{|\mathbf{r}_{\odot}|^3} U A^2 \quad (3.10)$$

em que A dividido pela massa m define a relação área-sobre-massa. C_r é o coeficiente de refletividade. UA é a unidade astronômica de $1,495978707 \times 10^{11}$ metros. ν é a função sombra. Neste capítulo, ν é sempre igual a 1. Contudo, no próximo capítulo ν é considerado variável, com seu valor sendo definido pela função sombra, em que $\nu = [0, 1]$. O método de cálculo de ν desenvolvido por [Montenbruck e Gill \(2012\)](#) é apresentado no Apêndice A. Nas próximas etapas o produto da razão de área-sobre-massa com o coeficiente de refletividade será substituído por α , ou seja, $\alpha = C_r A/m$. Desta maneira, os resultados encontrados para um determinado α pode ser estendido à diferentes combinações de C_r e A/m .

A aceleração devida a pressão de radiação solar no PCPR3C no referencial rotacional em duas dimensões, para $\nu = 1$, é dada por:

$$\overline{\mathbf{SRP0}} = -4.5 \times 10^{-6} C_r \frac{A}{m} \left(\frac{UA}{|\bar{\mathbf{r}}^* - \bar{\mathbf{r}}_{\odot}^*|} \right)^2 \frac{\bar{\mathbf{r}}^* - \bar{\mathbf{r}}_{\odot}^*}{|\bar{\mathbf{r}}^* - \bar{\mathbf{r}}_{\odot}^*|}, \quad (3.11)$$

em que, o * indica que $\bar{\mathbf{r}}$ e $\bar{\mathbf{r}}_{\odot}$ estão em metros. A adimensionalização da aceleração devida a pressão de radiação solar é dada por:

$$\overline{\mathbf{SRP}} = \frac{T^2}{l} \overline{\mathbf{SRP0}}, \quad (3.12)$$

em que T é o período do sistema e l é a distância entre o primário e o secundário, em metros.

Neste capítulo, a propagação da posição aparente do Sol em relação ao sistema é feita resolvendo a Equação de Kepler. Mais detalhes são dados no Apêndice B.

A Equação 3.3 acrescida da SRP fica da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} + SRP(x), \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} + SRP(y). \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.3 Coordenadas de McGehee

Nesta seção são apresentadas as equações do movimento do PCPR3C utilizando as coordenadas de McGehee ([MCGEHEE, 1973](#)). As coordenadas de McGehee foram desenvolvidas para permitir o estudo do movimento perto do infinito, ao transferir a origem do sistema para o infinito. Essa transformação é útil pois evita problemas de integração nas proximidades do baricentro e dos corpos do sistema.

A seguir, a conversão das equações do PCPR3C para as coordenadas de McGehee é apresentada. Inicialmente, considere um sistema de coordenadas complexo rotacional, com a mesma origem do sistema sinódico $\bar{x}-\bar{y}$, tal que $z \in \mathbb{C}$ é a posição do baricentro da terceira partícula m_3 seja

$$z = \bar{x} + i\bar{y}, \quad (3.14)$$

onde $i^2 = -1$. Utilizando essa nova variável, a equação do movimento do PCPR3C pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\ddot{z} = z - 2i\dot{z} - \left[\frac{(1-\mu)(z-\mu)}{|z-\mu|^3} + \frac{\mu(z+1-\mu)}{|z+1-\mu|^3} \right], \quad (3.15)$$

e a integral de Jacobi é dada por:

$$C = |z|^2 + \frac{2(1-\mu)}{|z-\mu|} + \frac{2\mu}{|z+1-\mu|} - |\dot{z}|^2. \quad (3.16)$$

Seja (r, θ) as coordenadas polares de m_3 no referencial rotacional (Figure 3.1), então,

$$z = \bar{x} + i\bar{y} = re^{i\theta}. \quad (3.17)$$

Utilizando $\alpha = \theta + t$ (ver Figura 3.1), o módulo do momento angular de m_3 é dado por:

$$c = r^2\dot{\alpha} = r^2(\dot{\theta} + 1),$$

logo,

$$\dot{z} = \dot{r}e^{i\theta} + ir\dot{\theta}e^{i\theta} = \left[\dot{r} + i\left(\frac{c}{r} - r\right) \right] e^{i\theta}. \quad (3.18)$$

Note que o momento angular não é uma primeira integral do movimento, exceto se $\mu = 0$.

Seguindo Llibre e Simó (1980), as coordenadas de McGehee:

$$(q, p, \theta, \omega),$$

são introduzidas por meio das seguintes transformações:

$$q^2 = \frac{2}{r}, \quad p = \dot{r}, \quad \omega = c, \quad (3.19)$$

com $q \in (0, \infty)$. Essa alteração de coordenadas leva a origem ao infinito. A seguir, as equações diferenciais do PCR3BP são reescritas utilizando essas novas coordenadas.

A partir da primeira das Equações 3.19, chega-se a:

$$\dot{q} = -\frac{\dot{r}q^3}{4} = -\frac{pq^3}{4}.$$

A partir da definição de ω :

$$w = r^2(\dot{\theta} - 1) = \frac{4(\dot{\theta} - 1)}{q^4},$$

logo,

$$\dot{\theta} = \frac{\omega q^4}{4} - 1.$$

Derivando a Equação 3.18:

$$\ddot{z} = \left[\ddot{r} - \left(\frac{\omega}{r} - r \right) \dot{\theta} + i \left(\dot{r}\dot{\theta} + \left(\frac{\dot{\omega}r - \omega\dot{r}}{r^2} - \dot{r} \right) \right) \right] e^{i\theta}. \quad (3.20)$$

Comparando essa expressão com a obtida para \ddot{z} (Equação 3.15), identificando as partes complexas e imaginárias, e resolvendo para \dot{p} e $\dot{\omega}$, chega-se a:

$$\dot{p} = \frac{1}{8}q^6\omega^2 - \frac{1}{4}\sigma_1q^4 + \mu(1-\mu)\frac{q^6}{8}\sigma_2\cos\theta \quad (3.21)$$

$$\dot{\omega} = -\mu(1-\mu)\frac{q^4}{4}\sigma_2\sin\theta \quad (3.22)$$

onde $\ddot{r} = \dot{p}$, e,

$$r_1 = \left[(x + \mu)^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}} = r \left[1 + \mu \frac{\cos\theta}{r} + \frac{\mu^2}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.23)$$

$$r_2 = \left[(x + \mu - 1)^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}} = r \left[1 - (1 - \mu) \frac{\cos\theta}{r} + \frac{(1 - \mu)^2}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Sumarizando, as equações do PCR3BP em coordenadas de McGehee são:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -\frac{pq^3}{4}, \\ \dot{p} &= \frac{1}{8}q^6\omega^2 - \frac{1}{4}\sigma_1q^4 + \mu(1-\mu)\frac{q^6}{8}\sigma_2\cos\theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{\omega q^4}{4} - 1, \\ \dot{\omega} &= -\mu(1-\mu)\frac{q^4}{4}\sigma_2\sin\theta, \end{aligned} \quad (3.24)$$

e a integral de Jacobi (Equação 3.16), pode ser reescrita como:

$$C = q^2 \sigma_3 - p^2 - \frac{1}{4} q^4 \omega^2 + 2\omega, \quad (3.25)$$

onde, nas Equações 3.24 e 3.25:

$$\sigma_1 = \frac{1 - \mu}{f_\mu^3} + \frac{\mu}{f_{\mu-1}^3} \quad \sigma_2 = \frac{1}{f_\mu^3} - \frac{1}{f_{\mu-1}^3} \quad \sigma_3 = \frac{1 - \mu}{f_\mu} + \frac{\mu}{f_{\mu-1}}$$

sendo,

$$f_m = \left[1 - m q^2 \cos \theta + m^2 \frac{q^4}{4} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad m = \mu, \mu - 1.$$

3.3.1 Variedades invariantes

Em 1978, com o objetivos de estudar cometas, a missão *International Sun/Earth Explorer 3* (ISEE-3) foi a primeira a utilizar órbitas no entorno dos pontos de equilíbrio. No caso, foi utilizado o ponto L_1 do sistema Sol-Terra (OGILVIE et al., 1977). As órbitas que foram utilizadas são as chamadas órbitas *Halo*. Desde então, é cada vez maior o número de missões espaciais que objetivam utilizar órbitas no entorno de pontos de equilíbrio e as variedades invariantes associadas a eles (GUZMAN et al., 1998; BELLÓ et al., 2010).

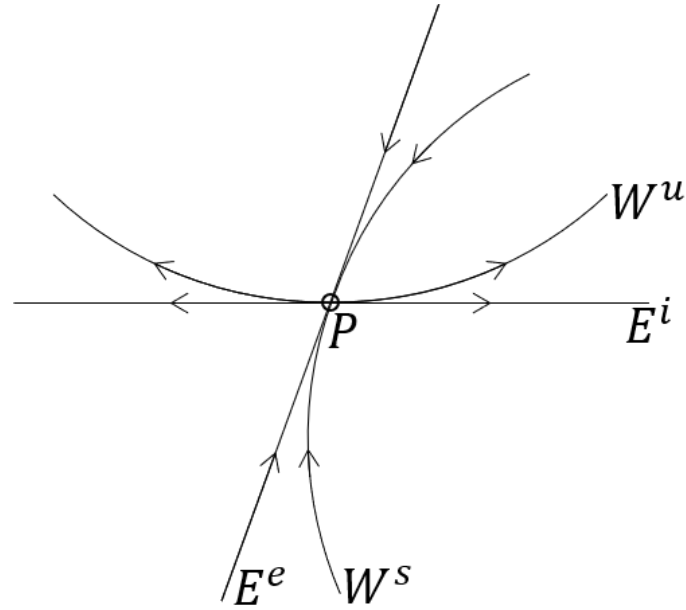
Savi (2017) define variedades de sistemas dinâmicos da seguinte forma:

(...)são superfícies no espaço de fase que possuem a propriedade de que órbitas que nela se iniciem, aí permanecem com a evolução do sistema. Desta forma, uma variedade invariante M é uma coleção de órbitas que formam esta superfície (SAVI, 2017, p. 113).

Considere os seguinte subespaços existentes para a versão linear de um sistema de equações diferenciais: estável (E^e), instável (E^i) e central (E^c), gerado pelos autovetores para os quais os autovalores possuem parte real negativa, positiva e igual a zero, respectivamente. Deste modo, Monteiro (2011) apresenta os seguintes exemplos de variedade invariantes:

(...) os subespaços estável, instável e central de um sistema linear são variedades invariantes (*invariant manifolds*). Para sistemas autônomos, cada trajetória no espaço de fase é um conjunto invariante. Um ponto de equilíbrio é uma variedade invariante de dimensão nula (MONTEIRO, 2011, pp. 204–205).

Figura 3.3 - Variedades de um ponto de equilíbrio.



Fonte: Adaptado de Monteiro (2011).

Considere um ponto de equilíbrio P , como ilustra a Figura 3.3 para um sistema bidimensional, a variedade invariante estável (W^s) se aproxima de P quando $T \xrightarrow{\pm} \infty$, sendo ela tangente a E^e em P . O inverso ocorre com a variedade invariante instável (W^u) que afasta-se de P , sendo ela tangente a E^i em P (MONTEIRO, 2011).

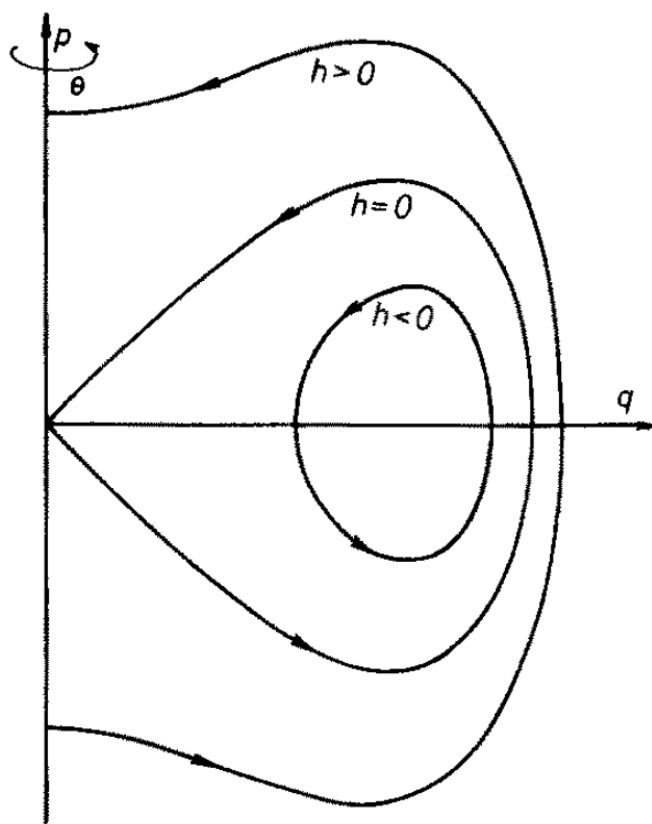
Conforme os conceitos de variedades, as Equações 3.24 possuem as seguintes propriedades:

- As equações são invariantes sobre a simetria:

$$(q, p, \theta, \omega, t) \longrightarrow (q, -p, -\theta, \omega, -t).$$

- O sistema (Equação 3.24) possui uma órbita periódica no infinito ($q = 0$), O_∞ , dada por: $p = q = 0$, $\omega = C/2$, and $\theta \in [0, 2\pi]$.
- Conforme McGehee (1973), O_∞ tem as variedades invariantes bidimensionais: estável W_∞^s , e instável, W_∞^u . Devido a simetria: se $q = F(p, \theta)$ representa as variedades estáveis, então, $q = F(-p, -\theta)$ representa as instáveis.

Figura 3.4 - Projeção de $W_\infty^{s,u}$ para $\mu = 0$.



Fonte: Llibre e Simó (1980).

Segundo Llibre e Simó (1980) e Martínez e Pinyol (1994), para o caso $\mu = 0$, o PCPR3C é equivalente ao problema de dois corpos. Sendo h a energia da órbita. Conforme mostra a Figura 3.4, a projeção da variedade invariante da órbita parabólica ($W_\infty^{s,u}$) no plano (p, q) é dada pela curva $h = 0$. Neste caso, as órbitas internas à variedade parabólica são as órbitas elípticas, com $h < 0$, e as órbitas externas à variedade parabólica são as órbitas hiperbólicas, com $h > 0$. Esta conclusão pode ser extrapolada para valores de μ pequenos.

3.3.2 Expansão da variedades invariantes

A seguir é apresentada a expansão de $W_\infty^{s,u}$. A variedade invariante estável, W_∞^s , pode ser representada por (LLIBRE; SIMÓ, 1980):

$$q = G(p, \theta) = \sum_{j \leq 1} a_j(\theta) p^j = p + \dots, \quad (3.26)$$

ou por (MARTÍNEZ; SIMÓ, 2014):

$$p = F(q, \theta) = \sum_{j \leq 1} b_j(\theta) q^j = q + \dots, \quad (3.27)$$

onde os coeficientes $a_j(\theta)$ e $b_j(\theta)$ são funções periódicas em θ , que podem ser determinadas usando as relações de invariância:

$$\dot{q} = \dot{p} \frac{\partial G}{\partial p} + \dot{\theta} \frac{\partial G}{\partial \theta}, \quad \dot{p} = \dot{q} \frac{\partial F}{\partial q} + \dot{\theta} \frac{\partial F}{\partial \theta}.$$

Além disso, uma vez que um dos dois conjuntos de coeficientes periódicos tenha sido calculado, o outro pode ser obtido invertendo a série de potências (ARFKEN; WEBER, 2005).

A partir de Llibre e Simó (1980), os coeficientes a_j até a oitava ordem são dados por:

$$\begin{aligned} a_0(\theta) &= a_2(\theta) = a_4(\theta) = a_6(\theta) = 0, \\ a_1(\theta) &= 1, \quad a_3(\theta) = \frac{C^2}{2^5}, \\ a_5(\theta) &= \frac{1}{2^5} \left[\frac{7C^4}{2^6} + \mu(\mu - 1) \right], \\ a_7(\theta) &= \frac{3C^2}{2^{10}} \left[\frac{11C^4}{2^6} + 3\mu(\mu - 1) \right], \\ a_8(\theta) &= \frac{9\mu(\mu - 1)}{2^7} \sin(2\theta). \end{aligned}$$

Os coeficientes $b_j(\theta)$ computados invertendo a série de potências são dados por (ARF-

KEN; WEBER, 2005):

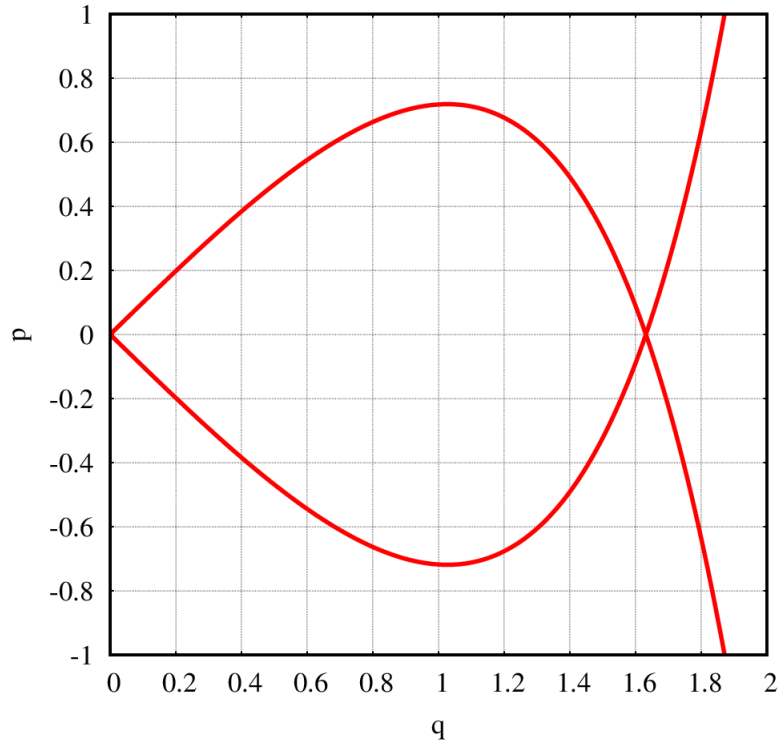
$$\begin{aligned}
b_1(\theta) &= \frac{1}{a_1} \\
b_2(\theta) &= -\frac{a_2}{a_1^3} \\
b_3(\theta) &= \frac{1}{a_1^5} (2a_2^2 - a_3a_1) \\
b_4(\theta) &= \frac{1}{a_1^7} (5a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - 5a_2^3) \\
b_5(\theta) &= \frac{1}{a_1^9} (6a_1^2a_2a_4 + 3a_1^2a_3^2 + 14a_2^4 - a_1^3a_5 - 21a_1a_2^2a_3) \\
b_6(\theta) &= \frac{1}{a_1^{11}} (7a_1^3a_2a_5 + 7a_1^3a_3a_4 + 84a_1a_2^3a_3 - a_1^4a_6 \\
&\quad - 28a_1^2a_2^2a_4 - 28a_1^2a_2a_3^2 - 42a_2^5) \\
b_7(\theta) &= \frac{1}{a_1^{13}} (8a_1^4a_2a_6 + 8a_1^4a_3a_5 + 4a_1^4a_4^2 + 120a_1^2a_2^3a_4 + 180a_1^2a_2^2a_3^2 + 132a_2^6 \\
&\quad - a_1^5a_7 - 36a_1^3a_2^2a_5 - 72a_1^3a_2a_3a_4 - 12a_1^3a_3^3 - 330a_1a_2^4a_3) \\
b_8(\theta) &= \frac{1}{a_1^{15}} (9a_1^5a_2a_7 + 9a_1^5a_3a_6 + 9a_1^5a_4a_5 + 165a_1^3a_2^3a_5 \\
&\quad + 495a_1^3a_2^2a_3a_4 + 165a_1^3a_2a_3^3 + 1287a_1a_2^5a_3 - a_1^6a_8 - 429a_2^7 \\
&\quad - 45a_1^4a_2^2a_6 - 45a_1^4a_2a_4^2 - 90a_1^4a_2a_3a_5 - 45a_1^4a_3^2a_4 - 495a_1^2a_2^4a_4 \\
&\quad - 990a_1^2a_2^3a_3^2).
\end{aligned}$$

Substituindo os valores de a_j nas expressões acima, chega-se a:

$$\begin{aligned}
b_0(\theta) &= b_2(\theta) = b_4(\theta) = b_6(\theta) = 0, \\
b_1(\theta) &= 1, \quad b_3(\theta) = -\frac{C^2}{2^5}, \\
b_5(\theta) &= \frac{\mu(1-\mu)}{2^5} - \frac{C^4}{2^{11}}, \\
b_7(\theta) &= -\frac{C^6}{2^{16}} + \frac{C^2\mu(1-\mu)}{2^{10}}, \\
b_8(\theta) &= \frac{9\mu(1-\mu)}{2^7} \sin(2\theta).
\end{aligned}$$

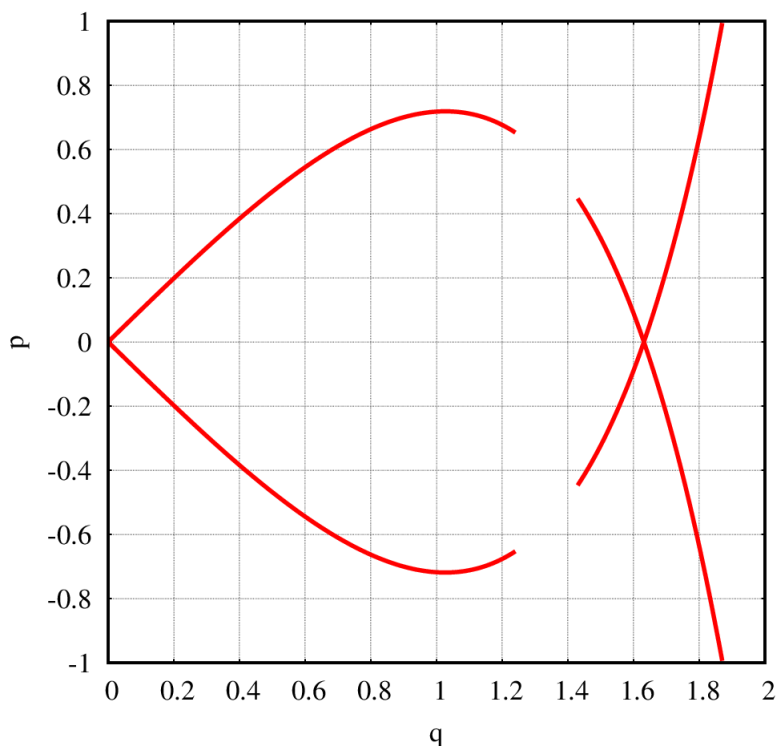
Os coeficientes até oitava ordem também podem ser encontrados em González-Cardel e Díaz-Urbe (2006) e Martínez e Simó (2014).

Figura 3.5 - Expansão de $W_\infty^{s,u}$ para $\mu = 0,009469696$, $\theta = 0^\circ$ e $C = 2,8$.



No presente estudo, por conveniência, foi utilizadas a expansão das variedades $p = F(q, \theta)$. Então, para um dado valor de μ e C , p é calculado como uma função de q e θ . A Figura 3.5 apresenta um exemplo da expansão $W_\infty^{s,u}$ para o caso $\mu = 0,009469696$ (sistema Didymos), $\theta = 0^\circ$ e $C = 2,8$, obtidos via séries 3.26, 3.27 até a ordem 8.

Figura 3.6 - Recriação da Figura 3.5 com exclusão dos valores de p e q para os quais ω é complexo.



A seguir, é apresentado o método utilizado para o cálculo de ω . Considere que, para dados parâmetros iniciais μ , C e θ , p é calculado a partir da expansão $p = F(q, \theta)$. O resultado da substituição dos valores de μ , C , θ e p na Equação 3.25 é uma equação de segunda ordem, que pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara. Então, os valores de ω são dados por:

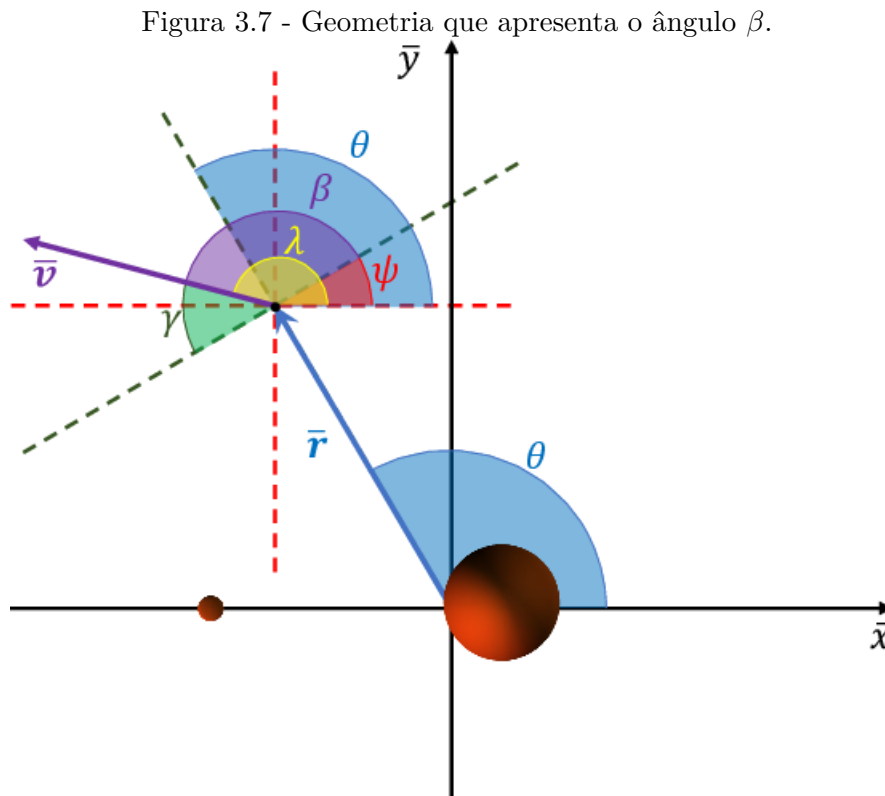
$$\omega_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{4 - q^4(p^2 - q^2\sigma_3 + C)}}{-q^4} \quad (3.28)$$

$$\omega_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{4 - q^4(p^2 - q^2\sigma_3 + C)}}{-q^4} \quad (3.29)$$

O valor dado por ω_2 ao ser substituído nas Equações 3.24 junto com as outras condições iniciais e integrados no tempo é o que produz um resultado dentro do esperado para o movimento do veículo espacial. Essa constatação se deu através da análise de resultados realizados com ω_1 e ω_2 , em um fase inicial do estudo. Então, ao longo do estudo quando houver citação ao valor calculado de ω a partir da Equação 3.16,

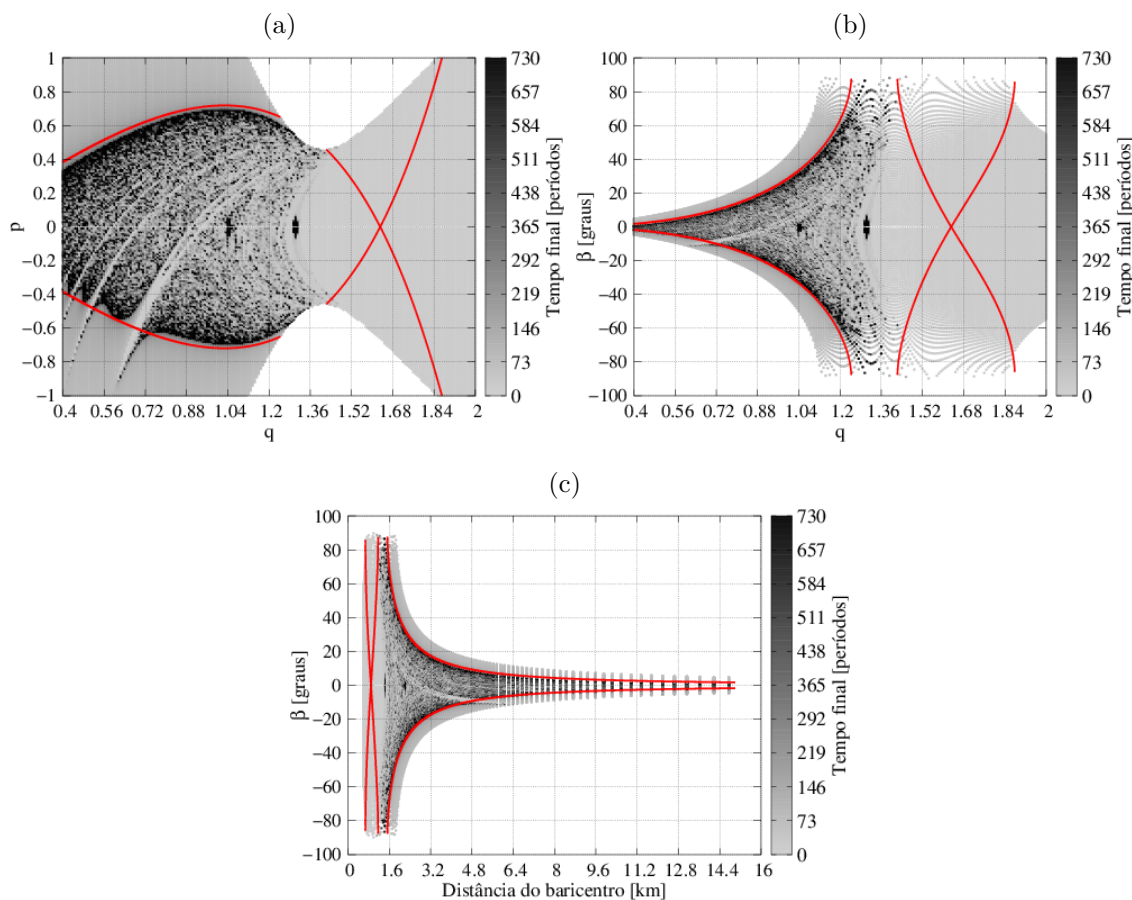
a referência será à ω_2 (Equação 3.29). A Figura 3.6 é uma recriação da Figura 3.5, em que, foram excluídos os valores de p e q que resultam em valores complexos de ω (Equação 3.29). Em uma aplicação prática para um sistema espacial real, como o sistemas Didymos, é importante excluir os valores de ω complexos, pois se ω é complexo C também é complexo, o que não possui sentido físico.

3.3.3 Geometria conveniente



A Figura 3.7 mostra uma representação geométrica conveniente para apresentar os resultados que encontrados. As coordenadas da posição (\bar{r}) são dadas por \bar{r} e θ . As coordenadas da velocidade (\bar{v}) são dadas em relação ao plano transversal por β , onde $\gamma = \beta - 180^\circ$ é o *flight path angle*. O ângulo β foi utilizado de modo a manter a simetria dos resultados em torno de 0° . A relação entre o ângulo β , que está no plano transversal, e o plano central é dada por $\lambda = \beta + \theta - 90^\circ$.

Figura 3.8 - Resultados numéricos, incluindo a expansão das variedades (linha vermelha) para $\mu = 0,009469696$, $\theta = 0^\circ$ e $C = 2,8$. (a) q vs. p . (b) q vs. β . (c) r [km] vs. β .



O uso dessa geometria permite representar a expansão dada, em função de p , na Equação 3.27, em termos de β . Além disso, também possibilita visualizar os resultados e a expansão em dimensões reais. As Figuras 3.8(a), 3.8(b) e 3.8(c) mostram o resultado do tempo final da mesma simulação para as condições iniciais representadas por q vs. p , q vs. β e r [km] vs. β , respectivamente. Todos os pontos foram propagados numericamente utilizando as Equações 3.24 para μ igual a 0,009469696, θ igual a 0° e C igual a 2,8. A expansão mostrada nas Figuras 3.5 e 3.6 foi sobreposta no resultado numérico (linha vermelha). Este será um dos principais modos de apresentação dos resultados apresentado no estudo de caso para o sistema Didymos.

3.4 Análise do sistema Didymos utilizando PCPR3C e coordenadas de McGehee

Nesta secção, é feita a análise do sistema Didymos utilizando o PCPR3C e as coordenadas de McGehee. Vale ressaltar que a forma de análise apresentada pode ser utilizada no estudo de qualquer outro sistema binário. Os resultados apresentados são referentes aos objetivos da missão AIM. Inicialmente, é avaliada a aproximação do veículo espacial mãe com o sistema. Apresentado regiões (conjunto de condições iniciais) em que a nave mãe possa ficar estacionada enquanto se prepara para as próximas fases da missão. A seguir, é feita a análise da fase de lançamento dos Cubesats na vizinhança de L4 e L5. Por fim, são apresentadas condições iniciais de lançamento do módulo MASCOT-2, que pousará sobre Didymoon.

O estudo foi feito numericamente através da integração numérica das Equações 3.24 utilizando o integrador numérico Runge-Kutta 7/8. A transformação utilizada para apresentar as trajetórias no sistema de coordenadas cartesianas é apresentada no Apêndice C.

3.4.1 Resultados e estratégias gerais para uma abordagem mais próxima do veículo espacial mãe com o sistema Didymain-Didymoon

Os resultados numéricos são analisados de maneira mais geral nesta secção. Primeiro, os comportamentos comuns dos resultados para diferentes tipos de grades de condições iniciais são apresentados, ou seja, características comuns nos resultados ao longo de todas as secções. Estratégias de aproximação do veículo espacial mãe com o sistema Didymain-Didymoon também são apresentadas.

As Figuras 3.9(a) - 3.14(d) mostram o tempo final das simulações numéricas para C entre $-9,75$ e $9,75$, e $\theta = 0^\circ$. As grades são dadas para condições iniciais de distância do baricentro (r) e β . Considerando que, o raio de Didymain é igual a $0,390$ km e o valor do raio da esfera de influência do sistema Didymos em relação ao sistema Sol-Didymos é igual a $9,1326$ km, $r = [0.4, 9]$. $\beta = [-180^\circ, 180^\circ]$. O intervalo dos valores de β desta maneira mantêm a simetria em torno de $\beta = 0^\circ$, conforme mostrado nas Figuras 3.9(a) - 3.14(d). A barra de cores representa o tempo final da simulação, as simulações foram feitas para o tempo de 200 períodos. Nessas simulações todos os critérios de parada são considerados: tempo de simulação, colisão com Didymain, colisão com Didymoon e o escape para além do raio de Hill de Didymos no sistema Sol-Didymos, a aproximadamente 67 km do baricentro. As linhas vermelhas sobrepostas nos gráficos representam a variedade invariante do

infinito definida por $p = F(q, \theta)$, excluindo os valores de p e q que geram ω com valor complexo (mais detalhes Seção 3.3).

Figura 3.9 - Essas figuras mostram o tempo final das simulações para diferentes valores de C , de $-9,75$ a $-6,25$. Cada grade foi feita para condições iniciais de β entre -180° e 180° e distância do baricentro em quilômetro, de $0,4$ km a 9 km. O inicial $\theta = 0^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$.

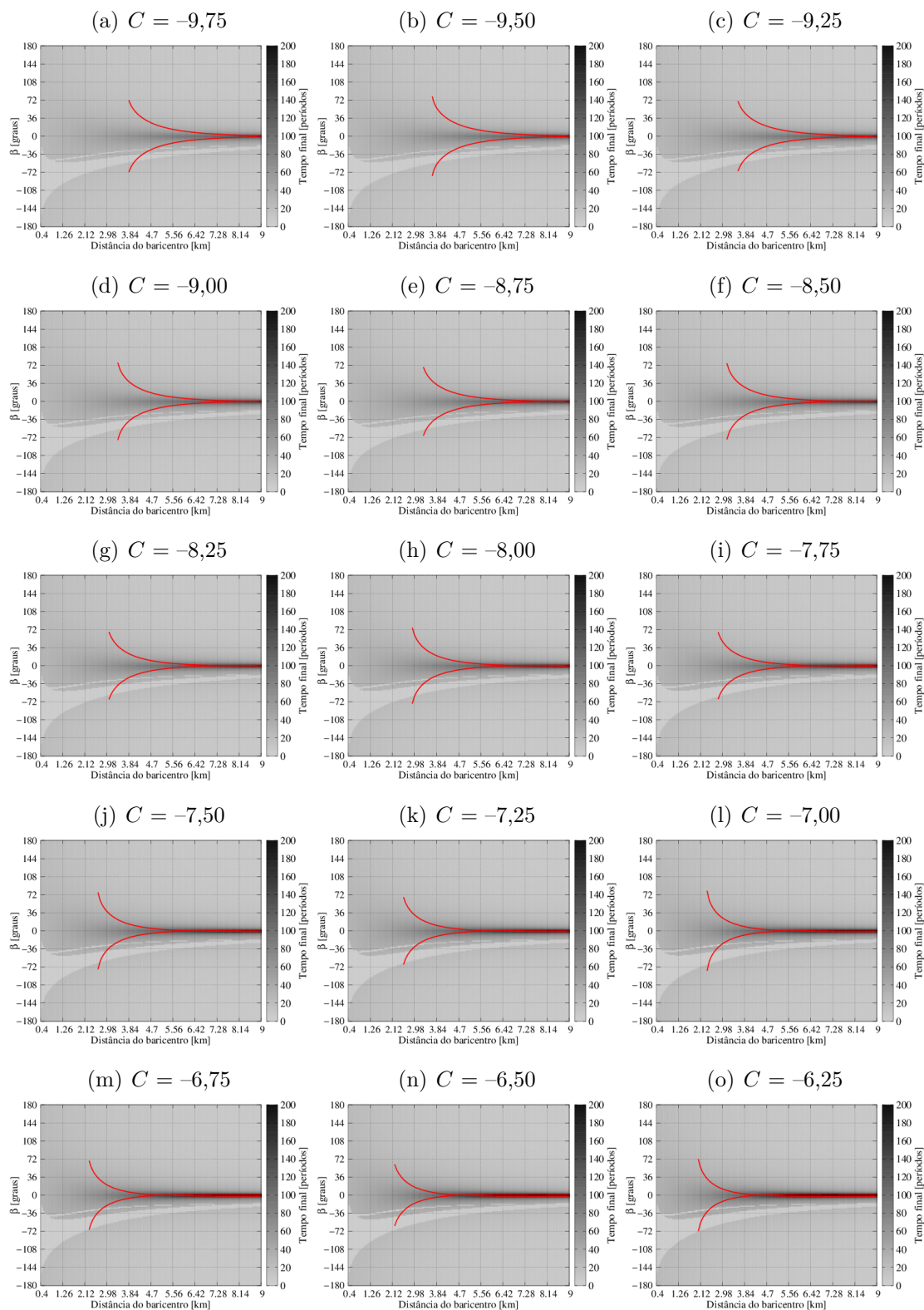


Figura 3.10 - O mesmo das Figuras 3.9(a) - 3.9(o), mas para C entre $-6,00$ e $-2,50$.

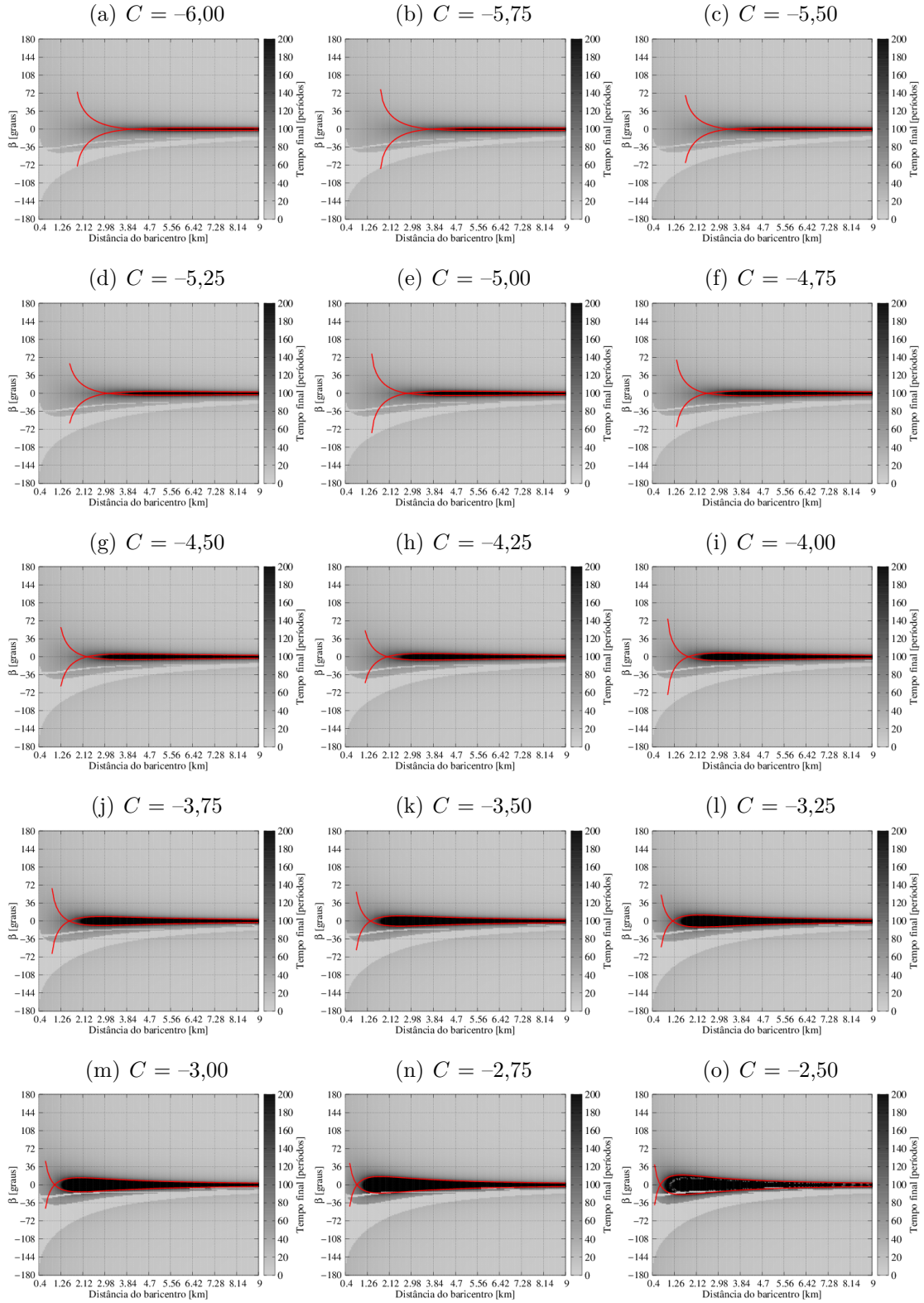


Figura 3.11 - O mesmo das Figuras 3.9(a) - 3.9(o), mas para C entre $-2,25$ e $1,25$.

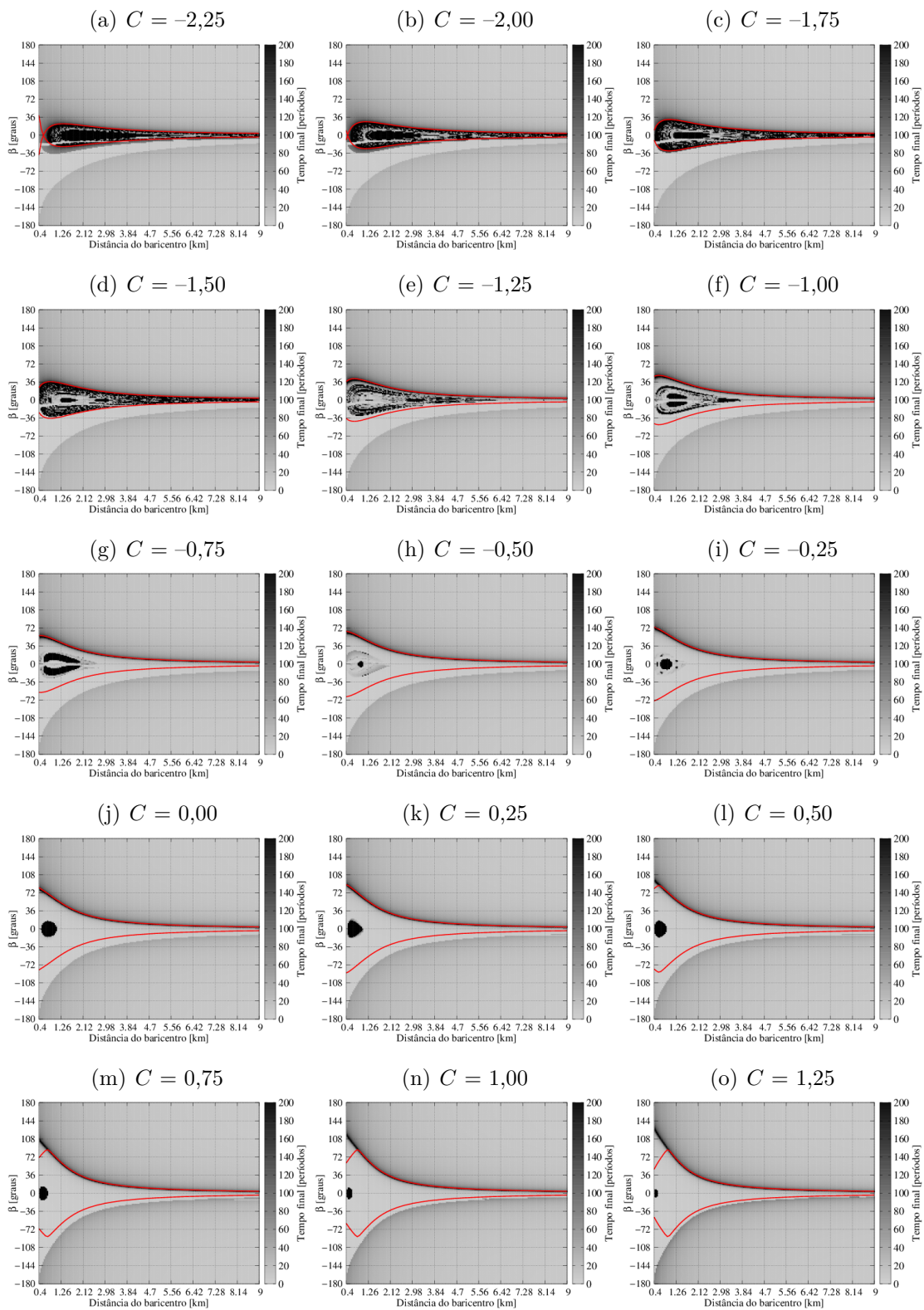


Figura 3.12 - O mesmo das Figuras 3.9(a) - 3.9(o), mas para C entre 1,5 e 5.

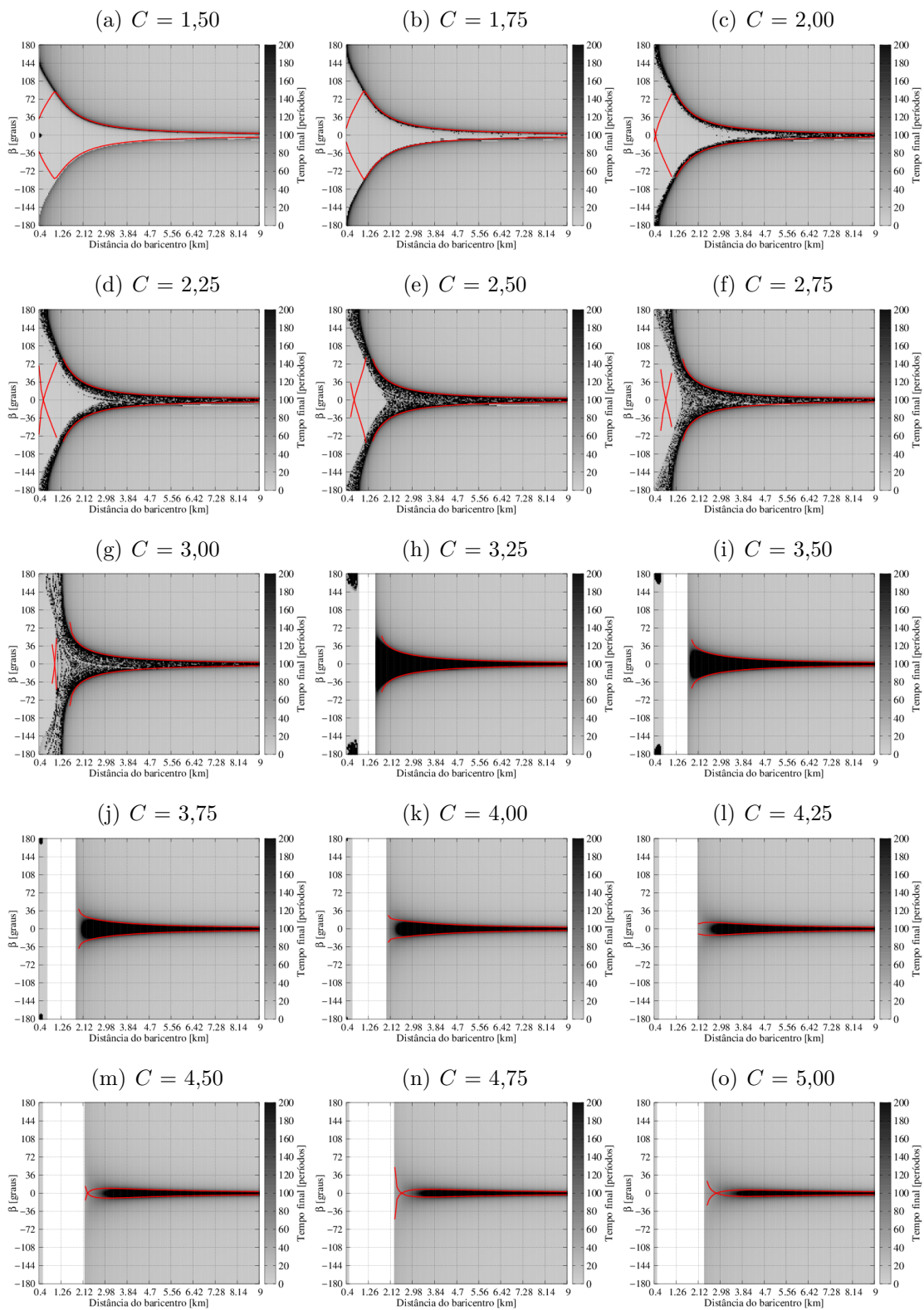


Figura 3.13 - O mesmo das Figuras 3.9(a) - 3.9(o), mas para C entre 5,25 e 8,75.

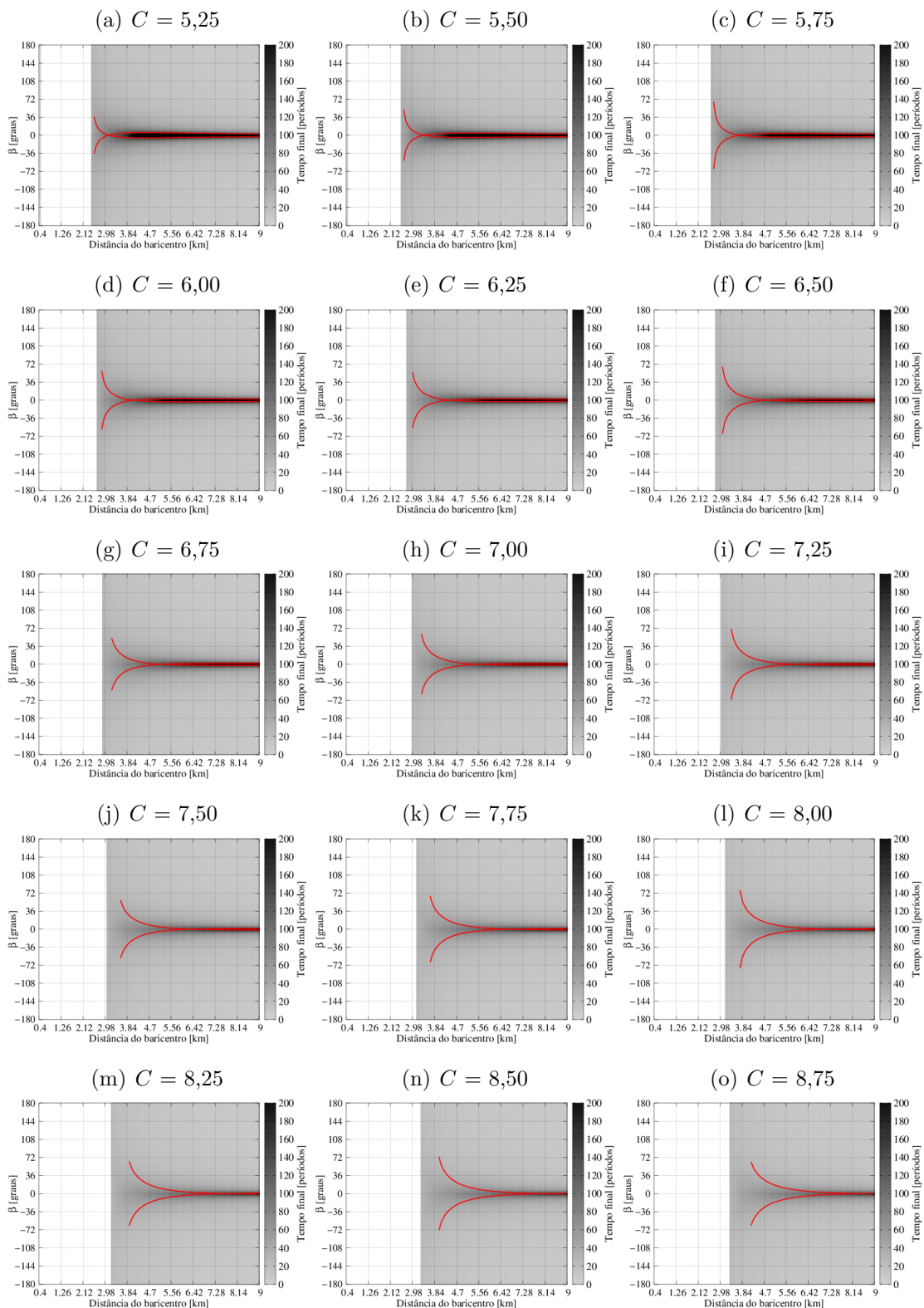
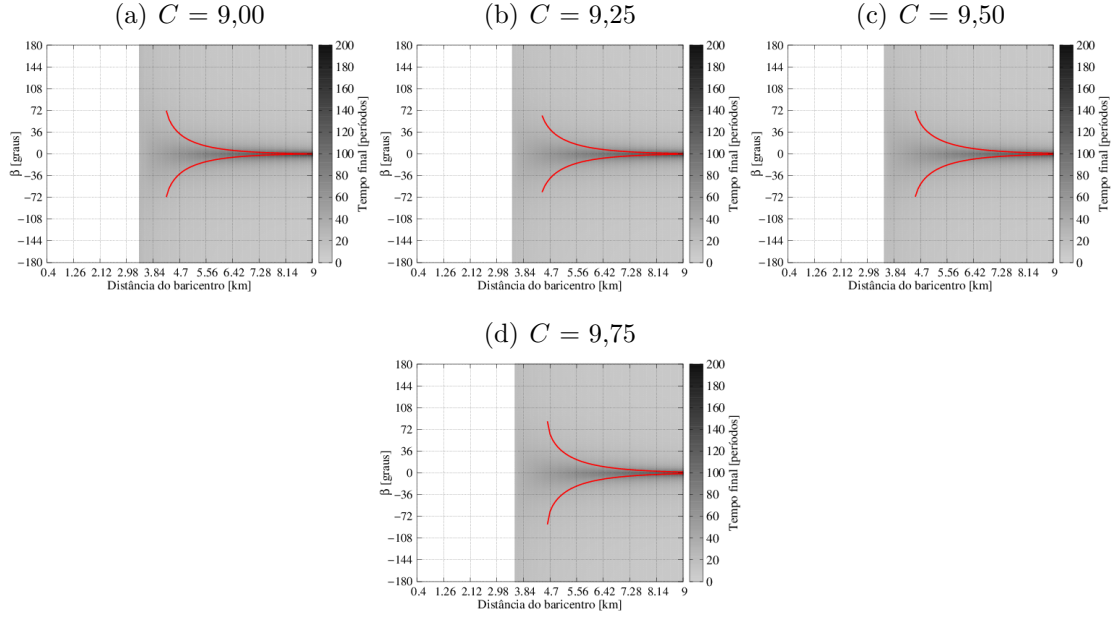


Figura 3.14 - O mesmo das Figuras 3.9(a) - 3.9(o), mas para C entre 9 e 9,75.



Como mencionado anteriormente, as Figuras 3.9(a) - 3.14(d) mostram resultados apenas para $\theta = 0^\circ$, depois de executar testes para outros valores de θ , que estão disponíveis para consulta no Apêndice F, é possível notar que os resultados gerais são semelhantes para quase todos os valores de θ , exceto para algumas condições específicas, como as que serão apresentadas nas seções 3.4.2 e 3.4.3, onde são tratadas as órbitas em torno de L_4 e L_5 e o lançamento do módulo de pouso, o MASCOT-2, respectivamente. A linha vermelha, que representa a variedade, tem boa conformidade com os resultados numéricos, onde as regiões das órbitas sobreviventes são internas as variedades estável (β positivo) e instável (β negativo). Sabe-se que a variedades invariantes do infinito, definida por $p = F(q, \theta)$, representam órbitas parabólicas, enquanto que as órbitas internas são elípticas e as externas hiperbólicas, com energia de dois corpos negativa e positiva, respectivamente (LLIBRE; SIMÓ, 1980).

Figura 3.15 - Repetição da Figura 3.10(n), para $C = -2,75$ e $\theta = 0^\circ$, em que, trajetórias são apresentadas no referencial rotacional. Os pontos azuis marcam as posições da condições iniciais das trajetórias para as quais as setas azuis indicam. A condição inicial de cada trajetória é dada pela Tabela 3.2.

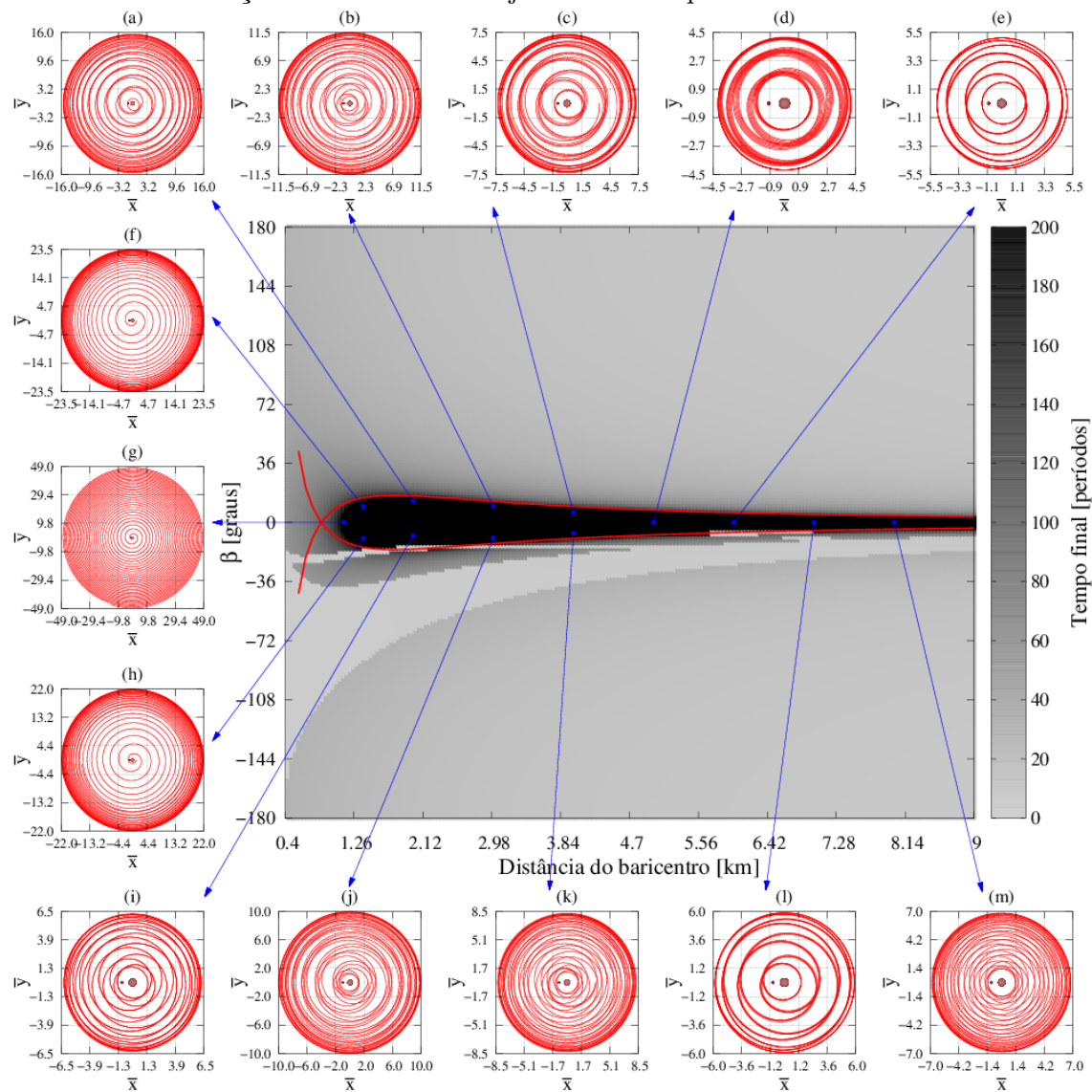


Figura 3.16 - O mesmo da Figura 3.15, em que as mesmas trajetórias dadas na Tabela 3.2 são apresentadas no referencial inercial. Neste caso a trajetória descrita por Didymos está em azul, sendo que a trajetória de Didymain está sobreposta pelo corpo. Didymain e Didymoon estão localizados sobre suas condições para $t = 0$.

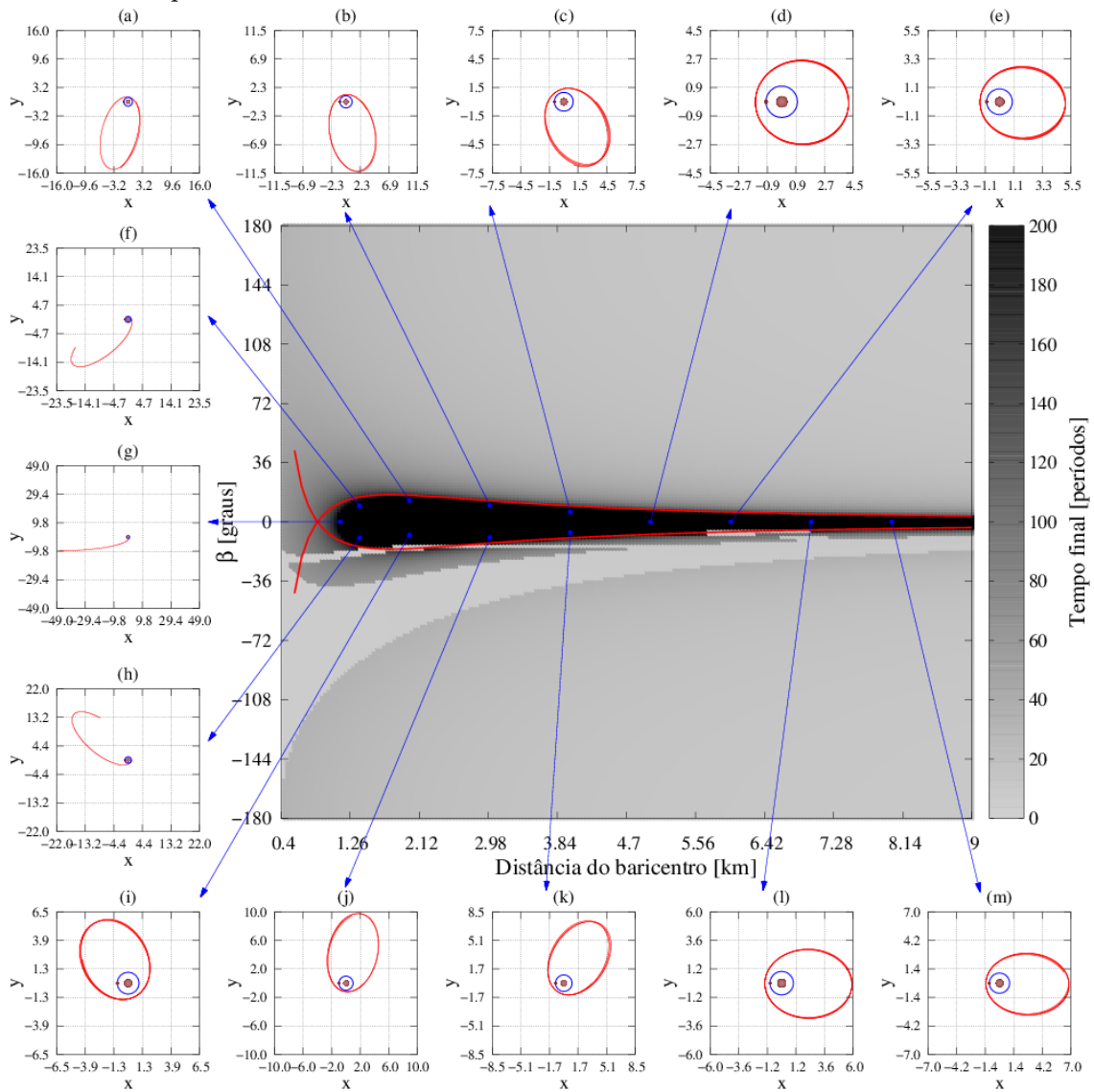


Tabela 3.2 - Condições iniciais das trajetórias apresentadas nas Figuras 3.15 e 3.16.

Trajectoria	C	r [km]	θ [°]	β [°]
(a)	-2,750	2,000	0,000	13,000
(b)	-2,750	3,000	0,000	10,000
(c)	-2,750	4,000	0,000	6,000
(d)	-2,750	5,000	0,000	0,000
(e)	-2,750	6,000	0,000	0,000
(f)	-2,750	1,380	0,000	9,700
(g)	-2,750	1,140	0,000	0,000
(h)	-2,750	1,380	0,000	-9,700
(i)	-2,750	2,000	0,000	-8,000
(j)	-2,750	3,000	0,000	-9,500
(k)	-2,750	4,000	0,000	-6,500
(l)	-2,750	7,000	0,000	0,000
(m)	-2,750	8,000	0,000	0,000

Nas Figuras 3.9(a)- 3.14(d), para $C = [-9.75, -2.75]$ e $C = [3.25, 9.75]$, é possível notar que a região de sobrevivência está localizada no entorno de $\beta = 0^\circ$. As Figuras 3.15 e 3.16 o resultado da mesma simulação para $C = -2,75$, em que as trajetórias são apresentadas nos referenciais sinódico e inercial, respectivamente. A transformação entre os sistemas de coordenadas é apresentada no Apêndice C. Na Figura 3.16 a linha azul representa a trajetória de Didymoon descrita em relação ao baricentro, a trajetória de Didymain possui uma amplitude muito pequena e está sobreposta pelo corpo. Didymain e Didymoon estão, de forma ilustrativa, localizados nas posições de suas condições iniciais. A Tabela 3.2 mostra as condições iniciais para cada trajetória apresentada. Analisando-as, é possível notar que as órbitas com condições iniciais dentro da variedade sobrevivem porque não estão entrando dentro do sistema. A partir do ponto de vista do problema de dois corpos, considerando que o Didymain está no centro do sistema, os periapsis dessas órbitas estão mais distante do Didymain do que a órbita do Didymoon. As órbitas das regiões de sobrevivência encontradas, para $C = [-9.75, -2.75]$ e $C = [3.25, 9.75]$, são boas escolhas para o veículo espacial mãe orbitar o sistema temporariamente porque são órbitas quase periódicas com escape lento. Os testes mostram que para algumas condições iniciais o veículo espacial pode levar até mais de 700 períodos para ultrapassar o raio de Hill. Nestes intervalos de C a probabilidade de colisão seria pequena, para $C = [-9.75, -2.75]$ os periapsis das órbitas são externos à órbita do Didymoon. E para $C = [3.25, 9.75]$ as curvas de velocidade zero são fechadas, portanto, uma colisão seria impossível.

Figura 3.17 - Repetição da Figura 3.11(h), para $C = -0,5$ e $\theta = 0^\circ$, em que, trajetórias são apresentadas no referencial rotacional. Os pontos azuis marcam as posições da condições iniciais das trajetórias para as quais as setas azuis indicam. A condição inicial de cada trajetória é dada pela Tabela 3.3.

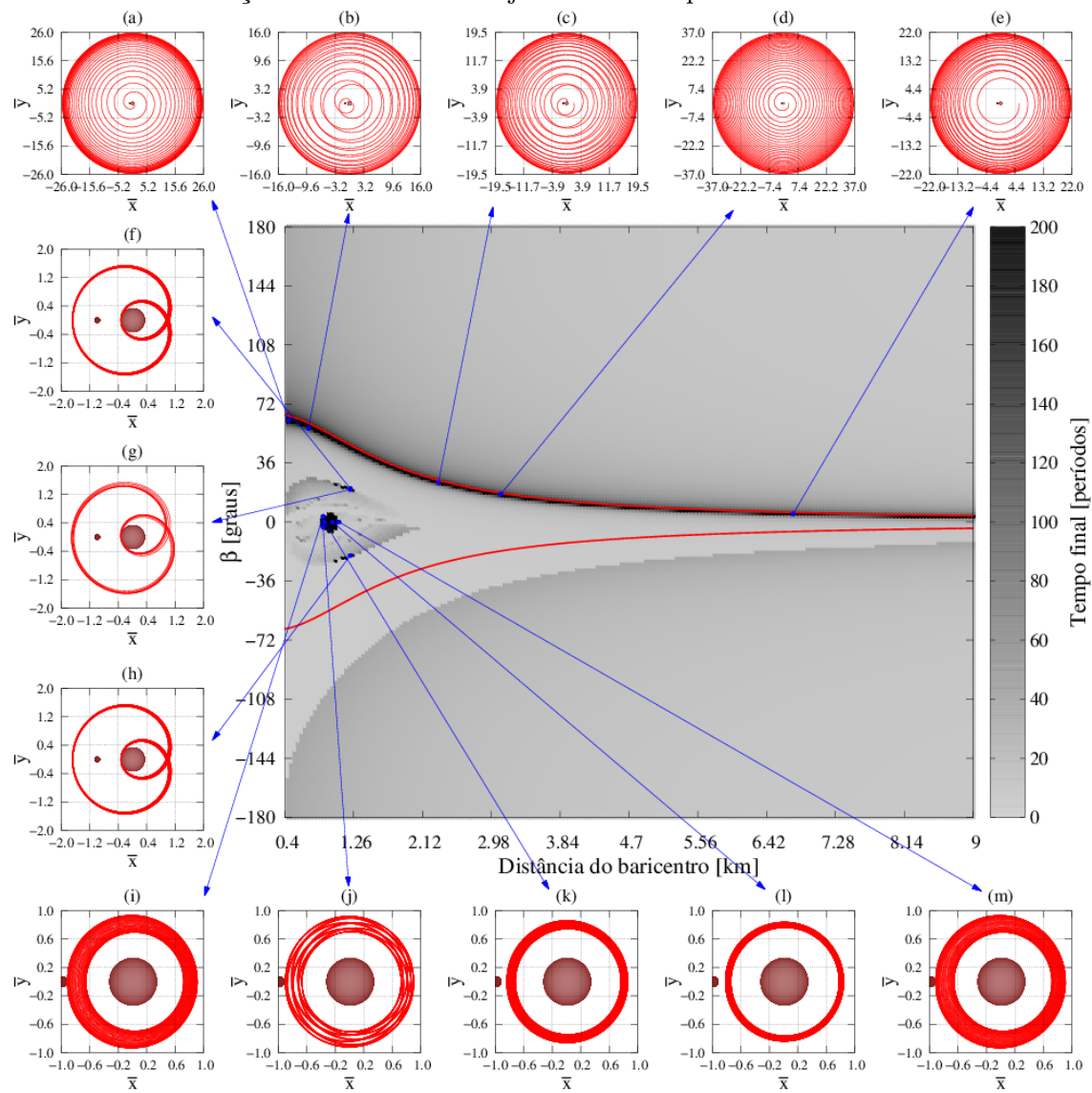


Tabela 3.3 - Condições iniciais das trajetórias das Figuras 3.17.

Trajectoria	C	r [km]	θ [°]	β [°]
(a)	-0,500	0,450	0,000	62,000
(b)	-0,500	0,700	0,000	57,000
(c)	-0,500	2,320	0,000	24,000
(d)	-0,500	3,100	0,000	17,000
(e)	-0,500	6,750	0,000	5,000
(f)	-0,500	1,220	0,000	20,500
(g)	-0,500	1,220	0,000	19,800
(h)	-0,500	1,220	0,000	-20,500
(i)	-0,500	0,880	0,000	3,500
(j)	-0,500	0,880	0,000	-3,000
(k)	-0,500	0,900	0,000	0,000
(l)	-0,500	1,000	0,000	0,000
(m)	-0,500	1,080	0,000	0,000

Figura 3.18 - Tempo final da simulação para $C = -0.5$ and $\theta = 180^\circ$. As trajetórias são apresentadas no referencial rotacional. Os pontos azuis marcam as posições da condições iniciais das trajetórias para as quais as setas azuis indicam. A condição inicial de cada trajetória é dada pela Tabela 3.4.

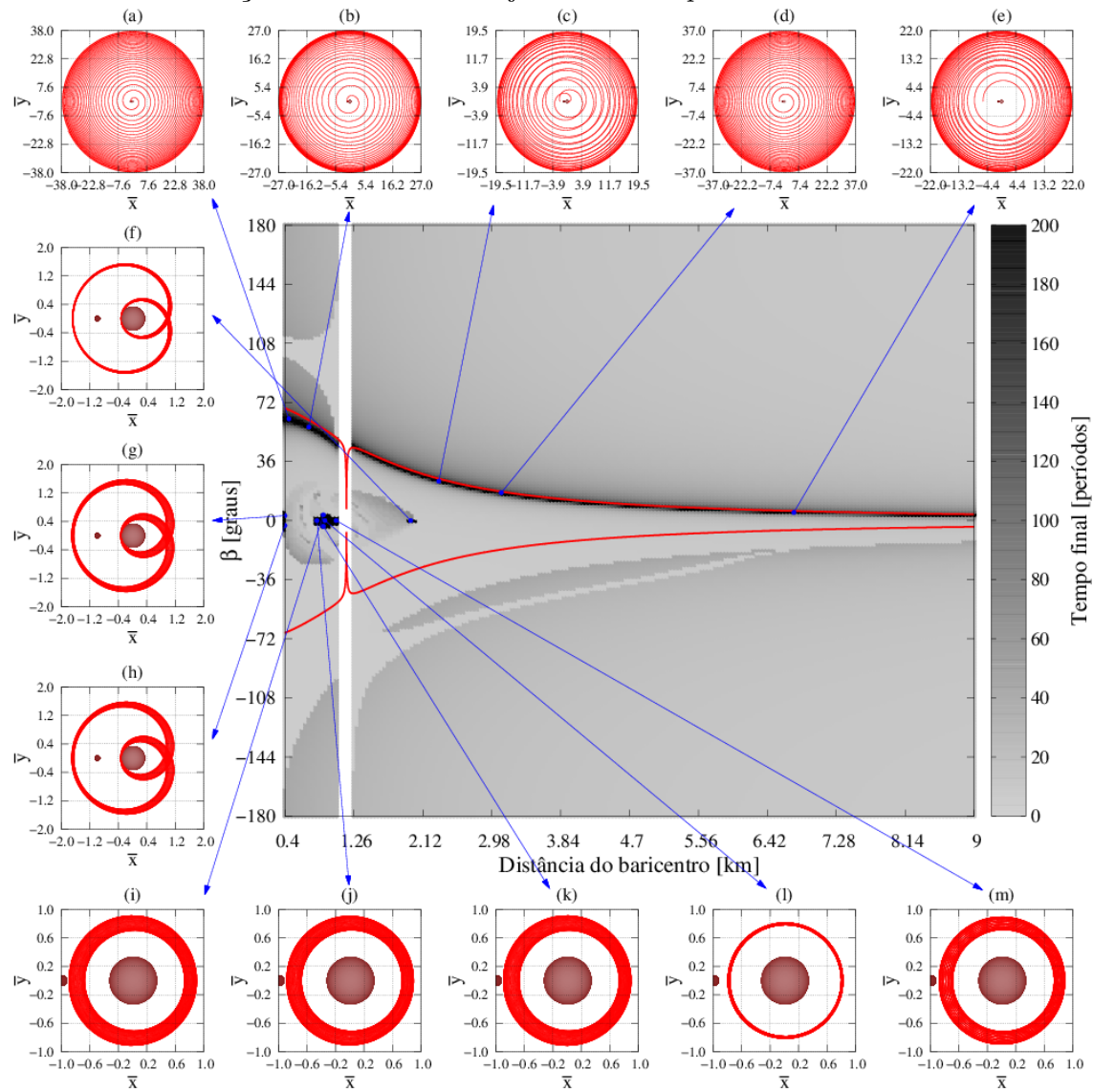
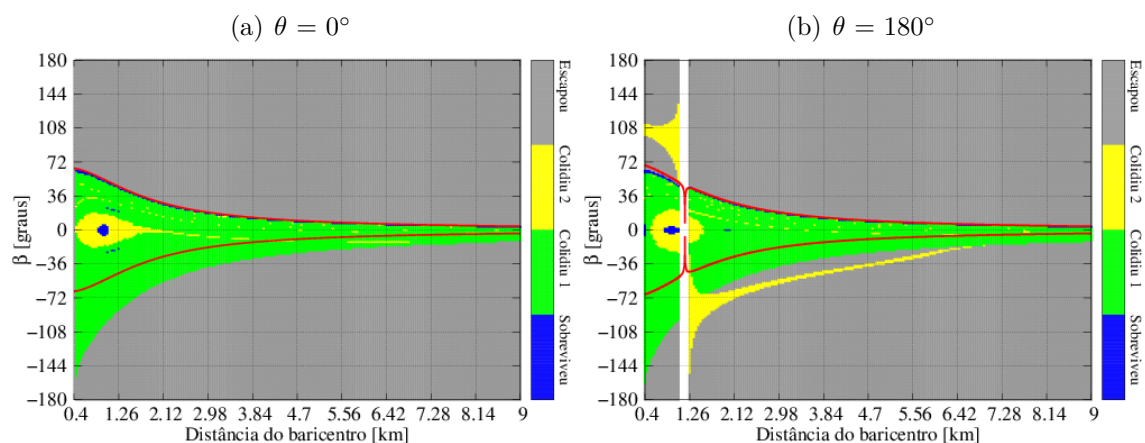


Tabela 3.4 - Initial conditions of trajectories of Figure 3.18.

Trajétória	C	R [km]	θ [°]	β [°]
(a)	-0,500	0,450	180,000	62,000
(b)	-0,500	0,700	180,000	57,000
(c)	-0,500	2,320	180,000	24,000
(d)	-0,500	3,100	180,000	17,000
(e)	-0,500	6,750	180,000	5,000
(f)	-0,500	1,970	180,000	0,000
(g)	-0,500	0,400	180,000	3,000
(h)	-0,500	0,400	180,000	-3,000
(i)	-0,500	0,880	180,000	3,500
(j)	-0,500	0,800	180,000	0,000
(k)	-0,500	0,880	180,000	-3,500
(l)	-0,500	0,900	180,000	0,000
(m)	-0,500	1,040	180,000	0,000

As Figuras 3.17 e 3.18 mostram as grades de $C = -0,5$, para $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 180^\circ$, respectivamente. As Tabelas 3.3 (Figura 3.17) e 3.4 (Figura 3.18) mostram as condições iniciais das trajetórias. A barra de cores na grade das figuras mostra o tempo final das simulações. A escolha destes valores de θ tem como objetivo mostrar a simetria existente no eixo x , onde as órbitas das regiões representadas pelas trajetórias (f), (g) e (h) são as mesmas nas duas figuras, mas estão cruzando o eixo x com diferentes ângulos β . As trajetórias (f), (g) e (h) da Figura 3.18 interseccionam perpendicularmente o eixo x duas vezes em $\theta = 180^\circ$, o que resulta nas duas regiões de sobrevivência no entorno de $\beta = 0^\circ$, uma próxima de $r = 0,4$ km e a outra próxima de $r = 2,12$ km. Estas mesmas órbitas cruzam o eixo x em $\theta = 0^\circ$ com ângulos diferentes de 0° , o que resulta nas duas regiões de sobrevivência no entorno de $r = 1,26$ km na Figura 3.17. O mesmo vale para órbitas quase circulares representadas pelas trajetórias (i)-(m). Outro grupo importante de trajetórias sobreviventes, representado pelas trajetórias (a)-(e), são as órbitas próximas ao variedade estável (linha vermelha para β positivo), essas órbitas estão saindo do sistema, movendo-se lentamente em direção ao infinito. Nos testes realizados foram encontrados casos que levaram mais de 700 períodos para deixar o raio de Hill. Um dos resultados mais importantes é que, ao examinar as Figuras 3.9(a)-3.14(d), é possível notar que esse grupo de trajetórias próximas ao variedade estável existe para todos os valores C .

Figura 3.19 - Reapresentação das Figuras 3.17 e 3.18, mas neste caso a barra de cores apresenta o status final das órbitas, onde: azul, o veículo espacial escapou do sistema; verde, o veículo espacial colidiu com Didymain; amarelo, o veículo espacial colidiu com Didymoon; cinza, o veículo espacial escapou do raio de Hill. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$.

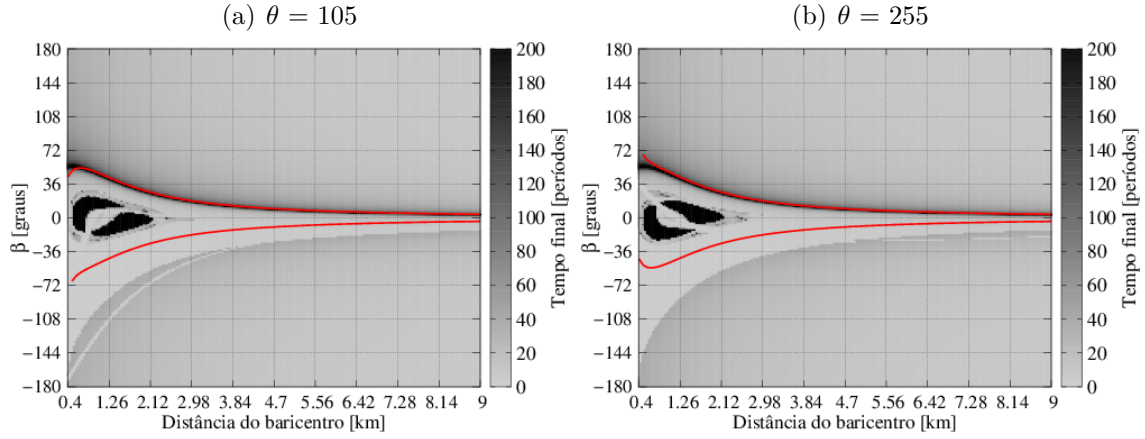


As Figuras 3.19(a) e 3.19(b) equivalem as Figuras 3.17(a) e 3.18, respectivamente, porém, a barra de cores mostra o status final da órbita, onde: azul, o veículo espacial escapou do sistema; verde, o veículo espacial colidiu com Didymain; amarelo, o veículo espacial colidiu com Didymoon; cinza, o veículo espacial escapou do raio de Hill. Esse código de cores é usado em todos os gráficos de status apresentados no presente documento. Os resultados que mostram o status final é utilizado para explicar uma relação interessante entre a variedade e os resultados numéricos. No interior da variedade, entre a variedade estável (linha vermelha para beta positivo) e a variedade instável (linha vermelha para beta negativo), estão as órbitas quase periódicas com energia negativa de dois corpos (LLIBRE; SIMÓ, 1980). As órbitas nestas condições iniciais orbitam o sistema, onde ocorrem colisões com o primário e o secundário do sistema, apenas em pequenas regiões próximas à órbita periódica, essas órbitas sobreviveram por 200 períodos. Em relação à parte externa da variedade, há duas conclusões importantes. A primeira é que para β positivo a partir da variedade estável até $\beta = 180^\circ$ (serão referidas como regiões acima da variedade estável), somente são possíveis colisões com o secundário, e essas colisões ocorrem apenas para condições iniciais de distância inicial inferiores a 1,18 km (distância Didymain-Didymoon) e com valores de θ que posicionam o veículo espacial mais próximo do secundário. Conforme Llibre e Simó (1980), é sabido que as regiões acima da variedade estável representam órbitas de energia de dois corpos positiva (órbitas hiperbólicas), que estão deixando o sistema em direção ao infinito. Por causa

disso, essas órbitas não colidem com o primário, pois estão deixando o sistema, e no caso do sistema Didymain-Didymoon ($\mu = 0,009469696$) o primário está muito próximo ao baricentro, praticamente sem movimento. No entanto, essas órbitas podem colidir com o secundário, que está orbitando o sistema, se seu posicionamento inicial for interno à sua órbita. A colisão com o secundário não ocorre para todos os valores de θ devido à comensurabilidade das órbitas do veículo espacial e do secundário, mas ocorre mais facilmente com os valores de θ que posicionam o veículo espacial inicialmente mais próximo do secundário, por exemplo para $\theta = 180^\circ$ (Figura 3.19(b)). Por outro lado, para β negativo, a partir da variedade instável (serão referidas como regiões abaixo da variedade instável), é muito comum o veículo espacial colidir com o primário e o secundário. A partir de Llibre e Simó (1980), é sabido que a variedade instável e as órbitas abaixo dela vêm do infinito em direção ao sistema. Essas órbitas têm energia de dois corpos positiva (órbitas hiperbólicas). Esse tipo de órbita não colide com o primário somente nos casos em que o periapsis é maior que o raio equatorial do corpo. A colisão com o secundário dependerá da comensurabilidade entre a órbita do veículo espacial e a órbita do secundário.

As trajetórias mostradas nas Figuras 3.19(a) e 3.19(b) exemplificam os mesmos tipos de órbitas encontradas nas grades para $C = [-2.5, 1.5]$. Para esses valores de C , as órbitas sobreviventes ou são internas à órbita do secundário (trajetórias (i)-(m) das Figuras 3.19(a) e 3.19(b)) ou estão cruzando a órbita do secundário (trajetórias (f)-(h) das Figuras 3.19(a) e 3.19(b)). As órbitas para esses valores de C apresentam uma maior probabilidade de colisão quando comparar com as órbitas para o intervalo de $C = [-9.75, -2.75]$ e $C = [3.25, 9.75]$. Por essa razão não é recomendado utilizar condições iniciais das órbitas sobreviventes para esses valores de C , quando pretende-se permanecer por um longo período de tempo. No entanto, essas órbitas são boas alternativas para o lançamento do CubeSat em L_4 ou L_5 , porque, para esse intervalo, os pontos L_4 e L_5 estão abertos e alguns tipos de órbitas encontradas passam perto desses pontos.

Figura 3.20 - Tempo final de grades de condições iniciais de distância do baricentro e β , para $C = -0.750$.



As Figuras 3.20(a) e 3.20(b) mostram os resultados das grades de condições iniciais de β e distância do baricentro, para $C = -0,75$, $\theta = 105^\circ$ e 255° , respectivamente. A barra de cores mostra o tempo final das simulações. Essas figuras mostram outra simetria importante, que prova que as órbitas das regiões de sobrevivência dentro da variedade, marcadas em preto sólido, são órbitas quase periódicas. Considere uma linha perpendicular ao eixo y , uma órbita periódica que cruza essa linha em y positivo com o ângulo $\beta = \beta_0$, cruzará a linha em y negativo com $\beta = -\beta_0$. Esse comportamento pode ser observado nas Figuras 3.20(a) e 3.20(b), onde as regiões de sobrevivência em $\theta = 105^\circ$ aparecem invertidas em $\theta = 255^\circ$. Portanto, dado um θ_0 , essa simetria ocorrerá ao longo de $\theta_1 = \theta_0$ e $\theta_2 = 360^\circ - \theta_0$.

3.4.2 Órbitas ao redor de L_4 e L_5 do sistema Didymos

Esta seção apresenta os resultados da fase da missão AIDA, que tem como objetivo posicionar dois CubeSats nos pontos Lagrangianos L_4 , em θ igual a 240° , e L_5 , em θ igual a 120° . Mais detalhes sobre esta fase podem ser encontrados em [Manghi et al. \(2018\)](#).

O μ do sistema Didymain-Didymoon é igual a 0,009469696, valor esse abaixo do valor crítico de μ que é igual a 0,038520896504551, o que indica que o sistema possui órbitas estáveis em torno dos pontos L_4 e L_5 (SZEBEHELY, 1967). Outro ponto a ser observado é a ausência de órbitas *horseshoe*, uma vez que o μ do sistema é maior que o valor crítico de μ para órbitas *horseshoe* estáveis, que é aproximadamente 0,000833333 (ČUK et al., 2012).

Figura 3.21 - Resultados que mostram o tempo final para simulações de 200 períodos, para diferentes condições iniciais de distância do baricentro e β . θ inicial igual a 240° , portanto o veículo espacial está posicionado no entorno de L_4 . $C = 2.9906199791$, valor esse no limite para o ponto L_4 estar aberto, ou seja, para valores maiores L_4 está fechado. As trajetórias são apresentadas no referencial rotacional e suas condições iniciais são dadas pela Tabela 3.5.

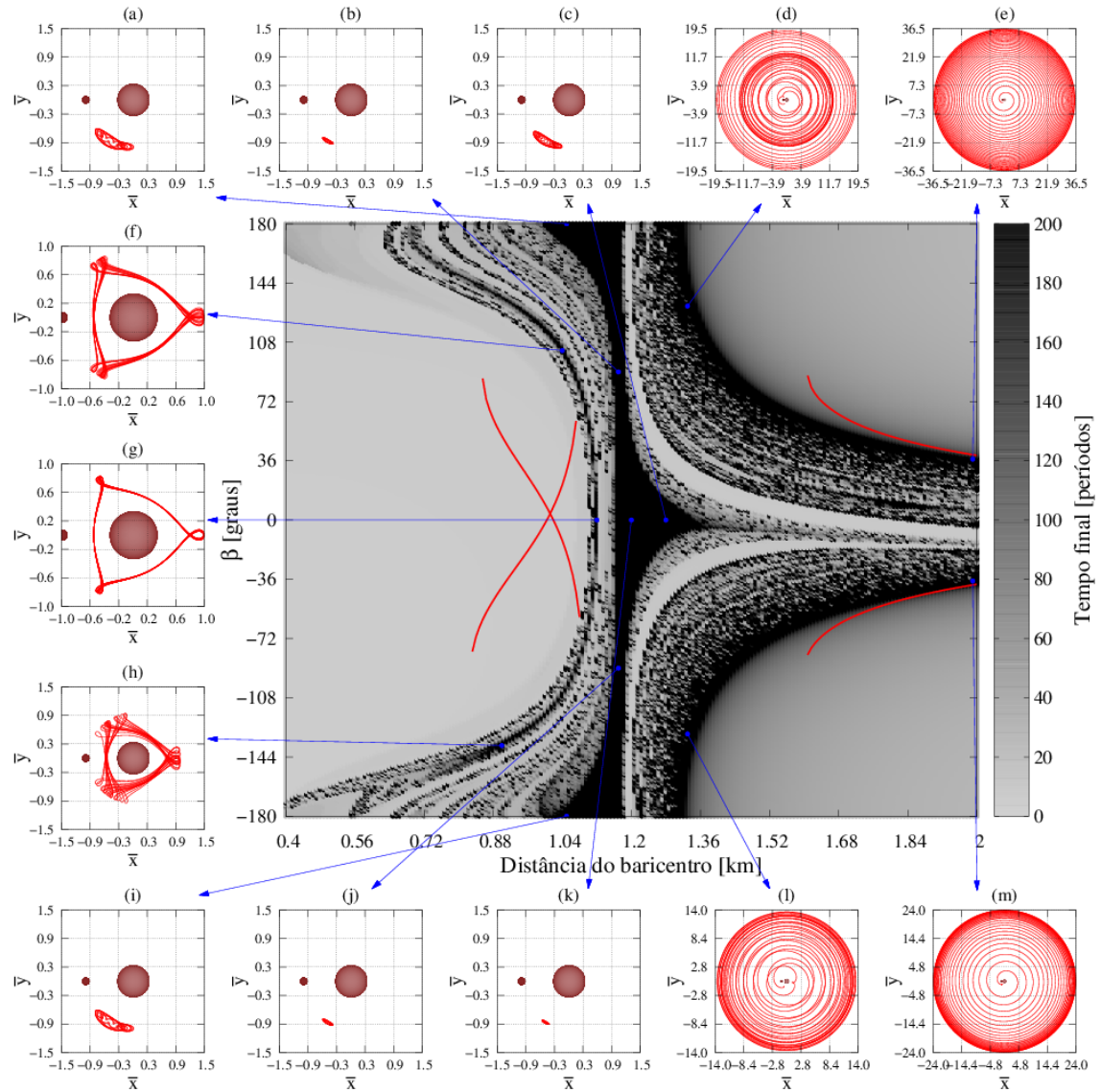


Tabela 3.5 - Condições iniciais das trajetórias da Figura 3.21.

Trajectoria	C	r [km]	θ [°]	β [°]
(a)	2,9906199791	1,050	240,000	180,000
(b)	2,9906199791	1,170	240,000	90,000
(c)	2,9906199791	1,280	240,000	0,000
(d)	2,9906199791	1,330	240,000	130,000
(e)	2,9906199791	1,990	240,000	37,000
(f)	2,9906199791	1,040	240,000	103,000
(g)	2,9906199791	1,120	240,000	0,000
(h)	2,9906199791	0,900	240,000	-137,000
(i)	2,9906199791	1,050	240,000	-180,000
(j)	2,9906199791	1,170	240,000	-90,000
(k)	2,9906199791	1,200	240,000	0,000
(l)	2,9906199791	1,330	240,000	-130,000
(m)	2,9906199791	1,990	240,000	-37,000

Figura 3.22 - O mesmo da Figura 3.21, mas para θ inicial igual a 120° , portanto, o veículo espacial está posicionado no entorno de L_5 . As trajetórias são apresentadas no referencial rotacional e suas condições iniciais são dadas pela Tabela 3.6.

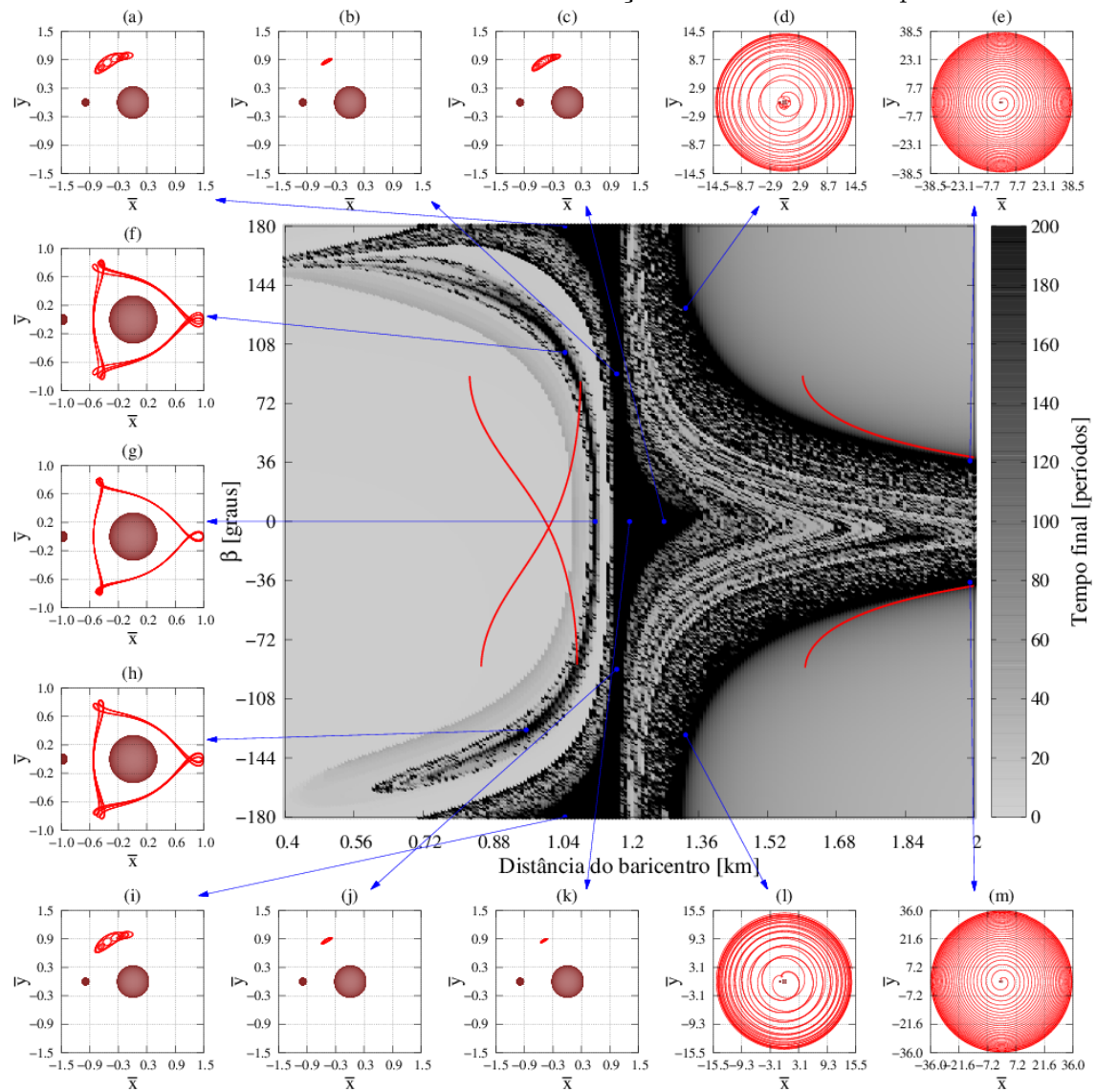


Tabela 3.6 - Condições iniciais das trajetórias da Figura 3.22.

Trajectoria	C	r [km]	θ [°]	β [°]
(a)	2,9906199791	1,050	120,000	180,000
(b)	2,9906199791	1,170	120,000	90,000
(c)	2,9906199791	1,280	120,000	0,000
(d)	2,9906199791	1,330	120,000	130,000
(e)	2,9906199791	1,990	120,000	37,000
(f)	2,9906199791	1,050	120,000	103,000
(g)	2,9906199791	1,120	120,000	0,000
(h)	2,9906199791	0,960	120,000	-127,000
(i)	2,9906199791	1,050	120,000	-180,000
(j)	2,9906199791	1,170	120,000	-90,000
(k)	2,9906199791	1,200	120,000	0,000
(l)	2,9906199791	1,330	120,000	-130,000
(m)	2,9906199791	1,990	120,000	-37,000

As Figuras 3.21 e 3.22 mostram grades para diferentes condições iniciais de r e β , para simulações de até 200 períodos, com $\theta = 240^\circ$ (ponto L_4) e 120° (ponto L_5), respectivamente. Nos dois casos, $C = C_{45} = 2,9906199791$ (Tabela 3.1). As regiões no entorno de L_4 e L_5 são fechadas pela curva de velocidade zero para valores maiores que C_{45} . As barras coloridas mostram o tempo final das simulações. Todos os critérios de parada apresentados anteriormente foram considerados. As Tabelas 3.5 (Figura 3.21) e 3.6 (Figura 3.22) mostram as condições iniciais das trajetórias (a)-(m). As diferenças nas regiões de sobrevivência das Figuras 3.21 e 3.22 são mínimas, o que é esperado pela simetria do sistema. Em ambas, a principal região de sobrevivência se estende no intervalo $\beta = [-180^\circ, 180^\circ$, como é possível notar nas trajetórias (a)-(c) e (i)-(k). Todas as órbitas nesta região são órbitas quasi-periódicas em torno dos pontos Lagrangianos correspondentes, da Figura 3.21 em torno de L_4 e Figura 3.22 em torno de L_5 . Regiões de sobrevivência formadas por órbitas de ressonância 3:1 de movimento médio também foram encontradas. Esta região é representada pelas trajetórias (f)-(h). Essa família de órbitas são boas alternativas para o veículo espacial mãe permanecer por curtos períodos de tempo para lançar os CubeSats. A partir dessas órbitas seria possível lançar em L_4 e L_5 . Por fim, existem regiões de sobrevivência próximas às variedades. As trajetórias (d) e (e) estão localizadas perto da variedade estável e as trajetórias (l) e (m) estão localizadas perto da variedade instável. A explicação para essas órbitas sobreviventes é a mesma da seção anterior, essas órbitas estão escapando lentamente do sistema. Voltando às Figuras 3.12(b)- 3.12(g), que mostram grades com resultados semelhantes às Figuras 3.21 e 3.22, é possível notar que, para $C = [1.75, 3]$, as órbitas dos variedade estável e instável sobrevivem.

A seguir, a sensibilidade das órbitas sobreviventes das Figuras 3.21 e 3.22 é analisada para pequenas variações de C no entorno de C_{45} .

Figura 3.23 - Sensibilidade das órbitas sobreviventes dos casos para C_{45} (Figuras 3.21 e 3.22) considerando desvios em C . As Figuras (a) e (c) mostram os resultados do desvio de 0 até $-0,01$ para L_4 e L_5 , respectivamente. As Figuras (b) e (d) mostram os resultados do desvio de 0 até $-0,09$ para L_4 e L_5 , respectivamente.

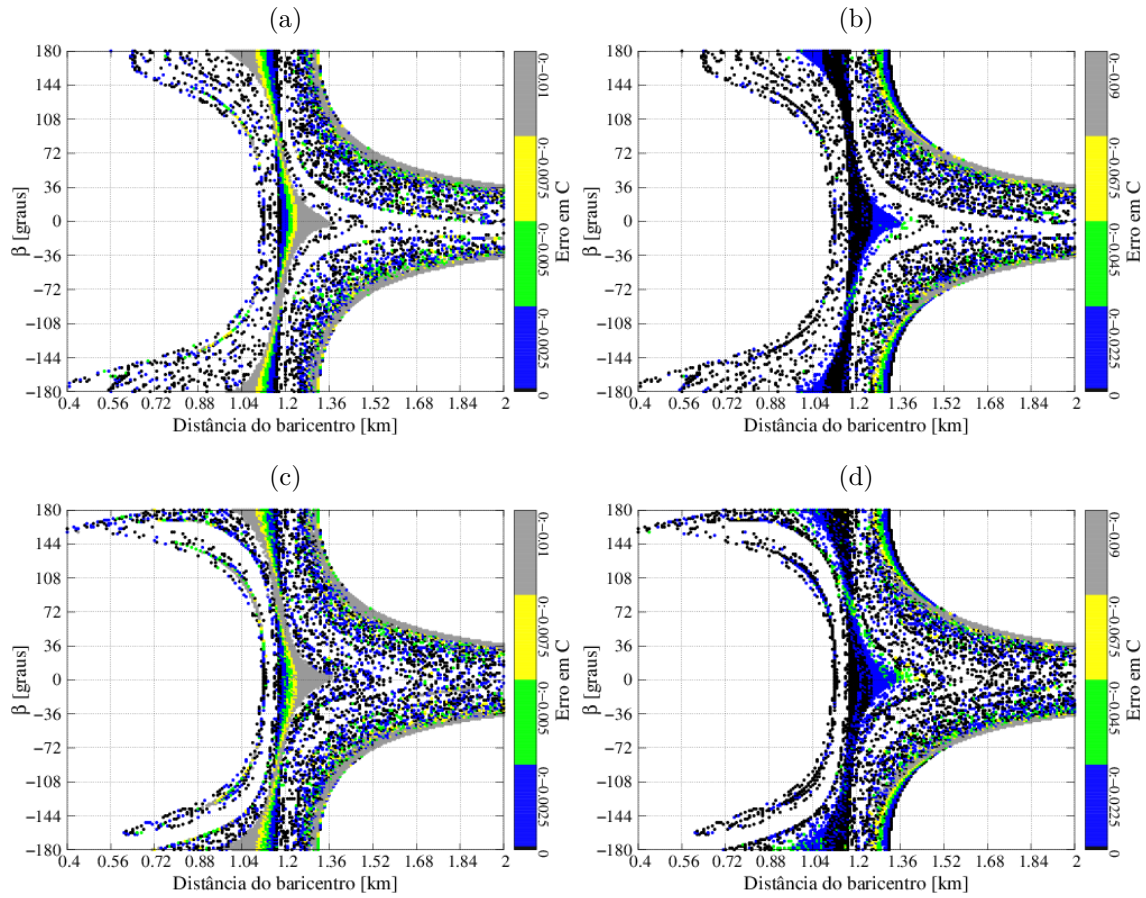


Tabela 3.7 - Módulo da velocidade do veículo espacial no torno de L_4 ou L_5 em cm/s , para C diminuindo de 2,9906199791 até 2,9806199791 e distância do baricentro igual a 1,1788272742 km .

C	Erro em C	Velocidade [cm/s]	Erro na velocidade [cm/s]
2,9906199791	0,0000	1,7952444341	0,0000000000
2,9881199791	-0,0025	1,9922826647	-0,1970382306
2,9856199791	-0,0050	2,1715151056	-0,3762706715
2,9831199791	-0,0075	2,3370420389	-0,5417976048
2,9806199791	-0,0100	2,4915965022	-0,6963520681

Tabela 3.8 - Módulo da velocidade do veículo espacial no torno de L_4 ou L_5 em cm/s , para C diminuindo de 2,9906199791 até 2,9006199791 e distância do baricentro igual a 1,1788272742 km .

C	Erro em C	Velocidade $[cm/s]$	Erro na velocidade $[cm/s]$
2,9906199791	0,0000	1,7952444341	0,0000000000
2,9681199791	-0,0225	3,1526958811	-1,3574514470
2,9456199791	-0,0450	4,0811861094	-2,2859416753
2,9231199791	-0,0675	4,8345288085	-3,0392843744
2,9006199791	-0,0900	5,4853675849	-3,6901231508

A Tabela 3.7 corresponde às Figuras 3.23(a) (L_4) e 3.23(c) (L_5), que os resultados das simulações para variações em C no entorno de C_{45} de 0 até $-0,01$. Os resultados do desvio de velocidade são dados em cm/s e para a distância inicial em 1,178452742 km , ou seja, a distância de L_4 e L_5 ao baricentro. Pode-se observar que um desvio máximo de $-0,01$ em C_{45} é equivalente a um erro na velocidade inicial de $-0,6963520681$ cm/s . As Figuras 3.23(a) e 3.23(c) mostram que as principais regiões de sobrevivência, onde as órbitas estão no entorno de L_4 e L_5 , estão degradadas em comparação ao resultados para $C = C_{45}$ (Figuras 3.21 e 3.22). A degradação aumenta à medida que a variação aumenta até atingir o valor máximo de $-0,01$. As regiões que mais resistem a variação de $-0,01$ são aquelas nas proximidades de $\beta = 0^\circ$ e $\pm 180^\circ$ e as regiões próximas às variedades (linhas vermelhas presentes nas Figuras 3.21 e 3.22). A região próxima a $\beta = 0^\circ$, onde se localizam as órbitas em ressonância 3:1, não é tolerante a desvios em C_{45} , especialmente no caso de L_4 . Contudo, para L_5 com valores de β distantes de 0° (trajetórias (f) e (h) da Figura 3.22), é possível encontrar pequenas regiões de sobrevivência até variações em C_{45} de $-0,01$. A Tabela 3.8, correspondente às Figuras 3.23(b) e 3.23(d), mostra o mesmo que a Tabela 3.7, mas para variações em C_{45} de 0 até $-0,09$. Esse desvio máximo no valor de C_{45} também pode parecer pequeno, mas representa um erro na velocidade inicial de $-3,6901231508$ cm/s . É possível notar nas Figuras 3.23(b) e 3.23(d) que esse desvio foi suficiente para fazer desaparecer as regiões de sobrevivência onde as órbitas no entorno de L_4 e L_5 estavam concentradas. A única região que sobreviveu foi aquele com condições iniciais próximas às variedades. As órbitas em torno de L_4 e L_5 foram tolerantes até uma a variação em C_{45} de $-0,0225$, o que equivale a um erro de velocidade de $-1,3574514470$ cm/s .

Figura 3.24 - Esta figura mostra o tempo final das simulações para diferentes condições iniciais de θ e β . A distância inicial do baricentro é igual a 1,178452742 km, que é a mesma distância de L_4 e L_5 do baricentro. C é igual a 2.9906199791, o mesmo das Figuras 3.21 e 3.22. A condição inicial de cada trajetória é dada pela Tabela 3.9.

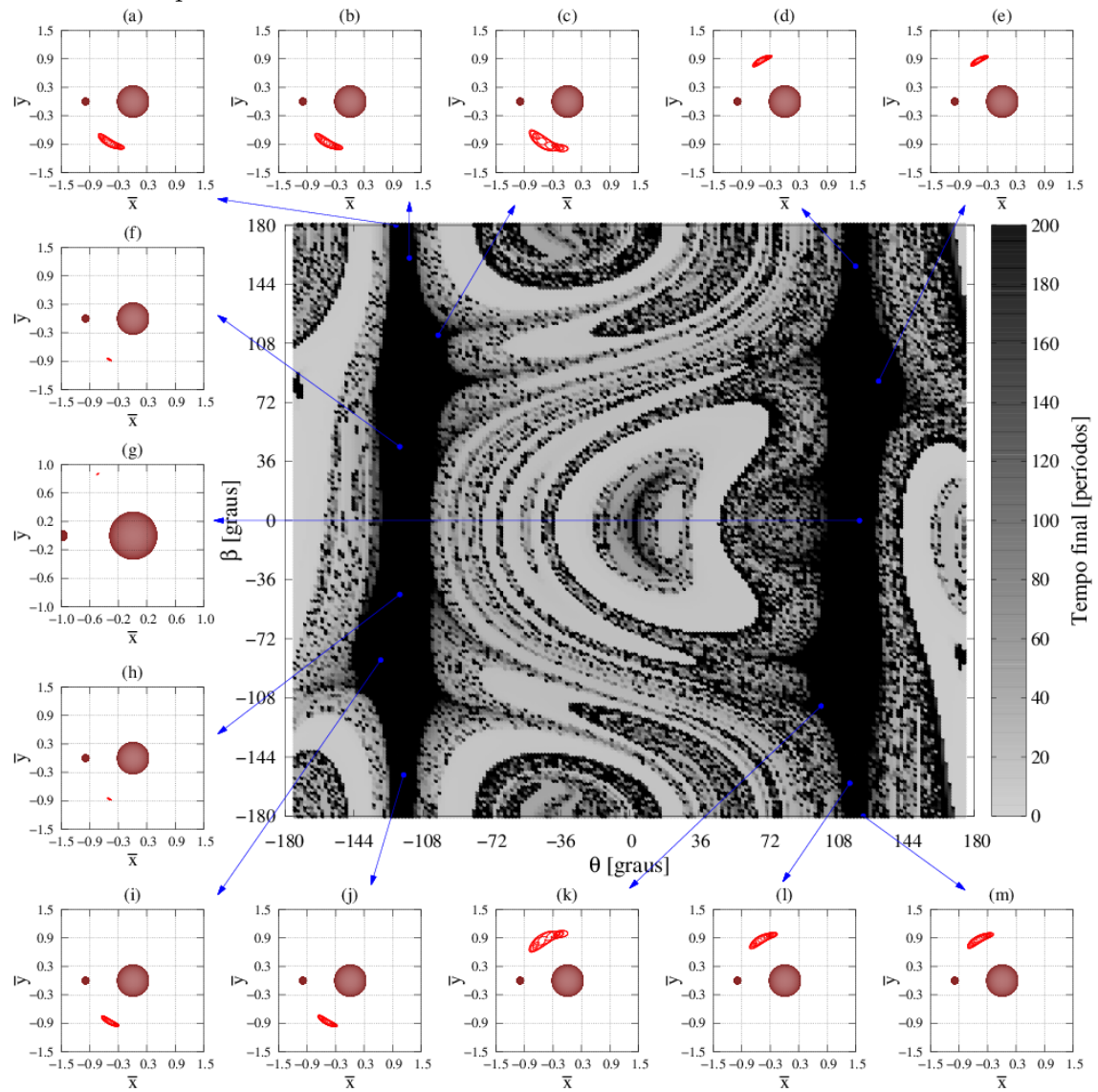


Tabela 3.9 - Condições iniciais das trajetórias da Figura 3.24.

Trajectoria	C	r [km]	θ [°]	β [°]
(a)	2,9906199791	1,178452742	-122,000	180,000
(b)	2,9906199791	1,178452742	-115,000	160,000
(c)	2,9906199791	1,178452742	-100,000	113,000
(d)	2,9906199791	1,178452742	118,000	155,000
(e)	2,9906199791	1,178452742	130,000	85,000
(f)	2,9906199791	1,178452742	-120,000	45,000
(g)	2,9906199791	1,178452742	120,000	0,000
(h)	2,9906199791	1,178452742	-120,000	-45,000
(i)	2,9906199791	1,178452742	-130,000	-85,000
(j)	2,9906199791	1,178452742	-118,000	-155,000
(k)	2,9906199791	1,178452742	100,000	-113,000
(l)	2,9906199791	1,178452742	115,000	-160,000
(m)	2,9906199791	1,178452742	122,000	-180,000

Os resultados anteriores mostraram condições iniciais de r e β de órbitas que sobreviveram por até 200 períodos. Também foi analisada a tolerância dessas órbitas a variações de C no entorno de C_{45} . A seguir, é feito o mapeamento das órbitas no entorno de L_4 e L_5 em relação ao θ inicial e ao β inicial. Para isso são consideradas as seguintes condições iniciais: $r = 1,178452742$ km e C_{45} . A Figura 3.24 apresenta os resultados para as duas regiões no entorno de L_4 e L_5 . Por conveniência, somente nesta parte dos resultados θ foi ajustado para o intervalo $\theta = [-180, 180]$, para que L_4 esteja em $\theta = -120^\circ$ e L_5 em $\theta = 120^\circ$. A Tabela 3.9 mostra as condições iniciais das trajetórias da Figura 3.24. É possível notar que as órbitas no torno de L_4 e L_5 são tolerantes à variações no θ inicial. As trajetórias (c), (e), (i) e (k) estão separadas por 10° dos pontos Lagrangianos correspondentes. No entanto, as regiões de sobrevivência se aproximam de 0° e $\pm 180^\circ$. Um ponto interessante a ser observado aqui é que, utilizando este tipo de mapa de condições iniciais é possível encontrar órbitas *horseshoe* no caso de existirem. As órbitas *horseshoe* apareceriam por uma região de sobrevivência bem definida conectando as regiões de sobrevivência em torno de $\theta = -120^\circ$ e 120° . Como mencionado anteriormente, para o valor de μ do sistema Didymain-Didymoon, não existem órbitas *horseshoe* estáveis. Logo, não há uma região de sobrevivência conectando $\theta = -120^\circ$ e 120° . A Figura 3.24 mostra a existência de estruturas conectando essas regiões, mas elas estão degradadas. As trajetórias (c) e (k) foram escolhidas no limite do que seria um desses túneis que conectam as regiões, onde pode-se notar que essas órbitas têm uma amplitude maior.

Figura 3.25 - Sensibilidade das órbitas sobreviventes dos casos da Figura 3.24 à variações em C . A figura (a) mostra os resultados do desvio de 0 até $-0,01$. A figura (b) mostra os resultados do desvio de 0 até $-0,09$.

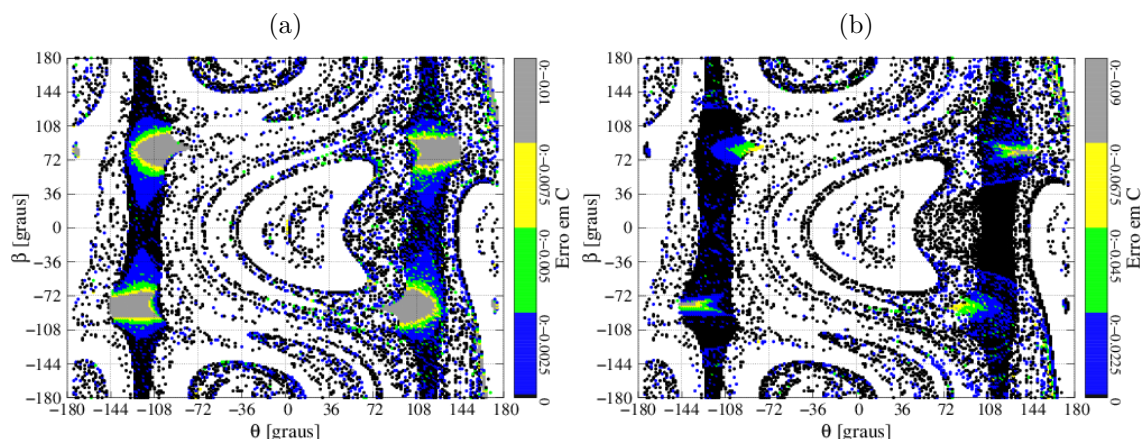
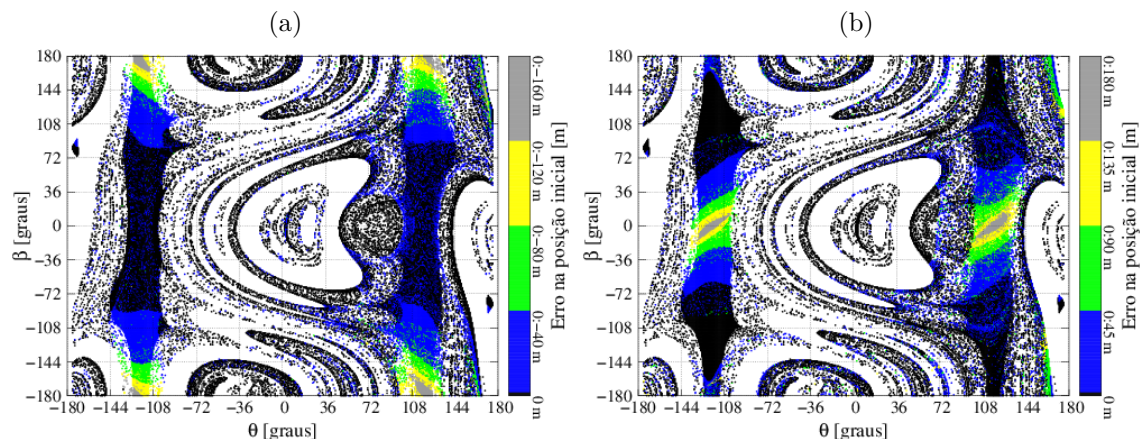


Figura 3.26 - Sensibilidade das órbitas sobreviventes dos casos da Figura 3.24 à variações na posição inicial. A figura (a) mostra os resultados para desvios de 0 até -160 metros. A figura (b) mostra os resultados para desvios de 0 até 180 metros.



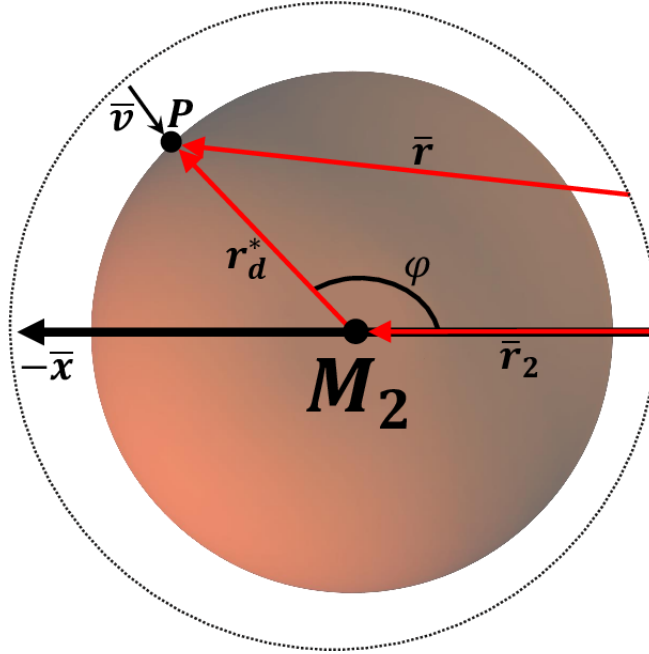
Por último, é feita a análise de sensibilidade das órbitas sobreviventes da Figura 3.24. Primeiro, é analisada a tolerância às variações de C no entorno de C_{45} , onde foram utilizados os mesmos intervalos de variações das Figuras 3.23(a) - 3.23(d), representados nas Tabelas 3.7 e 3.8 para a distância de $1,178452742$ km. É possível notar nas Figuras 3.25(a) e 3.25(b) que as regiões nos intervalos $\beta = [-72^\circ, -108^\circ]$ e $\beta = [72^\circ, 108^\circ]$ têm maior tolerância a variações de C , onde para o desvio máximo

de $-0,09$ existem regiões de sobrevivência no torno de L_4 e L_5 . No entanto, não há regiões de sobrevivência para $\theta = -120^\circ$ ou $\theta = 120^\circ$, e é por isso que não existem órbitas no torno desses pontos que sobrevivam para o desvio igual a $-0,09$ nas Figuras 3.23(b) e 3.23(d). Também foi feita a análise da sensibilidade a variações em r no entorno de $r = 1,178452742$ km, como mostrado na Figura 3.26(a), que considera um desvio negativo na posição inicial (posição inicial menor que $1,178452742$ km), quando o erro aumenta até -160 metros, a região fica restrita à vizinhança de $\beta = \pm 180^\circ$. Já na Figura 3.26(b), onde o erro considerado é positivo (posição inicial maior que $1,178452742$ km), conforme o erro aumenta para o máximo de 180 metros, a região de sobrevivência está se restringindo a vizinhança de $\beta = 0^\circ$.

3.4.3 Trajetórias de pouso do módulo MASCOT-2 sobre Didymoon

Nesta seção é feita a análise da fase de lançamento do módulo de aterrissagem MASCOT-2, mais detalhes sobre esta fase da missão AIDA podem ser encontrados Ho et al. (2016). O estudo a seguir procurou encontrar condições iniciais para o pouso do módulo MASCOT-2 sobre Didymoon. Essa fase da missão será muito complexa, pois o módulo não possui sistema de controle de órbita e de pouso. Portanto, o módulo colidirá com a superfície de Didymoon e um erro na velocidade final pode levar a completa destruição do mesmo. De modo que, para garantir uma colisão em baixa velocidade com a superfície de Didymoon, até 8 km/s de acordo com Ferrari e Lavagna (2018), é necessário trabalhar com valores de C no limite de fechamento da curva de velocidade $C_2 = 3,1496227081$ (Tabela 3.1).

Figura 3.27 - Geometria utilizada para identificar a posição do pouso sobre Didymoon.



Considere o sistema de coordenadas apresentado pela Figura 3.27, em que: P é o ponto de colisão do veículo espacial em Didymoon; u é o vetor de velocidade no momento da colisão; $\bar{\mathbf{r}}_2$ é o vetor posição Didymoon-baricentro; \mathbf{r}_d^* é o vetor posição do ponto P em relação a um sistema de coordenadas definido em Didymoon, em que r_d^* é o raio de Didymoon; $\bar{\mathbf{r}}$ é o vetor posição do ponto P em relação ao baricentro do sistema Didymain-Didymoon, dado por:

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_2 + \mathbf{r}_d^* = \begin{bmatrix} \mu - 1 + r_d^* \cos \varphi \\ r_d^* \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Figura 3.28 - Valor de C na superfície de Didymoon para a velocidade de colisão de 8 cm/s , considerando valores diferentes para o raio de Didymoon.

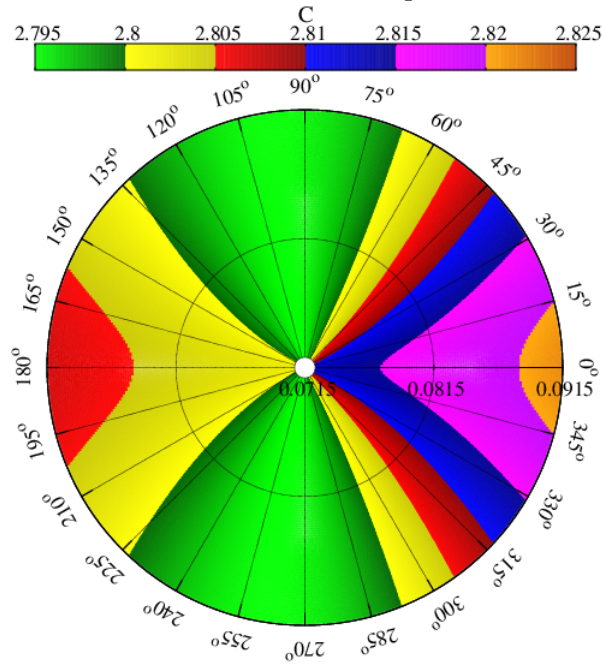


Tabela 3.10 - C mínimo e máximo para a colisão a 8 cm/s para r_d^* igual a 0,0715, 0,0815 e 0,0915 e o correspondente ϕ .

Raio equatorial de Didymoon	C_{min}	φ_{min} para C_{min} [°]	C_{max}	φ_{max} para C_{max} [°]
0,0715	2,7950	100,8000	2,8125	0,0000
0,0815	2,7950	99,0000	2,8168	0,0000
0,0915	2,7950	97,2000	2,8217	0,0000

Como mencionado anteriormente, as observações mostram que Didymoon possui uma forma elipsoidal, porém, o estudo considerou sua forma como sendo esférica com 0,163 km de diâmetro (Tabela 2.1). A Figura 3.28 mostra o valor de C na superfície de Didymoon para a velocidade de 8 cm/s . Para essa análise foram consideradas variações de 0 até ± 10 metros no valor nominal de $r_d^* = 0,0815$ km. Conforme definido na Figura 3.27, $\varphi = 0^\circ$ está voltado para L_1 e $\varphi = 180^\circ$ para L_2 . Os valores de C encontrados estão dentro do intervalo $C = [2.795, 2.825]$, para o qual a curva de velocidade está completamente aberta, pois são menores que C_4 (Tabela 3.1). Pode-se observar que, para o valor mínimo de $r_d^* = 0,0715$ km, os valores mais

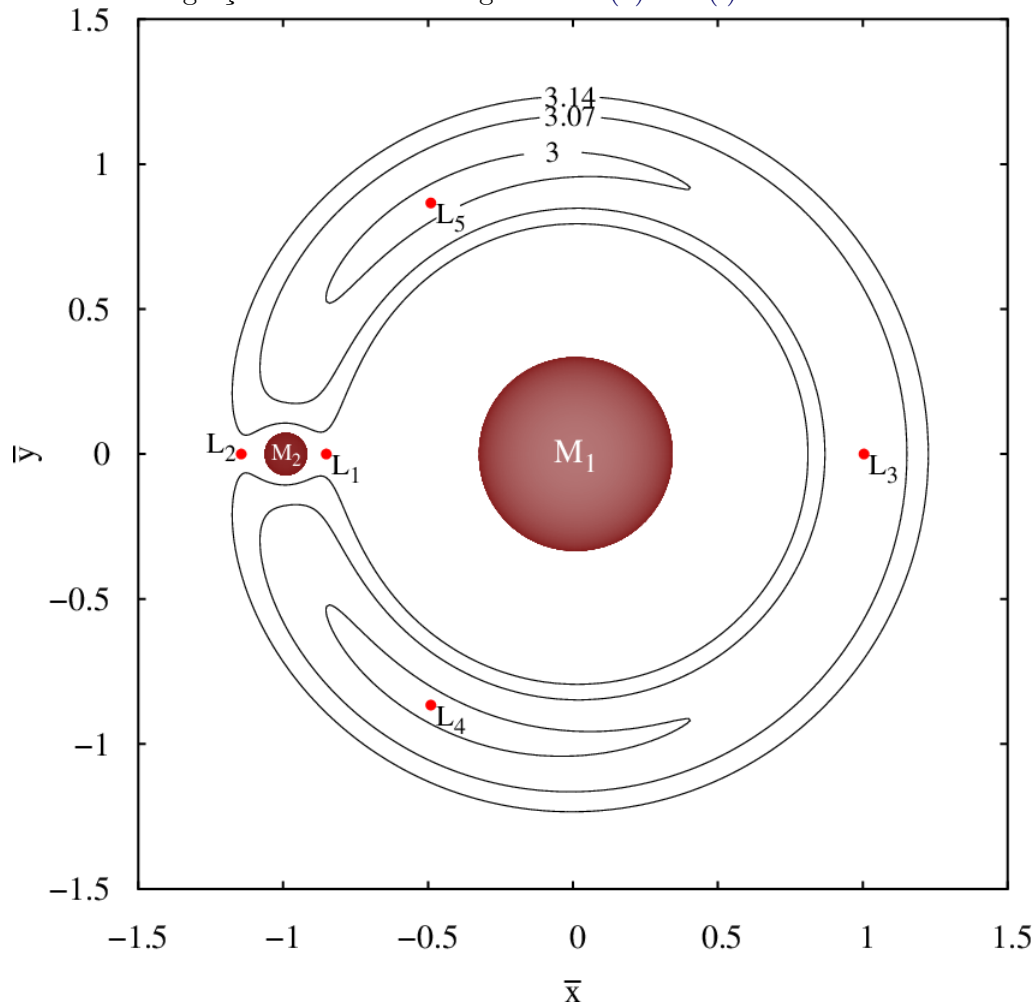
baixos de C , $C = [2.795, 2.8]$ (região verde), estão nos intervalos $\varphi = [60^\circ, 150^\circ]$ e $\varphi = [210^\circ, 300^\circ]$. A amplitude dessas regiões diminui até atingir $r_d^* = 0,0915$ km, variando do intervalo $\varphi = [67.5^\circ, 134^\circ]$ até $\varphi = [224^\circ, 292.5^\circ]$. Essas regiões contêm os valores mínimos de C para os diferentes valores de r_d^* considerados. A Tabela 3.10 apresenta os valores mínimos de C para os valores mínimos, nominais e máximos de r_d^* e os valores de φ correspondentes. Para todos os valores de r_d^* considerados, o mínimo de C é igual a 2,795. Como é possível notar na Tabela 3.10, C aumenta à medida que r_d^* aumenta e os valores mínimos de C estão no intervalo $C = [2.81, 2.825]$ (regiões azul, violeta e laranja) estão na face voltada para L_1 .

Tabela 3.11 - Velocidade para os valores de C da Figura 3.28 para a distância do baricentro igual a 1,550319548 km.

C	Velocidade [cm/s]	C	Velocidade [cm/s]
2,795000000	11,694859767	2,815000000	11,436758451
2,800000000	11,630871407	2,820000000	11,371317803
2,805000000	11,566529056	2,825000000	11,305498366
2,810000000	11,501826774	3,149622708	5,559633774

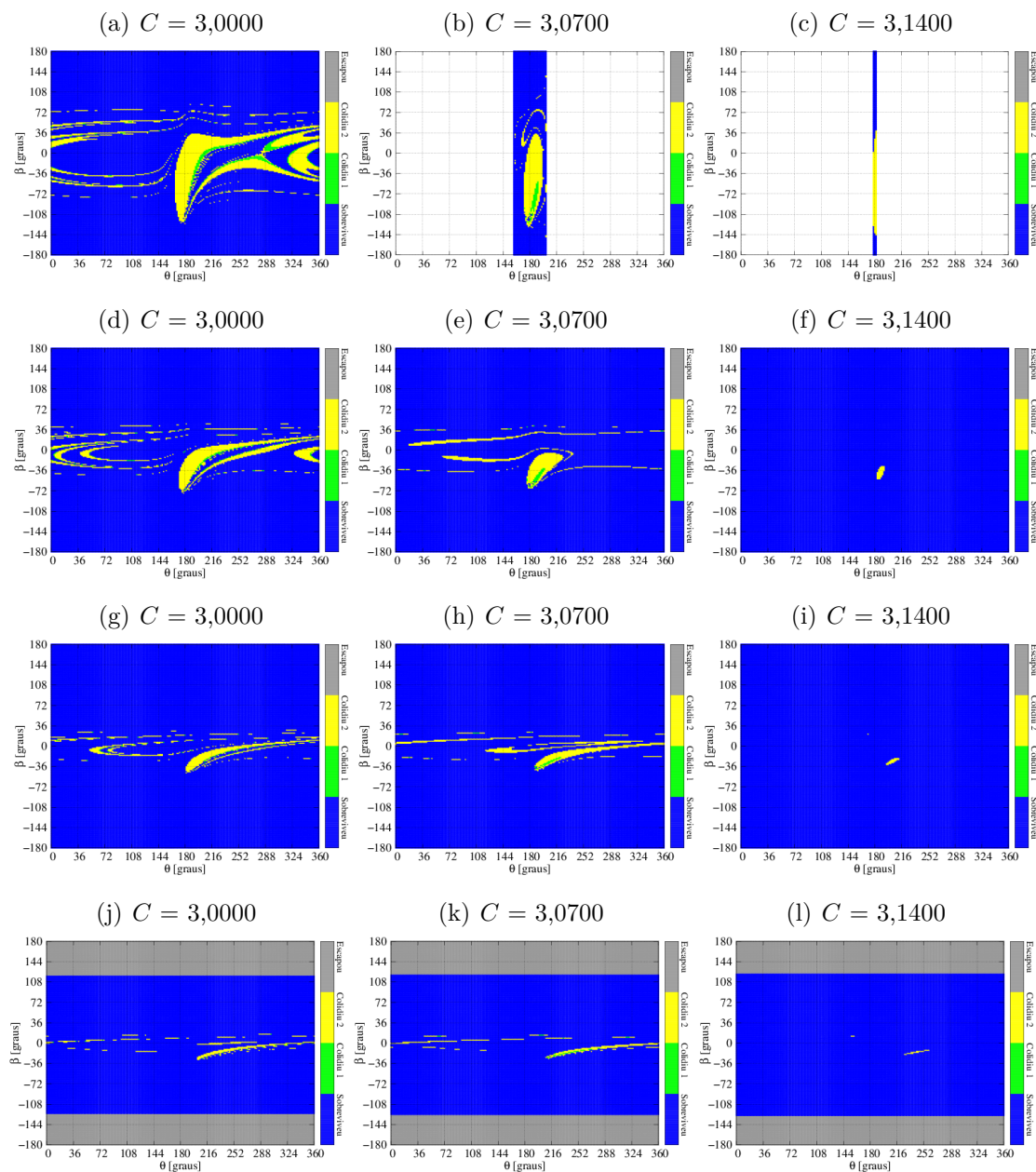
Depois de encontrar os valores de C na superfície de Didymoon para a velocidade de 8 cm/s é possível estudar como isso se relaciona com a velocidade de lançamento resultante. Um C mais baixo no momento da colisão significa uma velocidade de lançamento resultante mais alta e um C mais alto no momento da colisão significa uma velocidade de lançamento resultante mais baixa. O lançamento será feito a 200 metros a mais do que L_2 , que fica a 1,350319548 km/s do baricentro, em comparação com o baricentro, a 1,550319548 km/s. A Tabela 3.11 mostra que para o MASCOT-2 colidir com Didymoon com velocidade menor que 8 cm/s em qualquer ponto da superfície (Figura 3.28), a velocidade resultante do lançamento em $\theta = 180^\circ$ deve ser menor que 11,305498366 cm/s, onde $C = 2,825$. Como mencionado anteriormente, o MASCOT-2 não possui um sistema de controle de órbita, logo, um erro na escolha da condição inicial de lançamento seria irreversível. Assim, restringindo a abertura da curva de velocidade zero em L_2 com valores mais altos de C , as chances de erro são reduzidas. No entanto, é necessário prestar atenção ao limite de velocidade mínima de 5,559633774 cm/s (Tabela 3.11), para lançamentos 200 metros a mais de L_2 em relação ao baricentro em $\theta = 180^\circ$.

Figura 3.29 - Curvas de velocidade zero para C igual a 3, 3,07 e 3,14. Valores usados na integração numérica das Figuras 3.30(a)-3.30(l).



Na próxima etapa, os resultados das simulações numéricas são apresentados, onde foram utilizados os valores de C de 3, 3,07 e 3,14. A escolha desses valores, conforme mostra a Figura 3.29, foi feita para analisar as três situações possíveis para curva de velocidade zero: aberta em L_3 ($C = 3$), fechada em L_3 ($C = 3,07$) e restringindo a passagem do veículo espacial do exterior para o interior da curva que cerca o secundário, mas sem restringir excessivamente a região de entrada em L_2 ($C = 3,14$). Para estes valores a velocidade de pouso é menor que 8 cm/s.

Figura 3.30 - Grades para diferentes valores de C , de 3,0000 até 3,1400. Cada grade é calculada para condições iniciais de θ entre 0° e 360° ; e β entre -180° e 180° . A distância inicial em: (a), (b) e (c) estão sobre L_2 , a 1,350319548 km do baricentro; (d), (e) e (f) estão 200 metros além de L_2 ; (g), (h) e (i) estão 500 metros além de L_2 ; (j), (k) e (l) estão 1000 metros além de L_2 .



A Figura 3.30 mostra o status final das simulações para condições iniciais nos intervalos $\beta = [-180^\circ, 180^\circ]$ e $\theta = [0^\circ, 360^\circ]$. Para os valores de C 3, 3,07 e 3,14; e distâncias do baricentro igual a 1,350319548 km (sobre L_2), 1,550319548 km (200 metros além de L_2 em relação ao baricentro), 1,850319548 km (500 metros além

de L_2 em relação ao baricentro) e 2,350319548 km (1000 metros além de L_2 em relação ao baricentro). Nesta parte, o status resultado final desejado é a colisão com Didymoon, representada em amarelo na barra de status. Pode-se observar que, independentemente do valor de C , as regiões de colisão com Didymoon diminuem à medida que a distância de lançamento aumenta, mas para todas as diferentes configurações apresentadas, existem opções que levam a colisão. Os lançamentos com $C = 3$, Figuras 3.30(a), 3.30(d), 3.30(g) e 3.30(j), são os que permitem o maior número de combinações de θ e β que levam à colisão com Didymoon. Também é possível notar que as regiões amarelas diminuem com o aumento de C para 3,07 e 3,14.

A seguir, os resultados de lançamentos a 200 metros além de L_2 em relação ao baricentro são apresentados separadamente.

Figura 3.31 - Lançamento do módulo MASCOT-2 200 metros além de L_2 em relação ao baricentro. $C = 3,0$.

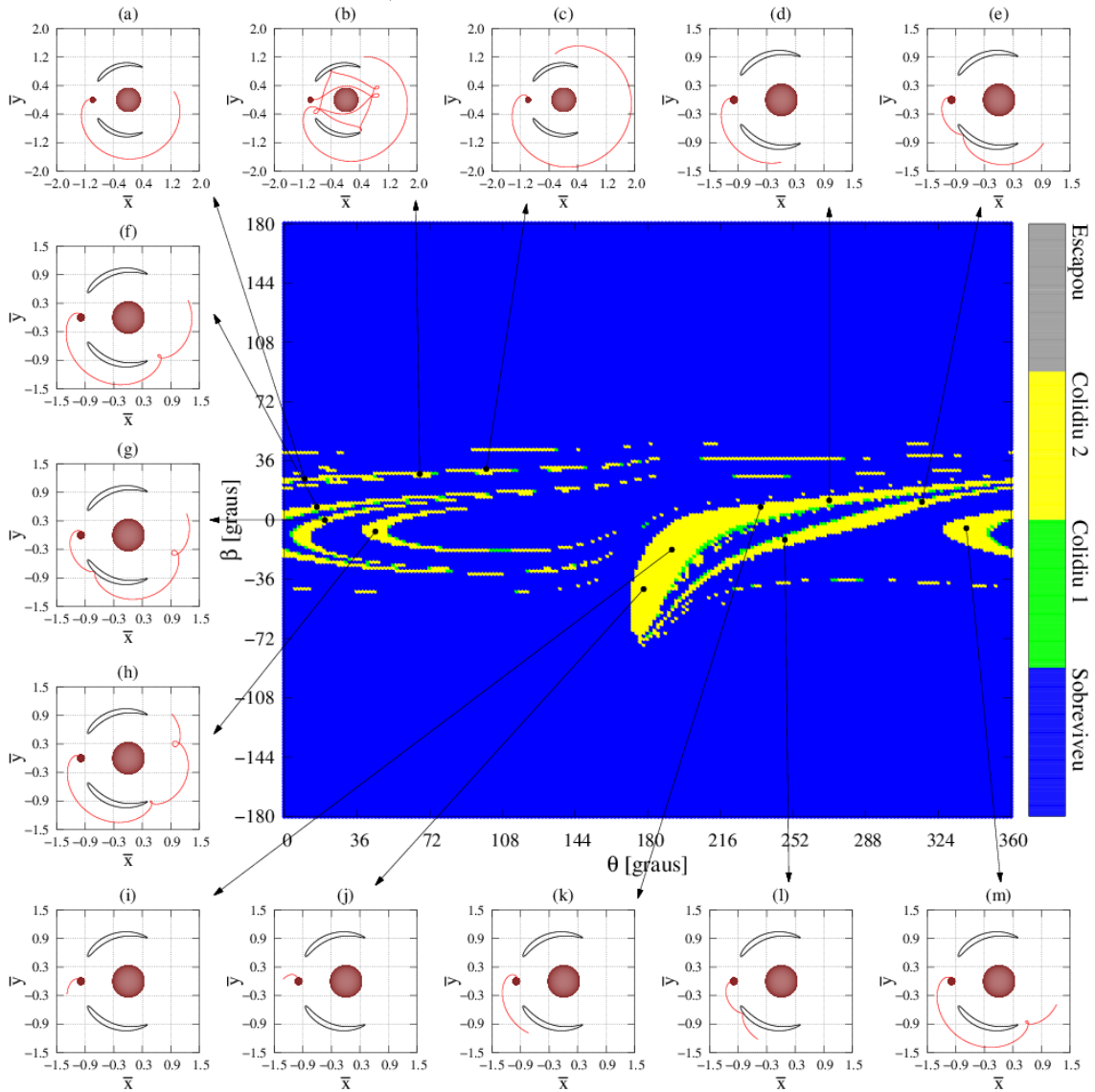


Tabela 3.12 - Condições iniciais das trajetórias da Figura 3.31.

Trajectoria	C	r [km]	θ [°]	β [°]	Tempo [períodos]	Tempo [dias]
(a)	3,000	1,550319548	10,000	25,000	6,865	3,410
(b)	3,000	1,550319548	67,000	28,000	32,495	16,139
(c)	3,000	1,550319548	100,000	31,000	9,225	4,582
(d)	3,000	1,550319548	270,000	12,000	4,215	2,093
(e)	3,000	1,550319548	316,000	11,000	9,675	4,805
(f)	3,000	1,550319548	16,000	8,000	12,280	6,099
(g)	3,000	1,550319548	20,000	0,000	16,700	8,294
(h)	3,000	1,550319548	45,000	-7,000	17,930	8,905
(i)	3,000	1,550319548	192,000	-18,000	1,050	0,521
(j)	3,000	1,550319548	178,000	-42,000	0,920	0,457
(k)	3,000	1,550319548	236,000	8,000	3,475	1,726
(l)	3,000	1,550319548	248,000	-12,000	6,615	3,285
(m)	3,000	1,550319548	338,000	-5,000	10,710	5,319

A Figura 3.31, que apresenta os resultados das simulações para o lançamento com $C = 3$, mostra que existem diferentes tipos de trajetórias que permitem colisão com Didymoon. A Tabela 3.12 apresenta as condições iniciais de cada uma das trajetórias apresentadas e o tempo de colisão. A escolha das condições iniciais resultantes do lançamento deve evitar situações como a trajetória (b), em que foram necessários mais de 16 dias para a colisão. De preferência, deve-se considerar trajetórias do tipo (i), (j) e (k), mais próximas do corpo e com menor tempo de colisão (Tabela 3.12). Uma trajetória de colisão como (b) representa um grande risco para os objetivos da missão, mas vale ressaltar que este é o único caso em que ocorre uma colisão no intervalo $\varphi = [345^\circ, 15^\circ]$, onde a velocidade de colisão será mais lenta (Figura 3.28). A região onde as trajetórias (i) e (j) estão localizadas é a principal, com os menores tempos de colisão e, como será mostrado a seguir, resiste ao aumento e diminuição de C e às variações na posição inicial. Na fronteira desta região é possível notar em verde um conjunto de condições iniciais para as quais ocorreria colisão com Didymain.

Figura 3.32 - Lançamento do módulo MASCOT-2 200 metros além de L_2 em relação ao baricentro. $C = 3,07$.

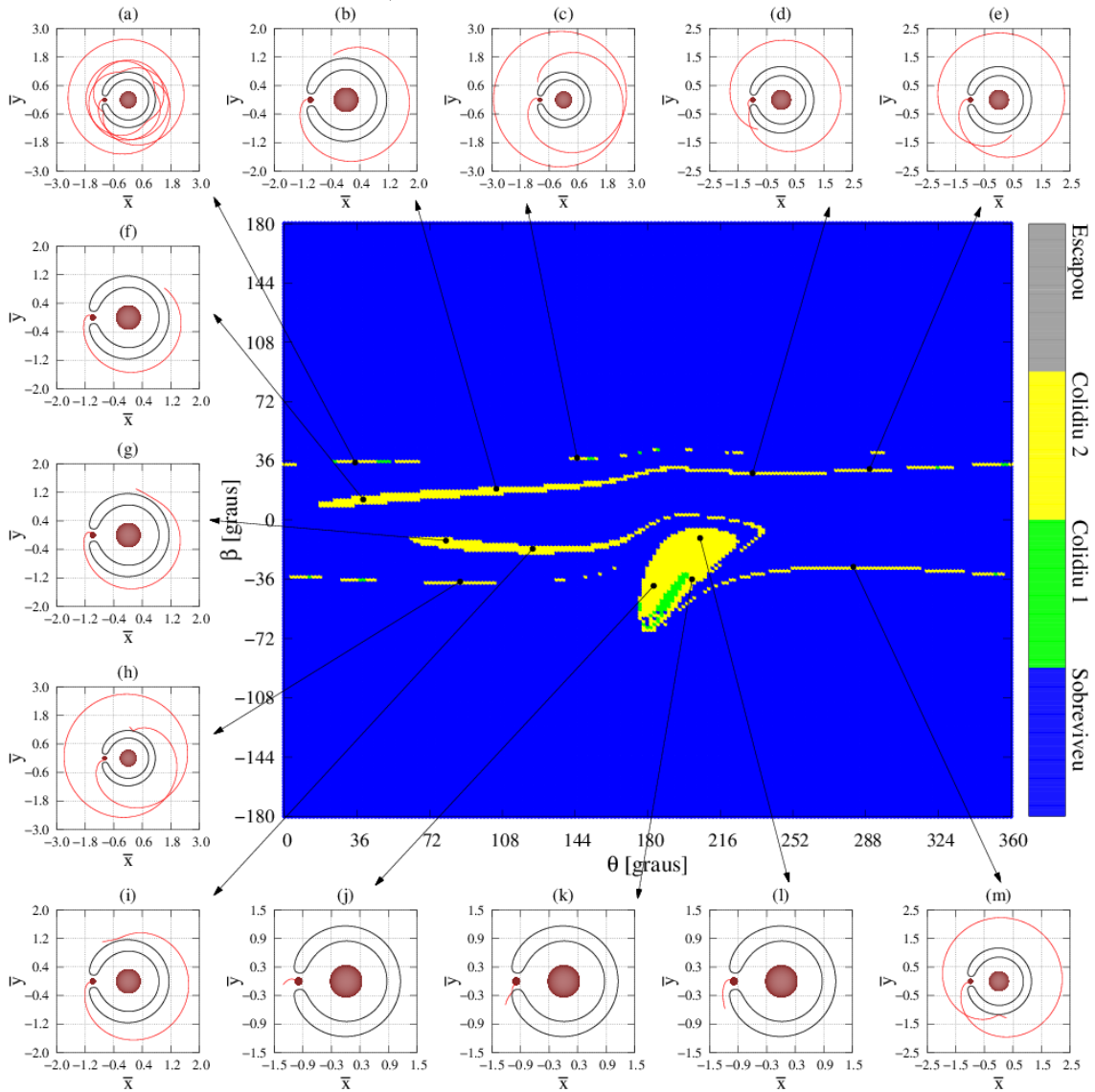


Tabela 3.13 - Condições iniciais das trajetórias da Figura 3.32.

Trajectoria	C	r [km]	θ [°]	β [°]	Tempo [períodos]	Tempo [dias]
(a)	3,070	1,550319548	35,000	35,000	59,220	29,413
(b)	3,070	1,550319548	105,000	19,000	10,180	5,056
(c)	3,070	1,550319548	145,000	37,800	17,295	8,590
(d)	3,070	1,550319548	232,000	28,500	14,055	6,981
(e)	3,070	1,550319548	290,000	31,000	13,365	6,638
(f)	3,070	1,550319548	39,000	12,500	9,550	4,743
(g)	3,070	1,550319548	80,000	-12,500	12,710	6,313
(h)	3,070	1,550319548	87,000	-37,500	18,305	9,091
(i)	3,070	1,550319548	123,000	-17,500	12,705	6,310
(j)	3,070	1,550319548	183,000	-40,000	0,905	0,449
(k)	3,070	1,550319548	202,000	-36,000	2,610	1,296
(l)	3,070	1,550319548	206,000	-11,000	2,065	1,026
(m)	3,070	1,550319548	282,000	-28,500	15,125	7,512

A Figura 3.32 apresenta o mesmo que a Figura 3.31, mas para $C = 3,07$, onde L_3 é fechado pela curva de velocidade zero e a colisão só é possível com o veículo passando por L_2 (Figura 3.29). Ao aumentar o valor de C diminuí-se a velocidade resultante do lançamento. Pode-se notar que as trajetórias têm uma forma semelhante, diferindo apenas em quantos períodos foram necessários para colidir, como mostra a Tabela 3.13. O fato de não haver epiciclos nas trajetórias indica que essas órbitas estão mais próximas das órbitas circulares. As trajetórias (j), (k) e (l) da Figura 3.32 estão localizadas na mesma região que as trajetórias (i) e (j) da Figura 3.31, e a região agora está melhor delineada. No entanto, é possível notar que ainda existe uma pequena região onde ocorrem colisões com Didymain.

Figura 3.33 - Lançamento do módulo MASCOT-2 200 metros além de L_2 em relação ao baricentro. $C = 3,14$.

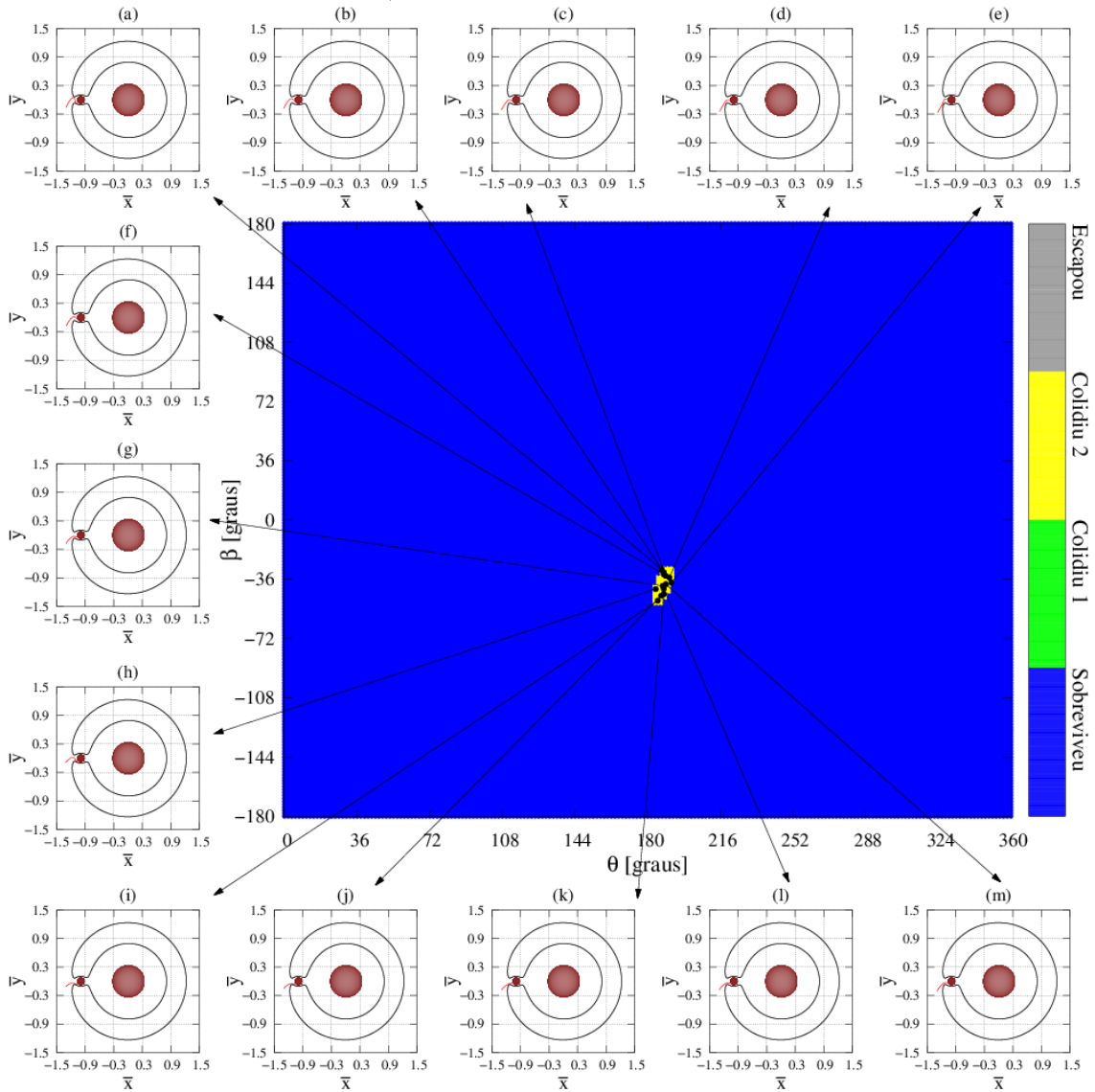
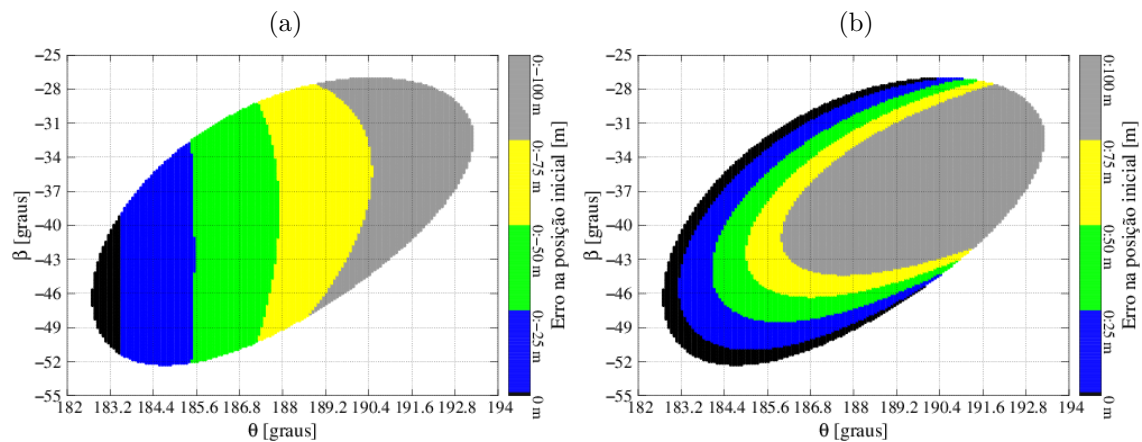


Tabela 3.14 - Condições iniciais das trajetórias da Figura 3.33.

Trajectoria	C	r [km]	θ [°]	β [°]	Tempo [períodos]	Tempo [dias]
(a)	3,140	1,550319548	187,000	-29,900	3,270	1,624
(b)	3,140	1,550319548	188,000	-31,800	2,030	1,008
(c)	3,140	1,550319548	189,000	-34,000	1,920	0,954
(d)	3,140	1,550319548	190,800	-35,000	2,120	1,053
(e)	3,140	1,550319548	191,800	-38,000	2,590	1,286
(f)	3,140	1,550319548	188,000	-33,000	1,940	0,964
(g)	3,140	1,550319548	187,500	-40,000	1,820	0,904
(h)	3,140	1,550319548	184,000	-42,000	2,160	1,073
(i)	3,140	1,550319548	185,000	-49,000	2,220	1,103
(j)	3,140	1,550319548	186,800	-46,000	2,030	1,008
(k)	3,140	1,550319548	188,000	-45,000	2,110	1,048
(l)	3,140	1,550319548	188,000	-41,800	1,910	0,949
(m)	3,140	1,550319548	189,000	-39,000	1,930	0,959

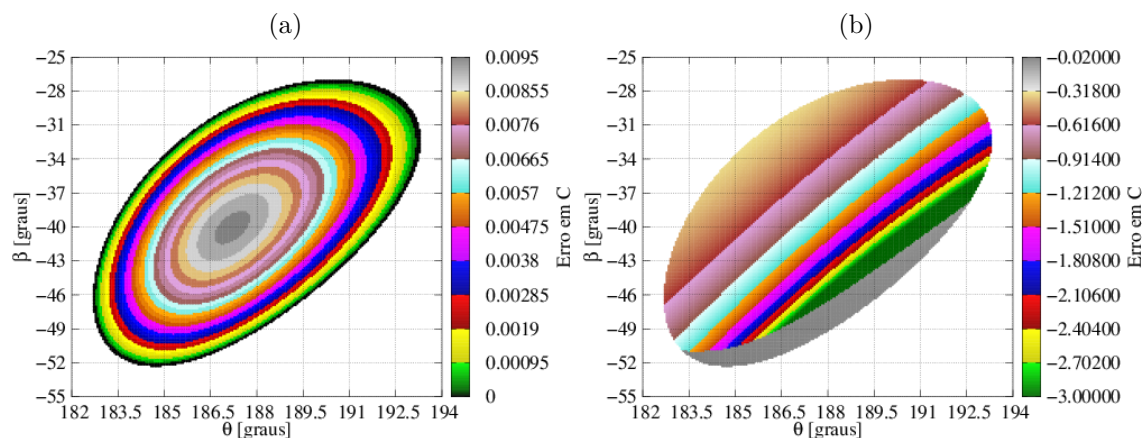
A Figura 3.33 apresenta o mesmo que as Figuras 3.31 e 3.32, mas para $C = 3, 14$, em que a curva de velocidade zero está quase restringindo L_2 , e fechando sobre Didymoon (Figura 3.29). O resultado desse estreitamento é a existência de um conjunto específico de condições iniciais que levam a colisão com Didymoon, em que todas as trajetórias têm a mesma forma. Essa região é a mesma onde existem as órbitas (i) e (j) na Figura 3.31; e (j), (k) e (l) na Figura 3.32. O fechamento da curva de velocidade zero sobre Didymoon fez desaparecer as condições iniciais que levariam à colisão com Didymain. Todas as colisões ocorrem na face de Didymoon voltada para L_2 , com $\varphi = [90^\circ, 270^\circ]$ (Figura 3.28), como mostra a Tabela 3.14 todas as colisões ocorrem com tempo menor que 2 períodos. A seguir, para C nominal igual a 3,14 e distância do baricentro nominal igual 1,550319548 km, é analisada a sensibilidade dessa região a variações de C e distância do baricentro.

Figura 3.34 - Sensibilidade das órbitas de pouso, para os casos das Figuras 3.33, considerando desvios na posição inicial. (a) Erro de 0 até -100 metros. (b) Erro de 0 até 100 metros.



As Figuras 3.34(a) e 3.34(b) mostram a sensibilidade das condições iniciais β e θ que resultam em uma colisão na Figura 3.33, para variações de até ± 100 metros nas condições iniciais da distância inicial do baricentro. O aumento do erro na posição inicial diminui a gama de condições iniciais que resultariam em colisão. Em relação a θ , o pior caso seria um erro de -100 metros, Figura 3.34(a). Quando o erro é de +100 metros, a região diminui proporcionalmente em relação a θ e β .

Figura 3.35 - Sensibilidade das órbitas de pouso para os casos das Figuras 3.33, considerando desvios em C . (a) Erro de 0 até 0,0095. (b) Erro de -0,02 até -3.



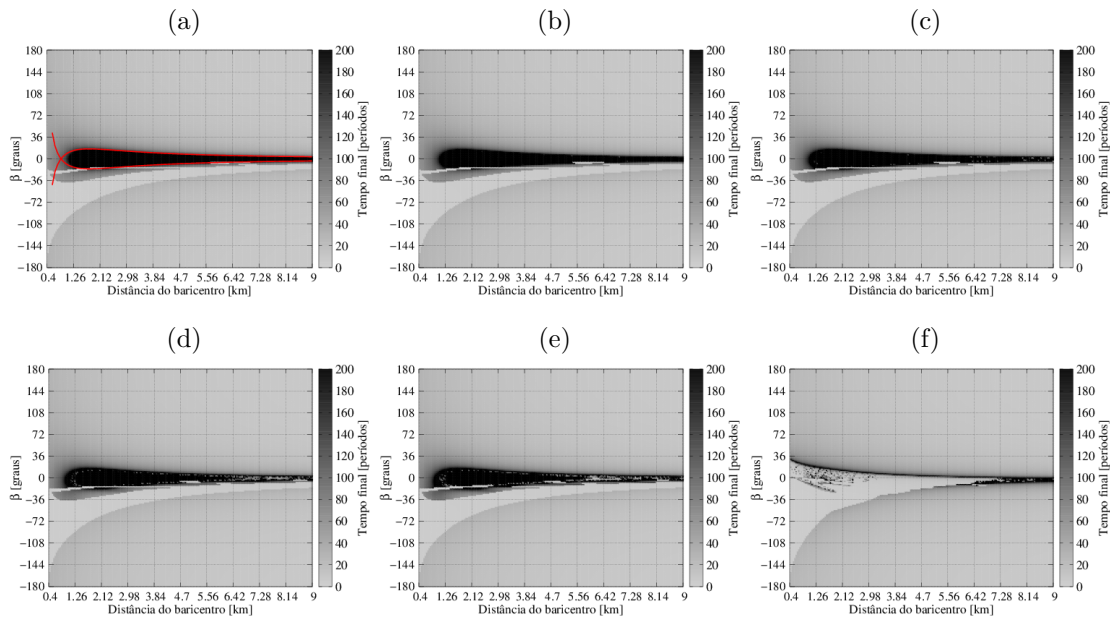
Agora, é analisada a sensibilidade a erros no valor nominal de C . A Figura 3.35(a)

mostra que quando o erro é positivo, indo de 0 até 0,0095, o que deixa C muito próximo ao fechamento da curva de velocidade zero, apenas os pontos centrais da região sobreviveriam a erros de até 0,0095. Já quando o erro passa de $-0,02$ para -3 , Figura 3.35(b), é possível notar a existência de conjuntos de condições iniciais que suportam erros máximos de até -3 . No entanto, quanto maior o erro, menor o valor de C e maior a velocidade resultante no lançamento, mas o limite de $C = 2,825$ está dentro de todos os outros valores. Assim, as condições iniciais da região encontradas para $C = 3,14$ podem ser usadas no intervalo $C = [2.835, 3.14]$.

3.5 Efeito da SRP no PCPR3C

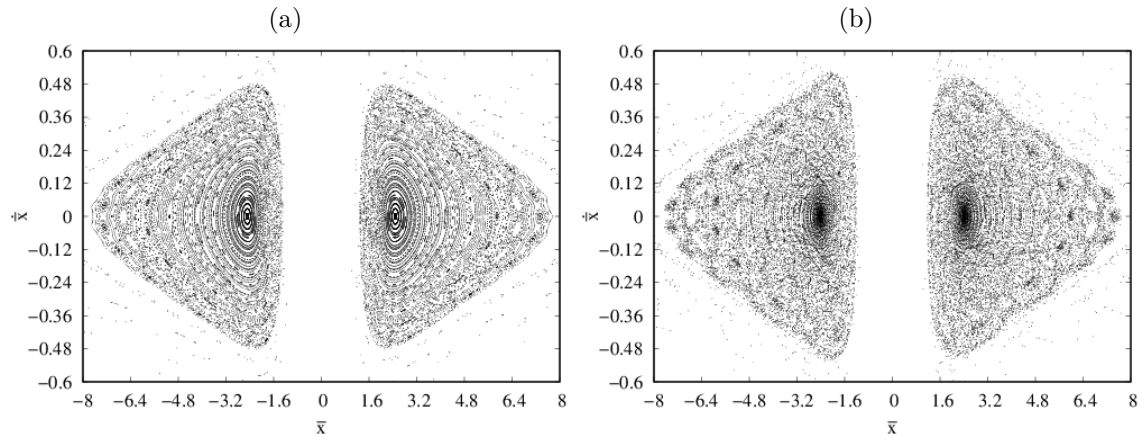
Nesta secção é feita a análise do efeito do acréscimo da SRP no PCPR3C. A pressão de radiação solar tem o potencial para ser a maior força perturbadora para um corpo com razão de área-sobre-massa grande orbitando um sistema com pouca massa, como um asteroide ou cometa. Portanto, é importante analisar seu efeito sobre os resultados encontrados nas secções anteriores.

Figura 3.36 - Tempo final das simulações do PCPR3C com SRP , considerando diferentes valores de A/m , para as mesmas condições iniciais da Figura 3.15. (a) é a repetição da Figura 3.15 que não considera a SRP . (b) $A/m = 0,02kg/m^2$. (c) $A/m = 0,04kg/m^2$. (d) $A/m = 0,08kg/m^2$. (e) $A/m = 0,1kg/m^2$. (f) $A/m = 1kg/m^2$.



As Figuras 3.36(a)-3.36(f) apresentam o tempo final das simulações de uma grade de condições iniciais de distância do baricentro e β das simulações do PCPR3C sem SRP e com SRP para A/m iguais a 0,02, 0,04, 0,08, 0,1 e 1,00 kg/m^2 , respectivamente. Dentre os valores de A/m utilizados, $A/m = 0,02 \text{ kg/m}^2$ é próximo mais do que é encontrado em missões reais. Os outros valores utilizados, superiores a esse foram utilizados para analisar os efeitos da adição da SRP ao PCPR3C. O valor de θ inicial é igual a zero em todos os casos. C inicial é igual a $-2,75$. No caso (a), sem SRP, C se mantém constante. A Figura 3.36(a) é uma repetição da Figura 3.15, onde a expansão $p = F(q, \theta)$ está em vermelho. Analisando, as Figuras 3.36(b)-3.36(e) é possível notar que a região de sobrevivência para o caso $A/m = 0$ (Figura 3.36(a)) continua a existir mesmo com o acréscimo da SRP. Porém, quando utilizada uma $A/m = 1,00 \text{ kg/m}^2$, isto é, um valor elevado, a região de sobrevivência de 200 períodos se extingue. É interessante notar que é possível encontrar resultados semelhantes ao comparar os resultados obtidos com o acréscimo da SRP ao PCPR3C, com os resultados apresentados entre as Figuras 3.9(a) e 3.14(d). Isso acontece pois a SRP modifica C , de modo que os resultados aqui obtidos se assemelham a resultados para valores de C diferentes de $-2,75$.

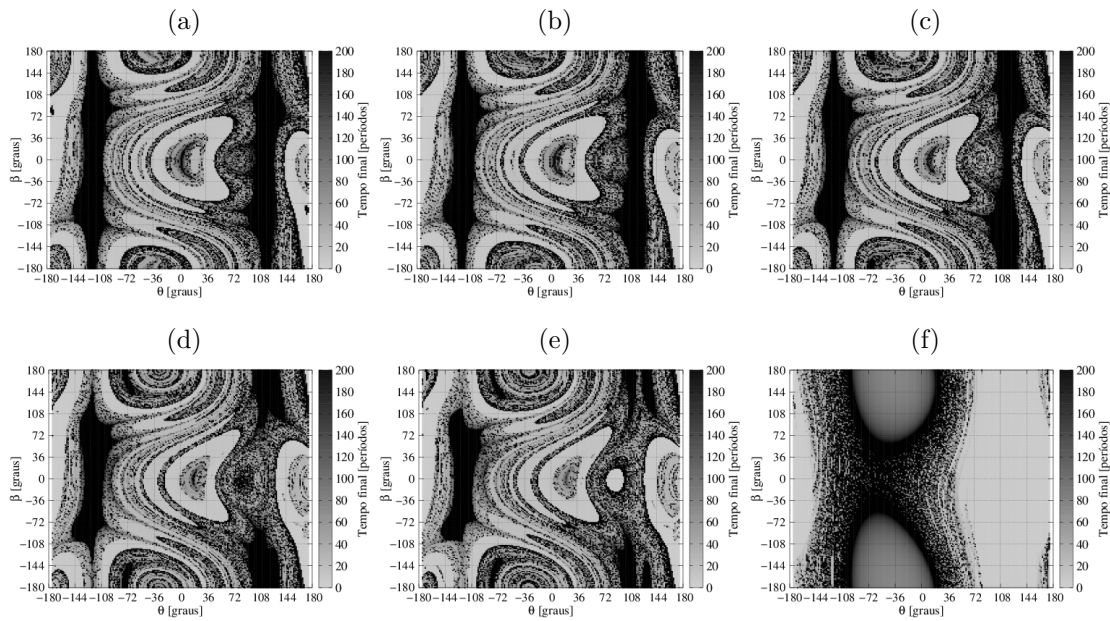
Figura 3.37 - Secções de Poincaré do PCPR3C com SRP para C igual a $-2,75$, com o hiperplano definido em $\theta = 0$. (a) $A/m = 0,00 \text{ kg/m}^2$. (b) $A/m = 0,02 \text{ kg/m}^2$.



O método de análise do sistema binário apresentado em no estudo, com o uso das coordenadas de McGehee, da expansão $p = F(q, \theta)$ e com o uso do ângulo inicial β dá uma grande vantagem em comparação as secções de Poincaré quando a SRP é acrescentada as equações do movimento. A secção de Poincaré é muito útil para identificar

regimes periódicos e quase-periódicos no PCPR3C, como é visto na Figura 3.37(a), que foi feita para C igual a $-2,75$ utilizando o método apresentado no Apêndice D. Porém, quando a SRP é acrescentada, como apresentado na Figura 3.37(b), para $A/m = 0,02 \text{ kg/m}^2$, a estrutura que indica regime de comportamento periódico e quase-periódico se esvai. Isso não ocorre nas grades de condições iniciais 3.36(b)-3.36(f), onde mesmo com o acréscimo da SRP ainda é possível identificar os regimes de comportamento indicado pela variedade (órbita elíptica, parabólica e hiperbólica).

Figura 3.38 - Tempo final das simulações do PCPR3C com SRP, considerando diferentes valores de A/m , para as mesmas condições iniciais da Figura 3.24. (a) é a repetição da Figura 3.24 que não considera a SRP. (b) $A/m = 0,02 \text{ kg/m}^2$. (c) $A/m = 0,04 \text{ kg/m}^2$. (d) $A/m = 0,08 \text{ kg/m}^2$. (e) $A/m = 0,1 \text{ kg/m}^2$. (f) $A/m = 1 \text{ kg/m}^2$.



As Figuras 3.38(a)-3.38(f) apresentam o tempo final das simulações da grade de condições iniciais de θ e β para distância do baricentro inicial igual a $1,178452742C299062 \text{ km}$, para o caso sem SRP e para A/m iguais a $0,02, 0,04, 0,08, 0,01$ e $1,00 \text{ kg/m}^2$, respectivamente. C inicial é igual a $2,9906199791$. A Figura 3.38(a) é uma repetição da Figura 3.24, logo C é contante. Comparando a Figura 3.38(a) com as Figuras 3.38(b) e 3.38(c) é possível notar que a região de sobrevivência no entorno de L_4 ($\theta = -120^\circ$ ou 240°) está se esvaindo nas extremidades de β com o aumento de A/m . Contudo, a região de sobrevivência no entorno

de L_4 continua sólida entre $\beta = -110^\circ$ e 110° , até $A/m = 0,08 \text{ kg/m}^2$. O mesmo não ocorre para L_5 ($\theta = 120^\circ$), onde a região se estreita no centro de β e permanece para valores de β na extremidade, próximos de $\beta = -180^\circ$ e 180° . Como mostrado na Figura 3.38(f), com o aumento exagerado da A/m para $1,00 \text{ kg/m}^2$ a região no entorno de L_4 e L_5 se esvai. Isso é um indicativo que para sistemas binários de pouca massa como asteroides, o A/m alto de velas solares pode ser um limitante para esse tipo de dispositivo ser posicionado próximo de L_4 e L_5 .

Figura 3.39 - Tempo final das simulações do PCPR3C com SRP, considerando diferentes valores de A/m , para as mesmas condições iniciais da Figura 3.32. (a) é a repetição da Figura 3.32 que não considera a SRP. (b) $A/m = 0,02 \text{ kg/m}^2$. (c) $A/m = 0,04 \text{ kg/m}^2$. (d) $A/m = 0,08 \text{ kg/m}^2$. (e) $A/m = 0,1 \text{ kg/m}^2$. (f) $A/m = 1 \text{ kg/m}^2$.

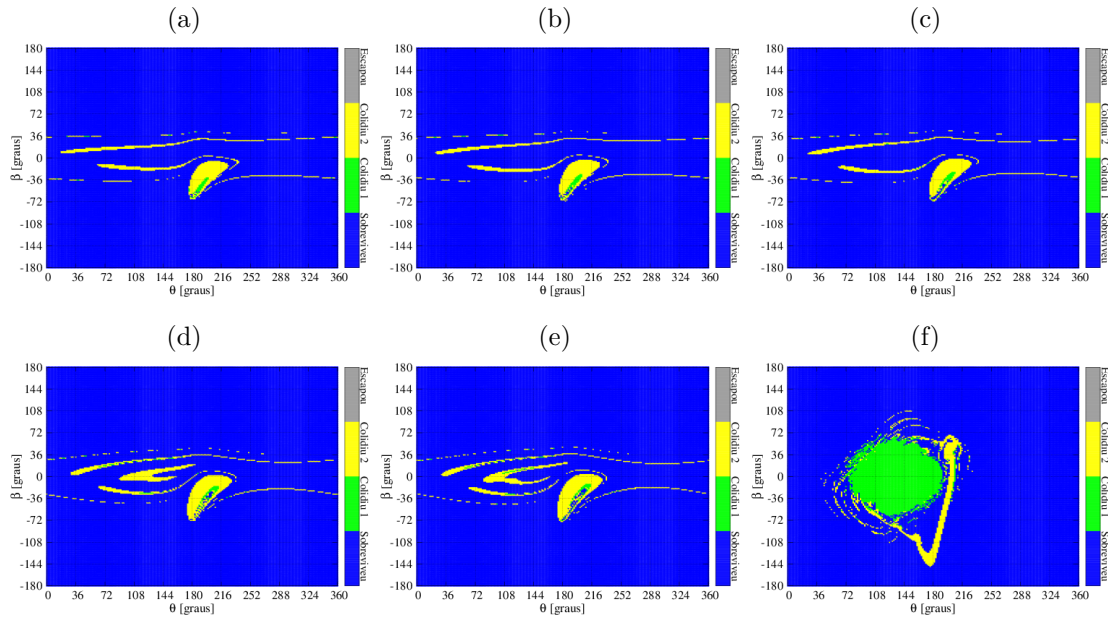
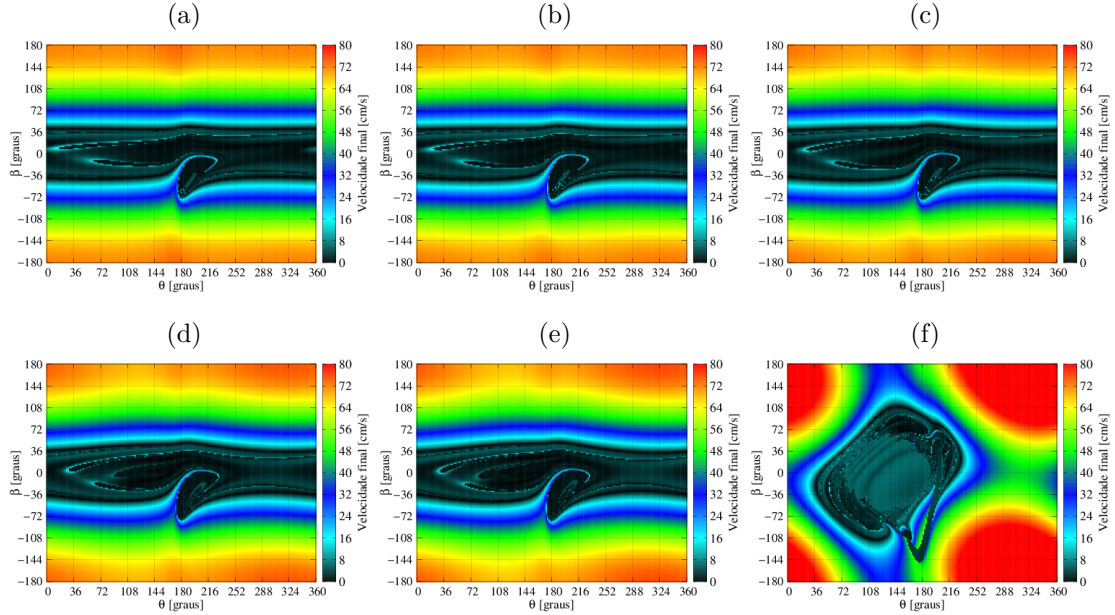


Figura 3.40 - Velocidades finais das simulações das Figuras 3.39(a)-3.39(f).



As Figuras 3.39(a)-3.39(f) apresentam o status final de simulações de 20 períodos, para o caso sem SRP e para A/m iguais 0,02, 0,04, 0,08, 0,01 e 1,00 kg/m^2 , respectivamente. C inicial é igual a 3,07. Nestas figuras é feita a análise do efeito da SRP no lançamento do módulo de pouso MASCOT-2 a partir de 1,550319548C307 km do baricentro (200 metros mais distante que L_2). Na Figura 3.39(a) C é constante, pois a SRP é nula, logo, é uma repetição da Figura 3.32. Analisando as Figuras 3.39(a)-3.39(e) é possível notar que o efeito da SRP para A/m até 0,08 kg/m^2 não é grande o suficiente para desviar o módulo de pouso que parte da região já destacada na Secção 3.4.3 e, em todos os casos, como é visto nas Figuras 3.40(a)-3.40(f) as velocidades finais são inferiores a 8 cm/s . Mesmo na Figura 3.39(f), feita para $A/m = 1,00 \text{ kg/m}^2$, onde a região de pouso notada nas outras figuras foi completamente modificada, o novo conjunto de condições iniciais de θ e β garantem o pouso sobre Didymoon, para o lançamento a 1,550319548 km , com velocidade menor ou próxima de 8 cm/s . Portanto, pode-se concluir que SRP não será um empecilho ao sucesso da fase de lançamento e pouso do módulo de pouso MASCOT-2 sobre Didymoon.

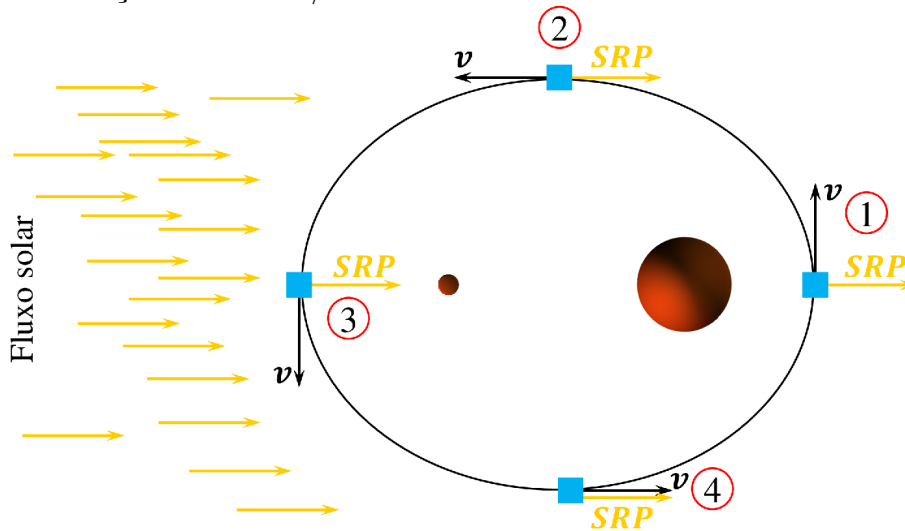
3.5.1 Manipulação da SRP

Nesta secção é analisada a possibilidade de se usar a SRP para manobrar um veículo espacial em órbita de um sistema de asteroides binário, no caso o sistema Didymain-Didymoon. A pressão de radiação solar é um dos maiores perturbadores de uma

partícula ou veículo espacial com grande razão de área-sobre-massa. Conforme os resultados apresentados na Secção 3.5, a SRP não é suficiente para alterar de modo significativo o conjunto de condições iniciais ideais a cada etapa da missão AIDA apresentados nas secções anteriores. Porém, a SRP, quando controlada, possui o potencial para manobrar veículos espaciais e ajudar na economia de combustível.

Atualmente, o conceito de dispositivos de aumento de área (como balões infláveis), que são mais simples que velas solares, tem sido discutido como meio para manobrar veículos espaciais sem o uso de combustível ou como auxiliar as manobras propulsivas (LUCKING et al., 2011; GUERMAN; SMIRNOV, 2012; LUCKING et al., 2012). Neste contexto, pode-se idealizar a utilização da própria geometria e características de manufatura do veículo espacial, como o grau de reflectividade do material que recobre o veículo espacial, para manipular a magnitude e/ou direção da SRP e, conseqüentemente, manobrar o veículo espacial.

Figura 3.41 - Representação das etapas de funcionamento do controle de aumento e diminuição $\alpha = C_r * A/m$.



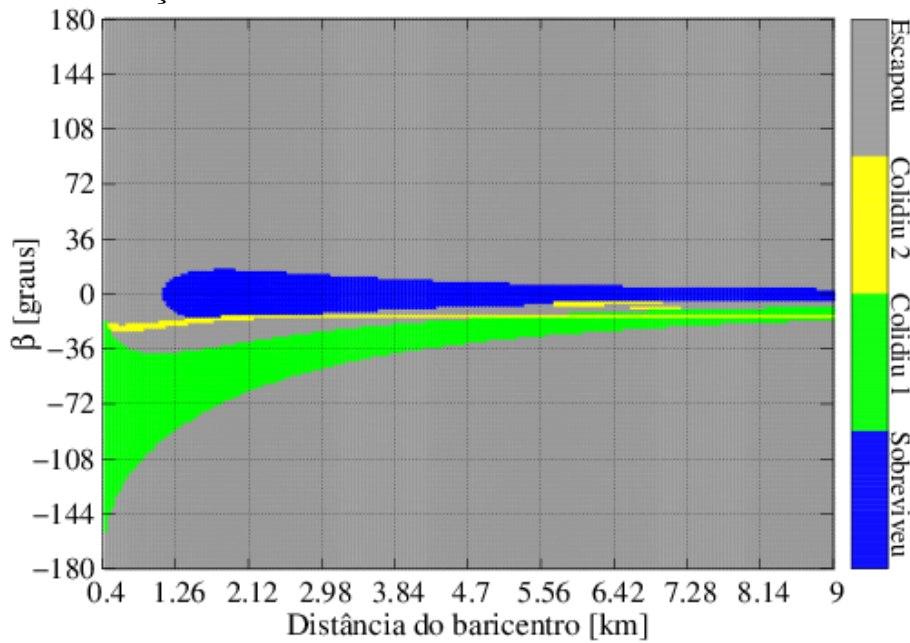
Conforme a Equação 3.10, pode-se dizer que $\alpha = C_r * A/m$. Deste modo, considerando um veículo espacial portador de um dispositivo de aumento de área ou o uso de suas próprias características físicas para manipular α , entre um valor mínimo (α_{min}) e valor máximo (α_{max}). Os controles utilizados são:

- Controle 1 - este controle tem por objetivo criar um ΔV negativo e causar o *de-orbit* do veículo espacial. Conforme a Figura 3.41, quando o veículo

espacial vai de (1) para (3) passando por (2) $\alpha = \alpha_{max}$; e quando vai de (3) para (1) passando por (4) $\alpha = \alpha_{min}$.

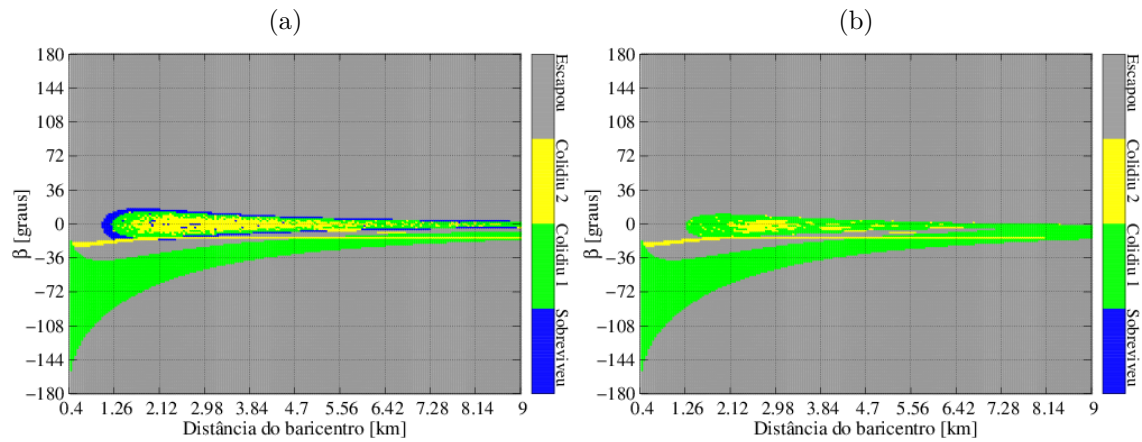
- Controle 2 - este controle tem por objetivo criar um ΔV positivo e causar a ejeção do veículo espacial para fora do raio de Hill. Conforme a Figura 3.41, quando o veículo espacial vai de (1) para (3) passando por (2) $\alpha = \alpha_{min}$; e quando vai de (3) para (1) passando por (4) $\alpha = \alpha_{max}$.

Figura 3.42 - Repetição da Figura 3.15 com a escala de cores mostrando o status final das simulações.



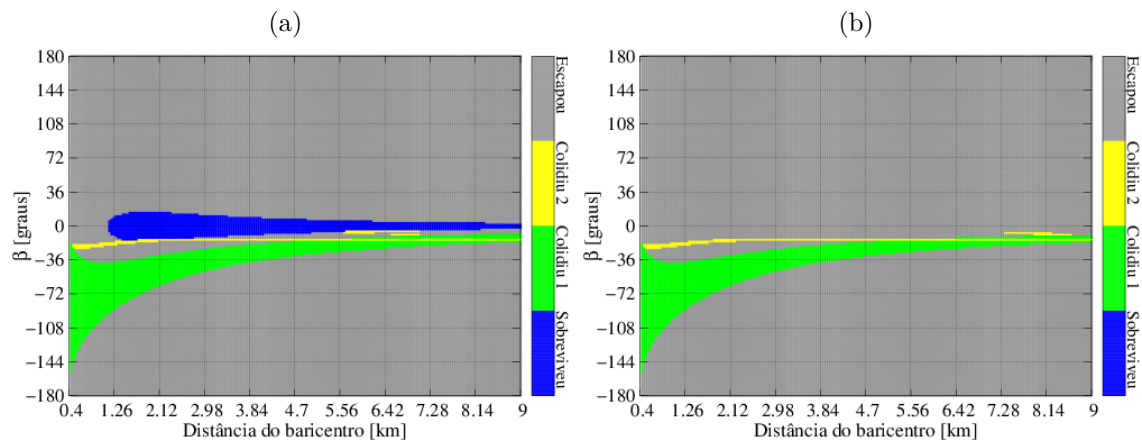
A Figura 3.42 é uma repetição da Figura 3.15, mas neste caso sua escala de cores mostra o status final das simulações e é utilizada para avaliar o efeito do uso dos controles do tipo 1 (controle 1) e 2 (controle 2) no status final das simulações.

Figura 3.43 - Status final das simulações com as mesmas condições iniciais da Figura 3.15, onde foi considerado um controle do tipo 1 com $\alpha_{min} = 0,03$ e $\alpha_{max} = 0,06$ kg/m^2 .



As Figuras 3.43(a) e 3.43(b) foram geradas considerando o controle 1 com $\alpha_{max} = 0,033$ e $0,06$ kg/m^2 , respectivamente. Em ambas, $\alpha_{min} = 0,03$ e as outras condições iniciais são as mesmas que as da Figura 3.42. Visualmente é possível identificar que o uso do controle 1 auxiliou para que os veículos sofressem mais colisões com os corpos do sistema. Na Figura 3.43(a), onde α_{max} é 10% maior que α_{min} , a região no entorno de β em que todas as órbitas sobreviviam por até 200 períodos quase se extinguiu, o que de fato ocorreu na Figura 3.43(b), onde α_{max} é 100% maior que α_{min} .

Figura 3.44 - Status final das simulações com as mesmas condições iniciais da Figura 3.15, onde foi considerado um controle do tipo 2 com $\alpha_{min} = 0,03$ e $\alpha_{max} = 0,06$ kg/m^2 .



As Figuras 3.44(a) e 3.44(b) foram feitas com as mesmas configurações que as Figuras 3.43(a) e 3.43(b), porém neste caso foi utilizado o controle 2. Ainda que seja difícil discernir visualmente a região de sobrevivência da Figura 3.44(a), onde α_{max} é 10% maior que α_{min} , está menor que na Figura 3.42. Na Figura 3.44(b), onde α_{max} é 100% maior que α_{min} , o objetivo do uso do controle 2 foi alcançado com sucesso. O conjunto de condições iniciais que antes garantiam a sobrevivência do veículo espacial por 200 períodos dentro do raio de Hill, agora leva a um escape.

4 PROBLEMA DE DOIS CORPOS COM PERTURBAÇÕES

Neste capítulo é feita a análise de um sistema binário de asteroides a partir da propagação do problema de dois corpos com perturbações. Seguindo os objetivos do estudo, foi dada ênfase em sistemas que o primário concentra a maior parte da massa e o secundário se comporta com uma lua. O referencial inercial neste capítulo está centrado no primário. Deste modo o veículo espacial está em órbita no entorno do primário. As perturbações consideradas no movimento do veículo espacial são:

- devida a não esfericidade do corpo central;
- devida a perturbação gravitacional de terceiros corpos: Sol, corpo secundário do sistema (lua do sistema), Júpiter, Marte e Terra;
- devida a pressão de radiação solar (SRP - *Solar Radiation Pressure*).

A perturbação devida à não esfericidade do corpo central também foi considerada nas equações de movimento do corpo secundário. A equação do movimento do veículo espacial e método de cálculo da aceleração de cada uma das perturbações são apresentados de modo mais detalhado nas seções a seguir.

A propagação numérica das equações do movimento do veículo espacial e dos outros corpos considerados foram feitas utilizando o método Runge-Kutta 7/8. O estudo foi feito fundamentalmente com o uso de grades de condições iniciais e, para complementar, o método de integrais da aceleração foi utilizado para analisar o comportamento do movimento do veículo espacial no sistema.

4.1 Equação do movimento do veículo espacial

Um veículo espacial em órbita ao redor de um pequeno corpo, como um asteroide ou um cometa, está sujeito a diversas perturbações, que podem ser muito significativas, a depender da massa deste corpo. Deste modo, serão consideradas as perturbações devidas a não esfericidade do corpo central, a presença de um terceiro corpo (Planetas e luas do sistema) e a pressão de radiação solar. O movimento do veículo espacial, considerando que o referencial é inercial e está centrado no centro de Didymain, é dado por:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_A}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{P}_{shape} + \sum \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_{SRP} \quad (4.1)$$

em que G é a constante gravitacional universal, M_A é a massa do corpo central do sistema (o alfa do sistema) e \mathbf{r} é o vetor posição da espaçonave em relação ao referencial fixado no corpo central. \mathbf{P}_{shape} é a aceleração devida a não esfericidade do corpo central. $\sum \mathbf{P}_i$ é o somatório das acelerações devidas a presença de outros

corpos na vizinhança do sistema considerado. \mathbf{P}_{SRP} é a aceleração devida a pressão de radiação solar. A seguir os modelos de cálculo de cada uma das acelerações perturbadoras consideradas no estudo são explicados.

4.1.1 Perturbação devido a não esfericidade dos corpos

O cálculo das acelerações devidas à não esfericidade do corpo central é explicado a seguir. Considerando o sistema de coordenadas polares esféricas, com o corpo no centro do sistema e fixada no plano de referência, é dado o potencial do pequeno corpo na forma (MONTENBRUCK; GILL, 2012; SANCHEZ et al., 2014):

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM_i}{r} + \frac{GM_i}{r} \sum_{n=2}^M \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_i}{r}\right)^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (4.2)$$

em que R_i é o raio equatorial do corpo, θ e λ são colatitude e longitude, respectivamente. \bar{C}_{nm} e \bar{S}_{nm} são os coeficientes dos harmônicos esféricos completamente normalizados. \bar{P}_{nm} são as funções associadas de Legendre completamente normalizadas. M é a máxima ordem (n) e o máximo grau (m) considerados na expansão dos harmônicos esféricos. O potencial é reescrito na forma (HOLMES; FEATHERSTONE, 2002):

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM_i}{r} + V^*(r, \theta, \lambda) \quad (4.3)$$

em que

$$V^*(r, \theta, \lambda) = \frac{GM_i}{r} \sum_{m=0}^M (X_{mc} \cos m\lambda + X_{ms} \sin m\lambda) \quad (4.4)$$

e

$$X_{mc} = \sum_{n=k}^M \left(\frac{R_T}{r}\right)^n \bar{C}_{nm} \bar{P}_{nm}(\theta) \quad (4.5)$$

$$X_{ms} = \sum_{n=k}^M \left(\frac{R_T}{r}\right)^n \bar{S}_{nm} \bar{P}_{nm}(\theta) \quad (4.6)$$

sendo que k é um inteiro que varia com m . Assim, k é igual a 2 ou é igual a m , dependendo de qual dos dois for maior. Logo, a aceleração devido ao geopotencial é dada por (SANCHEZ et al., 2014):

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_S &= \nabla V^*(r, \theta, \lambda) \\
&= \frac{\partial V^*}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V^*}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V^*}{\partial \lambda} \hat{e}_\lambda
\end{aligned} \tag{4.7}$$

em que

$$\hat{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial r}{|\partial \mathbf{r} / \partial r|}, \quad \hat{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \theta}{|\partial \mathbf{r} / \partial \theta|}, \quad \hat{e}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \lambda}{|\partial \mathbf{r} / \partial \lambda|}.$$

4.1.2 Perturbação pela presença de um terceiro corpo

A baixa força gravitacional de pequenos corpos como asteroides e cometas, combinado com a alta excentricidade desses corpos, de modo que suas trajetórias cruzam corpos com grande influencia gravitacional, como os planetas Júpiter, Marte e Terra, torna necessária a inclusão de suas perturbações no modelo completo. O cálculo da aceleração devida a presença de um terceiro corpo vem do problema restrito de três corpos e considera o somatório de todas as perturbações de terceiro corpo, dada por (SCHAUB, 2003):

$$\mathbf{P}_i = - \sum_{i=0}^n GM_i \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} \right) \tag{4.8}$$

em que n é o número total de corpos do sistema, e M_i é a massa do i -ésimo corpo. \mathbf{r}_i são os vetores que ligam os i -ésimos corpos ao veículo espacial.

4.2 Método de integrais da aceleração

Como mencionado anteriormente, as integrais das acelerações são utilizadas para realizar uma análise mais profunda em relação ao papel das perturbações no comportamento das órbitas simuladas. As integrais das acelerações basicamente consistem em integrar as acelerações presentes no movimento de um veículo espacial devida à um perturbador (Ex.: pressão de radiação solar) durante um período de tempo (T). Desde modo é possível estimar o incremento de velocidade no movimento da espaçonave causado pelo perturbador dentro do período T (PRADO, 2013; PRADO, 2014). Os principais métodos desenvolvidos até o momento são apresentados a seguir:

- Integral dos módulos das acelerações, que é utilizada para comparar as forças, dentro de um intervalo T qualquer. Essa integral mostra o efeito acumulado do perturbador, sem considerar possíveis compensações. Ela é dada por:

$$PI_i = \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{P}| dt, \quad (4.9)$$

em que, \mathbf{P} é a aceleração devida à uma força qualquer (ex.: pressão de radiação solar).

- Integral das acelerações na direção do movimento, que mostra qual força tirou ou adicionou mais energia ao movimento da espaçonave, ou seja, se o valor da integral for negativo o perturbador tira energia do movimento da espaçonave. Caso a integral tenha valor positivo o perturbador colocou mais energia no movimento da espaçonave. Este tipo de integral é dado por:

$$PI_{ii} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{P}_v dt, \quad (4.10)$$

em que, $\mathbf{P}_v = \langle \mathbf{P}, \hat{\mathbf{v}} \rangle$, $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, sendo \mathbf{v} o vetor velocidade da espaçonave.

- Módulo da integral das componentes das acelerações, que é feita para mensurar a velocidade total aplicada no movimento da espaçonave. Diferente da integral dos módulos das acelerações, este tipo de integral leva em consideração as compensações de um perturbador. Por exemplo, em uma órbita dentro de certas condições iniciais ideais, a perturbação devida à pressão de radiação se compensaria durante a evolução da órbita, de modo que a integral nesta situação hipotética seria igual a zero. Sendo $\mathbf{P} = [P_x P_y P_z]^T$, a integral é dada por:

$$PI_{iii} = \frac{1}{T} \left| \int_0^T \mathbf{P} dt \right|. \quad (4.11)$$

- Módulo da integral da diferença entre a órbita perturbada e a kepleriana - este tipo de integral mostra o quanto a órbita perturbada desviou da órbita kepleriana inicial, sendo dada por (LARA, 2016):

$$PI_{iv} = \frac{1}{T} \left| \int_0^T \mathbf{U} dt \right|, \quad (4.12)$$

em que, $\mathbf{U} = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}_{ke}$. Sendo $\ddot{\mathbf{r}}$ a equação do movimento da espaçonave perturbada e $\ddot{\mathbf{r}}_{ke}$ a equação da espaçonave desconsiderando as perturbações.

4.3 Ressonância de movimento médio

Em um sistema espacial a ressonância de movimento médio ocorre quando há comensurabilidade dos períodos orbitais dos corpos que constituem o sistema. No caso de sistemas binários, que são o foco principal do estudo, pode ocorrer comensurabilidade entre o período orbital da lua do sistema e um veículo espacial. Existem diversas ressonâncias a serem exploradas. Contudo, o estudo é focado na ressonância 1:1, onde a lua do sistema e o veículo espacial possuem o mesmo movimento médio, também conhecida como ressonância co-orbital. O semi-eixo maior do veículo espacial, conhecido como semi-eixo maior co-orbital, é dado por:

$$a_{coorbital} = a_{lua} \sqrt[3]{\frac{m_{central}}{m_{lua} + m_{central}}} \quad (4.13)$$

em que, a_{lua} é o semi-eixo maior da lua do sistema; $m_{central}$ e m_{lua} são as massas do corpo central e de sua lua, respectivamente.

A ressonância co-orbital de órbitas diretas (mesmo sentido de rotação da lua) pode ser definida também pela longitude média relativa ($\Delta\lambda$) entre a lua e o veículo espacial, que é dada por (NAMOUNI et al., 1999):

$$\Delta\lambda = (\omega + \Omega + l) - (\omega_{lua} + \Omega_{lua} + l_{lua}) \simeq 60^\circ \quad \text{ou} \quad \simeq 300^\circ,$$

em que ω , Ω e l são o argumento do periapsis, longitude do nodo ascendente e anomalia média do veículo espacial, respectivamente; ω_{lua} , Ω_{lua} e l_{lua} são o argumento do periapsis, longitude do nodo ascendente e anomalia média da lua do sistema, respectivamente.

A longitude média relativa entre a lua e o veículo espacial para o caso de órbitas retrogradadas (ϕ) é dada por (MORAIS; NAMOUNI, 2013):

$$\phi = (\omega + \Omega + l) - (\omega_{lua} + \Omega_{lua} + l_{lua}) + 2\Omega \quad (4.14)$$

4.4 Resultados para o sistema Didymain-Didymoon

Nesta seção são apresentados os resultados das simulações numéricas do sistema Didymain-Didymoon. Inicialmente é apresentada a normalização dos parâmetros de massa de acordo com a geometria escolhida para o cálculo dos harmônicos esféricos, que é feito utilizando o método apresentado no Apêndice E. A seguir são apresentados os principais resultados das simulações numéricas. Depois é feita a análise de

cada aceleração perturbadora utilizando as integrais da aceleração.

Neste capítulo a perturbação devia à não esfericidade do corpo central está sendo considerada no movimento do veículo espacial. Para isso, é considerado que os corpos do sistema possuem formato elipsoidal e a mesma densidade. Contudo, nas equações do movimento o corpo secundário é considerado como um ponto de massa. Conforme Michel et al. (2016), Didymoon possui um formato elipsoidal bem característico com semi-eixos do elipsoide $\xi = [0,103 \ 0,079 \ 0,066]$ km. Para Didymain, os semi-eixos do elipsoide escolhidos são $\xi = [0,39 \ 0,4095 \ 0,3705]$ km. Sabendo que a massa total do sistema é $5,23(\pm 0,5) \times 10^{11}$ kg (MICHEL et al., 2016), é feita a redistribuição da massa de $5,23 \times 10^{11}$ kg para os corpos do sistema. Está sendo considerado um erro de 0,5% nas massas. As massas calculadas para Didymain e Didymoon são iguais a $5,232615 \times 10^{11}$ kg e $4,74919834664799 \times 10^9$ kg, respectivamente. Deste modo, os harmônicos esféricos de Didymain não normalizados são C_{20} igual a $-2,975 \times 10^{-2}$ e C_{22} igual a $-5,125 \times 10^{-3}$. O $a_{coorbital}$ do sistema Didymain-Didymoon, calculado pela Equação 4.13 a partir do dados da Tabela 2.1 utilizando as massas normalizadas, é igual a 1,176263432867 km.

As simulações que têm seus resultados apresentados nas sub-seções a seguir foram realizadas com a integração numericamente da Equação 4.1. Para isso foi utilizando o integrador numérico Runge-Kutta 7/8, com erro relativo e absoluto de 1×10^{-12} . Todas as simulações possuem como critério de parada o tempo total ou umas das condições a seguir:

- Colisão do veículo espacial com Didymain. Para esse critério considerou-se Didymain com uma esfera com raio igual a 0,4095 km, que é o maior raio do elipsoide;
- Colisão do veículo espacial com Didymoon. Para esse critério considerou-se Didymoon como uma esfera com raio igual a 0,103 km, que é o maior raio do elipsoide. Lembrando que, do ponto de vista das equações do movimento, Didymoon é um ponto de massa;
- Escape do veículo espacial, que ocorre quando o veículo espacial alcança uma distância em relação a origem (centrada em Didymain) maior que o raio de Hill (67 km).

As Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 apresentam as condições iniciais de Didymain em relação ao Sol, de Didymoon em relação a Didymain e dos planetas considerados como perturbadores (Terra, Marte e Júpiter). As condições iniciais de Didymain foram retiradas do sistema Horizons/NASA para a data de 18 de março de 2019. Na realidade, as

condições iniciais fornecidas pelo sistema Horizons são do elemento 65803 Didymos (1996 GT) em relação ao Sol, sem distinguir os corpos do sistema. Assim, assumiu-se as condições iniciais como pertencentes a Didymain em relação ao Sol. As condições iniciais de semi-eixo maior e excentricidade de Didymoon em relação a Didymain podem ser encontradas em Michel et al. (2016) e a condição inicial de inclinação é igual a $0,005^\circ$. Este valor é o mínimo para que não ocorra problemas na determinação do periapsis nas rotinas de conversão de estado de posição e velocidade em coordenadas cartesianas para elementos orbitais. As condições iniciais de argumento do periapsis, longitude do nodo ascendente e anomalia são iguais a 0° .

Tabela 4.1 - Condições iniciais de Didymain e Didymoon utilizadas em todas as simulações.

Corpo	Didymain	Didymoon
Orbita	Sol	Didymain
Semi-eixo maior [km]	245981582,049129489 ($\tilde{1}.6443$ UA)	1,18
Excentricidade	0,3840254486370437	0,03
Inclinação [graus]	3,408562720122888	0,005
Argumento do periapsis [graus]	319,3211967274489	0
Longitude do nodo ascendente [graus]	73,20699512785011	0
Anomalia média [graus]	105,9150699690435	0

Tabela 4.2 - Condições iniciais da Terra utilizada em todas as simulações.

Corpo	Terra
Orbita	Sol
Semi-eixo maior [km]	149489514,455750423 ($\tilde{0}.993$ UA)
Excentricidade	0,01627508661598123
Inclinação [graus]	0,0005151802773686445
Argumento do periapsis [graus]	280,8235017096860
Longitude do nodo ascendente [graus]	180,1063063555800
Anomalia média [graus]	74,10939803291012

Tabela 4.3 - Condições iniciais de Marte utilizada em todas as simulações.

Corpo	Marte
Orbita	Sol
Semi-eixo maior [km]	227946887,17832148 ($\tilde{1}.524$ UA)
Excentricidade	0,09339860124573109
Inclinação [graus]	1,848080006539366
Argumento do periapsis [graus]	286,6985408417346
Longitude do nodo ascendente [graus]	49,50412428814148
Anomalia média [graus]	95,59582542855925

Tabela 4.4 - Condições iniciais de Júpiter utilizada em todas as simulações.

Corpo	Júpiter
Orbita	Sol
Semi-eixo maior [km]	778357859,023343033 (5,203 UA)
Excentricidade	0,04877510686976127
Inclinação [graus]	1,303696592562224
Argumento do periapsis [graus]	273,5865953435739
Longitude do nodo ascendente [graus]	100,5156046507042
Anomalia média [graus]	243,2181403710134

4.4.1 Trajetórias coorbitais no sistema Didymain-Didymoon

A seguir são apresentados os resultados das simulações numéricas de um ano para grades de condições iniciais. Em todas as grade de condições iniciais apresentadas a seguir é possível notar vazios de pontos. Estes vazios são pontos excluídos por serem condições iniciais nas quais o veículo espacial se encontra dentro de um dos corpos do sistema, ou são casos em que a colisão ocorre dentro do primeiro passo de integração, levando a erros no integrador e no cálculo das integrais da aceleração.

Figura 4.1 - Tempo final de simulação para grade de condições iniciais de excentricidade (e) e inclinação (i). Para $i = [0^\circ, 89.999^\circ]$. $a_0 = 1,176263432867\text{km}$ e $\Delta\lambda = 60^\circ$ (para $\omega = 0^\circ$). As condições iniciais as trajetórias (a)-(m) (pontos azuis) são dadas na Tabela 4.5. As linhas vermelhas são as trajetórias do veículo espacial e as linhas cyan são as órbitas de Didymoon.

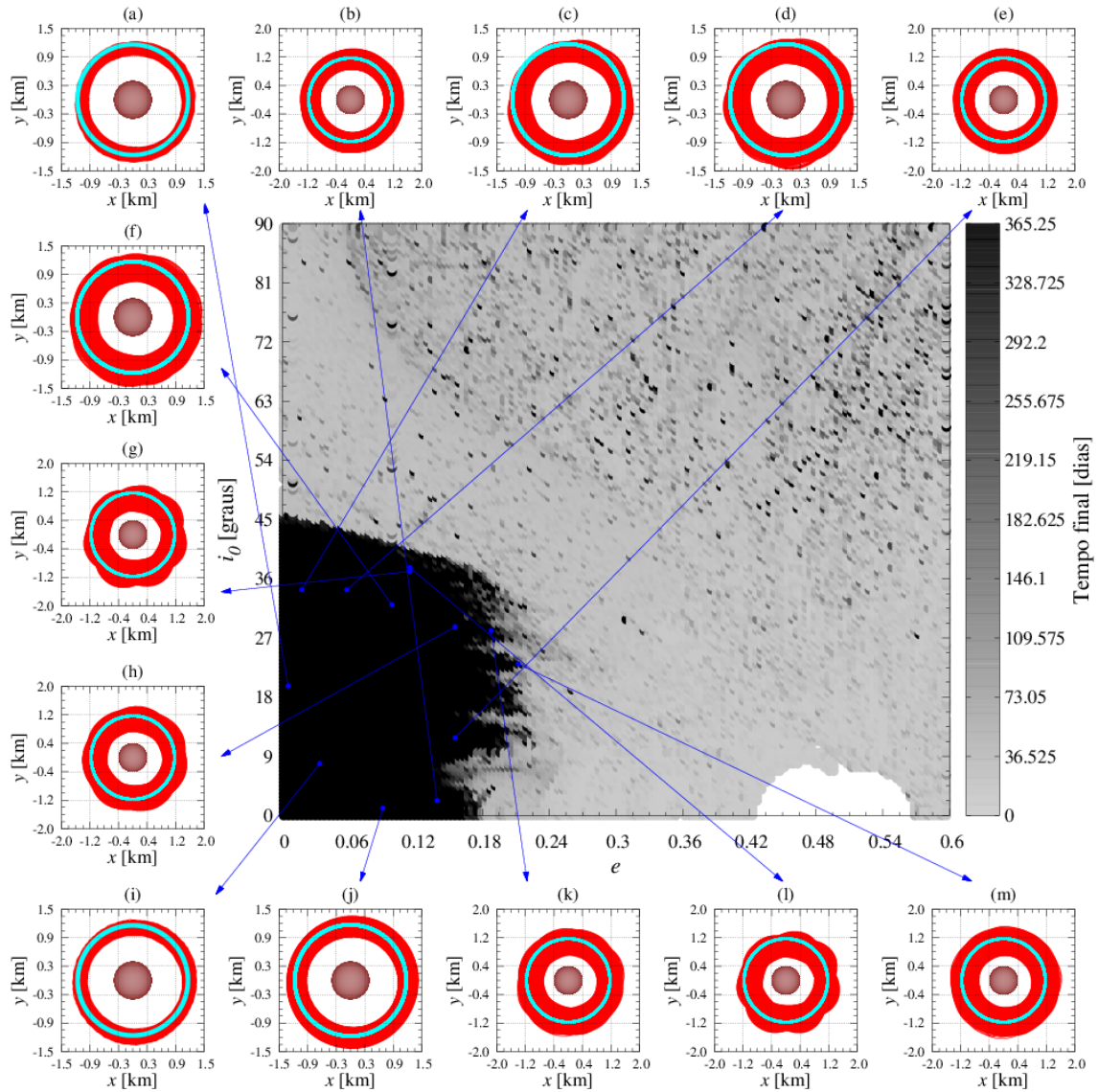


Tabela 4.5 - Condições iniciais das trajetórias da Figura 4.1. O tempo final apresentado é para simulações de até 10 anos.

Trajectoria	a_0 [km]	e_0	i_0 [graus]	ω_0 [graus]	Ω_0 [graus]	l_0 [graus]	$\Delta\lambda_0$ [graus]	Tempo final [anos]
(a)	1.176	0.005	19.688	0.000	0.000	60.000	60.000	3.692
(b)	1.176	0.139	2.251	0.000	0.000	60.000	60.000	1.204
(c)	1.176	0.017	34.313	0.000	0.000	60.000	60.000	1.325
(d)	1.176	0.058	34.313	0.000	0.000	60.000	60.000	1.358
(e)	1.176	0.155	11.813	0.000	0.000	60.000	60.000	1.220
(f)	1.176	0.098	32.063	0.000	0.000	60.000	60.000	1.340
(g)	1.176	0.115	37.125	0.000	0.000	60.000	60.000	1.262
(h)	1.176	0.155	28.688	0.000	0.000	60.000	60.000	1.356
(i)	1.176	0.033	7.876	0.000	0.000	60.000	60.000	3.865
(j)	1.176	0.090	1.126	0.000	0.000	60.000	60.000	1.447
(k)	1.176	0.188	28.125	0.000	0.000	60.000	60.000	1.337
(l)	1.176	0.115	37.688	0.000	0.000	60.000	60.000	1.274
(m)	1.176	0.212	23.063	0.000	0.000	60.000	60.000	1.116

A Figura 4.1 apresenta os tempos finais de uma grade de condições iniciais de excentricidade (e) e inclinação (i). Neste caso, $i = 0^\circ, 89, 999^\circ$, ou seja, orbitas diretas. O semi-eixo maior inicial é igual a 1,176263432867 km e $\omega = \Omega = 0^\circ$. A Tabela 4.5 apresenta as condições iniciais das trajetórias (a)-(m) e o tempo final para as propagações destas condições iniciais por até 10 anos. Analisando a figura é possível notar que para $i = [0^\circ, 45^\circ]$ e $e = [0, 0.18]$ existem condições iniciais para as quais o veículo espacial permanece dentro do raio de Hill. Analisando as trajetórias do veículo espacial, que estão em vermelho, é possível notar que (a) e (i) possuem a menor amplitude de variação em relação a órbita de Didymoon (linha cyan). A Tabela 4.5 mostra que estas as trajetórias permaneceram dentro do raio de Hill por mais tempo, por mais de 3 anos. As outras trajetórias sobreviveram por menos que 1,5 anos. Nas simulações desta seção Didymoon também está sofrendo com os efeitos da não esfericidade de Didymain, como é possível notar nas trajetórias (a)-(m), o que faz com que a trajetória de Didymoon seja irregular.

Figura 4.2 - Tempo final de simulação para grade de condições iniciais de incremento no semi-eixo maior (Δa) em relação ao semi-eixo maior coorbital e longitude média relativa ($\Delta \lambda$). $e = 0,03$, $i = 0,001^\circ$ e $\omega = 0^\circ$. As condições iniciais das trajetórias (a)-(m) (pontos azuis) são dadas na Tabela 4.6. As linhas vermelhas são as trajetórias do veículo espacial e as linhas cian são as órbitas de Didymoon.

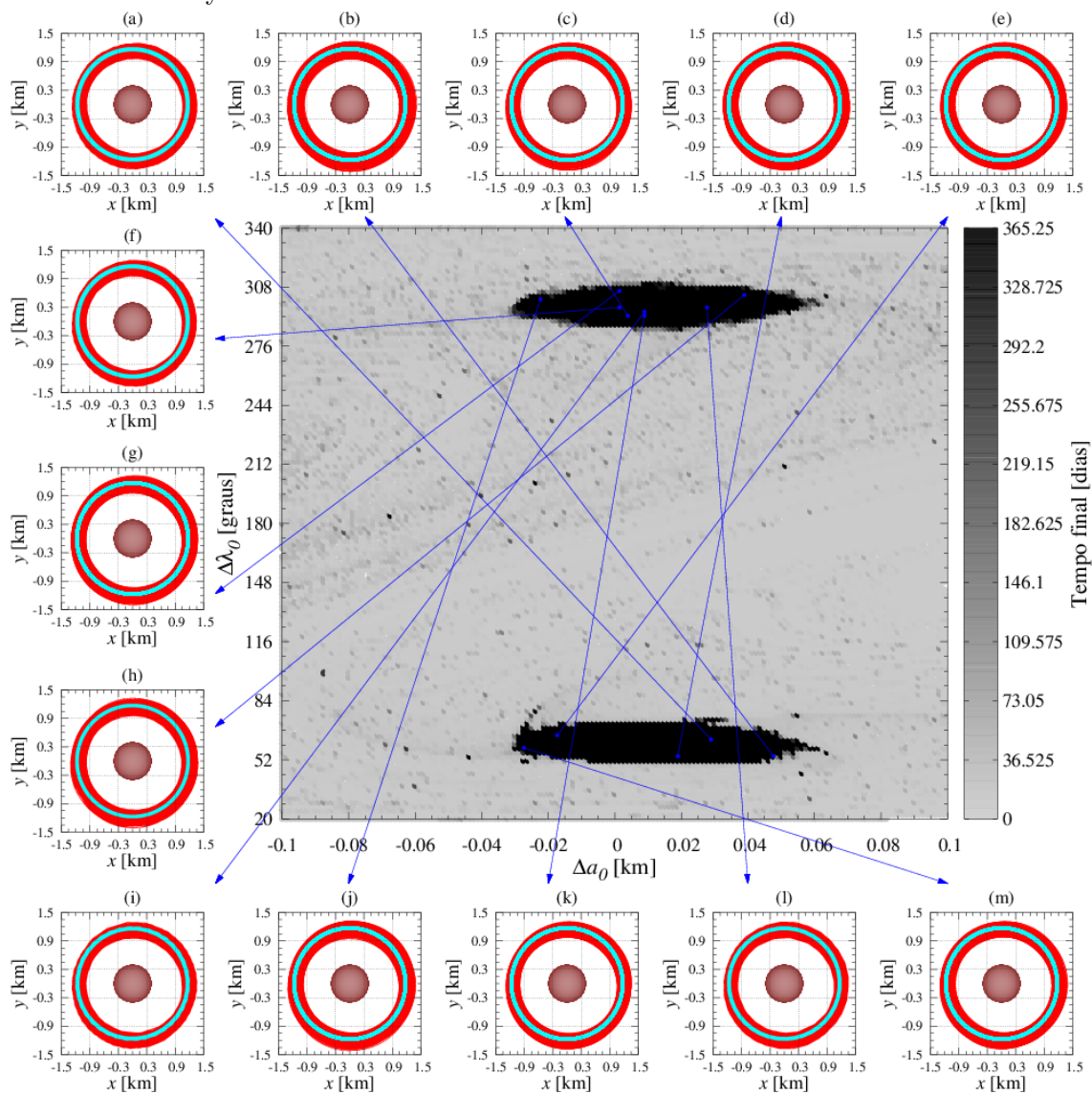


Tabela 4.6 - Condições iniciais das trajetórias da Figura 4.2. O tempo final apresentado é para simulações de até 10 anos.

Trajectoria	a_0 [km]	e_0	i_0 [graus]	ω_0 [graus]	Ω_0 [graus]	l_0 [graus]	$\Delta\lambda_0$ [graus]	Tempo final [anos]
(a)	1.205	0.030	0.001	0.000	0.000	63.000	63.000	3.527
(b)	1.224	0.030	0.001	0.000	0.000	54.000	54.000	1.127
(c)	1.180	0.030	0.001	0.000	0.000	292.500	292.500	1.319
(d)	1.195	0.030	0.001	0.000	0.000	54.000	54.000	1.294
(e)	1.159	0.030	0.001	0.000	0.000	65.250	65.250	1.172
(f)	1.178	0.030	0.001	0.000	0.000	297.000	297.000	3.569
(g)	1.178	0.030	0.001	0.000	0.000	306.000	306.000	1.078
(h)	1.215	0.030	0.001	0.000	0.000	303.750	303.750	1.409
(i)	1.185	0.030	0.001	0.000	0.000	294.750	294.750	3.457
(j)	1.154	0.030	0.001	0.000	0.000	301.500	301.500	1.408
(k)	1.185	0.030	0.001	0.000	0.000	292.500	292.500	1.104
(l)	1.204	0.030	0.001	0.000	0.000	297.000	297.000	3.348
(m)	1.149	0.030	0.001	0.000	0.000	58.500	58.500	1.191

A Figura 4.2 mostra os tempos finais das simulações de um ano para diferentes condições iniciais de incremento ao redor do $a_{coorbital}$ (Δa) e $\Delta\lambda$. $e = 0,03$, que é o mesmo valor da excentricidade de Didymoon, $i = 0,001^\circ$ e $\omega = \Omega^\circ$. As trajetórias (a)-(m) foram escolhidas de maneira aleatória dentre as trajetórias que sobreviveram por até um ano. A Tabela 4.6 apresenta as condições iniciais das trajetórias de (a)-(m) da Figura 4.2 e o tempo final para simulação de 10 anos. O conjunto de condições iniciais de Δa para os quais o veículo espacial permaneça dentro do raio de Hill por até um ano está situado no entorno $a_{coorbital}$, em $\Delta a_0 = 0$ km. Os pontos Lagrangianos apresentados na Secção 3.1.1 não existem para a Equação 4.1. Contudo, as condições iniciais de $\Delta\lambda$ para as quais o veículo espacial sobrevive por 1 ano estão localizadas ao redor de onde virtualmente estariam os pontos L_4 ($\Delta\lambda = 60^\circ$) e L_5 ($\Delta\lambda = 300^\circ$). As trajetórias (a)-(m) são semelhantes. Contudo, como mostra a Tabela 4.6, quando propagadas por 10 anos os tempos finais variaram mesmo para condições iniciais próximas. Por exemplo, as trajetórias (i) e (k), que possuem a mesma condição iniciais de a e uma diferença de somente $2,25^\circ$ em $\Delta\lambda$, sobreviveram por 3,457 anos e 1,104 anos, respectivamente.

Figura 4.3 - Tempo final de simulação para grade de condições iniciais de incremento no semi-eixo maior (Δa) em relação ao semi-eixo maior coorbital e longitude média relativa ($\Delta \lambda$). $e = 0,1$, $i = 0,001^\circ$ e $\omega = 180^\circ$. As condições iniciais das trajetórias (a)-(m) (pontos azuis) são dadas na Tabela 4.7. As linhas vermelhas são as trajetórias do veículo espacial e as linhas cian são as órbitas de Didymoon.

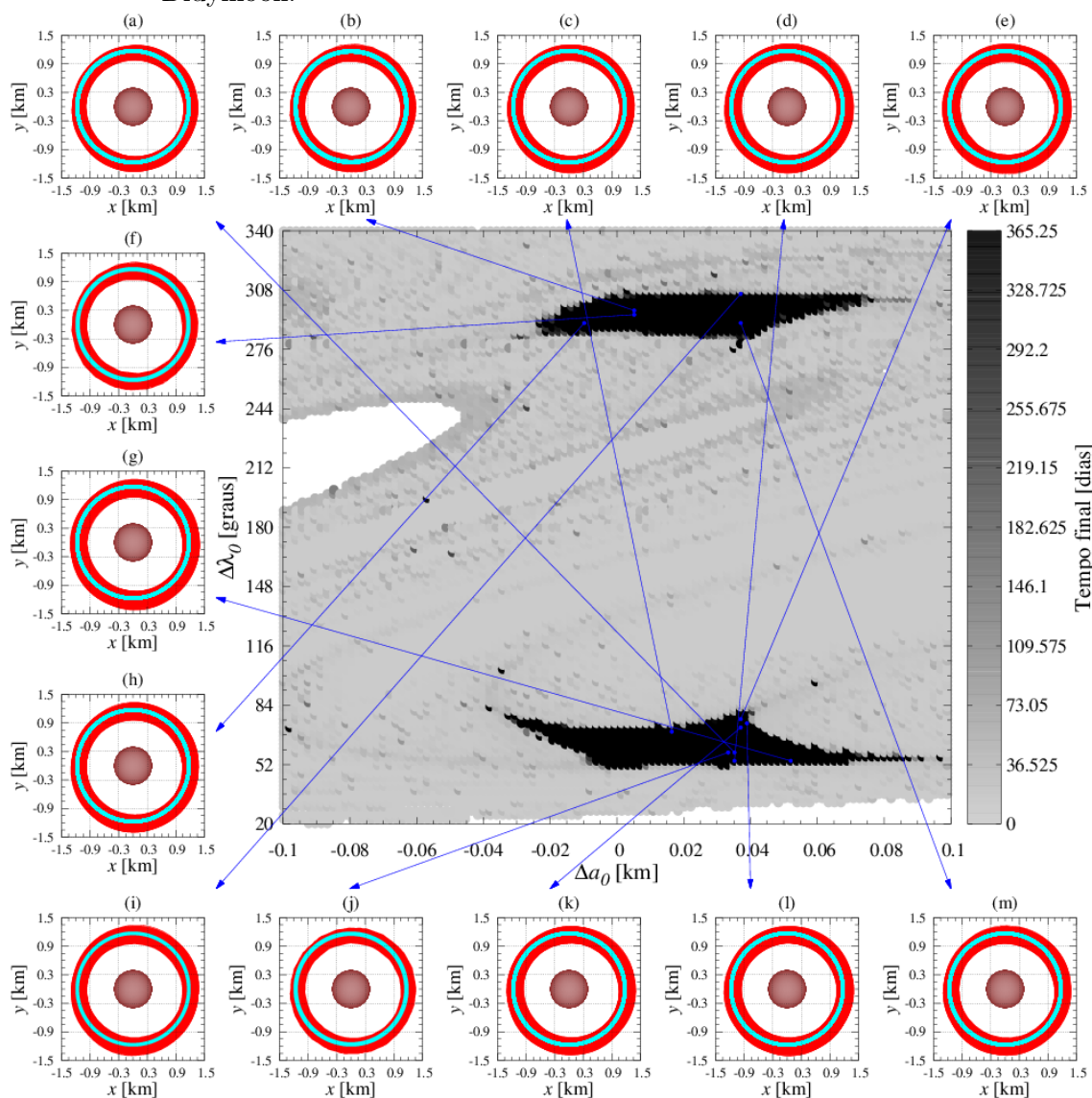
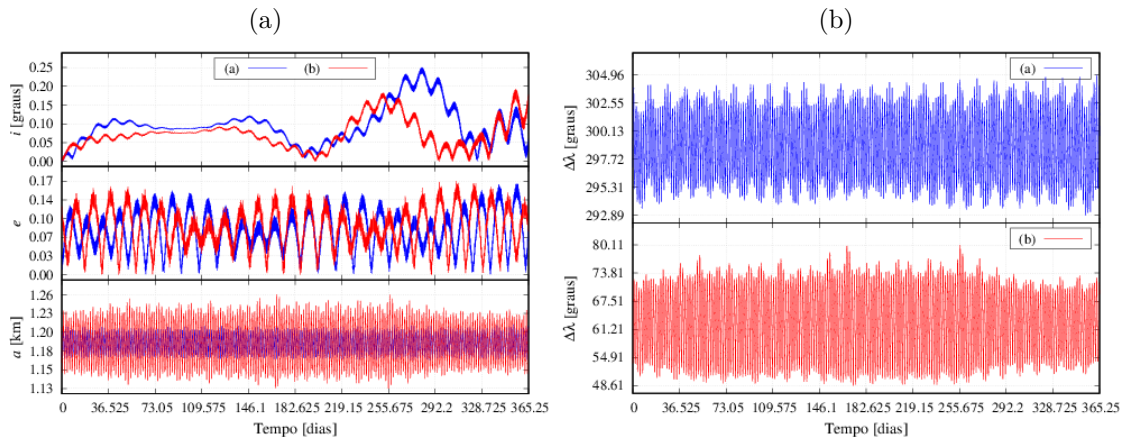


Tabela 4.7 - Condições iniciais das trajetórias da Figura 4.3. O tempo final apresentado é para simulações de até 10 anos.

Trajectoria	a_0 [km]	e_0	i_0 [graus]	ω_0 [graus]	Ω_0 [graus]	l_0 [graus]	$\Delta\lambda_0$ [graus]	Tempo final [anos]
(a)	1.211	0.100	0.001	180.000	0.000	238.500	58.500	1.733
(b)	1.181	0.100	0.001	180.000	0.000	117.000	297.000	3.107
(c)	1.193	0.100	0.001	180.000	0.000	249.750	69.750	1.198
(d)	1.211	0.100	0.001	180.000	0.000	234.000	54.000	3.542
(e)	1.213	0.100	0.001	180.000	0.000	256.500	76.500	1.493
(f)	1.181	0.100	0.001	180.000	0.000	114.750	294.750	3.439
(g)	1.228	0.100	0.001	180.000	0.000	234.000	54.000	1.055
(h)	1.166	0.100	0.001	180.000	0.000	110.250	290.250	1.172
(i)	1.213	0.100	0.001	180.000	0.000	126.000	306.000	1.503
(j)	1.210	0.100	0.001	180.000	0.000	238.500	58.500	3.530
(k)	1.213	0.100	0.001	180.000	0.000	252.000	72.000	1.529
(l)	1.215	0.100	0.001	180.000	0.000	254.250	74.250	1.152
(m)	1.213	0.100	0.001	180.000	0.000	110.250	290.250	1.649

A Figura 4.3 que apresenta o tempo final para simulações de condições iniciais de Δa e $\Delta\lambda$. Em que: $e = 0, 1$, $i = 0, 001^\circ$, $\omega = 180^\circ$ e $\Omega 0^\circ$. As condições iniciais das trajetórias (a)-(m) são dadas na Tabela 4.7, que também apresentam o tempo final para essas trajetórias para simulações de até 10 anos. Pode-se notar que, mesmo com o aumento de e e da rotação de 180° de ω , a região de sobrevivência ainda existe no entorno de $\Delta\lambda$ iguais a 60° e 300° . Assim como nas simulações da Figura 4.2, as trajetórias se mantiveram próximas a trajetória de Didymoon. Contudo, como mostra a Tabela 4.7, a maior parte das órbitas não sobrevive por mais de 1,5 anos, e mesmo condição iniciais próximas apresentam tempos finais diferentes.

Figura 4.4 - Propagação do semi-eixo maior (a), excentricidade (e), inclinação (i) e do ângulo ressoante ($\Delta\lambda$) das trajetórias (f) da Figura 4.2 (curva azul - (a) na legenda da figura) e (d) da Figura 4.3 (curva vermelha - (b) na legenda da figura).



A Figura 4.4(a) apresenta a propagação da inclinação, excentricidade e semi-eixo maior das trajetórias (f) da Figura 4.2 (curva azul - (a) na legenda da figura) e (d) da Figura 4.3 (curva vermelha - (b) na legenda da figura). Como pode ser notado, a inclinação está variando de maneira muito parecida nos casos escolhidos. Mesmo que e iniciais possuam valores diferentes, 0,03 em (a) e 0,1 em (b), em ambos os casos ela oscila no entorno de 0,07. O semi-eixo maior inicial em ambos os casos está variando no entorno de 1,176263432867 km. A Figura 4.4(b), que apresenta a oscilação da longitude média relativa, mostra um retrato da chamada ressonância de movimento médio 1:1. O caso (a)(curva azul) que iniciou próximo de 300° , onde virtualmente estaria o L_5 , oscila no entorno deste valor. O mesmo ocorre em (b)(curva vermelha), que inicia e permanece oscilando no entorno do L_4 em $\Delta\lambda$ igual a 60° .

Figura 4.5 - Tempo final de simulação para grade de condições iniciais de excentricidade (e) e inclinação (i). Para $i = [90.001^\circ, 180^\circ]$, $a_0 = 1,176263432867\text{km}$ e $\Delta\phi = 60^\circ$ (para $\omega = 0^\circ$). As condições iniciais as trajetórias (a)-(m) (pontos azuis) são dadas na Tabela 4.8. As linhas vermelhas são as trajetórias do veículo espacial e as linhas cyan são as órbitas de Didymoon.

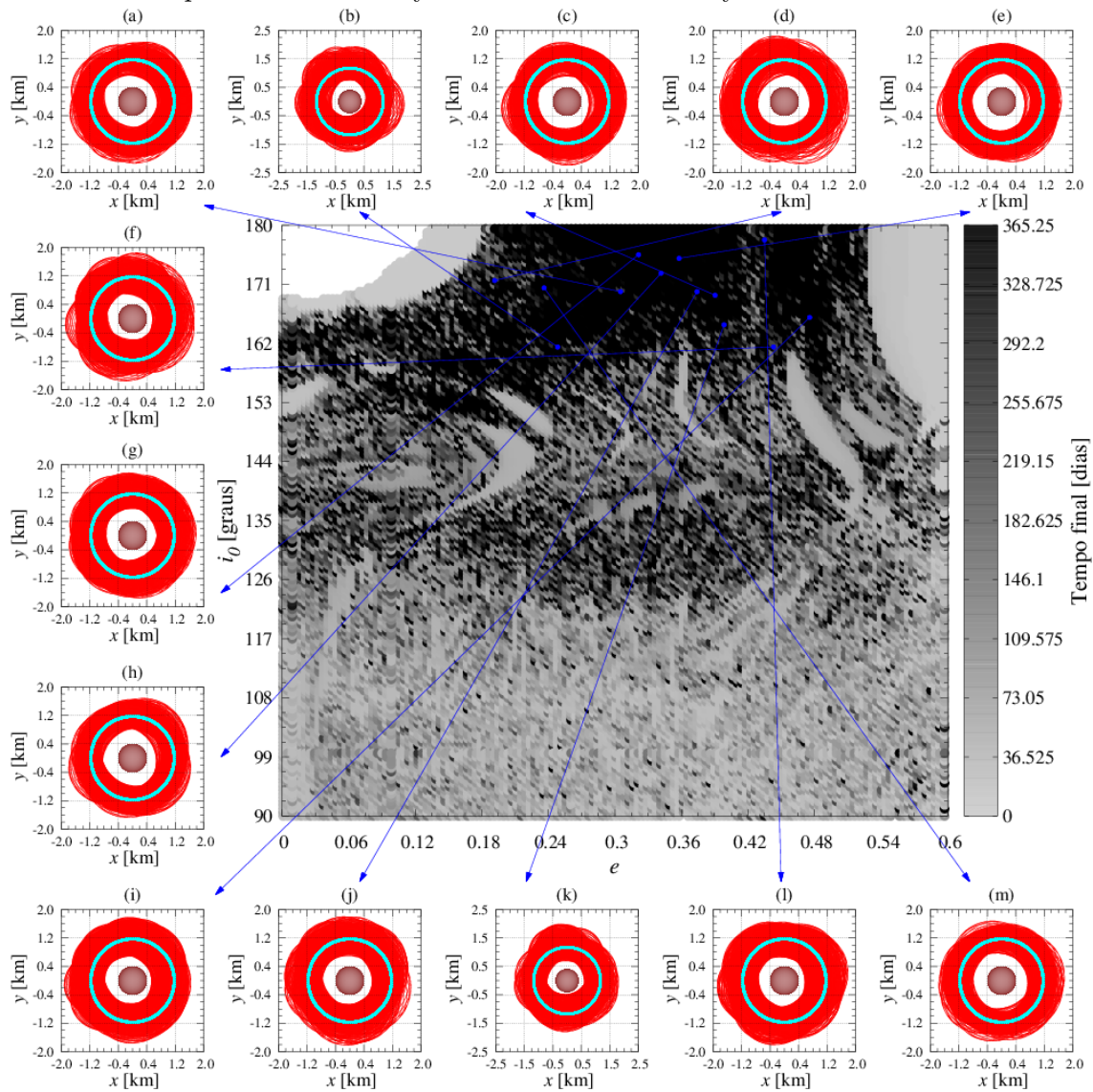


Tabela 4.8 - Condições iniciais das trajetórias da Figura 4.5. O tempo final apresentado é para simulações de até 10 anos.

Trajectoria	a_0 [km]	e_0	i_0 [graus]	ω_0 [graus]	Ω_0 [graus]	l_0 [graus]	$\Delta\phi_0$ [graus]	Tempo final [anos]
(a)	1.176	0.305	169.874	180.000	180.000	60.000	60.000	1.231
(b)	1.176	0.248	161.437	180.000	180.000	60.000	60.000	1.276
(c)	1.176	0.390	169.312	180.000	180.000	60.000	60.000	1.212
(d)	1.176	0.192	171.562	180.000	180.000	60.000	60.000	1.293
(e)	1.176	0.358	174.937	180.000	180.000	60.000	60.000	1.176
(f)	1.176	0.443	161.437	180.000	180.000	60.000	60.000	1.140
(g)	1.176	0.321	175.499	180.000	180.000	60.000	60.000	1.310
(h)	1.176	0.342	172.687	180.000	180.000	60.000	60.000	1.310
(i)	1.176	0.476	165.937	180.000	180.000	60.000	60.000	1.085
(j)	1.176	0.374	169.874	180.000	180.000	60.000	60.000	1.289
(k)	1.176	0.399	164.812	180.000	180.000	60.000	60.000	1.409
(l)	1.176	0.435	177.749	180.000	180.000	60.000	60.000	1.099
(m)	1.176	0.236	170.437	180.000	180.000	60.000	60.000	1.118

A Figura 4.5 apresenta os tempos finais das simulações para $i = [90.001^\circ, 180^\circ]$, ou seja, são órbitas retrógradas. A Tabela 4.8 apresenta as condições iniciais das trajetórias (a)-(m) e o tempo final para simulações de 10 anos destas trajetórias. O caso retrogrado se mostra mais complicado. A combinação excentricidade baixa e inclinação retrógrada baixa coloca o veículo espacial em rota de colisão com Didymoon. A região de sobrevivência por até 1 ano não é bem definida, como na Figura 4.1, por se tratarem de órbitas coorbitais é fácil imaginar que é necessária uma combinação específica para que a colisão não ocorra, visto que o veículo espacial vai coorbitar, indo de encontro a Didymoon a cada revolução. Contudo, através da observação da grade pode-se dizer que as chances de sobrevivência aumentam para $e = [0.24, 0.42]$ e $i = [171^\circ, 180^\circ]$. A Tabela 4.8 mostra que as trajetórias não sobreviveram por mais de 1,5 anos. Comparadas com as trajetórias dos casos diretos, apresentados pelas Figuras 4.1, 4.2 e 4.3, as trajetórias retrogradas possuem maior amplitude de variação. Isso ocorre pois a cada cruzamento o veículo espacial tem sua trajetória alterada por Didymoon.

Figura 4.6 - Tempo final de simulação para grade de condições iniciais de incremento no semi-eixo maior (Δa) em relação ao semi-eixo maior coorbital e longitude média retrógrada (Δphi). $e = 0,325$, $i = 179,999^\circ$ e $\omega = 0^\circ$. As condições iniciais as trajetórias (a)-(m) (pontos azuis) são dadas na Tabela 4.9. As linhas vermelhas são as trajetórias do veículo espacial e as linhas cyan são as órbitas de Didymoon.

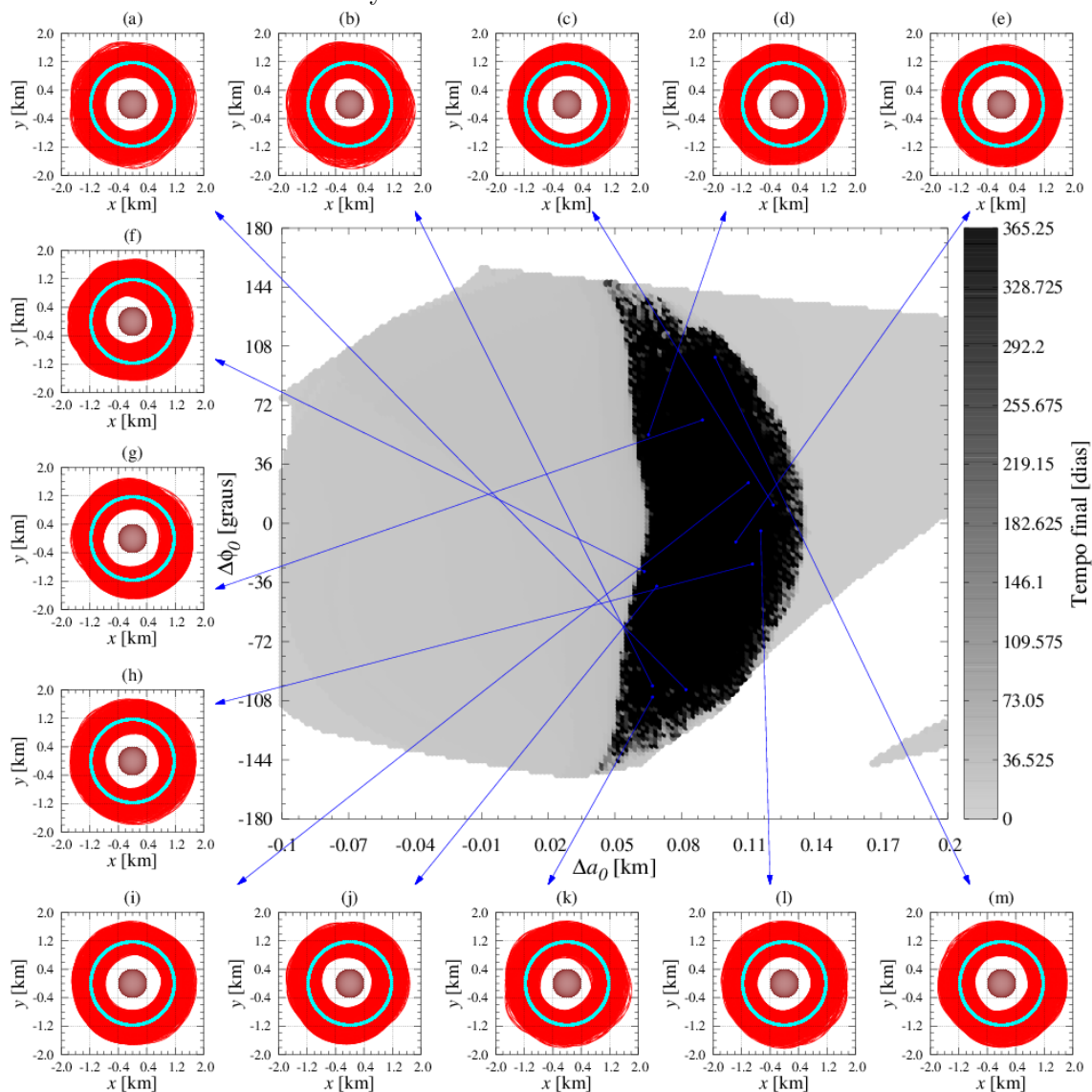


Tabela 4.9 - Condições iniciais das trajetórias da Figura 4.6. O tempo final apresentado é para simulações de até 10 anos.

Trajectoria	a_0 [km]	e_0	i_0 [graus]	ω_0 [graus]	Ω_0 [graus]	l_0 [graus]	$\Delta\phi_0$ [graus]	Tempo final [anos]
(a)	1.258	0.325	179.999	0.000	180.000	78.750	258.750	1.195
(b)	1.243	0.325	179.999	0.000	180.000	81.000	261.000	1.236
(c)	1.298	0.325	179.999	0.000	180.000	191.250	11.250	1.153
(d)	1.241	0.325	179.999	0.000	180.000	234.000	54.000	1.239
(e)	1.281	0.325	179.999	0.000	180.000	168.750	348.750	1.290
(f)	1.240	0.325	179.999	0.000	180.000	150.750	330.750	1.064
(g)	1.266	0.325	179.999	0.000	180.000	243.000	63.000	1.351
(h)	1.288	0.325	179.999	0.000	180.000	155.250	335.250	1.263
(i)	1.286	0.325	179.999	0.000	180.000	204.750	24.750	1.359
(j)	1.245	0.325	179.999	0.000	180.000	141.750	321.750	1.114
(k)	1.243	0.325	179.999	0.000	180.000	74.250	254.250	1.266
(l)	1.292	0.325	179.999	0.000	180.000	175.500	355.500	1.305
(m)	1.271	0.325	179.999	0.000	180.000	281.250	101.250	1.072

A Figura 4.6 mostra os tempos finais para as simulações para diferentes condições iniciais de Δa e $\Delta\phi$. Em que: $e = 0,325$, $i = 179,99^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$. O valor de $\Delta\phi$ foi ajustado para o intervalo $\Delta\phi = [-180^\circ, 180^\circ]$ para facilitar a visualização da região de sobrevivência. A Tabela 4.9 apresenta as condições iniciais das trajetórias (a)-(m) e o tempo final para simulação de 10 destas trajetórias. A região de sobrevivência é maior em comparação aos casos diretos apresentados pelas Figuras 4.2 e 4.3. A região se estende em $\Delta\phi = [-144^\circ, 144^\circ]$, este intervalo de 288° facilita a inserção do veículo espacial na órbita. As trajetórias, no geral, possuem uma grande amplitude em relação a órbita de Didymoon e, conforme a Tabela 4.9, não sobrevivem por mais de 1,5 anos.

Figura 4.7 - Tempo final de simulação para grade de condições iniciais de incremento no semi-eixo maior (Δa) em relação ao semi-eixo maior coorbital e longitude média relativa retrógrada (Δphi). $e = 0,325$, $i = 179,999^\circ$ e $\omega = 180^\circ$. As condições iniciais as trajetórias (a)-(m) (pontos azuis) são dadas na Tabela 4.10. As linhas vermelhas são as trajetórias do veículo espacial e as linhas cian são as órbitas de Didymoon.

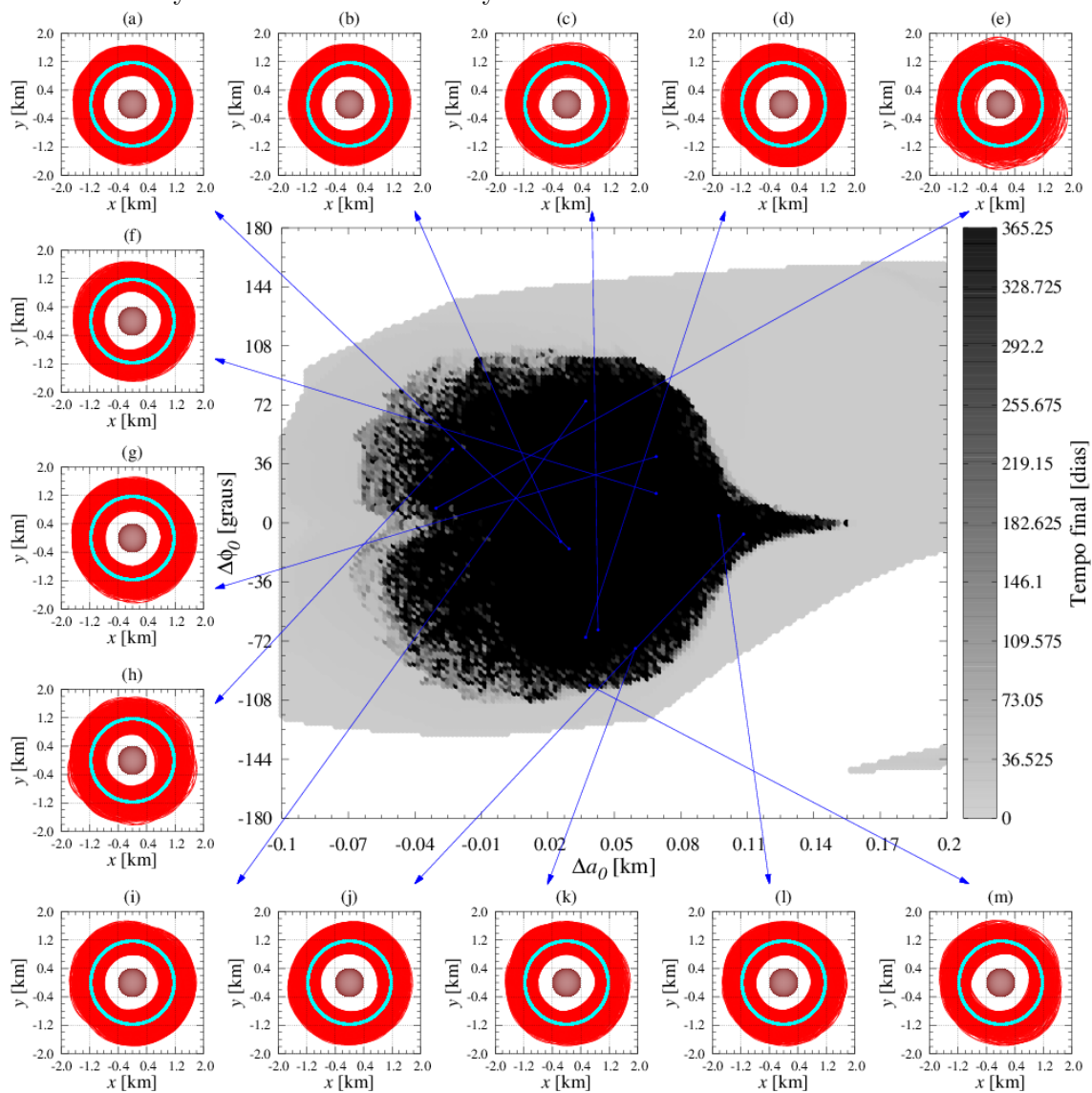
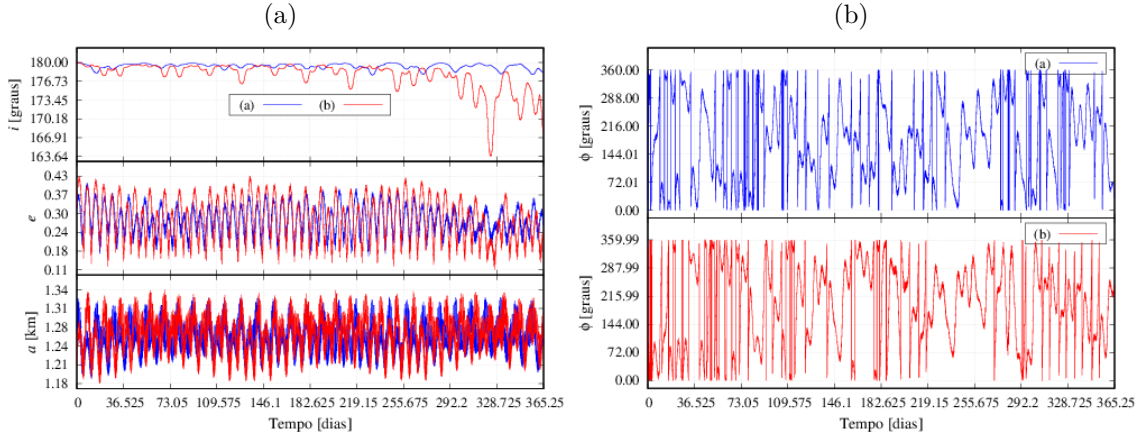


Tabela 4.10 - Condições iniciais das trajetórias da Figura 4.7. O tempo final apresentado é para simulações de até 10 anos.

Trajectoria	a_0 [km]	e_0	i_0 [graus]	ω_0 [graus]	Ω_0 [graus]	l_0 [graus]	ϕ_0 [graus]	Tempo final [anos]
(a)	1.206	0.325	179.999	180.000	180.000	344.250	344.250	1.314
(b)	1.202	0.325	179.999	180.000	180.000	348.750	348.750	1.326
(c)	1.219	0.325	179.999	180.000	180.000	294.750	294.750	1.336
(d)	1.213	0.325	179.999	180.000	180.000	290.250	290.250	1.127
(e)	1.146	0.325	179.999	180.000	180.000	9.000	9.000	1.107
(f)	1.245	0.325	179.999	180.000	180.000	18.000	18.000	1.355
(g)	1.245	0.325	179.999	180.000	180.000	40.500	40.500	1.360
(h)	1.153	0.325	179.999	180.000	180.000	45.000	45.000	1.155
(i)	1.213	0.325	179.999	180.000	180.000	74.250	74.250	1.351
(j)	1.285	0.325	179.999	180.000	180.000	353.250	353.250	1.155
(k)	1.236	0.325	179.999	180.000	180.000	283.500	283.500	1.056
(l)	1.273	0.325	179.999	180.000	180.000	4.500	4.500	1.280
(m)	1.215	0.325	179.999	180.000	180.000	261.000	261.000	1.062

A Figura 4.7 apresenta o tempo final para uma grade de condições iniciais de Δa e $\Delta \phi$. Em que: $e = 0,325$, $i = 179,99^\circ$, $\omega = 180^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$. Do mesmo modo que na Figura 4.7, $\Delta \phi$ foi ajustado o intervalo $\Delta \phi = [-180^\circ, 180^\circ]$ para facilitar a visualização da região de sobrevivência. A Tabela 4.10 apresenta as condições iniciais das trajetórias (a)-(m) e o tempo final para a simulação de 10 anos destas trajetórias. A região de sobrevivência é maior que as apresentadas nas Figuras 4.2, 4.3 e 4.6. Em termos de facilidade de inserção na órbita está é a melhor escolha. Conforme mostra a Tabela 4.10, em relação ao tempo máximo de sobrevivência, em que para nenhuma condição inicial a trajetória superou 1,5 anos, não há vantagem em relação aos outros casos.

Figura 4.8 - Propagação do semi-eixo maior (a), excentricidade (e), inclinação (i) e do ângulo ressoante para o caso retrógrado ($\Delta\phi$) das trajetórias (i) da Figura 4.6 (curva azul - (a) na legenda da figura) e (g) da Figura 4.7 (curva vermelha - (b) na legenda da figura).



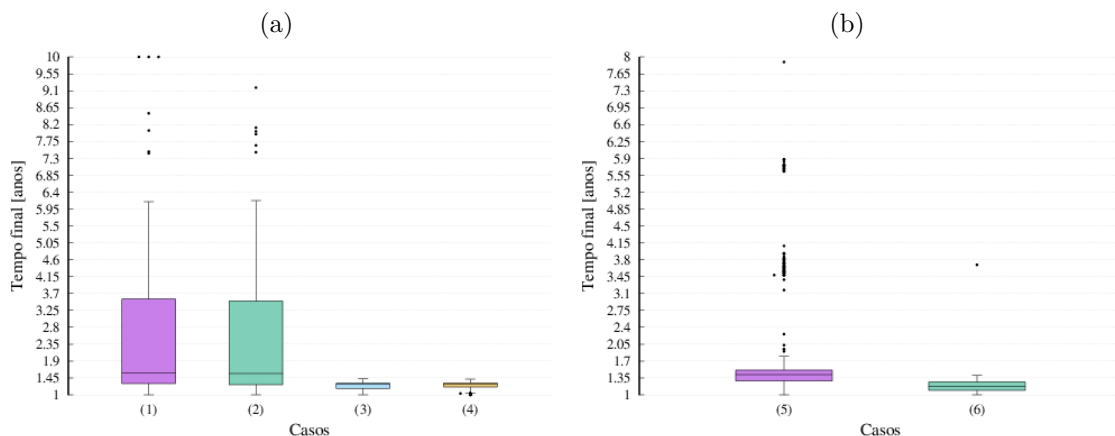
A Figura 4.8(a) apresenta a propagação da inclinação, excentricidade e semi-eixo maior das trajetórias (i) da Figura 4.6 (curva azul - (a) na legenda da figura) e (g) da Figura 4.7 (curva vermelha - (b) na legenda da figura). Na variação da inclinação é possível notar que, em ambos os casos, a inclinação tem picos ao longo do tempo, e isso é mais evidente em (b). O mais provável é que isso ocorra nos cruzamentos mais próximos do veículo espacial com Didymoon. A excentricidade tem um comportamento muito parecido em ambos os casos, com praticamente a mesma amplitude de variação e oscilando ao redor de 0,26. O semi-eixo maior tem a amplitude de variação parecida em ambos os casos e oscila no entorno do valor de aproximadamente 1,26 km. A Figura 4.8(b) apresenta a propagação de ϕ para os casos (a) e (b). O ângulo ϕ mapeia todos os encontros próximos do veículo espacial e Didymoon.

Nos casos anteriores somente as trajetórias foram propagadas por até 10 anos e, como podê ser notado, o tempo final foi variado. Para encontrar o limite de tempo das regiões de sobrevivência foram selecionadas aleatoriamente 1000 condições iniciais entre as que sobreviveram por até 1 ano nas Figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.5, 4.6 e 4.7. Durante as novas simulações para o tempo final de 10 anos algumas trajetórias dentre as 1000 selecionadas passaram a sobreviver por menos de 1 ano. Isso ocorreu devido a mudanças nos parâmetros de integração necessários para a realização da simulação por até 10 anos. Devido a essas alterações, trajetórias em regiões caóticas forneceram resultados completamente distintos ante aos novos parâmetros de integração. Estes pontos foram excluídos e o número de pontos foi normalizado para

632. Os resultados estatísticos são apresentados a seguir em gráficos do tipo boxplot. Os resultados estão organizados da seguinte maneira:

- (1) Refente ao caso apresentado pela Figura 4.2.
- (2) Refente ao caso apresentado pela Figura 4.3.
- (3) Refente ao caso apresentado pela Figura 4.6.
- (4) Refente ao caso apresentado pela Figura 4.7.
- (5) Refente ao caso apresentado pela Figura 4.1.
- (6) Refente ao caso apresentado pela Figura 4.5.

Figura 4.9 - Boxplot para o tempo final de um conjunto de 632 condições iniciais escolhidas entre as que sobreviveram por 1 ano. Essas condições iniciais foram propagadas por 10 anos.



Analisando a Figura 4.9(a) pode-se notar, pelos casos (1) e (2), que, em relação ao tempo máximo de sobrevivência das órbitas coorbitais, o caso ideal são as órbitas diretas, ou seja, órbitas que estarão no mesmo sentido de translação que Didymoon. Nestes casos existem *outliers* que chegaram a sobreviver pelo tempo máximo de 10 anos. Em um sistema com mais massa que o sistema Didymos, isso seria um indicativo da presença de partículas, que permanecem por longos períodos coorbitando a lua do sistema. Porém, em um sistema com tão pouca massa, perturbações como a SRP, a longo prazo, retirariam essas partículas das órbitas coorbitais. No caso retrógrado, casos (3) e (4), conforme as Tabelas 4.9 e 4.10 já indicavam, nenhuma condição inicial fez com que o veículo espacial sobrevivesse coorbitando o sistema por mais de 1,5 anos. O resultado apresentado na Figura 4.9(b) corrobora o da Figura 4.9(a), onde as condições iniciais representadas pelo caso (5), para inclinação

direta, sobrevivem por mais tempo que as do caso (6), para inclinações retrógradadas.

4.4.2 Análise das perturbações pelas PIs

Nesta seção são analisados os perturbadores que foram considerados no estudo da Seção 4.4.1, as quais foram apresentadas nas Seções 4.1.1, 4.1.2 (Sol, Didymoon, Júpiter, Marte e Terra) e 3.2. Todas as figuras apresentadas tiveram os limites da escala de cor alterados de modo a evidenciar os resultados referentes as regiões com tempo final de simulação igual a 1 ano. Considerando que o valor médio das integrais é igual a M para as simulações com tempo final igual a 1 ano e o desvio padrão é igual a σ :

- o limite inferior na escala de cores é igual a $M - 2\sigma$;
- o limite superior na escala de cores é igual a $M + 2\sigma$.

Desta maneira as escalas de cores se tornam mais representativa para as simulações que duram 1 ano.

Figura 4.10 - Resultados das integrais do tipo i feitas para as simulações apresentadas na Figura 4.2 para Sol, Júpiter, Marte e Terra.

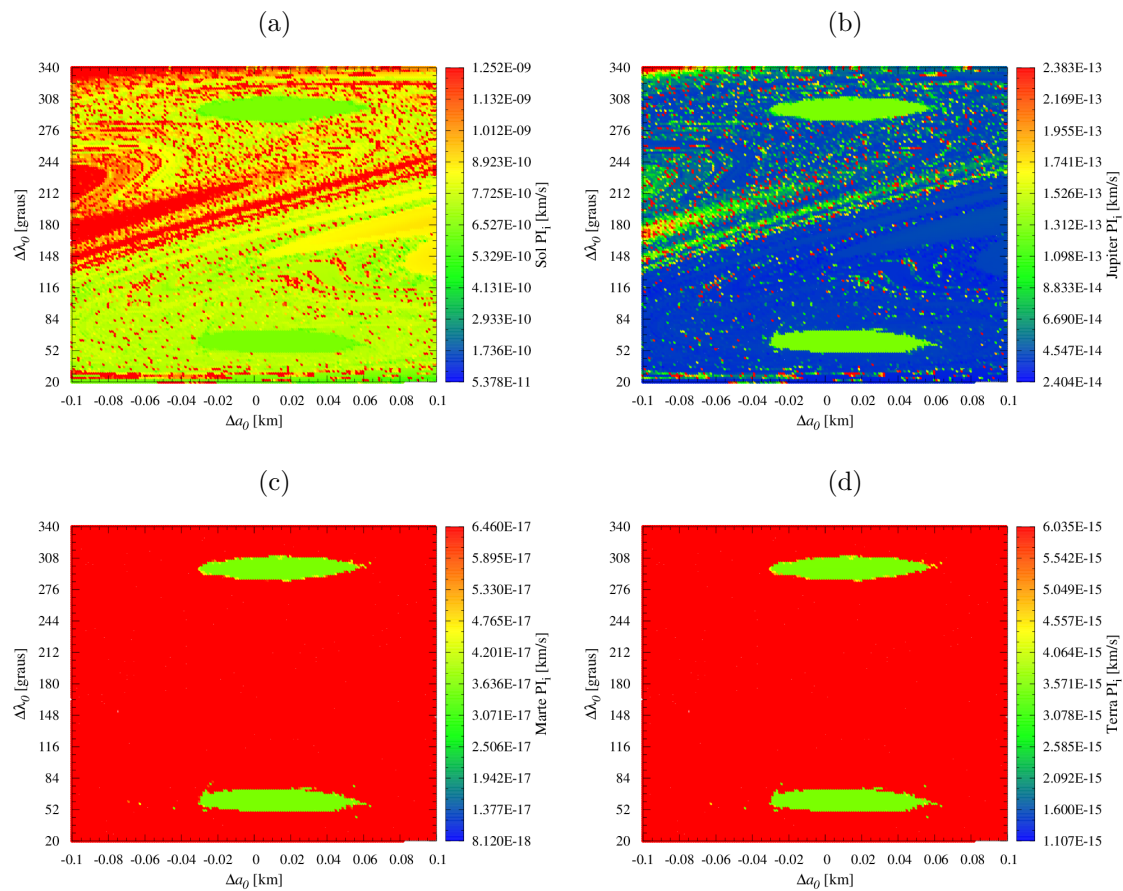
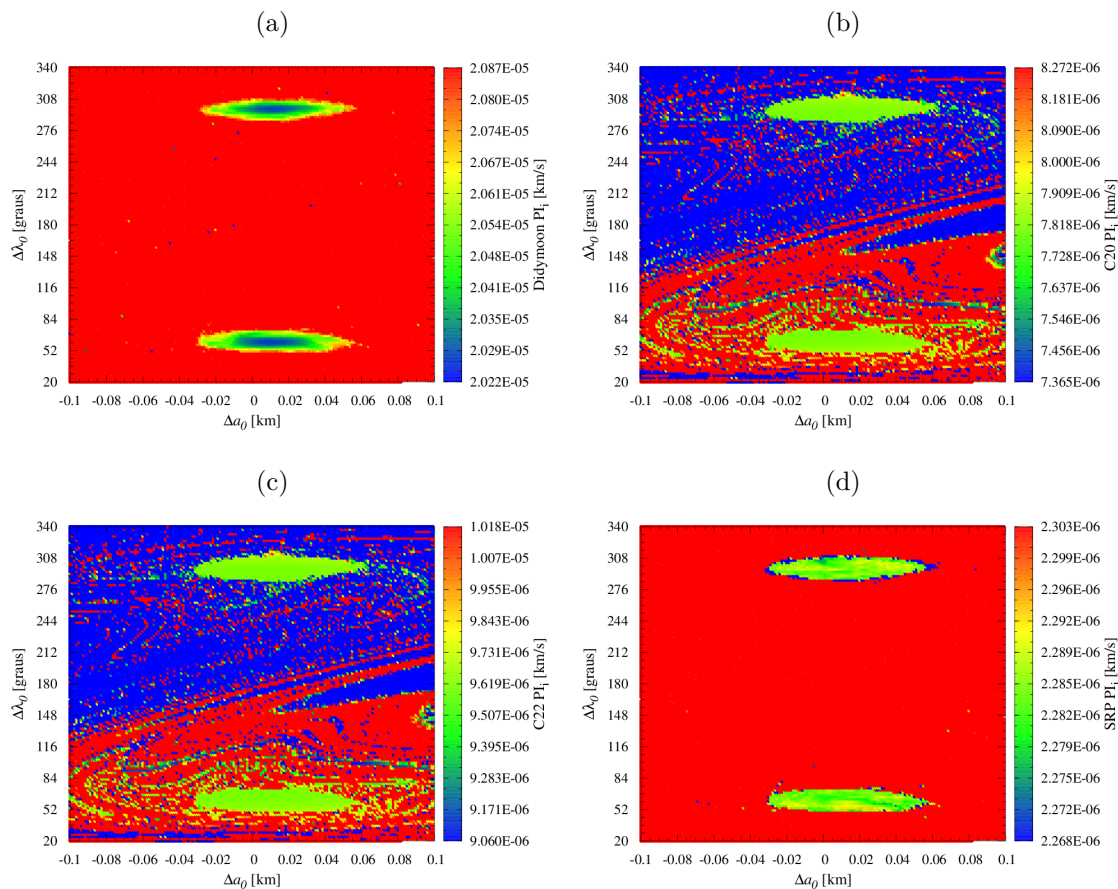


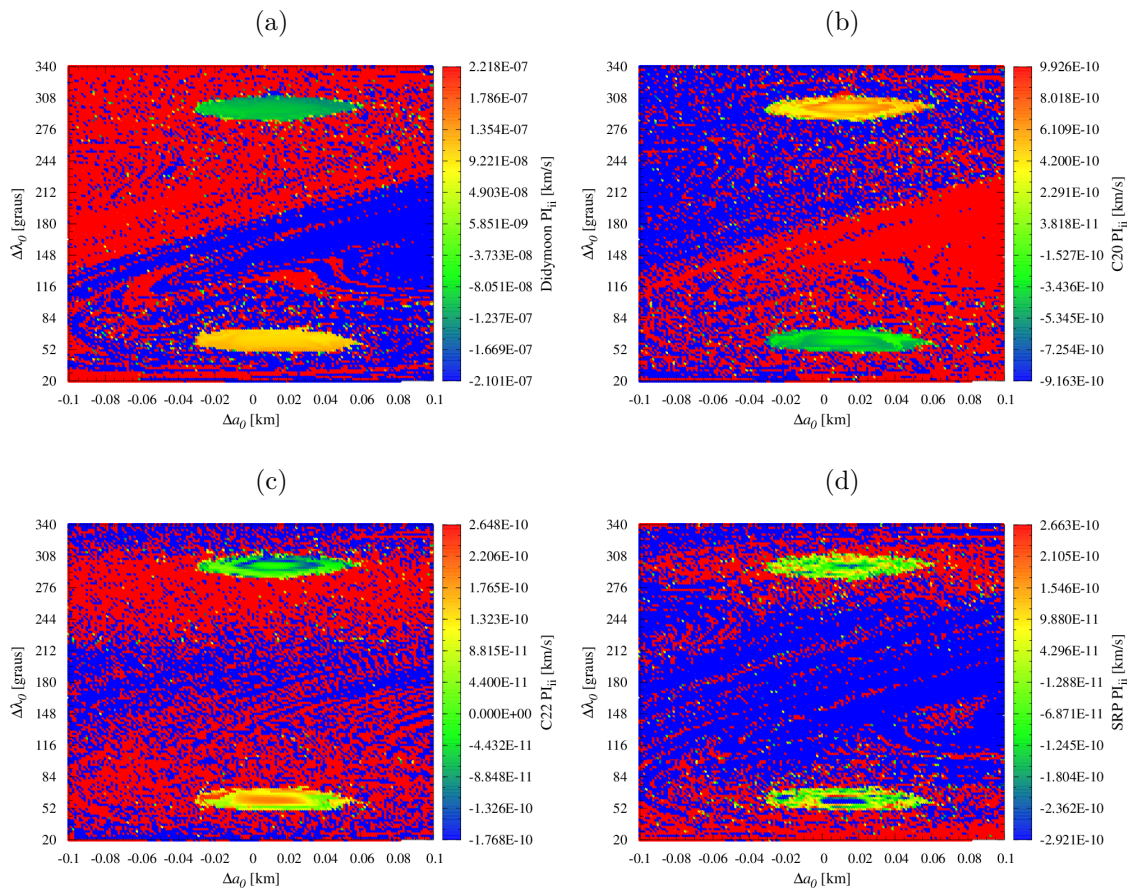
Figura 4.11 - Resultados das integrais do tipo i feitas para as simulações apresentadas na Figura 4.2.



As Figuras 4.10(a)-4.11(d) apresentam os resultados das integrais do tipo i (PI_i) das simulações da Figura 4.2 para os perturbadores mencionados anteriormente. Esse tipo de integral ajuda a encontrar qual perturbação mais atuou sobre o veículo espacial, sem levar em consideração qual foi o efeito desta perturbação na trajetória. As Figuras 4.10(a)-4.10(d) apresentam os resultados das PI_i para o Sol, Júpiter, Marte e Terra, respectivamente. Pode-se notar que na região de sobrevivência de 1 ano, definida anteriormente na Figura 4.2, a média da perturbação do Sol é de aproximadamente $6,527 \times 10^{-10}$ km/s, de Júpiter é de aproximadamente $1,312 \times 10^{-13}$ km/s, de Marte é de aproximadamente $3,636 \times 10^{-17}$ km/s e da Terra é de aproximadamente $3,571 \times 10^{-15}$. Portanto, conclui-se que essas perturbações são negligenciáveis para o tempo de 1 ano. Logo, os resultados das PI do tipo ii e iii para estes perturbadores não são apresentados nesta seção, e estão disponíveis para consulta no Apêndice G. Conforme mostra a Figura 4.11(a), Didymoon é o maior perturbador, com perturbação média de aproximadamente $2,054 \times 10^{-5}$ km/s. Isso

é esperado para coorbitais, visto que estão presos a ressonância de movimento médio. Quanto mais interno à região de sobrevivência definida na Figura 4.2 menor foi a perturbação de Didymoon sobre o veículo espacial. As Figuras 4.11(b) e 4.11(c) apresentam os resultados para as perturbações dos harmônicos esféricos C_{20} e C_{22} do corpo central, respectivamente. C_{20} é o segundo maior perturbador com média de $7,818 \times 10^{-6}$ km/s e C_{22} é o terceiro maior perturbador, com média de $9,619 \times 10^{-6}$ km/s. A SRP na região de sobrevivência definida na Figura 4.2, como é possível notar na Figura 4.11(d), é o quarto maior perturbador, com média de $2,282 \times 10^{-6}$ km/s. A seguir, utilizando as integrais do tipo ii e iii será possível mostrar que o fato de um perturbador ter perturbado mais que outro não significa que ele seja o responsável por desviar mais ou menos a trajetória.

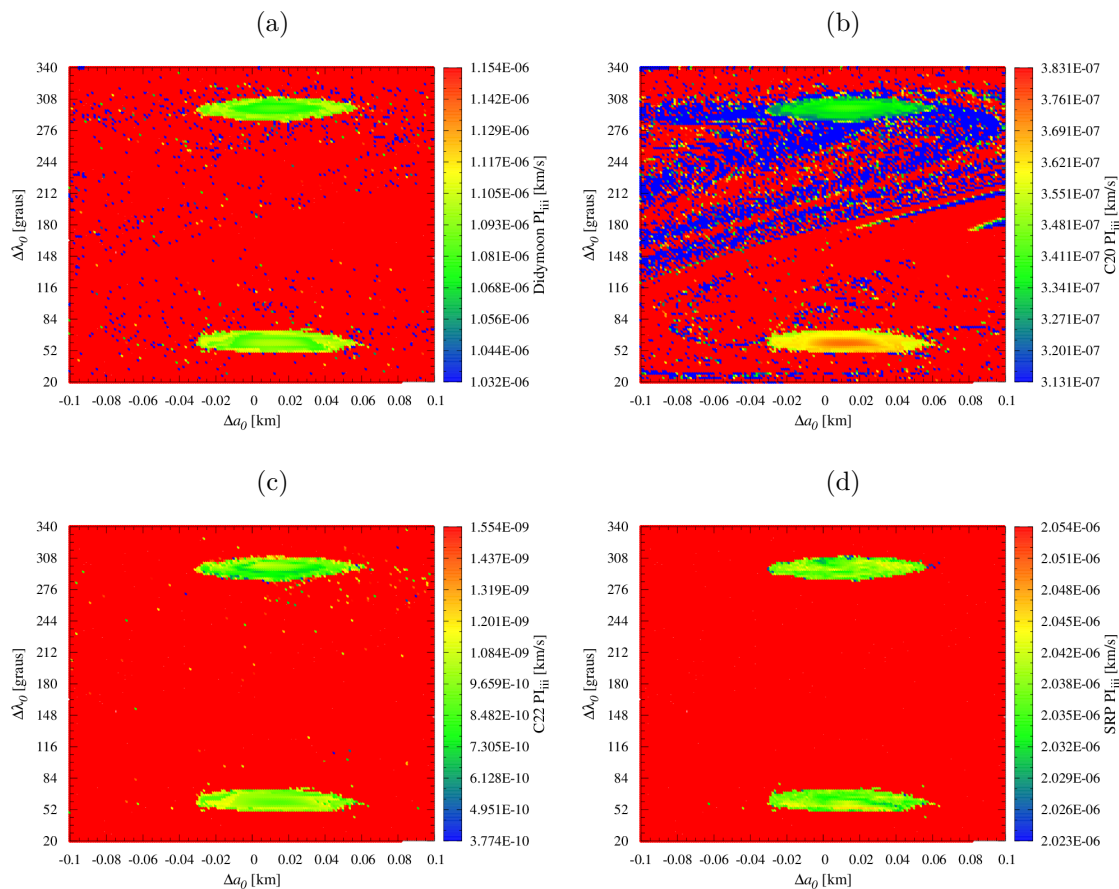
Figura 4.12 - Resultados das integrais do tipo ii feitas para as simulações apresentadas na Figura 4.2.



As Figuras 4.12(a)-4.12(d) apresentam os resultados das integrais do tipo ii. Este

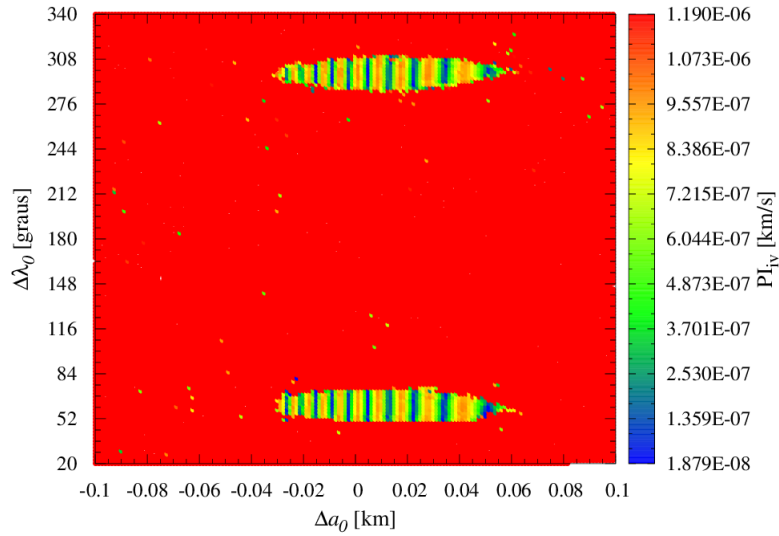
tipo de integral é útil para identificar quanta energia foi introduzida ou retirada do sistema devido à presença de um elemento perturbador. A Figura 4.12(a) mostra que ao longo de 1 ano Didymoon injetou aproximadamente $9,221 \times 10^{-8}$ km/s nas trajetórias que iniciaram no entorno de $\Delta\lambda_0 = 60^\circ$ (virtualmente onde seria L_4), ou seja, em média, injetou mais energia do que retirou do movimento; e retirou aproximadamente $-1,237 \times 10^{-7}$ km/s das trajetórias que iniciaram no entorno de $\Delta\lambda_0 = 300^\circ$ (virtualmente onde seria L_5), ou seja, em média, injetou mais energia no movimento. Analisando as Figuras 4.12(b) pode-se notar que C_{20} ao contrário de Didymoon, retirou mais energia em $\Delta\lambda_0 = 60^\circ$, aproximadamente $[-7.254 \times 10^{-10}, -3.436 \times 10^{-10}]$ km/s ao longo de 1 ano, e injetou mais energia no entorno de $\Delta\lambda_0 = 300^\circ$, aproximadamente $[2.291 \times 10^{-10}, 8.018 \times 10^{-10}]$. Já C_{22} , assim como Didymoon, conforme mostra a Figura 4.12(c), injetou de energia no movimento em $\Delta\lambda_0 = 60^\circ$ aproximadamente $[0, 2.206 \times 10^{-10}]$ km/s, e retirou de energia em $\Delta\lambda_0 = 300^\circ$ aproximadamente $[-1.326 \times 10^{-10}, 0]$ km/s. A Figura 4.12(d) mostra que a SRP teve um comportamento não uniforme, onde é possível encontrar pontos em que a SRP injetou ou retirou energia espalhados nas regiões de sobrevivência de 1 ano definidas na Figura 4.2, o intervalo está definido entre $-2,921 \times 10^{-10}$ e $2,553 \times 10^{-10}$ km/s. As PI_{ii} de C_{20} , C_{22} e SRP tem ordem de grandeza de $\pm 10^{-10}$ e isso indica que há compensação nesses perturbadores, ou seja, há momentos em que ele injeta e momentos em que ele retira energia do movimento, o que dá no balanço final uma PI_{ii} pequena. Essa compensação, conforme Figuras 4.4(a) e 4.4(b), se deve ao fato da órbita, que está em ressonância de movimento médio com Didymoon, manter seus valores de excentricidade e semi-eixo oscilando em um mesmo intervalo ao longo do ano. Como ilustração, considere que uma órbita simétrica perturbada pela SRP ao longo de 1 período, com uma terceira força hipotética mantendo a simetria inicial. Na primeira metade do período o veículo espacial está no mesmo sentido do fluxo solar e na segunda metade do período está no sentido contrário do fluxo solar. Ao fim de um período o valor da PI_{ii} da SRP para o caso descrito seria zero, pois a SRP teria injetado e retirado, respectivamente, exatamente a mesma quantidade de energia na órbita.

Figura 4.13 - Resultados das integrais do tipo iii feitas para as simulações apresentadas na Figura 4.2.



As Figuras 4.13(a)-4.13(d) apresentam os resultados para as integrais do tipo iii. Este tipo de integral dá um valor líquido de quanto o perturbador injetou de ΔV no movimento. Didymoon, conforme mostra a Figura 4.13(a), perturbou as órbitas em $\Delta\lambda_0 = 60^\circ$ e 300° em aproximadamente $[1.068 \times 10^{-6}, 1.117 \times 10^{-6}]$ km/s. A Figura 4.13(b) mostra que C_{20} perturbou o veículo espacial em aproximadamente $[3.481 \times 10^{-7}, 3.761 \times 10^{-7}]$ km/s no entorno de $\Delta\lambda_0 = 60^\circ$ e aproximadamente $[3.271 \times 10^{-7}, 3.411 \times 10^{-7}]$ km/s no entorno de $\Delta\lambda_0 = 300^\circ$. A Figura 4.13(c) mostra que C_{22} perturbou em aproximadamente $[7.305 \times 10^{-10}, 1.201 \times 10^{-9}]$ km/s no entorno de $\Delta\lambda_0 = 60^\circ$ e 300° . A Figura 4.13(d) mostra que a SRP foi o grande responsável por desviar a órbita do veículo espacial, perturbando com aproximadamente $[2.032 \times 10^{-6}, 2.045 \times 10^{-6}]$ km/s no entorno de $\Delta\lambda_0 = 60^\circ$ e 300° .

Figura 4.14 - Resultados das integrais do tipo iv feitas para as simulações apresentadas na Figura 4.2.



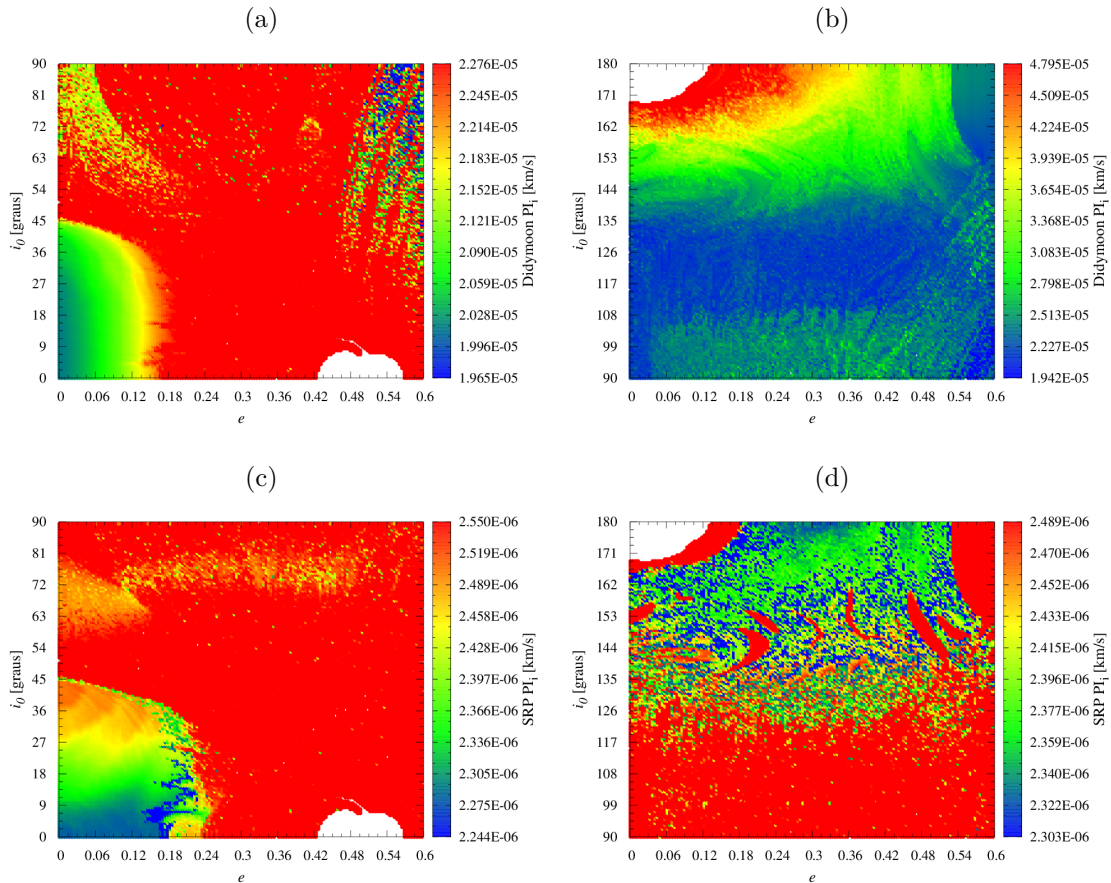
A Figura 4.14 apresenta a integral do tipo iv. Esta integral, sem levar em consideração qual perturbador foi o responsável, auxilia na identificação de quais trajetórias se desviaram menos da trajetória definida inicialmente pelas condições iniciais. O resultado corrobora os resultados anteriores, mostrando que as regiões no entorno de $\Delta \lambda_0 = 60^\circ$ e 300° , que são as regiões de sobrevivência da Figura 4.2, são as regiões onde as órbitas menos desviaram de sua órbita inicial. Como explicado anteriormente, a ressonância de movimento médio controlou o crescimento da excentricidade e do semi-eixo maior. Outro resultado importante da integral do tipo iv é mostrar qual seria o ΔV médio necessário para manter o veículo espacial em sua órbita definida pelas condições iniciais, caso não houvessem perturbadores. Neste caso, o valor está entre $1,879 \times 10^{-7}$ e $1,073 \times 10^{-6}$ km/s. Pode-se notar que dentro da região no entorno de $\Delta \lambda_0 = 60^\circ$ e 300° existem faixas definindo quais seriam os valores deste ΔV .

Os resultados das integrais do tipo i, ii, iii e iv para as simulações das Figuras 4.3, 4.6 e 4.7 possuem conclusões semelhantes as apresentados anteriormente. Portanto, não serão apresentadas aqui, ficando disponíveis para consulta no Apêndice G.

As Figuras 4.15(a)-4.16(d) apresentam os resultados das integrais do tipo i para as simulações apresentadas pelas Figuras 4.1 e 4.5. Para todos os casos as ordens de grandeza apontadas pelas Figuras 4.10(a)-4.11(d) se mantiveram. Conforme mencionado anteriormente, as perturbações devidas ao Sol, Júpiter, Marte e Terra são

negligenciáveis e não serão mais apresentadas. Estes resultados estão disponíveis para consulta no Apêndice G.

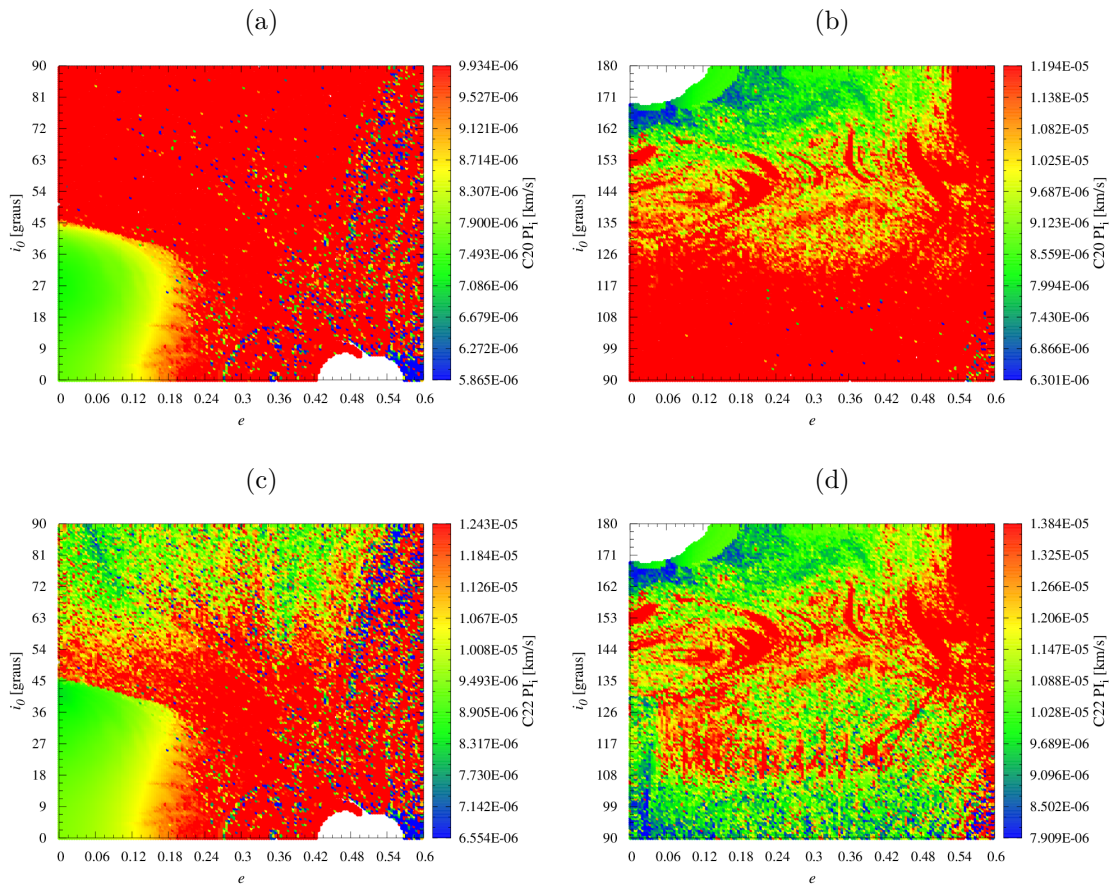
Figura 4.15 - Resultados das integrais do tipo i das simulações apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.5. (a) Perturbação devida a Didymoon para inclinação direta. (b) Perturbação devida a Didymon para inclinação retrógrada. (c) Perturbação devida a SRP para inclinação direta. (d) Perturbação devida a SRP para inclinação retrógrada.



A Figura 4.15(a) mostra que para o caso direto ($i = [0^\circ, 89, 999^\circ]$), dentro da região de sobrevivência por 1 ano definida na Figura 4.1, quanto menor a excentricidade e a inclinação menor é a perturbação devida a Didymoon. Contudo, conforme mostra a Figura 4.15(b), para inclinações retrógradadas ($i = [90, 001^\circ, 180^\circ]$) ocorre o inverso, quanto menor a excentricidade e a inclinação maior a perturbação devida a Didymoon. Isso ocorre pois, enquanto no caso direto quanto menor a excentricidade e a inclinação mais próximo o veículo espacial está de Didymoon, no caso retrógrado quanto menores são a excentricidade e a inclinação mais próximas são as passagens

do veículo espacial por Didymoon. As Figuras 4.15(c) e 4.15(d) apresentam os resultados para a SRP dos casos diretos e retrógrados, respectivamente. No caso direto é possível notar que a perturbação pela SRP aumenta com a inclinação, sendo menos afetadas por variações na excentricidade. No caso retrógrado não há uma relação clara entre variações na excentricidade e inclinação com o quanto a SRP perturbou essas órbitas. Porém, é possível identificar que na vizinhança da excentricidade 0,325, que foi a condição inicial de excentricidade das simulações apresentadas pelas Figuras 4.6 e 4.7, a SRP perturbou menos.

Figura 4.16 - Resultados das integrais do tipo i das simulações apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.5.(a) Perturbação devida a C_{20} para inclinação direta. (b) Perturbação devida a C_{22} para inclinação retrógrada. (c) Perturbação devida a C_{20} para inclinação direta. (d) Perturbação devida a C_{22} para inclinação retrógrada.

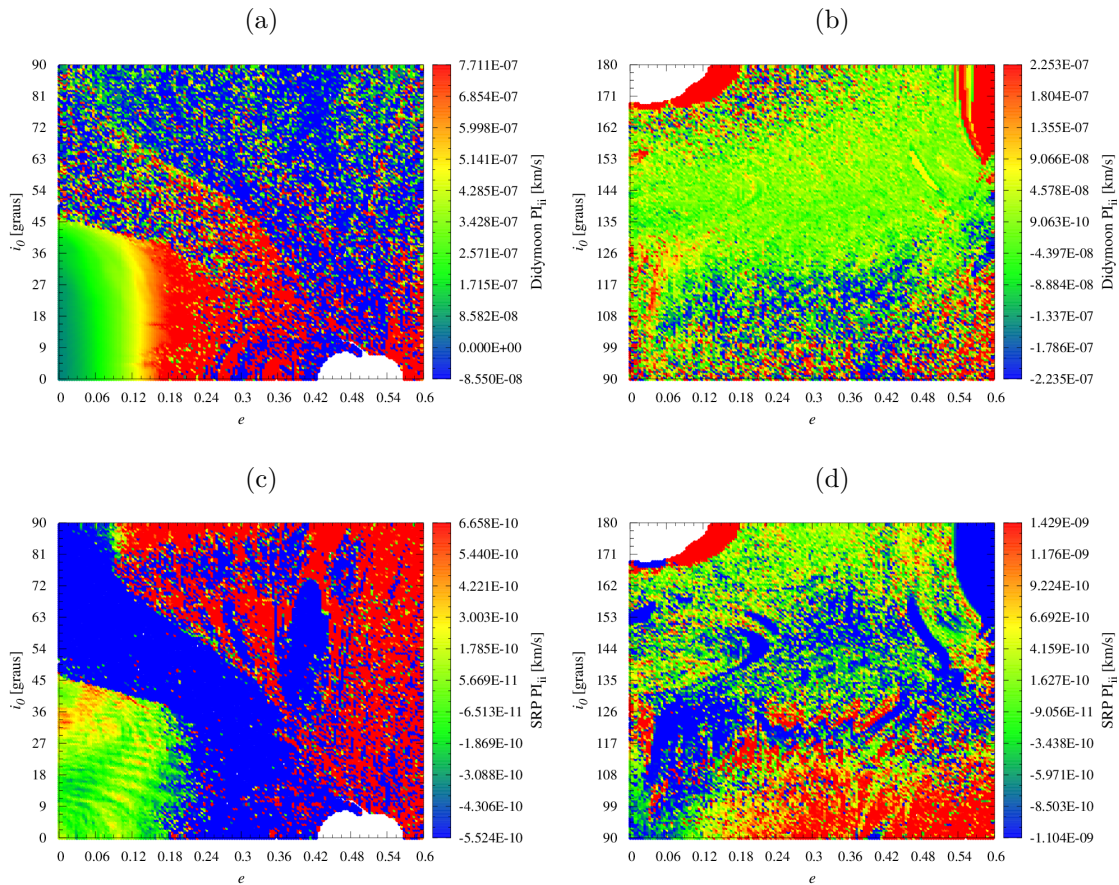


As Figuras 4.16(a) e 4.16(c) mostram que, dentro da região de sobrevivência definidas nas Figuras 4.1 e 4.5, para o caso direto C_{20} e C_{22} perturbam mais quanto

maior for a excentricidade, independente da inclinação. As Figuras 4.16(b) e 4.16(d) apresentam os casos retrógrados, pode-se notar que, assim como ocorre com a SRP, não há uma relação direta entre variações da excentricidade e da inclinação com quanto essas órbitas foram perturbadas por C_{20} e C_{22} .

As Figuras 4.17(a)-4.18(d) apresentam os resultados para as integrais do tipo ii.

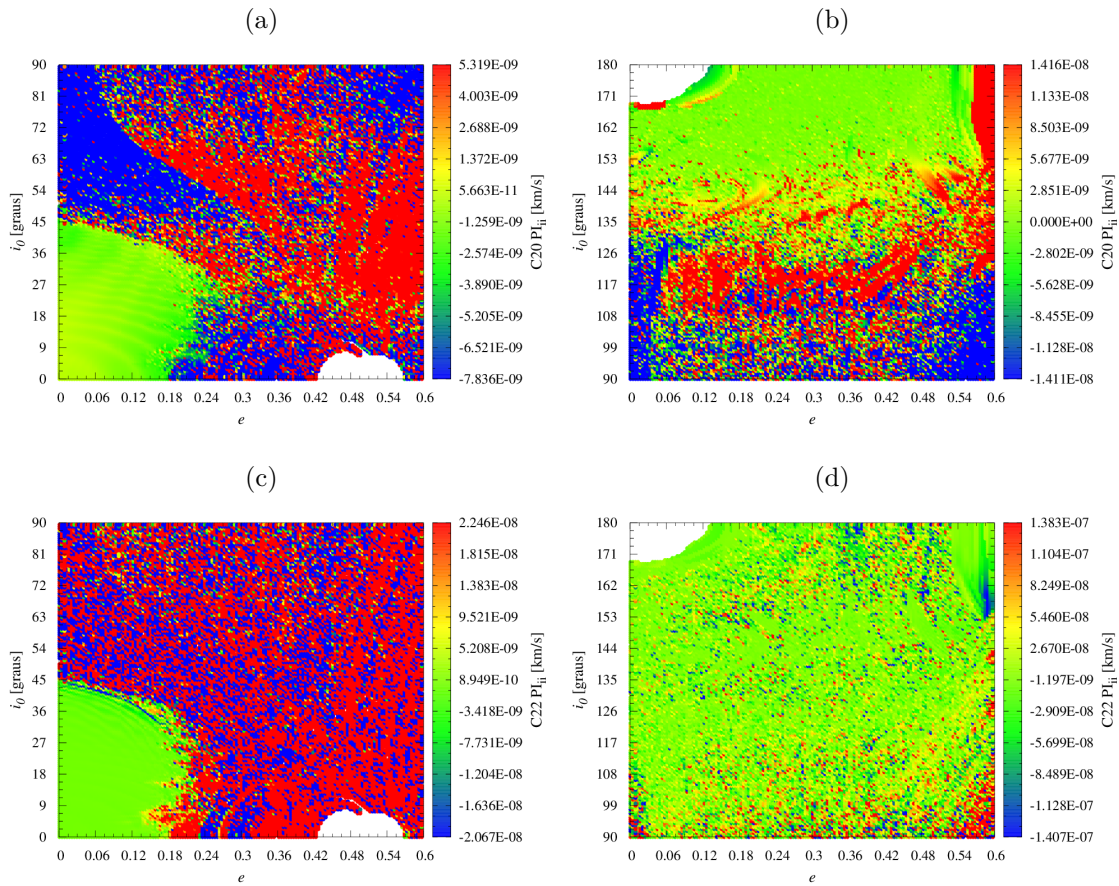
Figura 4.17 - Resultados das integrais do tipo ii das simulações apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.5. (a) Perturbação devida a Didymoon para inclinação direta. (b) Perturbação devida a Didymon para inclinação retrógrada. (c) Perturbação devida a SRP para inclinação direta. (d) Perturbação devida a SRP para inclinação retrógrada.



A Figura 4.17(a) mostra que, no balanço de injetar e retirar energia do movimento do veículo espacial em órbitas diretas, Didymoon se torna menos relevante a medida que a excentricidade e a inclinação diminuem. Agora, para os casos retrógrado, mostrados na Figura 4.17(b), não há relação direta entre variações de excentricidade

e inclinação com o quanto Didiymoon pode injetar ou retirar energia. O mesmo ocorre com a SRP, como mostrado nas Figuras 4.17(c) e 4.17(d), para os casos diretos e retrógrados, respectivamente.

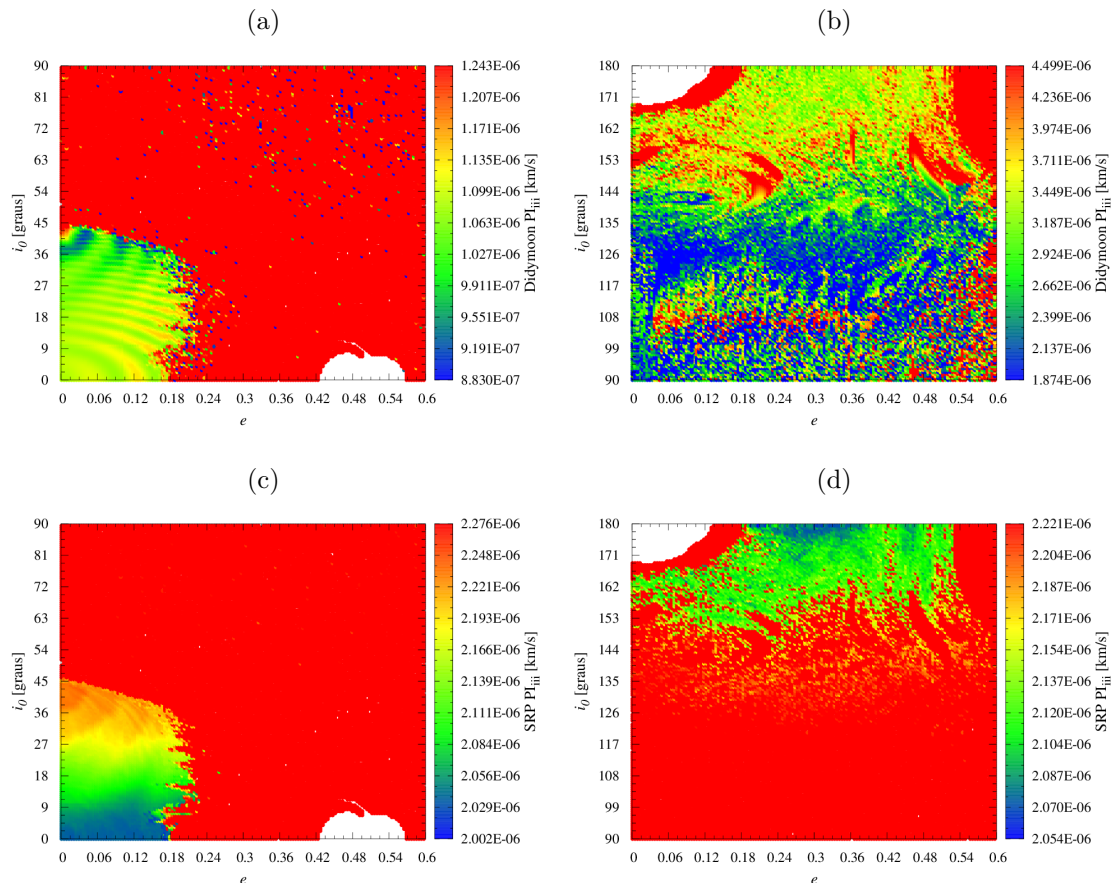
Figura 4.18 - Resultados das integrais do tipo ii das simulações apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.5.(a) Perturbação devida a C_{20} para inclinação direta. (b) Perturbação devida a C_{22} para inclinação retrógrada. (c) Perturbação devida a C_{20} para inclinação direta. (d) Perturbação devida a C_{22} para inclinação retrógrada.



As Figuras 4.18(a) e 4.18(c) mostram para C_{20} e C_{22} o mesmo tipo de estrutura em forma de onda que foi encontrada na Figura 4.17(c), onde esse perturbadores podem ter injetado ou retirado mais energia do movimento do veículo espacial seguindo essa estrutura. Nos casos retrógrados, conforme mostrado nas Figuras 4.18(b) e 4.18(d), não há relação direta com as variações de excentricidade e inclinação com o quanto C_{20} e C_{22} injetaram ou retiraram de energia do movimento do veículo espacial.

A seguir as Figuras 4.19(a)-4.20(d) apresentam os resultados para as integrais do tipo iv.

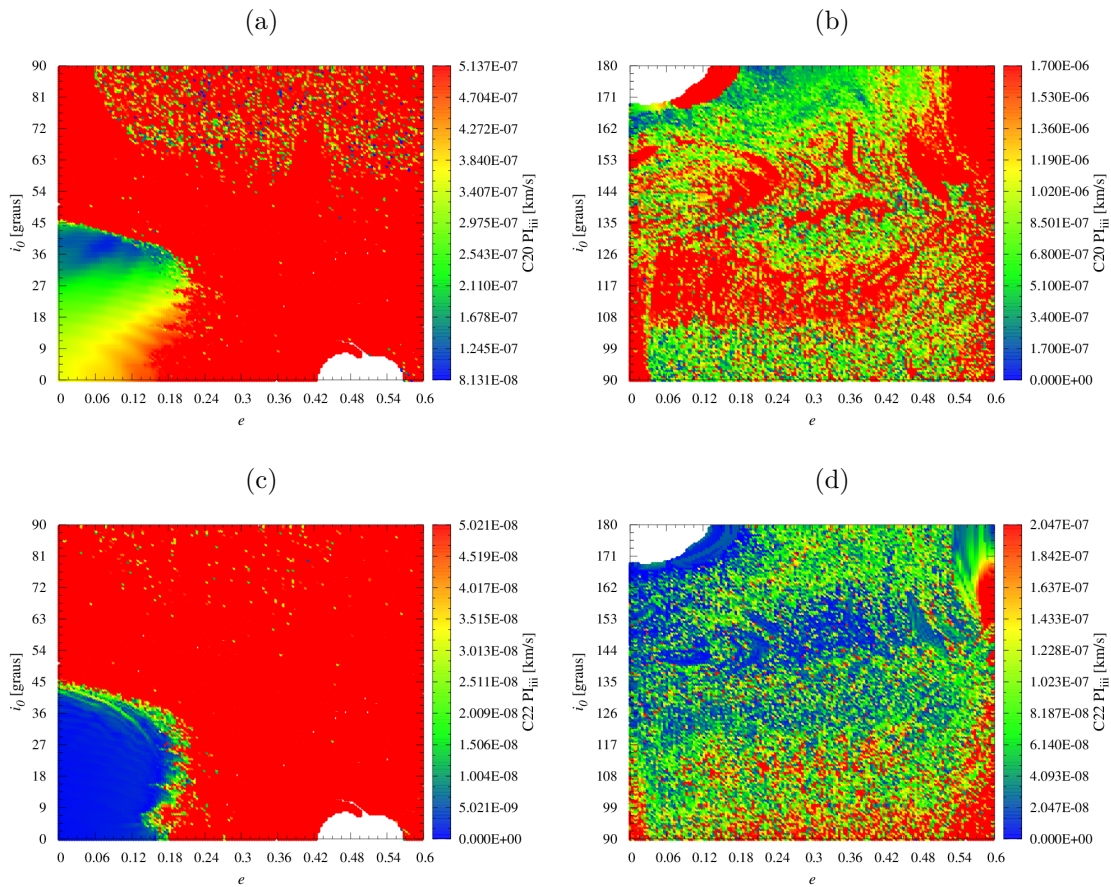
Figura 4.19 - Resultados das integrais do tipo iii das simulações apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.5.(a) Perturbação devida a Didymoon para inclinação direta. (b) Perturbação devida a Didymon para inclinação retrógrada. (c) Perturbação devida a SRP para inclinação direta. (d) Perturbação devida a SRP para inclinação retrógrada.



A Figura 4.19(a) deixa aparente para Didymoon a estrutura em forma de ondas encontrada anteriormente nas Figuras 4.17(c), 4.18(a) e 4.18(c) para a integral do tipo ii. Isso indica uma relação entre a ressonância de movimento médio entre Didymoon e o veículo espacial com os resultados encontrados anteriormente. Esta estrutura define o ΔV de Didymoon no movimento do veículo espacial. Conforme mostra a Figura 4.19(b) não há uma região de valores de PI_{iii} para Didymoon bem definida. Em relação a SRP, a Figura 4.19(c) mostra que quanto maior a inclinação maior o ΔV devido a ela. Já no caso retrógrado, pode-se notar que, a região na vizinhança

da excentricidade 0,325, apontada anteriormente para a integral do tipo i, é onde a SRP injeta o menor ΔV no movimento do veículo espacial. Em ambos casos, direto e retrógrado, a SRP, assim como no caso no plano apresentado anteriormente, é a principal responsável por desviar a órbita do veículo espacial de sua órbita original definida pelas condições iniciais.

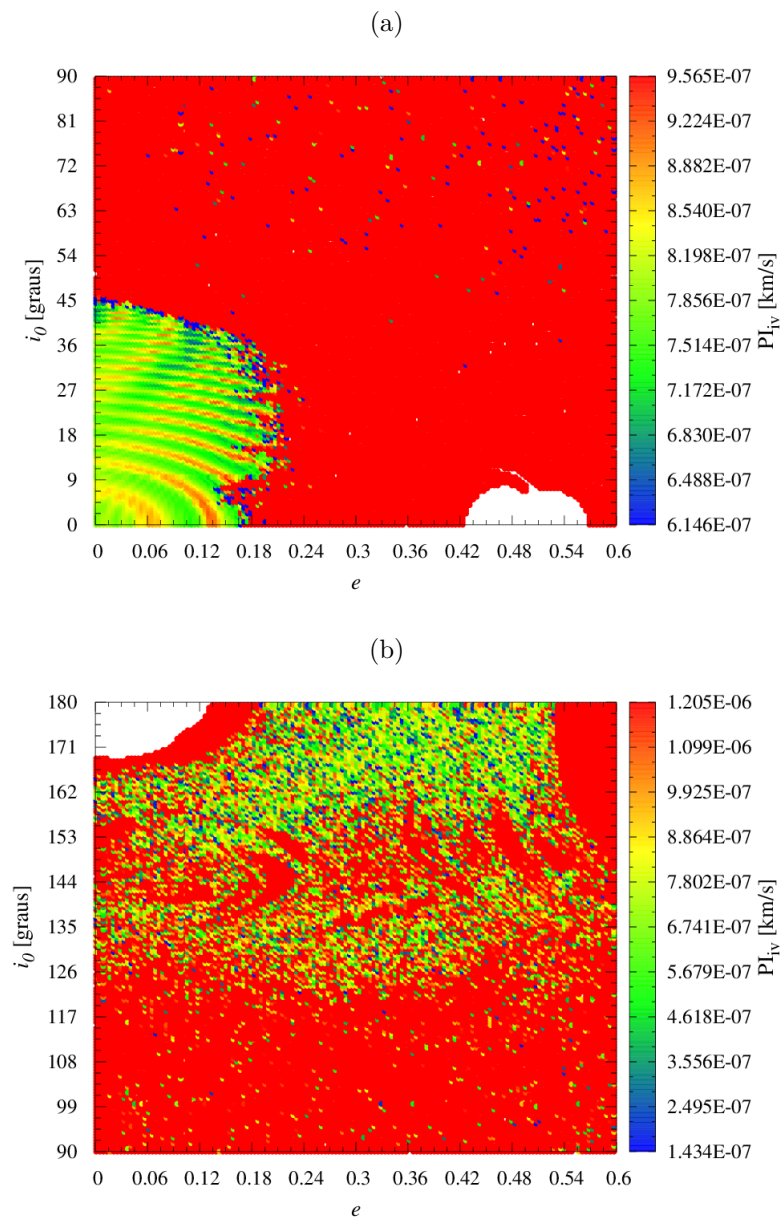
Figura 4.20 - Resultados das integrais do tipo iii das simulações apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.5.(a) Perturbação devida a C_{20} para inclinação direta. (b) Perturbação devida a C_{22} para inclinação retrógrada. (c) Perturbação devida a C_{20} para inclinação direta. (d) Perturbação devida a C_{22} para inclinação retrógrada.



A Figura 4.20(a) apresenta a mesma estrutura em forma de onda apontada anteriormente, e pode-se notar que quanto maior a inclinação, menor é o ΔV médio que C_{20} injeta no movimento do veículo espacial. Conforme mostra a Figura 4.20(c), não há relação da excentricidade e da inclinação com o quanto C_{22} injetou de ΔV no movimento do veículo espacial ao longo de 1 ano. Contudo é a região onde C_{22}

menos perturbou o veículo espacial. As Figuras 4.20(b) e 4.20(d) mostram que para os casos retrógrados não é possível encontrar com clareza quanto de ΔV C_{20} e C_{22} injetaram ou retiraram de energia no movimento do veículo espacial.

Figura 4.21 - Resultados das integrais do tipo iv das simulações apresentadas nas Figuras 4.1 (a) e 4.5 (b).



A Figura 4.21(a) mostra o resultado da integral do tipo iv para as simulações da Figura 4.1. Pode-se notar com clareza a estrutura em forma de onda apontada nos

resultados anteriores. Essa estrutura, possivelmente relacionada a ressonância de movimento médio, define o quanto de ΔV médio seria necessário para manter o veículo espacial em sua órbita original definida por suas condições iniciais. No geral este ΔV está entre $7,1724 \times 10^{-7}$ e $9,224 \times 10^{-7}$ km/s. A Figura 4.21(b) mostra o resultado da integral do tipo iv para as simulações da Figura 4.5. Pode-se notar que para o caso retrógrado o ΔV médio para manutenção da órbita ao longo de 1 ano varia a cada condição inicial entre $1,434 \times 10^{-7}$ e $1,205 \times 10^{-6}$ km/s. Portanto, os casos diretos apresentam uma vantagem sobre os casos retrógrados por serem mais previsíveis e no geral requerem ΔV médios de manutenção da órbita menores.

5 CONCLUSÃO

A análise do asteroide binário Didymos, que utilizou o PCPR3C em coordenadas de McGehee e as variedades invariantes do infinito, apresentou conjuntos de condições iniciais no entorno do sistema Didymain-Didymoon que satisfazem cada uma das fases da missão AIM. Na análise geral do sistema para $C = [-9.75, 9.75]$, foram encontradas condições iniciais em que o veículo espacial permanece no entorno do sistema Didymos e dentro do raio de Hill do sistema Sol-Didymos por até 200 períodos (aproximadamente 99,33 dias). Estas condições iniciais, que estão localizadas em sua maioria no entorno de $\beta = 0^\circ$ e independente do valor inicial de θ , podem existir de 0 até 9 km de distância do baricentro. A expansão da variedade invariante do infinito transformada para ser sobreposta sobre os gráficos de β e distância do baricentro mostrou que as condições iniciais próximas as variedades invariantes instáveis favorecem a colisão, uma vez que as trajetórias próximas a variedade instável estão rumando ao centro do sistema. E as condições iniciais próximas as variedades invariantes estáveis favorecem o escape para além do raio de Hill, isto ocorre pois as trajetórias próximas as variedades estáveis estão indo em direção ao infinito. Dentro do intervalo de C analisado, existem diversas soluções particulares que poderiam ser utilizadas para atender aos objetivos da missão AIM. Como para $C = -0,5$, em que o veículo espacial pode transitar dentro do sistema e passar próximo aos pontos Lagrangianos L_4 e L_5 , o que seria o ideal para as fases de lançamento dos CubeSats pelo veículo espacial mãe. O sistema Didymain-Didymoon possui $\mu = 0,009469696$ (menor que $0,038520896504551$), o que viabiliza o uso das órbitas no entorno de L_4 e L_5 . Para utilizar o conjunto de trajetórias no entorno destes pontos, as condições iniciais resultantes dos lançamentos dos CubeSats devem estar próximas de $C = 2,9906199791$, distância do baricentro igual a $1,1788272742$ km e β no entorno de 0° ou $\pm 180^\circ$. Por outro lado, o μ do sistema Didymain-Didymoon é maior que $0,0008333333$, portanto, ele não possui órbitas *horseshoe*.

A fase da missão AIM que pretende pousar o módulo MASCOT-2 sobre Didymoon é uma das mais críticas. O módulo não possui sistema de correção de órbita e a escolha de C tem um grande peso no conjunto de condições iniciais disponíveis para um pouso seguro. C igual a $2,825$ é o valor mínimo que permite que o veículo pouse sobre qualquer região de Didymoon com velocidade igual a 8 cm/s. Logo, a velocidade máxima resultante do lançamento à 200 metros além de L_2 em relação ao baricentro é igual a $11,305498366$ cm/s. No entanto, quanto mais próximo o valor de C de $3,1496227081$, mais restringida a abertura de L_2 fica e menor é o conjunto de condições iniciais de θ que levam ao pouso com velocidade final igual ou menor

que 8 cm/s.

A SRP, como apontado pelo método de PIs, é o perturbador que mais desvia a órbita de suas condições iniciais. E como mostrado, é possível causar o escape ou o *de-orbit* do veículo espacial através de sua manipulação. Contudo, todos os conjuntos de condições iniciais encontrados para as diferentes fases da missão AIM se mostraram resistentes a presença da SRP até a razão de área-sobre-massa de $0,04\text{kg}/\text{m}^2$, acima deste valor ocorre uma maior descaracterização no conjunto de condições iniciais.

O estudo das órbitas coorbitais à Didymoon feito com o uso problema de dois corpos perturbados, que considerou as perturbações devidas a C_{20} , C_{22} , Didymoon, Sol, Júpiter, Marte, Terra e SRP, apresenta conjuntos de condições iniciais de elementos orbitais para os quais o veículo espacial se mantêm no entorno do sistema por até um ano. As condições iniciais ideais são para inclinações entre 0° até 45° (órbitas diretas). Para estas inclinações, as condições ideais de excentricidade são entre 0 e 0,18 e, para cada valor de excentricidade, existe um limite para o quanto pode-se estar distante do semi-eixo maior coorbital nominal de 1,176263432867 km. No caso direto próximo ao plano as condições iniciais de longitude média relativa ideais estão no entorno de 60° (L_4 virtual) e 300° (L_5 virtual). Estes valores colocam o veículo espacial em ressonância de movimento médio com Didymoon. Em alguns casos testes, o veículo espacial preso a esta ressonância podê sobreviver por até 10 anos orbitando o sistema Didymos. No caso das inclinações entre 90° e 180° , o ideal é que o veículo espacial permaneça próximo ao plano com excentricidade no entorno de 0,325. No caso de órbitas retrógradas, foi possível identificar que é possível iniciar mais distante da órbita retrógrada. Contudo, no teste estatístico com simulações por até 10 anos, identificou-se que na média veículos nestas órbitas não sobrevivem por mais de 1,5 anos. A análise pelas integrais da aceleração mostrou que a pressão de radiação solar é a principal responsável por desviar o veículo espacial de sua órbita original definida pelas condições iniciais, depois delas vêm Didymoon, C_{20} e C_{22} , respectivamente, como maiores responsáveis por desviar o veículo de sua órbita original.

Por fim, é necessário destacar que as ferramentas e o método de análise utilizados no presente estudo, que foram aplicados no sistema Didymos, podem ser utilizados na análise de qualquer outro sistema binário com baixo valor de μ , como outros sistemas de asteroides binários.

5.1 Trabalhos futuros

O PCPR3C em coordenadas de McGehee pode ser aplicado ao problema de captura sem auxílio de propulsão para sistemas com maior parâmetro de massa, como Terra-Lua Sol-Marte, Sol-Júpiter e outros que possam interessar. As grades de condições iniciais de θ e β para distância inicial do baricentro igual a distância de L_4 e L_5 do baricentro podem ser aplicadas na busca por *horseshoe orbits* em sistemas com parâmetro de massa maior que 0,000833333. Assim como foi mapeado o valor de C para a velocidade de pouso de MASCOT-2 de 8 cm/s sobre Didymoon, pode-se aplicar o mesmo conceito e mapear as velocidades finais e trajetórias para outros asteroides. Também poderia ser interessante combinar com os métodos de dipolo e tripolo.

O estudo de coorbitais pode ser ampliado para estudar sistemas de asteroides com corpos com maior massa. Durante o estudo ficou a pergunta se sistemas de asteroides com maior massa e mais distantes do Sol (menor efeito da SRP) poderiam sustentar um anel coorbitando os corpos do sistema. Através do uso das integrais foi possível identificar que os harmônicos esféricos foram grandes perturbadores das órbitas coorbitais. Seria interessante combinar o método do poliedro ou dos tripolo e dipolo e analisar o comportamento das órbitas coorbitais a modelagem com esses modelos.

O uso de um sistema de manipulação da SRP, como o apresentado na Seção 3.5.1, com um controle mais sofisticado de α devem ser considerados para auxiliar no *station-keeping* de veículos espaciais que orbitam asteroides.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACCOMAZZO, A. et al. The flyby of Rosetta at asteroid Šteins—mission and science operations. **Planetary and Space Science**, v. 58, n. 9, p. 1058–1065, 2010. 1, 9
- ANDREWS, D. et al. Asteroid prospecting explorer (APEX) cubesat for the ESA Hera mission. In: EPSC-DPS JOINT MEETING, 2019. **Proceedings...** [S.l.], 2019. 11
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. **Mathematical methods for physicists**. [S.l.]: Elsevier, 2005. 24, 25
- BALMINO, G. Gravitational potential harmonics from the shape of an homogeneous body. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 60, n. 3, p. 331–364, 1994. 6, 141
- BANCELIN, D. et al. Asteroid (99942) apophis: new predictions of Earth encounters for this potentially hazardous asteroid. **Astronomy & Astrophysics**, v. 544, p. A15, 2012. 8
- BELLÓ, M.; GÓMEZ, G.; MASDEMONT, J. J. Invariant manifolds, Lagrangian trajectories and space mission design. In: PEROZZI, E.; FERRAZ-MELLO, S. (Ed.). **Space manifold dynamics**. [S.l.]: Springer, 2010. p. 1–96. 21
- BELTON, M. J. S. et al. Galileo’s encounter with 243 Ida: an overview of the imaging experiment. **Icarus**, v. 120, n. 1, p. 1–19, 1996. 6, 9
- BROSCART, S. B.; SCHEERES, D. J.; VILLAC, B. F. New families of multi-revolution terminator orbits near small bodies. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 135, n. 3, p. 1685–1702, 2009. 11
- CAPANNOLO, A.; FERRARI, F.; LAVAGNA, M. Families of bounded orbits near binary asteroid 65803 Didymos. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 42, n. 1, p. 189–198, 2018. 11
- CHANUT, T. G. G.; ALJBAAE, S.; CARRUBA, V. Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 450, n. 4, p. 3742–3749, 2015. 6
- CHAPMAN, C. R. et al. Impacts on the Earth by asteroids and comets: assessing the hazard. **Nature**, v. 367, n. 6458, p. 33–40, 1994. 1, 8

- CHAPPAZ, L.; HOWELL, K. C. Trajectory design for bounded motion near uncertain binary systems comprised of small irregular bodies exploiting sliding control modes. **Acta Astronautica**, v. 115, p. 226–240, 2015. [6](#)
- ĆUK, M.; HAMILTON, D. P.; HOLMAN, M. J. Long-term stability of horseshoe orbits. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 426, n. 4, p. 3051–3056, 2012. [47](#)
- DAMME, F.; HUSSMANN, H.; OBERST, J. Spacecraft orbit lifetime within two binary near-Earth asteroid systems. **Planetary and Space Science**, v. 146, p. 1–9, 2017. [11](#)
- DELL'ELCE, L. et al. Numerical investigation of the dynamical environment of 65803 Didymos. **Advances in Space Research**, v. 59, n. 5, p. 1304 – 1320, 2017. [11](#)
- FENG, J. et al. Modeling and analysis of periodic orbits around a contact binary asteroid. **Astrophysics and Space Science**, v. 357, n. 2, p. 1–18, 2015. [7](#)
- FERRARI, F.; LAVAGNA, M. Ballistic landing design on binary asteroids: the AIM case study. **Advances in Space Research**, v. 62, n. 8, p. 2245–2260, 2018. [57](#)
- FUJIWARA, A. et al. The rubble-pile asteroid Itokawa as observed by Hayabusa. **Science**, v. 312, n. 5778, p. 1330–1334, 2006. [9](#)
- GOLDBERG, H. R. et al. The Juventas cubesat in support of ESA's Hera mission to the asteroid Didymos. In: SMALL SATELLITE CONFERENCE, LOGAN, UT. **Proceedings...** [S.l.], 2019. [11](#)
- GONZÁLEZ-CARDEL, M. F.; DÍAZ-URIBE, R. An analysis on the inversion of polynomials. **Revista Mexicana de Física**, v. 52, n. 2, p. 160–162, 2006. [25](#)
- GUERMAN, A.; SMIRNOV, G. Orbital manoeuvres with single-input control. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 145, p. 171–181, 2012. [76](#)
- GUZMAN, J. et al. Trajectory design strategies that incorporate invariant manifolds and swingby. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 100, p. 629–644, 1998. [21](#)
- HEBERLING, T. et al. Calculating the momentum enhancement factor for asteroid deflection studies. **Procedia Engineering**, v. 204, p. 124–129, 2017. [10](#)

- HO, T.; BIELE, J.; LANGE, C. Executive Summary, **AIM MASCOT-2 - asteroid lander concept design assessment study**. 2016. 57
- HOLMES, S. A.; FEATHERSTONE, W. E. A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions. **Journal of Geodesy**, v. 76, n. 5, p. 279–299, 2002. 82
- JOHNSON, T. V.; YEATES, C. M.; YOUNG, R. Space science reviews volume on Galileo mission overview. In: RUSSELL, C. (Ed.). **The Galileo Mission**. [S.l.]: Springer, 1992. p. 3–21. 1, 9
- KAWAGUCHI, J.; FUJIWARA, A.; UESUGI, T. Hayabusa – its technology and science accomplishment summary and Hayabusa-2. **Acta Astronautica**, v. 62, n. 10-11, p. 639–647, 2008. 9
- LARA, M. Equivalent delta-v per orbit of gravitational perturbations. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, p. 2157–2162, 2016. 84
- LAURETTA, D. S. et al. OSIRIS-REx: sample return from asteroid (101955) Bennu. **Space Science Reviews**, v. 212, n. 1-2, p. 925–984, 2017. 10
- LLIBRE, J.; SIMÓ, C. Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem. **Mathematische Annalen**, v. 248, n. 2, p. 153–184, 1980. 2, 3, 19, 23, 24, 37, 45, 46
- LUCKING, C.; COLOMBO, C.; MCINNES, C. A passive de-orbiting strategy for high altitude cubesat missions using a deployable reflective balloon. In: 8TH IAA SYMPOSIUM ON SMALL SATELLITES FOR EARTH. **Proceedings...** [S.l.], 2011. 76
- _____. Solar radiation pressure augmented deorbiting from high altitude sun-synchronous orbits. In: SYMPOSIUM, SMALL SATELLITES SYSTEMS AND SERVICES, 2012, Portoroz, Eslovenia. **Proceedings...** Portoroz, 2012. 76
- MANGHI, R. L. et al. Preliminary orbital analysis for a cubesat mission to the Didymos binary asteroid system. **Advances in Space Research**, v. 62, n. 8, p. 2290–2305, 2018. 47
- MARTÍNEZ, R.; PINYOL, C. Parabolic orbits in the elliptic restricted three body problem. **Journal of Differential Equations**, v. 111, n. 2, p. 299–339, 1994. 23

MARTÍNEZ, R.; SIMÓ, C. Invariant manifolds at infinity of the RTBP and the boundaries of bounded motion. **Regular and Chaotic Dynamics**, v. 19, n. 6, p. 745–765, 2014. 3, 24, 25

MCGEHEE, R. A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics. **Journal of Differential Equations**, v. 14, n. 1, p. 70–88, 1973. 2, 18, 22

MICHEL, P. et al. Science case for the asteroid impact mission (AIM): a component of the Asteroid Impact & Deflection Assessment (AIDA) mission. **Advances in Space Research**, v. 57, n. 12, p. 2529 – 2547, 2016. 1, 10, 11, 86, 87

MILJKOVIĆ, K. et al. Morphology and population of binary asteroid impact craters. **Earth and Planetary Science Letters**, v. 363, p. 121–132, 2013. 8

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011. 21, 22

MONTENBRUCK, O.; GILL, E. **Satellite orbits: models, methods and applications**. [S.l.]: Springer, 2012. 17, 18, 82, 131, 133

MORAIS, M. H. M.; NAMOUNI, F. Asteroids in retrograde resonance with Jupiter and Saturn. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, v. 436, n. 1, p. L30–L34, 2013. 85

NAMOUNI, F.; CHRISTOU, A. A.; MURRAY, C. D. Coorbital dynamics at large eccentricity and inclination. **Physical review letters**, v. 83, n. 13, p. 2506, 1999. 85

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION (NASA). **Ceres in Color**. 2016. Disponível em: <https://solarsystem.nasa.gov/resources/622/ceres-in-color/?category=planets/dwarf-planets_ceres>. 5

_____. **Lucy: the first mission to the Trojan asteroids**. 2021. Disponível em: <https://www.nasa.gov/mission_pages/lucy/overview/index>. 10

OGILVIE, K. W.; ROSENVINGE, T. von; DURNEY, A. C. International Sun-Earth Explorer: a three-spacecraft program. **Science**, v. 198, n. 4313, p. 131–138, 1977. 21

OH, D. Y. et al. Development of the Psyche mission for NASA’s discovery program. In: 36TH INTERNATIONAL ELECTRIC PROPULSION CONFERENCE, Vienna, Austria. **Proceedings...** [S.l.], 2019. 10

O'LEARY, B. Mining the Apollo and Amor asteroids. **Science**, v. 197, n. 4301, p. 363–366, 1977. 8

_____. Asteroid mining and the moons of Mars. **Acta Astronautica**, v. 17, n. 4, p. 457–462, 1988. 8

PRADO, A. F. B. A. Searching for orbits with minimum fuel consumption for station-keeping maneuvers: an application to lunisolar perturbations.

Mathematical Problems in Engineering, v. 2013, 2013. 83

_____. Mapping orbits around the asteroid 2001SN 263. **Advances in Space Research**, v. 53, n. 5, p. 877–889, 2014. 83

PRAVEC, P. et al. Photometric survey of binary near-Earth asteroids. **Icarus**, v. 181, n. 1, p. 63–93, 2006. 6

PROCKTER, L. et al. The near shoemaker mission to asteroid 433 eros. **Acta Astronautica**, v. 51, n. 1-9, p. 491–500, 2002. 9

ROSS, S. D. Space Industry Report, **Near-Earth asteroid mining**. 2001. 1, 8

ROSSI, A.; MARZARI, F.; FARINELLA, P. Orbital evolution around irregular bodies. **Earth, planets and space**, v. 51, n. 11, p. 1173–1180, 1999. 6

SANCHEZ, D. M.; PRADO, A. F. B. A.; YOKOYAMA, T. On the effects of each term of the geopotential perturbation along the time I: quasi-circular orbits.

Advances in Space Research, v. 54, n. 6, p. 1008–1018, 2014. 82

SANTOS, L. B. T.; PRADO, A. F. B. A.; SANCHEZ, D. M. Equilibrium points in the restricted synchronous three-body problem using a mass dipole model.

Astrophysics and Space Science, v. 362, n. 3, p. 61, mar. 2017. 6

_____. Lifetime of a spacecraft around a synchronous system of asteroids using a dipole model. **Astrophysics and Space Science**, v. 362, n. 11, p. 202, nov. 2017.

6

_____. Searching for orbits around equilibrium points in a binary asteroid system modeled as a mass dipole. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 167,

p. 421, 2018. 6

SAVI, M. A. **Dinâmica não-linear e caos**. 2. ed. Rio de Janeiro: E-papers, 2017.

21

SCHAUB, H. **Analytical mechanics of space systems**. [S.l.]: AIAA, 2003. 83

- SCHEERES, D. J. Dynamics about uniformly rotating triaxial ellipsoids: applications to asteroids. **Icarus**, v. 110, n. 2, p. 225–238, 1994. 6
- _____. Stability of binary asteroids. **Icarus**, v. 159, n. 2, p. 271–283, 2002. 6
- SCHEERES, D. J. et al. Orbits close to asteroid 4769 Castalia. **Icarus**, v. 121, n. 1, p. 67–87, 1996. 6
- _____. Dynamics of orbits close to asteroid 4179 Toutatis. **Icarus**, v. 132, n. 1, p. 53–79, 1998. 6
- SCHULZ, R.; SIERKS, H.; KÜPPERS, M.; ACCOMAZZO, A. Rosetta fly-by at asteroid (21) Lutetia: an overview. **Planetary and Space Science**, v. 66, n. 1, p. 2–8, 2012. 1, 9
- SHEPARD, M. K. **Asteroids: relics of ancient time**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015. 1, 5, 7
- SONTER, M. J. The technical and economic feasibility of mining the near-Earth asteroids. **Acta Astronautica**, v. 41, n. 4-10, p. 637–647, 1997. 8
- STICKLE, A. M. et al. Modeling impact outcomes for the Double Asteroid Redirection Test (DART) mission. **Procedia Engineering**, v. 204, p. 116–123, 2017. 10
- SZEBEHELY, V. **Theory of orbits – the restricted three body problem**. [S.l.]: Academic Press, 1967. 13, 15, 47
- TAKEI, Y. et al. Hayabusa-2’s station-keeping operation in the proximity of the asteroid Ryugu. **Astrodynamics**, v. 4, n. 4, p. 349–375, 2020. 1
- TSUDA, Y. et al. Hayabusa-2 mission status: landing, roving and cratering on asteroid Ryugu. **Acta Astronautica**, v. 171, p. 42–54, 2020. 9
- UNITED STATE CONGRESS. US commercial space launch competitiveness act. **Public Law**, v. 90, 2015. 8
- WERNER, R. A.; SCHEERES, D. J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 65, n. 3, p. 313–344, 1996. 6
- XIN, X.; HOU, X.; LIU, L. Dynamical substitutes of equilibrium points of asteroids under solar radiation pressure. **IAU General Assembly**, v. 22, p. 55970, 2015. 7

YANO, H. et al. Touchdown of the Hayabusa spacecraft at the Muses Sea on Itokawa. **Science**, v. 312, n. 5778, p. 1350–1353, 2006. 9

YOSHIKAWA, M. et al. Hayabusa sample return mission. **Asteroids IV**, v. 1, p. 397–418, 2015. 9

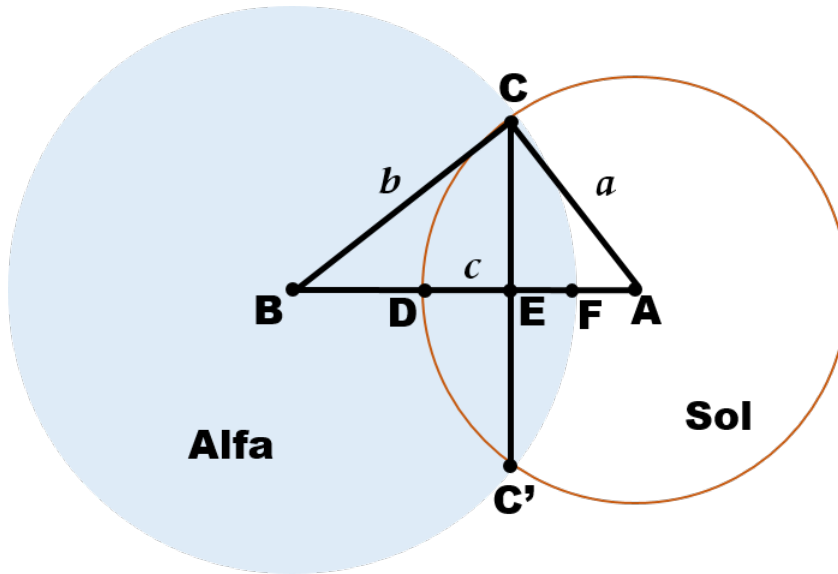
ZENG, X.; JIANG, F.; LI, J.; BAOYIN, H. Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies. **Astrophysics and Space Science**, v. 356, n. 1, p. 29–42, 2015. 6

APÊNDICE A - MODELO DE SOMBRA

Considerando a importância da perturbação devido a pressão de radiação solar no estudo, foi escolhido um modelo mais complexo de sombra, o qual engloba as regiões de completa exposição a radiação solar, umbra e penumbra. O fator de exposição está representado na equação da pressão de radiação solar por ν , chamada função sombra. Essa função assume valores entre 0 e 1 dependendo da região em que se encontra a espaçonave:

- $\nu = 0$, se a espaçonave estiver na umbra, ou seja, completamente encoberto pelo corpo central;
- $\nu = 1$, se a espaçonave estiver completamente exposto a radiação solar;
- $0 < \nu < 1$, se a espaçonave estiver na penumbra.

Figura A.1 - Geometria do modelo de sombra.



Fonte: Montenbruck e Gill (2012).

O modelo para cálculo de ν apresentado a seguir é feito pelo grau de ocultação do Sol pelo corpo central. Inicialmente é calculado o valor do raio aparente do Sol (a , Figura A.1) em relação a espaçonave,

$$a = \arcsin \frac{R_{\odot}}{|\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}|} \quad (\text{A.1})$$

também em relação ao satélite, é calculado o raio aparente do corpo central (b , Figura A.1),

$$b = \arcsin \frac{R_A}{|\mathbf{r}_{SA}|} \quad (\text{A.2})$$

em que \mathbf{r}_{SA} é a distância entre o corpo central e a espaçonave, que é igual a $\mathbf{r} - \mathbf{r}_A$. A distância aparente do centro do Sol ao centro do corpo central (c , Figura A.1) é dada por:

$$c = \arccos \frac{-\mathbf{r}_{SA}^T (\mathbf{r}_\odot - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_{SA}| |\mathbf{r}_\odot - \mathbf{r}|} \quad (\text{A.3})$$

Assim, a área ocultada (S) é dada por:

$$S = S_{CFC'} + S_{CDC'} \quad (\text{A.4})$$

dado que,

$$|a - b| < c < a + b \quad (\text{A.5})$$

A área ocultada pode ser dada por:

$$S = 2(S_{BCF} - S_{BCE}) + 2(S_{ACD} - S_{ACE}) \quad (\text{A.6})$$

Usando a notação $\overline{AE} = x$, $\overline{EC} = y$ e $\angle CAE = \alpha$, as áreas individuais são dadas por:

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \alpha a^2 \quad (\text{A.7})$$

$$S_{ACE} = \frac{1}{2} xy \quad (\text{A.8})$$

Portanto, a área ocultada é dada por:

$$S = a^2 \arccos\left(\frac{x}{a}\right) + b^2 \arccos\left(\frac{(c-x)}{b}\right) - cy \quad (\text{A.9})$$

em que,

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} \quad (\text{A.10})$$

e

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (\text{A.11})$$

Após os cálculos dos valores anteriores é possível chegar a função sombra dada por (MONTENBRUCK; GILL, 2012):

$$\nu = 1 - \frac{A}{\pi a^2} \quad (\text{A.12})$$

O valor de ν está relacionado a fração de luz solar não ocultada.

APÊNDICE B - PROPAGAÇÃO DA POSIÇÃO APARENTE DO SOL NO PCPR3C

As coordenadas cartesianas de posição do Sol no referencial inercial, em quilômetros, são dadas por:

$$\begin{aligned}x_{\odot} &= -a_s (\cos u - e_s), \\y_{\odot} &= -a_s \sin u (1 - e_s^2),\end{aligned}\tag{B.1}$$

em que, e_s and a_s são o semi-eixo maior (em quilômetros) e as excentricidades aparentes do Sol em relação ao sistema binário, respectivamente; u é a anomalia excêntrica, calculada resolvendo-se a Equação de Kepler utilizando o método de Newton:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{M + e_s \sin u_i - u_i}{1 - e_s \cos u_i},\tag{B.2}$$

em que, M é a aparente anomalia média do Sol em relação ao baricentro, dada por:

$$M = M_0 + n_s (t - t_0),$$

onde, $t = t^*T$ é o tempo em segundos. Em que, t^* é o tempo adimensional e T é o período do sistema binário em segundos; n_s é o movimento médio do Sol, dado por:

$$n_s = \sqrt{\frac{G^* (M_{\odot} + M_{bin})}{a_s^3}},\tag{B.3}$$

em que, G é a constante gravitacional de $6,67428 \times 10^{-20} \text{ km}^3/\text{kg} * \text{s}^2$, M_{\odot} é massa do Sol de $1,9884 \times 10^{30} \text{ kg}$ e M_{bin} é massa total do sistema binário.

Por fim, a posição do Sol no sistema rotacional, em quilômetros, é dada por:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{\odot} &= x_{\odot} \cos(nt) + y_{\odot} \sin(nt), \\ \bar{y}_{\odot} &= y_{\odot} \cos(nt) - x_{\odot} \sin(nt),\end{aligned}\tag{B.4}$$

em que n é o movimento médio do sistema binário.

APÊNDICE C - CONVERSÃO DE COORDENADAS

A conversão no PCPR3C do sistema de coordenadas rotacional $(\bar{x}, \bar{y}, \dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}})$ para o inercial (x, y, \dot{x}, \dot{y}) é dada por:

$$x = \bar{x} \cos t - \bar{y} \sin t, \quad (\text{C.1})$$

$$y = \bar{y} \cos t + \bar{x} \sin t, \quad (\text{C.2})$$

$$\dot{x} = -\bar{x} \sin t - \dot{\bar{y}} \sin t + \dot{\bar{x}} \cos t - \bar{y} \cos t, \quad (\text{C.3})$$

$$\dot{y} = \dot{\bar{x}} \sin t - \bar{y} \sin t + \bar{x} \cos t + \dot{\bar{y}} \cos t, \quad (\text{C.4})$$

onde, t é o tempo adimensional. A transformação inversa é dada por:

$$\bar{x} = x \cos t + y \sin t, \quad (\text{C.5})$$

$$\bar{y} = y \cos t - x \sin t, \quad (\text{C.6})$$

$$\dot{\bar{x}} = \dot{x} \cos t + y \cos t - x \sin t + \dot{y} \sin t, \quad (\text{C.7})$$

$$\dot{\bar{y}} = -x \cos t + \dot{y} \cos t - \dot{x} \sin t - y \sin t. \quad (\text{C.8})$$

A transformação de coordenadas de McGehee (q, p, θ, ω) é dada por:

$$r = \frac{2}{q^2}, \quad (\text{C.9})$$

$$v_r = p, \quad (\text{C.10})$$

$$v_t = \frac{r\omega q^4}{4}, \quad (\text{C.11})$$

$$x = r \cos(\theta + t), \quad (\text{C.12})$$

$$y = r \sin(\theta + t), \quad (\text{C.13})$$

$$\dot{x} = v_r \cos(\theta + t) - v_t \sin(\theta + t), \quad (\text{C.14})$$

$$\dot{y} = v_r \sin(\theta + t) + v_t \cos(\theta + t), \quad (\text{C.15})$$

onde, v_r e v_t são as velocidades radial e transversal, respectivamente. Depois, pode-se fazer a conversão para coordenadas rotacionais utilizando as Equações C.5–C.8. A conversão inversa, no PCPR3C, a partir das coordenadas inerciais para as coor-

denadas de McGehee, é dada por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (\text{C.16})$$

$$q = \sqrt{\frac{2}{r}}, \quad (\text{C.17})$$

$$p = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (\text{C.18})$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{x}{r}\right) - t, \quad (\text{C.19})$$

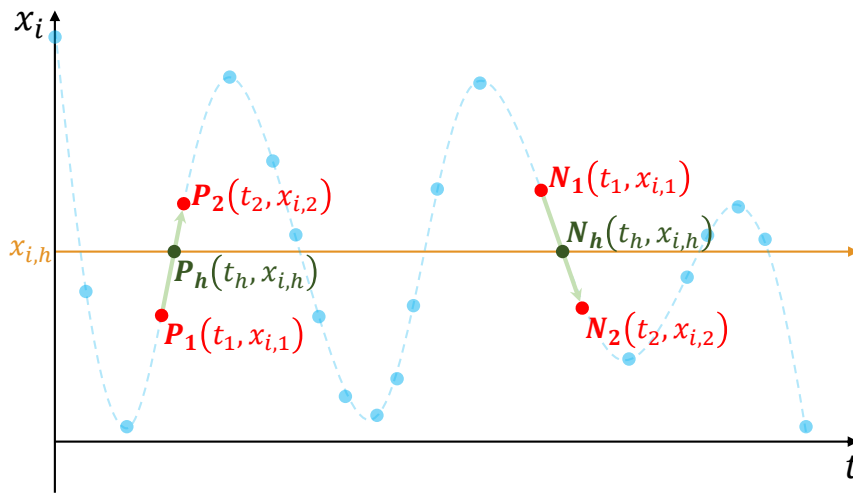
$$\omega = x\dot{y} - y\dot{x}. \quad (\text{C.20})$$

Nestas últimas equações é importante notar que se faz necessária a análise de quadrante no cálculo do θ .

APÊNDICE D - COMPUTAÇÃO DOS ESTADOS NO HIPERPLANO DA SECÇÃO DE POINCARÉ EM SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

O cálculo da seção de Poincaré em um hiperplano pode ser feito de diversas maneiras. O método apresentado nesta seção é simples de ser implementado computacionalmente e adaptável a diferentes aplicações. O maior custo computacional deste método é irrelevante para a quantidade de seções necessária neste trabalho, isso devido ao alto poder de processamento dos computadores atuais.

Figura D.1 - Representação do hiperplano no gráfico de uma variável qualquer (ξ) sendo propagada no tempo (t).



Considere o sistema autônomo de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

onde \mathbf{x} é um vetor de n componentes, sendo cada uma delas função de t , e \mathbf{F} é um vetor de n funções dependentes de \mathbf{x} . O sistema é propagado utilizando o integrador numérico Runge-Kutta 7/8, onde cada estado descreve uma trajetória no tempo, como ilustrado na Figura D.1. Considere também que o hiperplano foi definido para $\mathbf{x}(x_{i,h})$. Conforme mostra a Figura D.1, a detecção do cruzamento do estado com o hiperplano é muito simples:

- a) Armazena-se o ponto $P_1(t_1, x_{i,1})$, com P_1 sendo o estado não propagado (condição inicial);

- b) Propaga-se o sistema até o próximo passo de tempo e obtém-se $P_2(t_2, x_{i,2})$, com P_2 sendo a condição final;
- c) Se $x_{i,1} < x_{i,h}$ e $x_{i,2} > x_{i,h}$ a função cruzou o hiperplano. O mesmo raciocínio é utilizado na detecção do cruzamento $N_1 \rightarrow N_2$. Porém, neste caso, a condição de cruzamento é definida como: se $x_{i,1} > x_{i,h}$ e $x_{i,2} < x_{i,h}$ a função cruzou o hiperplano.

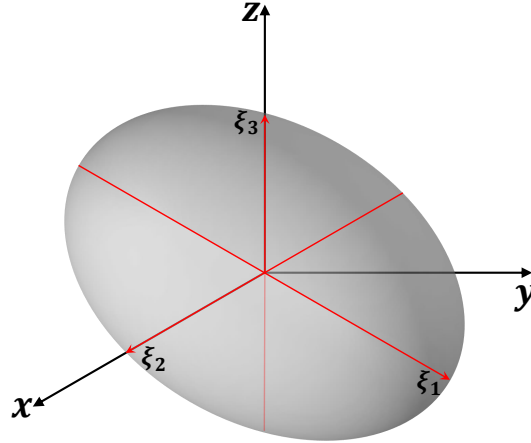
Após a detecção do cruzamento do hiperplano, o t no hiperplano (t_h) pode ser calculado aproximando-se o intervalo $\overline{P_1 P_2}$ da função descrita pelo estado x_i no tempo por uma função conhecida. O mais simples é utilizar a função da reta, para a qual t_h é dado por:

$$t_h = t_1 + (t_2 - t_1) \left(\frac{x_{i,h} - x_{i,2}}{x_{i,2} - x_{i,1}} \right). \quad (\text{D.1})$$

Utilizando o mesmo raciocínio é possível calcular o valor das outras n variáveis de estado no hiperplano utilizando o valor de t_h ou $x_{i,h}$.

APÊNDICE E - HARMÔNICOS ESFÉRICOS DE UM ELIPSOIDE

Figura E.1 - Elipsoide tri-axial.



Considere o elipsoide tri-axial apresentado na Figura E.1. Dado um sistema de coordenadas definido no centro de gravidade do corpo, sendo os raios definidos no corpo ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 . Os harmônicos esféricos do elipsoide são dados por (BALMINO, 1994):

$$\begin{aligned} C_{20} &= \frac{1}{5R^2} \left(\xi_3^2 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2} \right), \\ C_{22} &= \frac{1}{20R^2} (\xi_1^2 - \xi_2^2), \\ C_{40} &= \frac{15}{7} (C_{20}^2 + 2C_{22}^2), \\ C_{42} &= \frac{5}{7} C_{20} C_{22}, \\ C_{44} &= \frac{5}{28} C_{22}^2. \end{aligned} \tag{E.1}$$

onde, R é o raio de referência. No presente trabalho, o raio de referência utilizado foi o raio médio do corpo.

APÊNDICE F - SIMULAÇÕES EXTRAS PARA DIFERENTES θ e C

Figura F.1 - Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25 . Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de $0,4$ km a 9 km. $\theta = 15^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$.

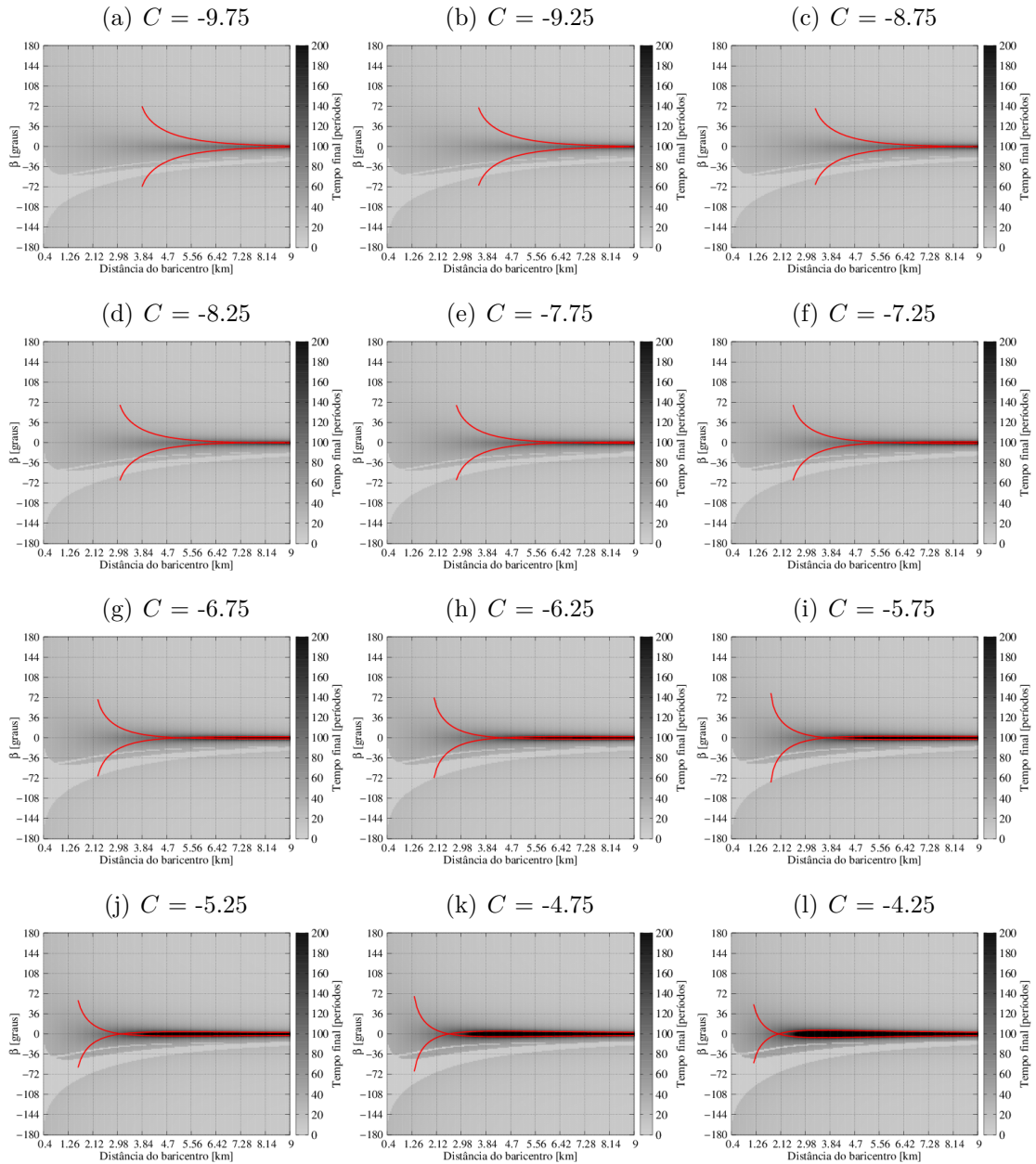


Figura F.2 - O mesmo das Figuras F.1(a)- F.1(l), mas para C entre -3.75 e 3.25 .

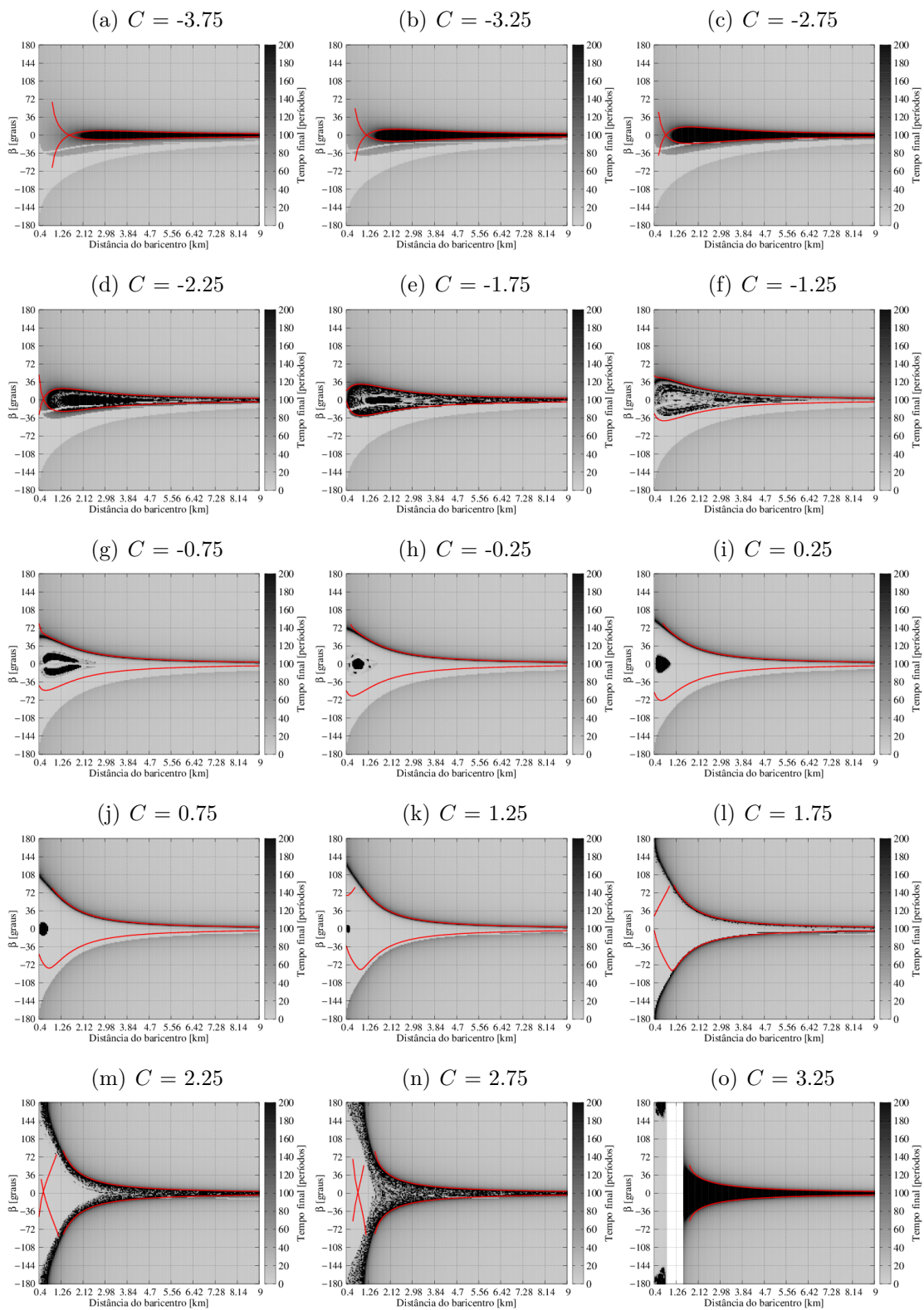


Figura F.3 - O mesmo das Figuras F.1(a)- F.1(l), mas para C entre 3.75 e 9.75.

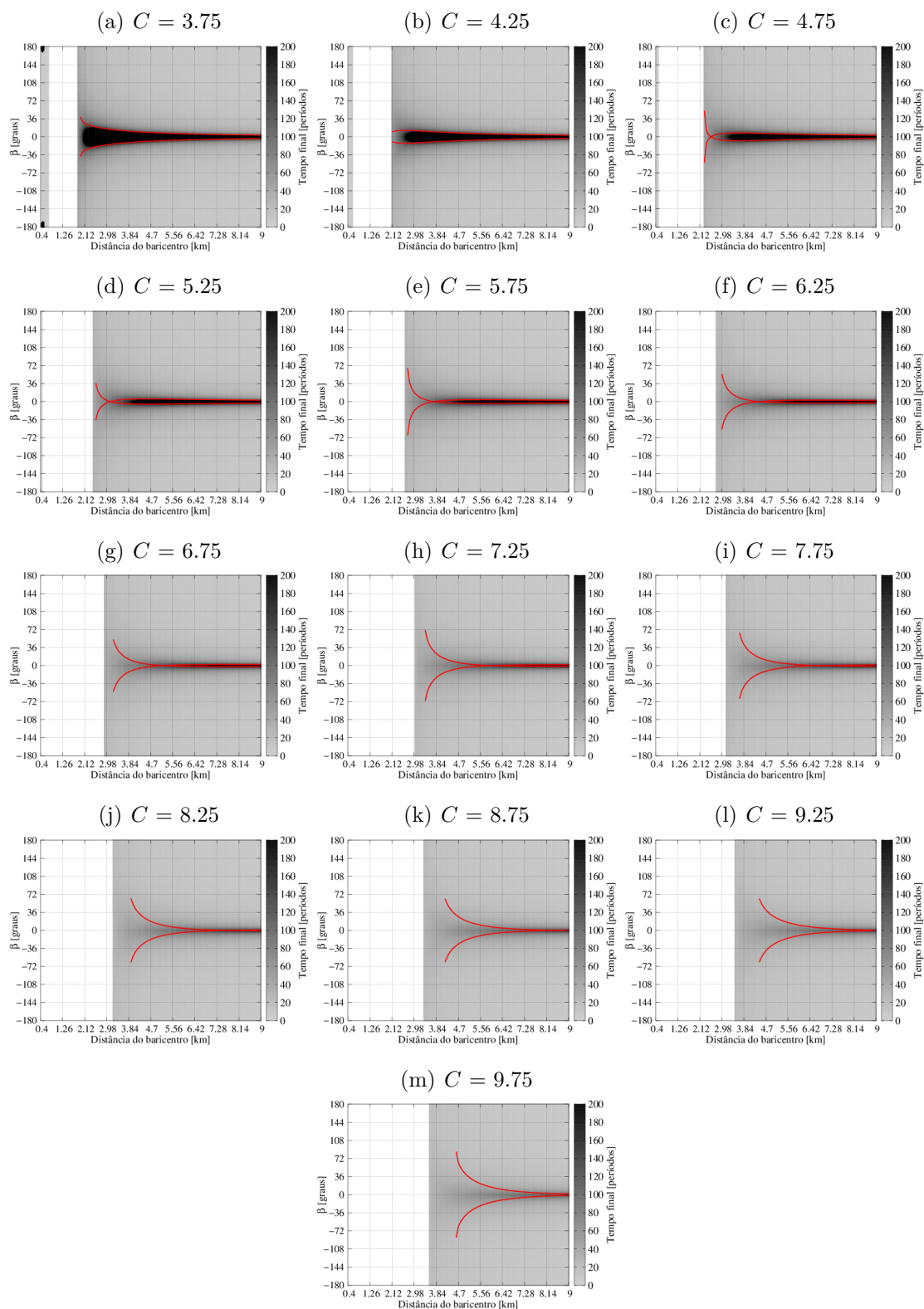


Figura F.4 - Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25 . Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de $0,4$ km a 9 km. $\theta = 45^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$.

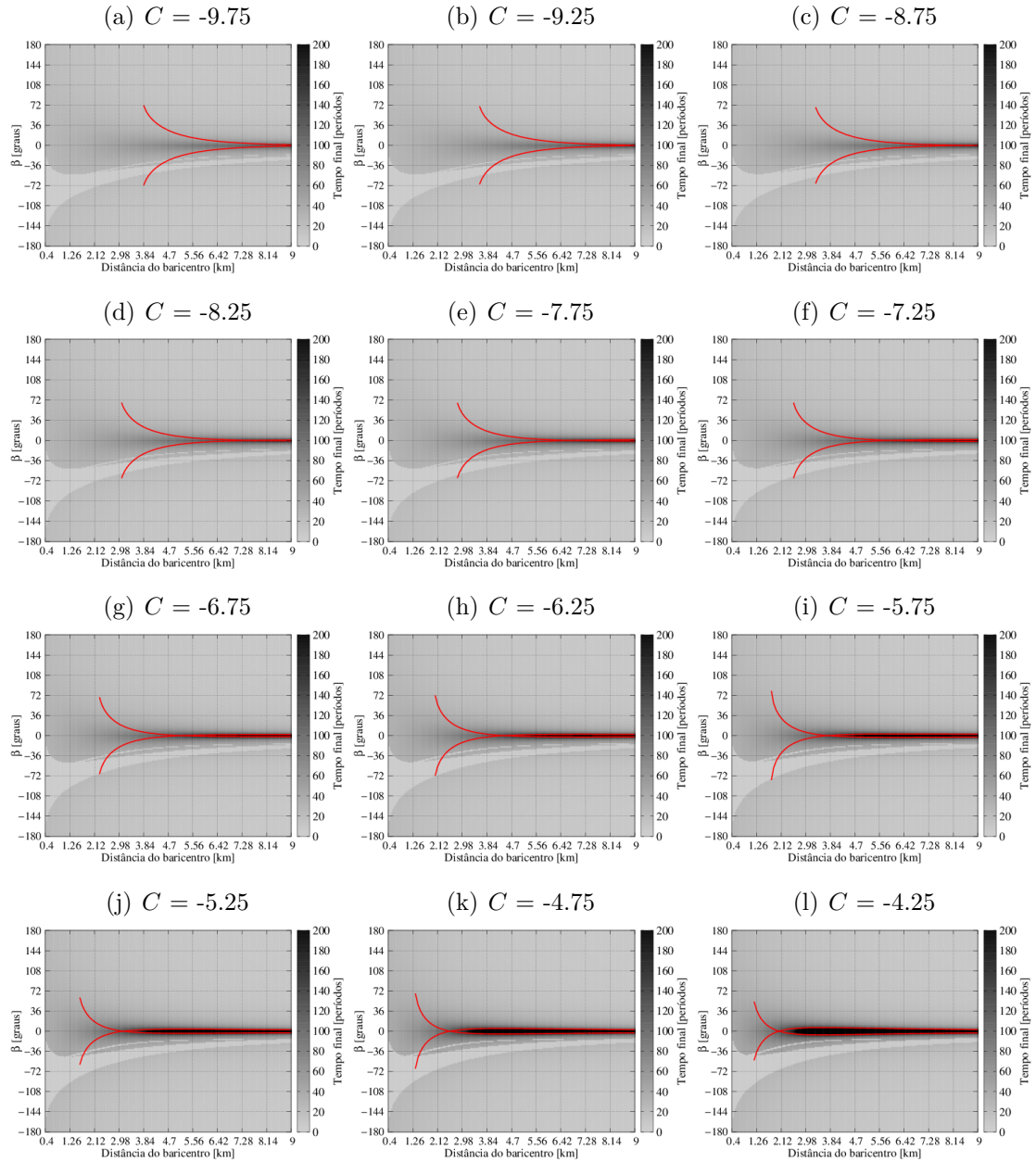


Figura F.5 - O mesmo das Figuras F.4(a)- F.4(l), mas para C entre -3.75 e 3.25 .

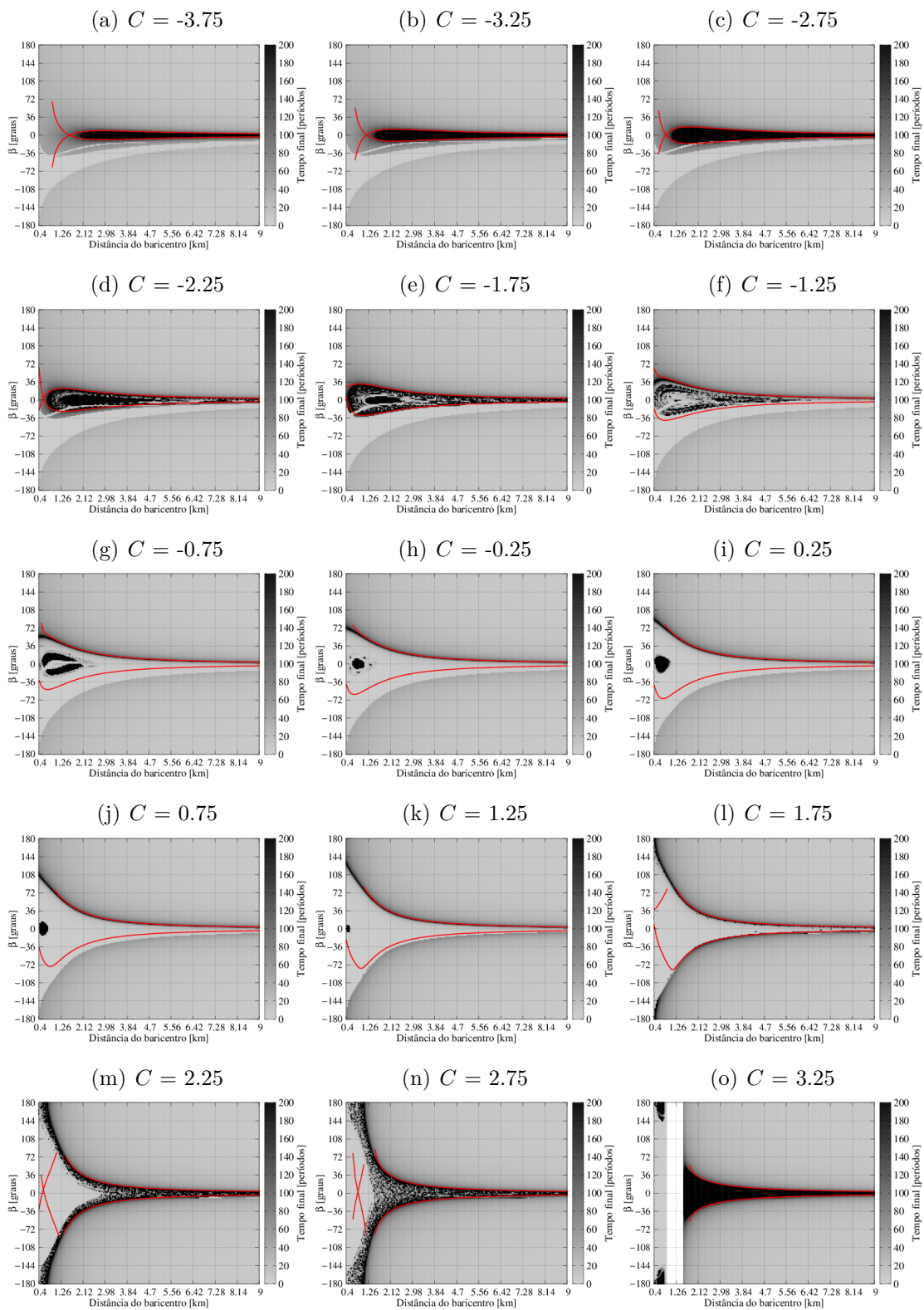


Figura F.6 - O mesmo das Figuras F.4(a)- F.4(l), mas para C entre 3.75 e 9.75.

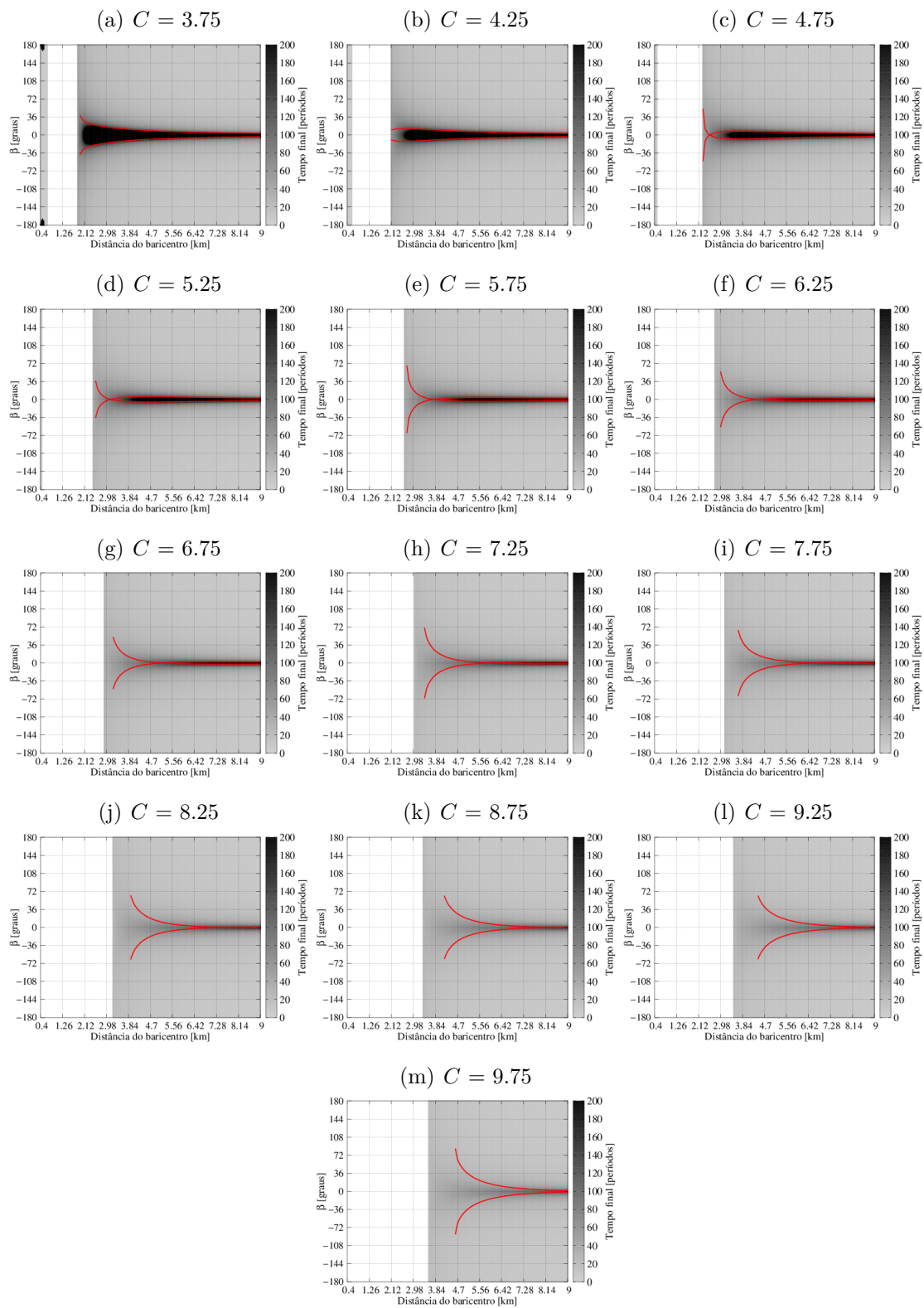


Figura F.7 - Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25 . Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de $0,4$ km a 9 km. $\theta = 75^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$.

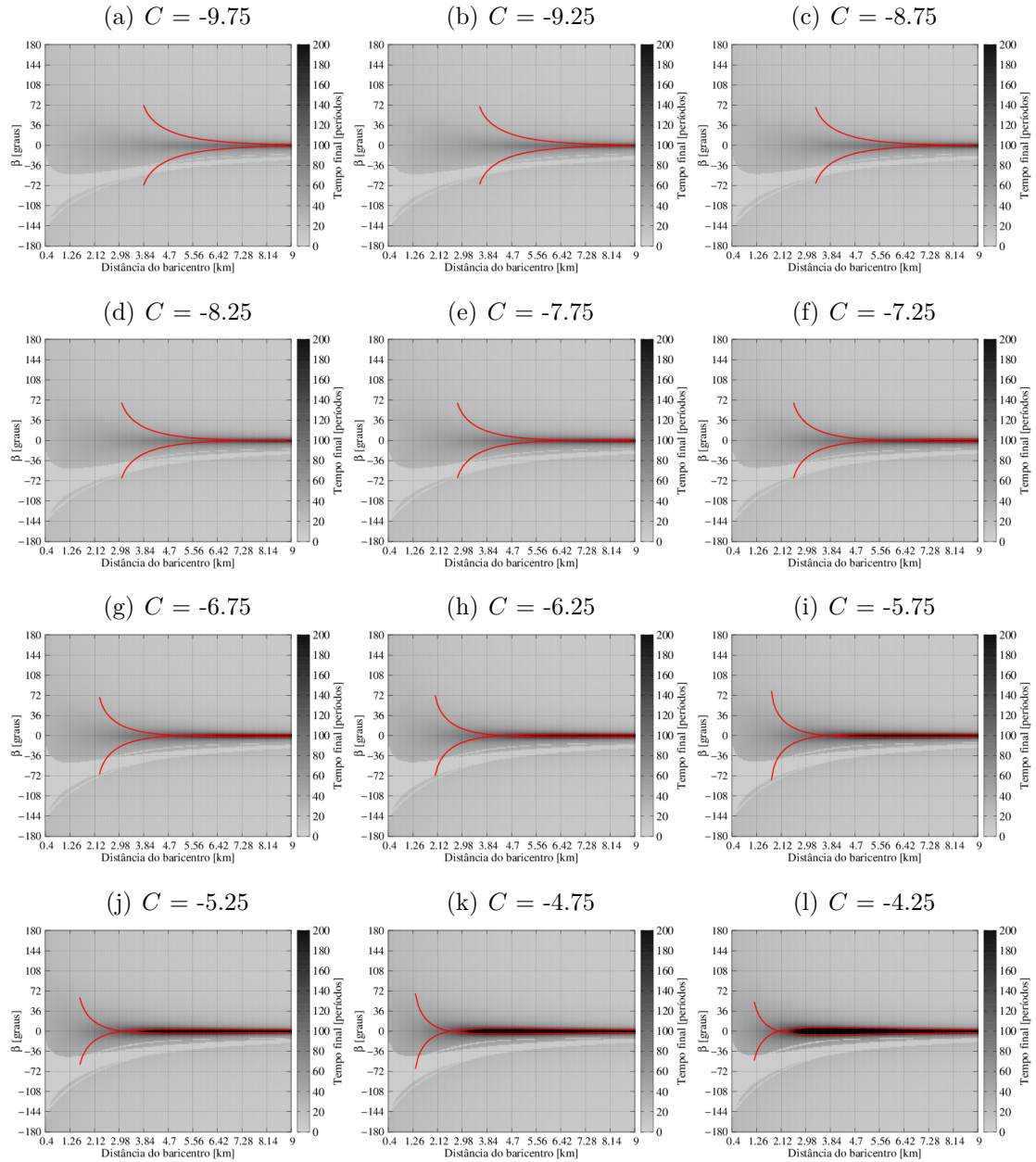


Figura F.8 - O mesmo das Figuras F.7(a)- F.7(l), mas para C entre -3.75 e 3.25 .

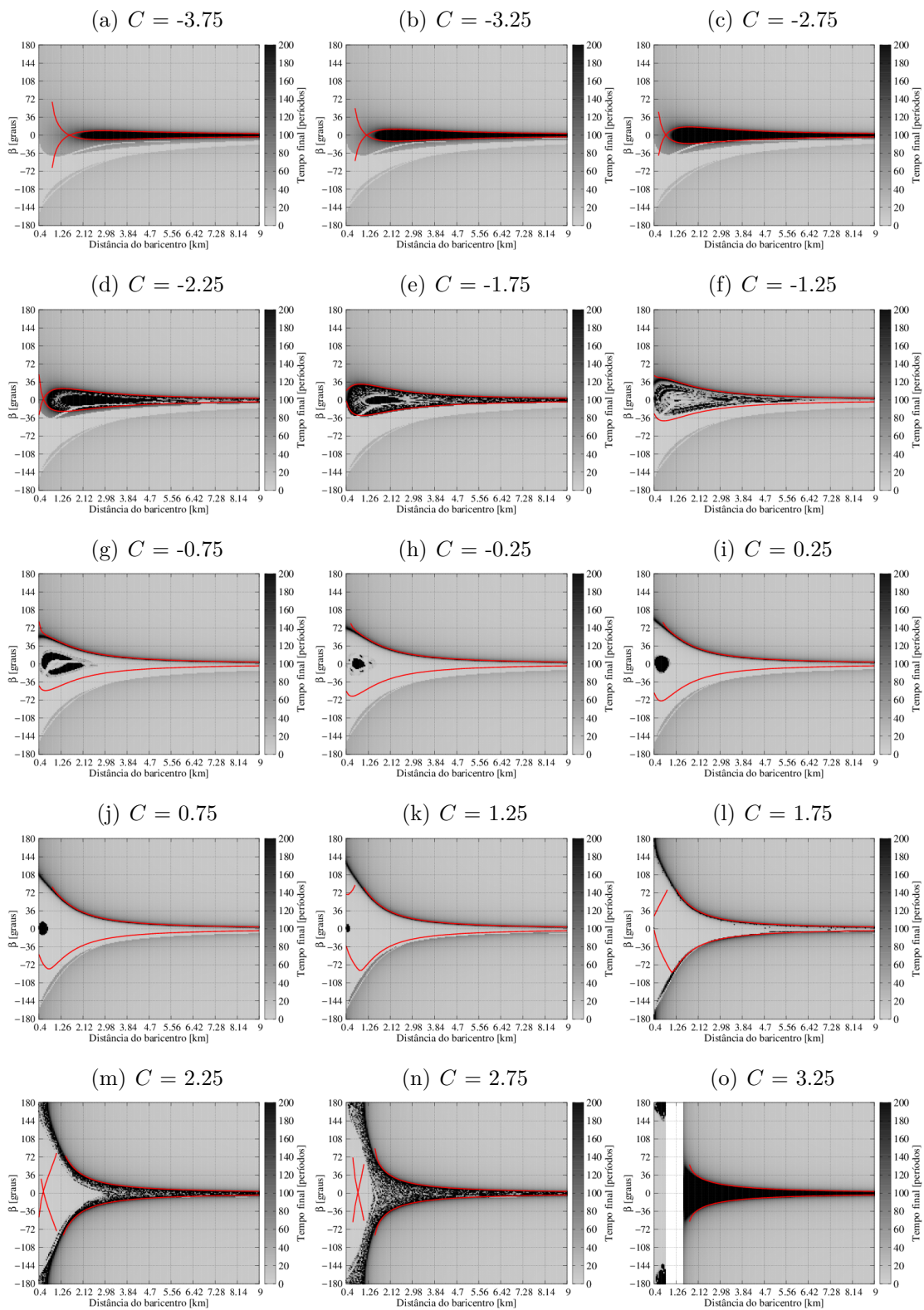


Figura F.9 - O mesmo das Figuras F.7(a)- F.7(l), mas para C entre 3.75 e 9.75.

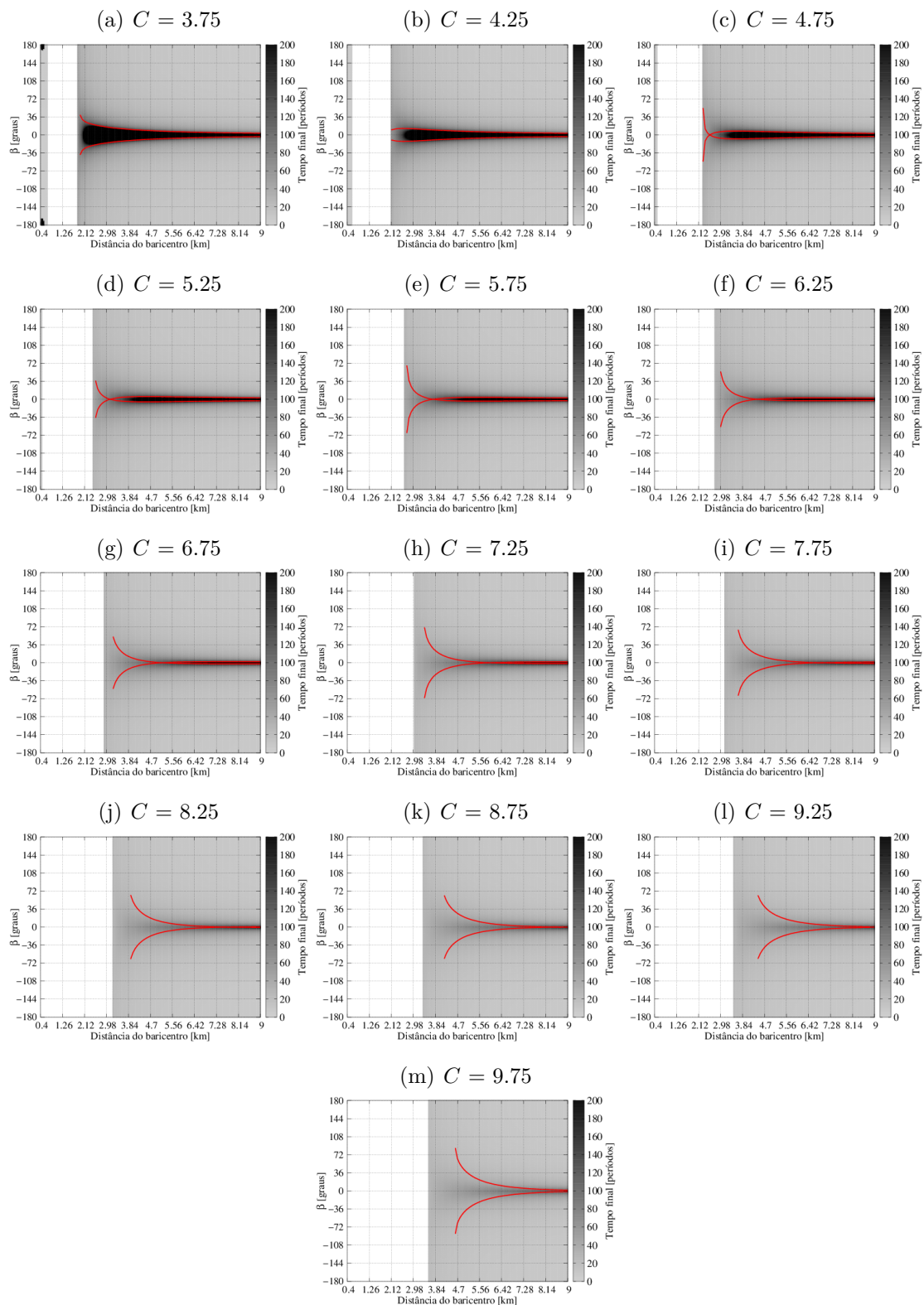


Figura F.10 - Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25 . Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de $0,4$ km a 9 km. $\theta = 105^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$.

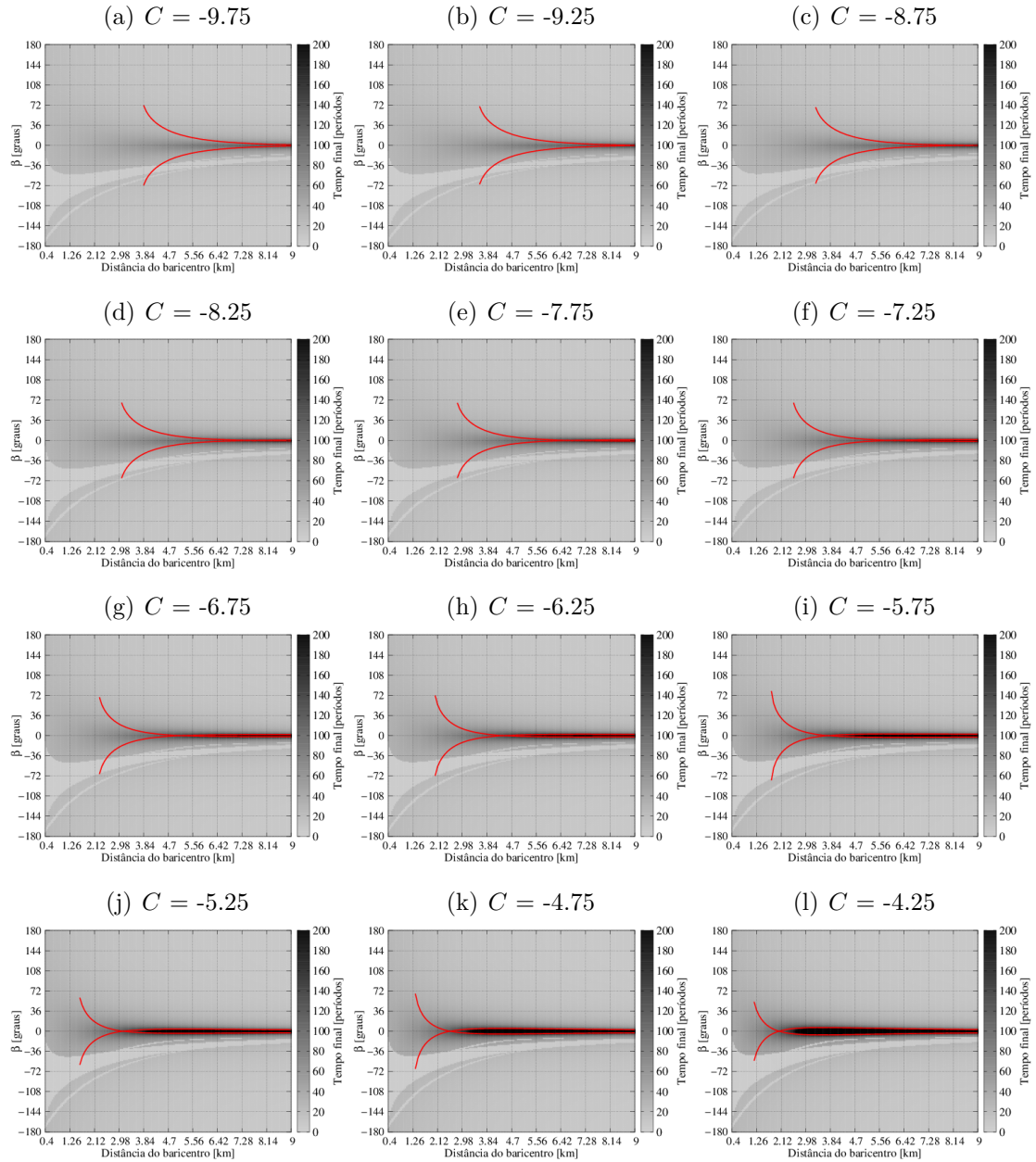


Figura F.11 - O mesmo das Figuras F.10(a)- F.10(l), mas para C entre -3.75 e 3.25 .

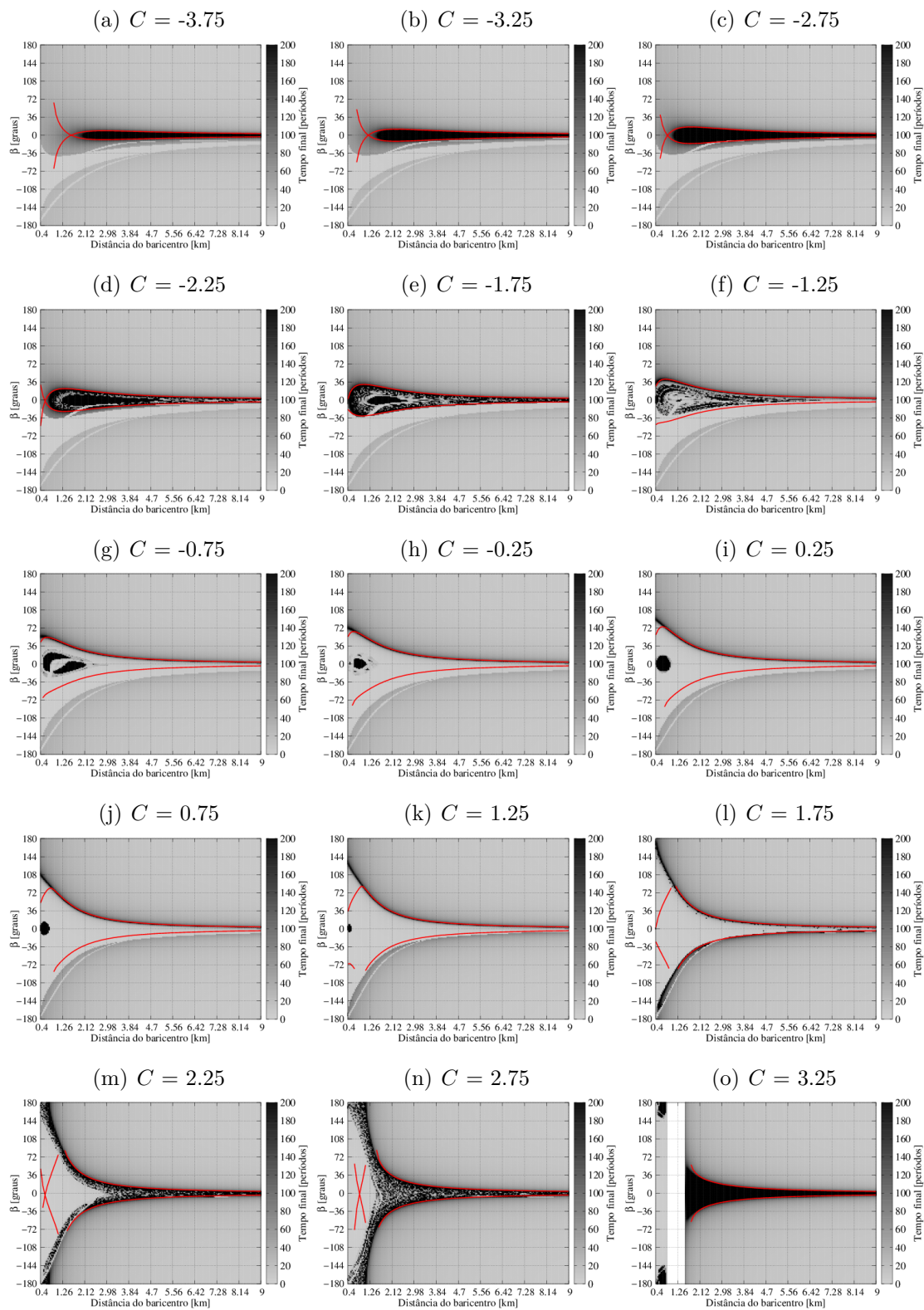


Figura F.12 - O mesmo das Figuras F.10(a)- F.10(l), mas para C entre 3.75 e 9.75.

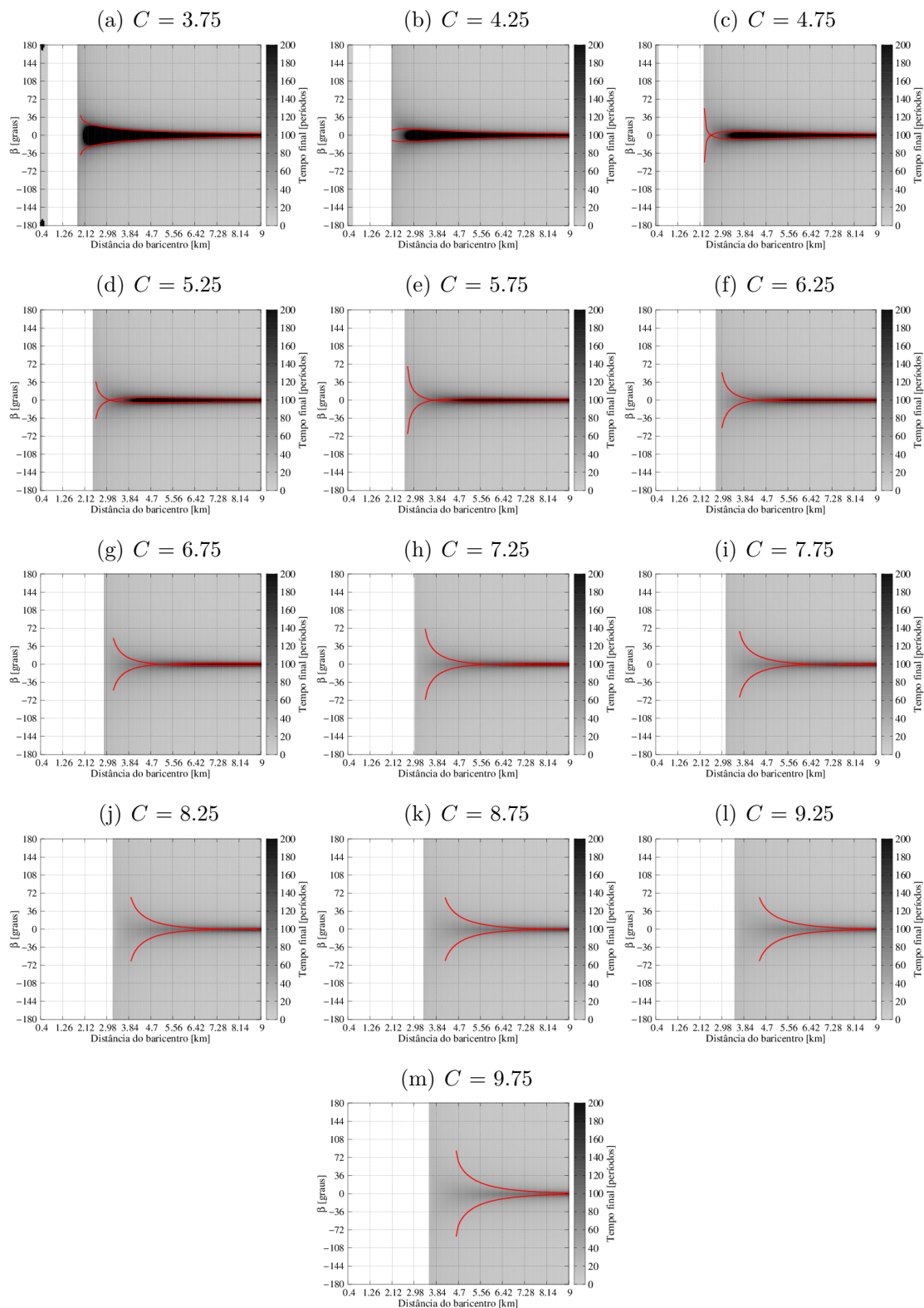


Figura F.13 - Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25 . Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de $0,4$ km a 9 km. $\theta = 135^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$.

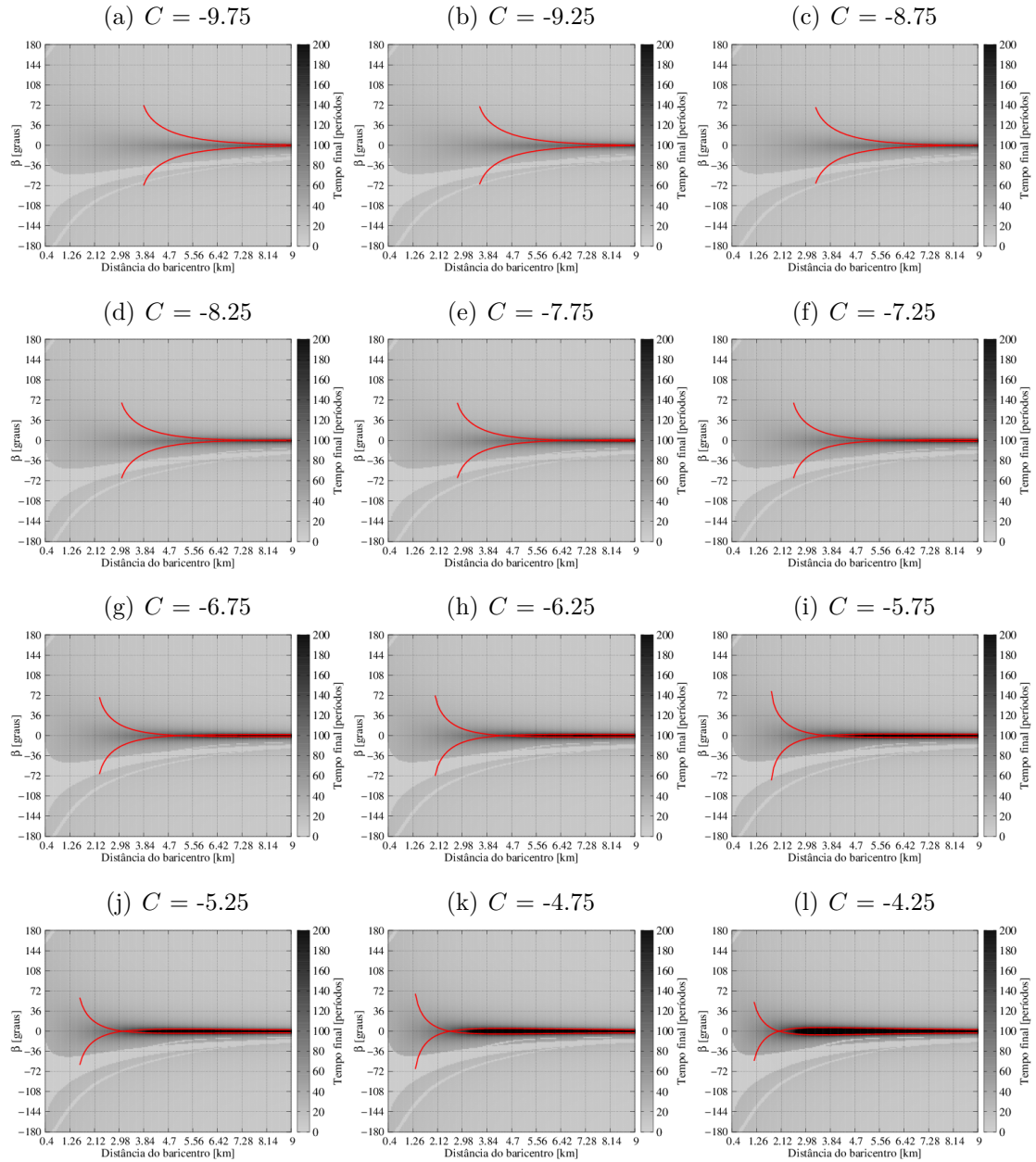


Figura F.14 - O mesmo das Figuras F.13(a)- F.13(l), mas para C entre -3.75 e 3.25 .

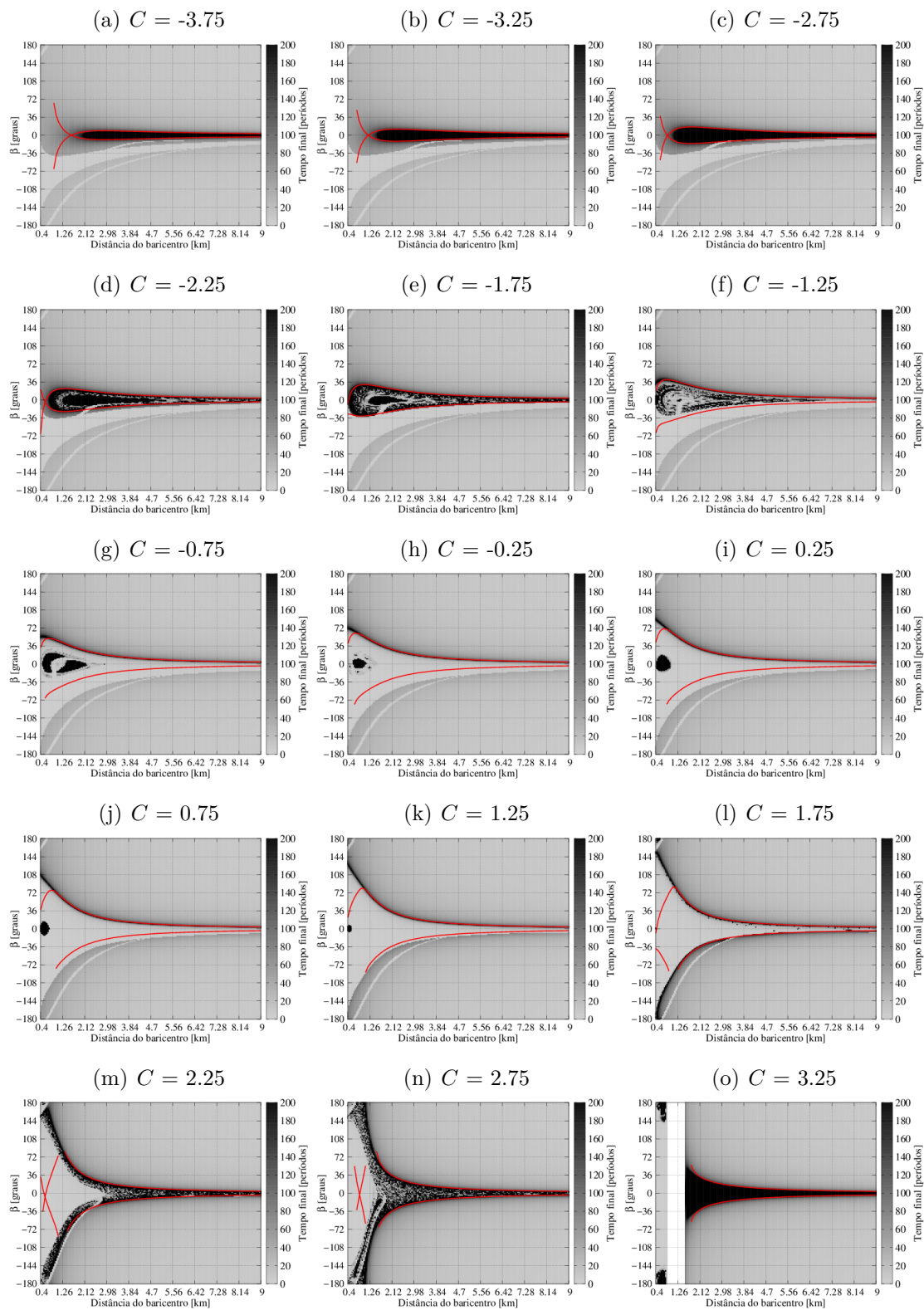


Figura F.15 - O mesmo das Figuras F.13(a)- F.13(l), mas para C entre 3.75 e 9.75.

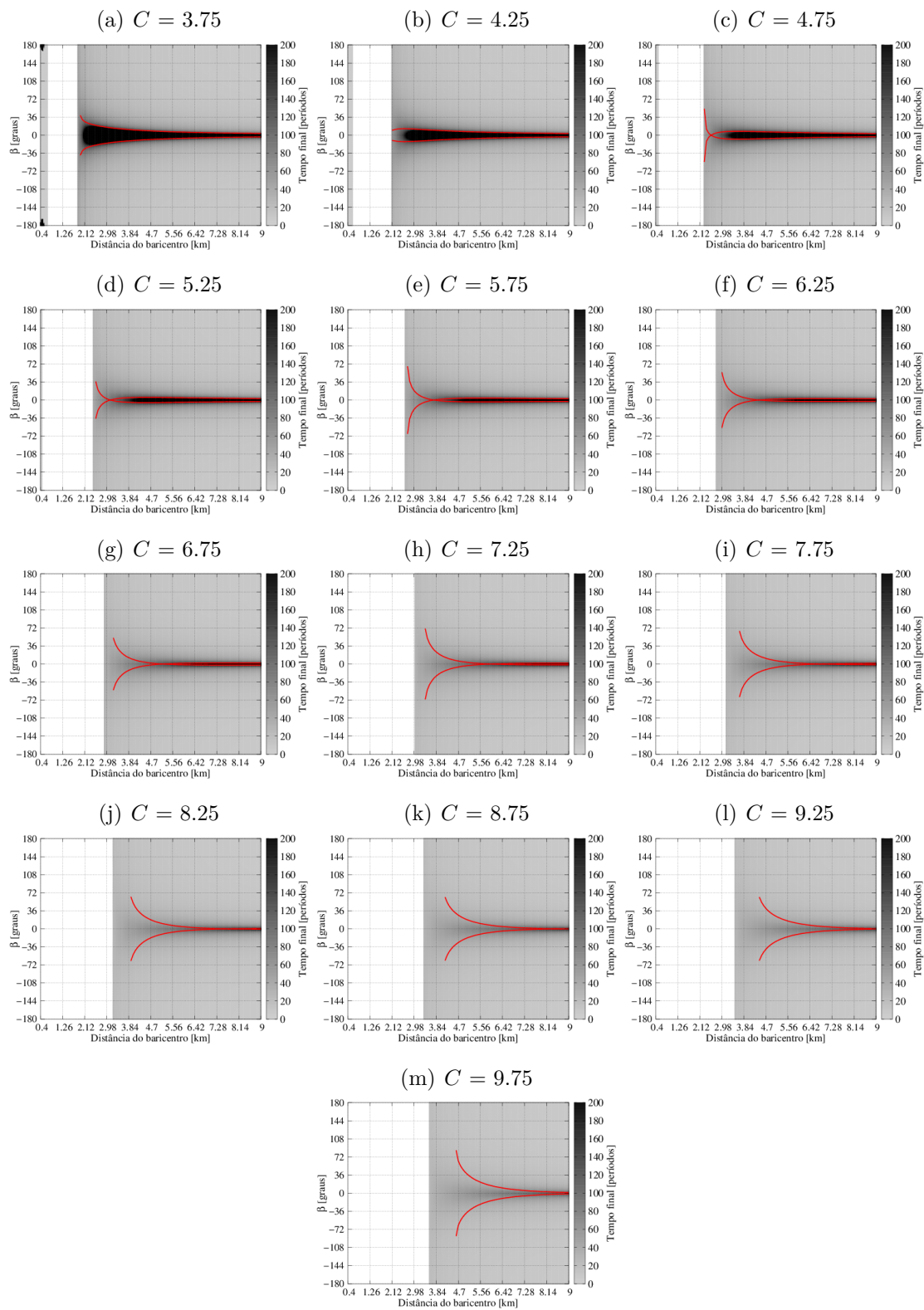


Figura F.16 - Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25 . Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de $0,4$ km a 9 km. $\theta = 165^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$.

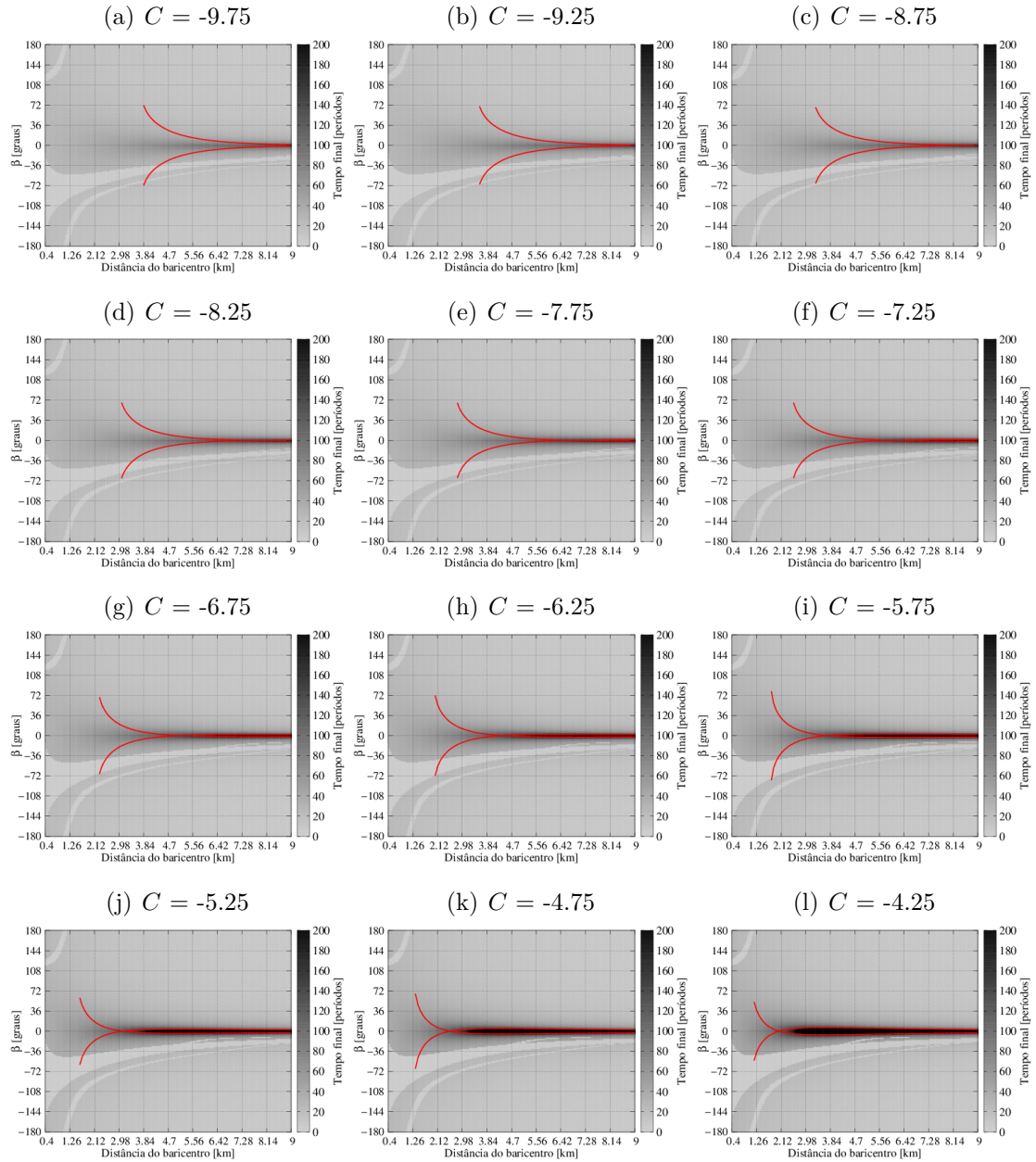


Figura F.17 - O mesmo das Figuras F.16(a)- F.16(l), mas para C entre -3.75 e 3.25 .

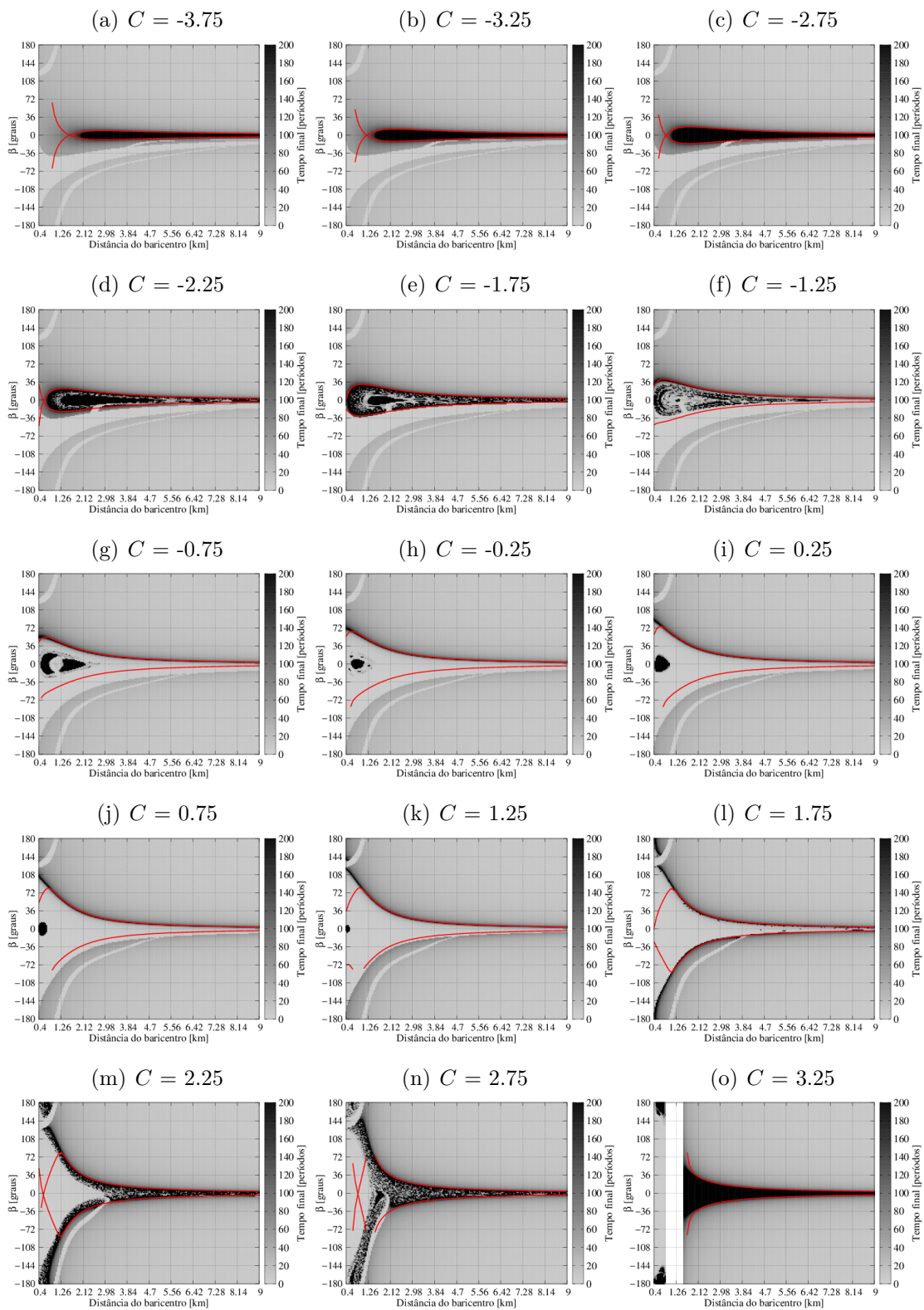


Figura F.18 - O mesmo das Figuras F.16(a)- F.16(l), mas para C entre 3.75 e 9.75.

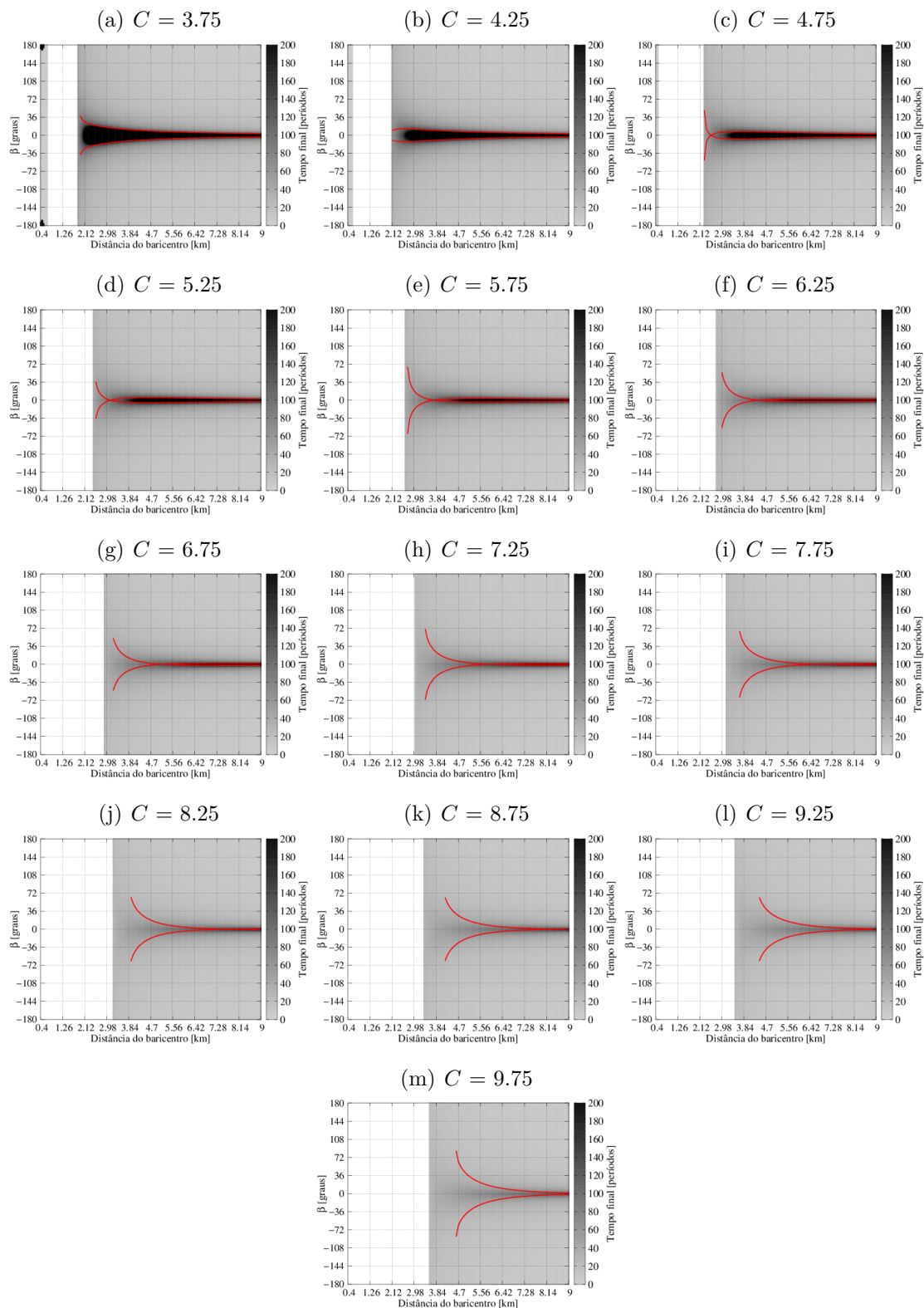


Figura F.19 - Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25 . Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de $0,4$ km a 9 km. $\theta = 195^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$.

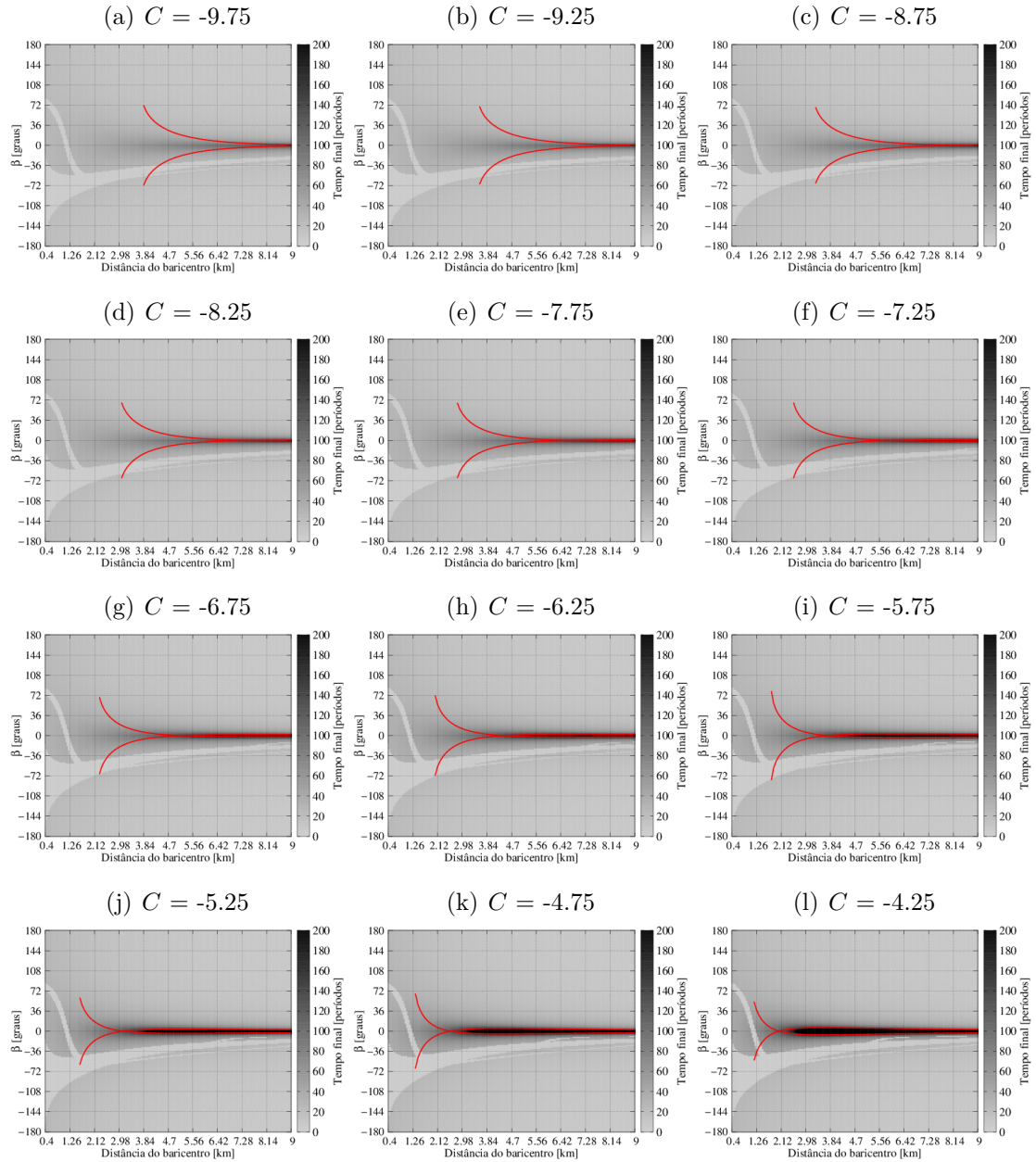


Figura F.20 - O mesmo das Figuras F.19(a)- F.19(l), mas para C entre -3.75 e 3.25 .

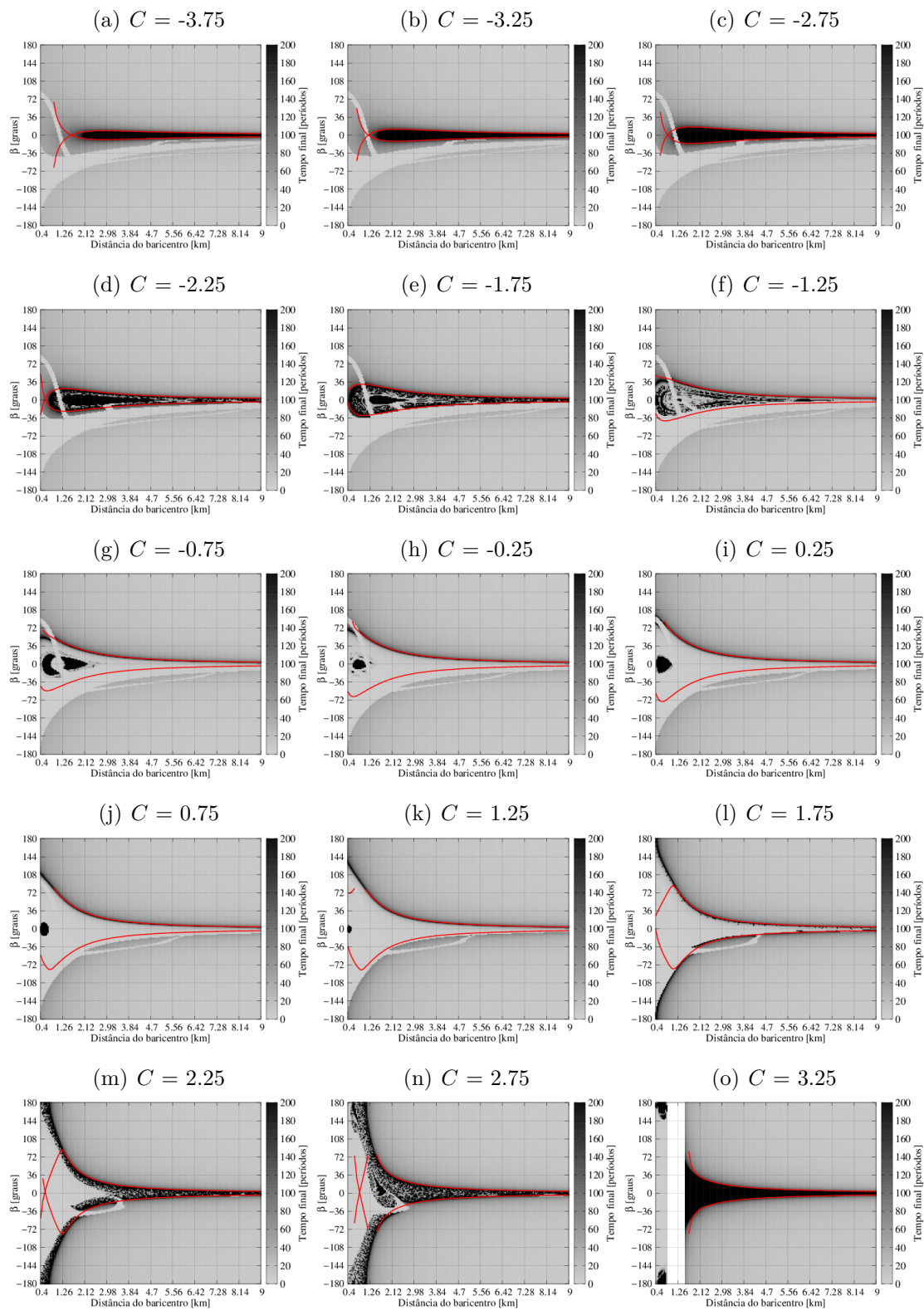


Figura F.21 - O mesmo das Figuras F.19(a)- F.19(l), mas para C entre 3.75 e 9.75.

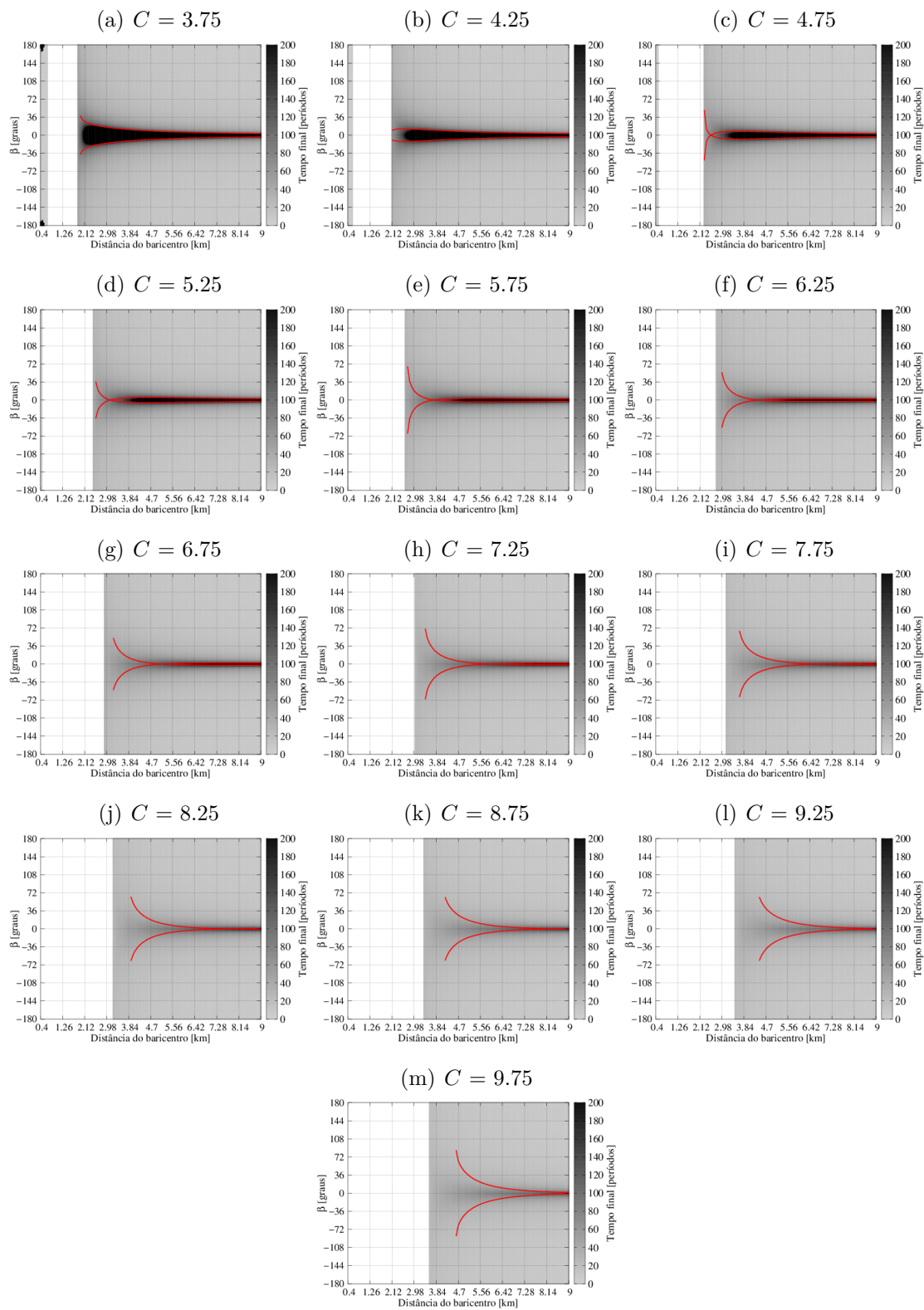


Figura F.22 - Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25 . Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de $0,4$ km a 9 km. $\theta = 225^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$.

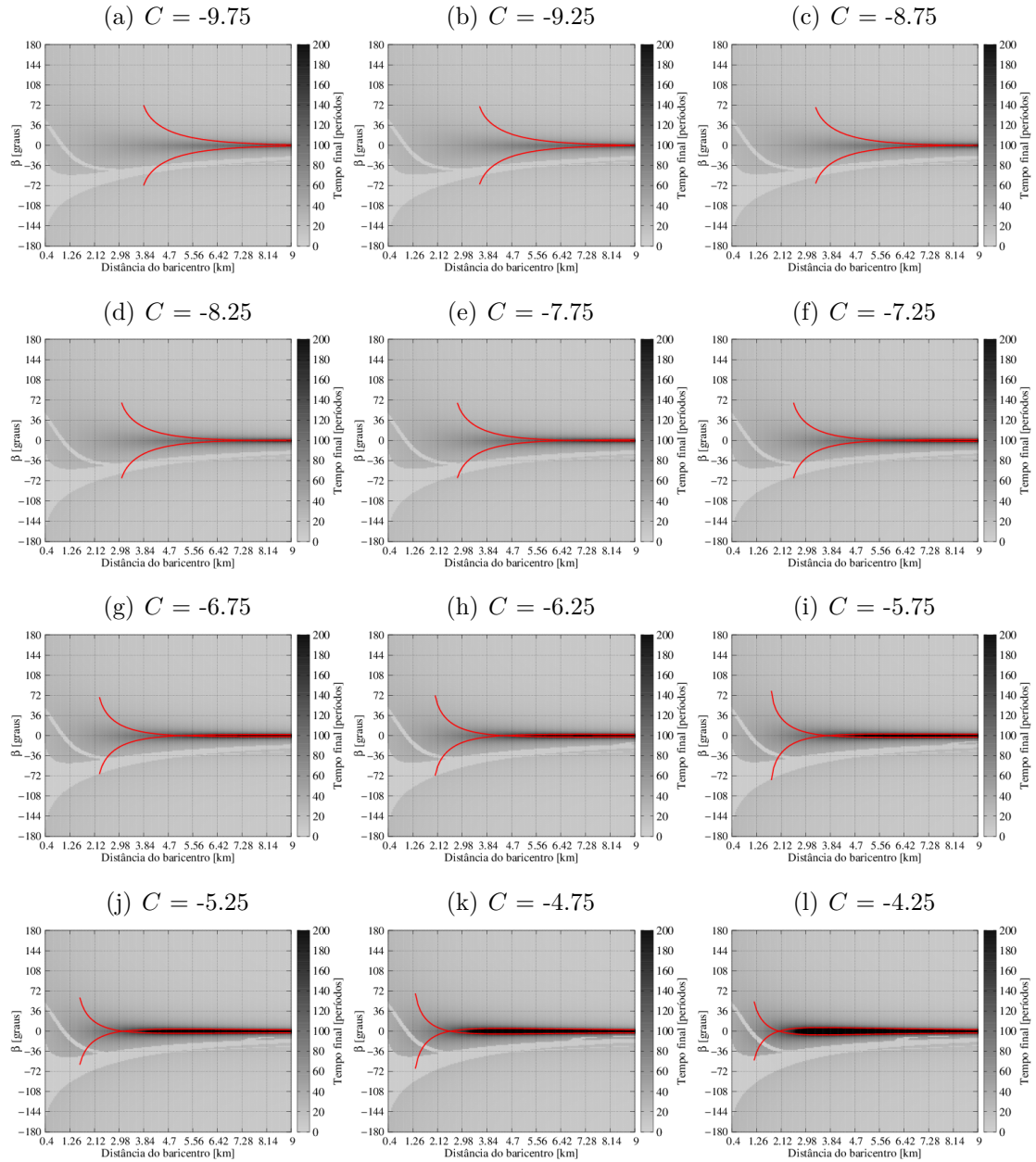


Figura F.23 - O mesmo das Figuras F.22(a)- F.22(l), mas para C entre -3.75 e 3.25 .

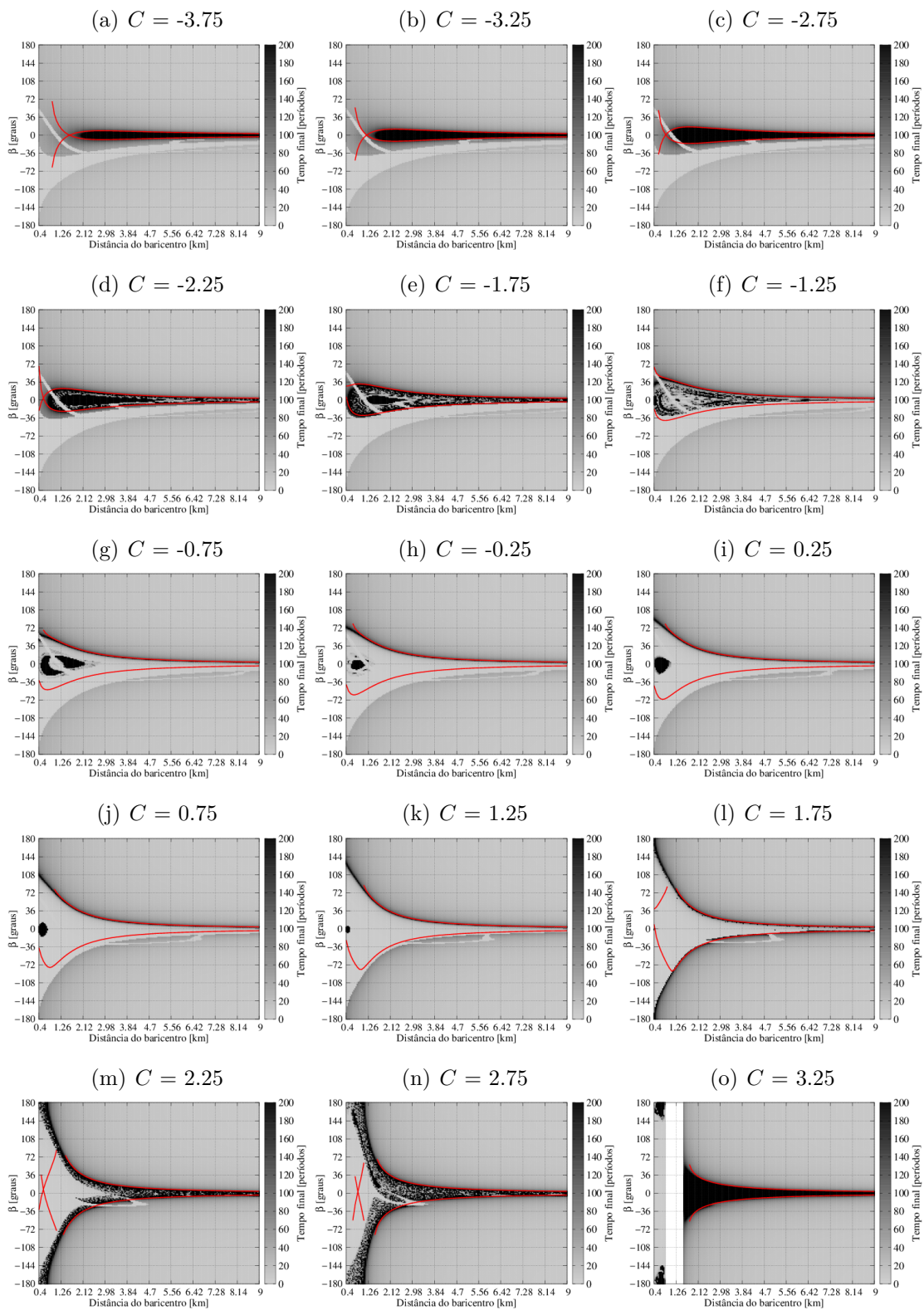


Figura F.24 - O mesmo das Figuras F.22(a)- F.22(l), mas para C entre 3.75 e 9.75.

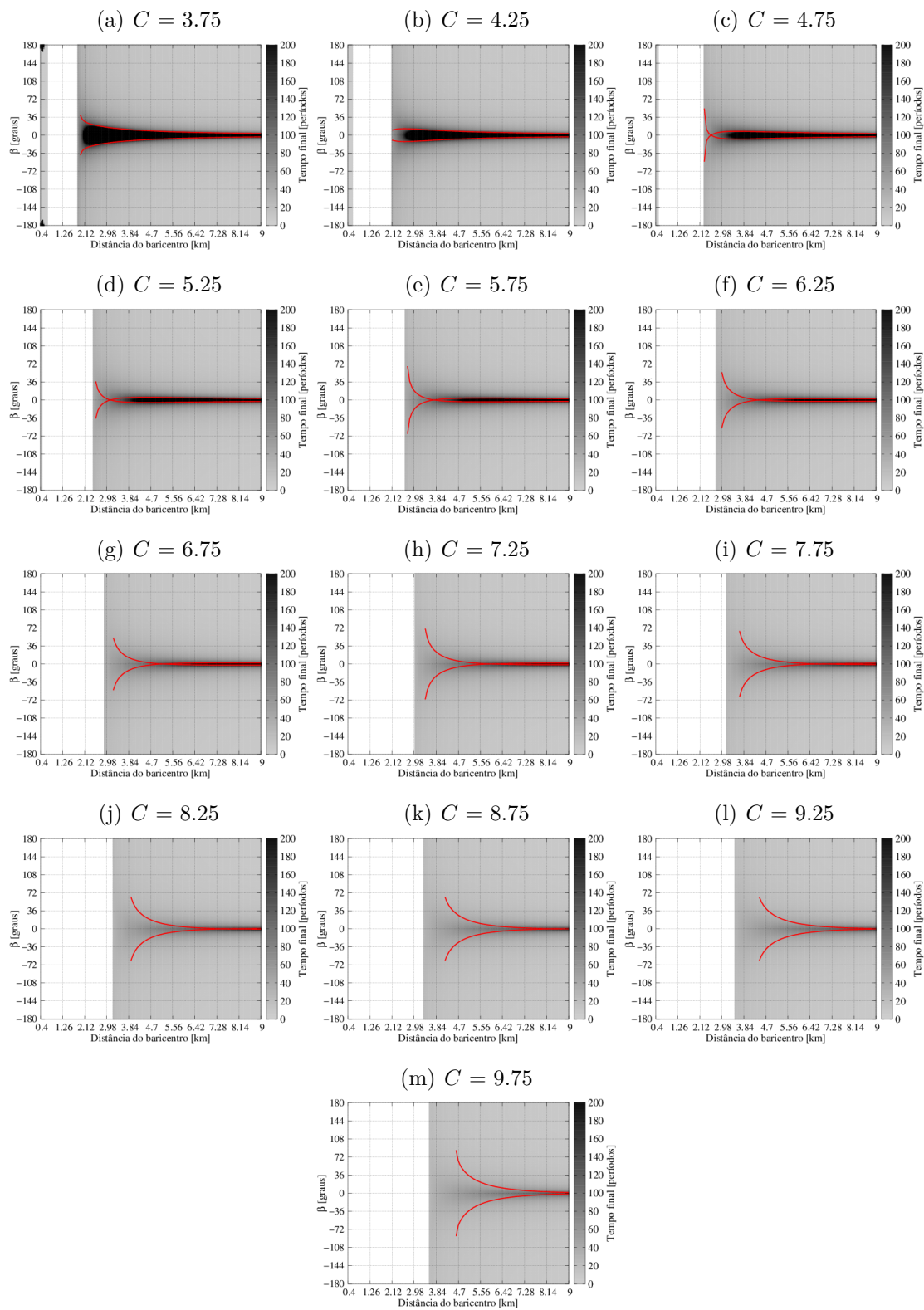


Figura F.25 - Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25 . Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de $0,4$ km a 9 km. $\theta = 255^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$.

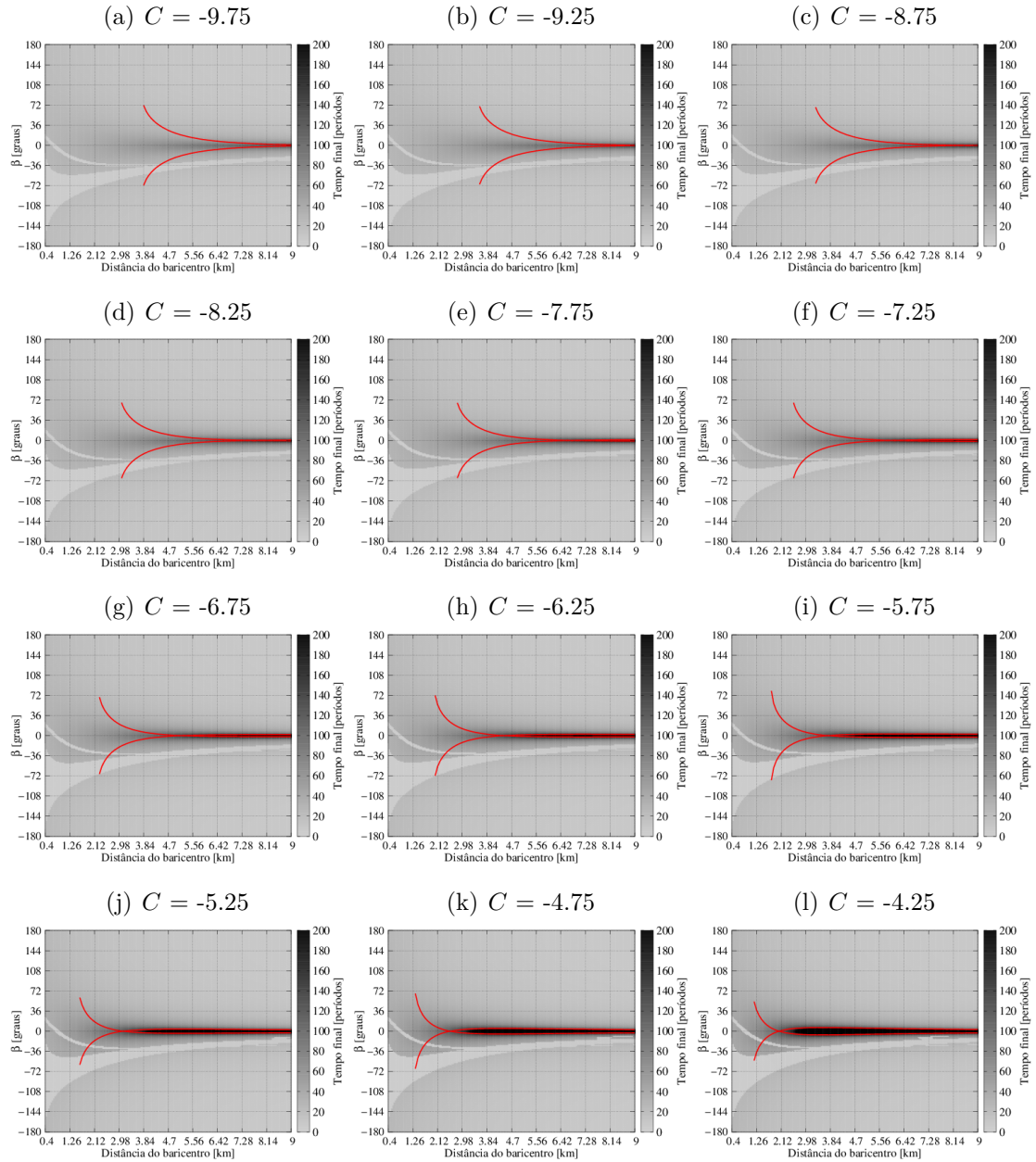


Figura F.26 - O mesmo das Figuras F.25(a)- F.25(l), mas para C entre -3.75 e 3.25 .

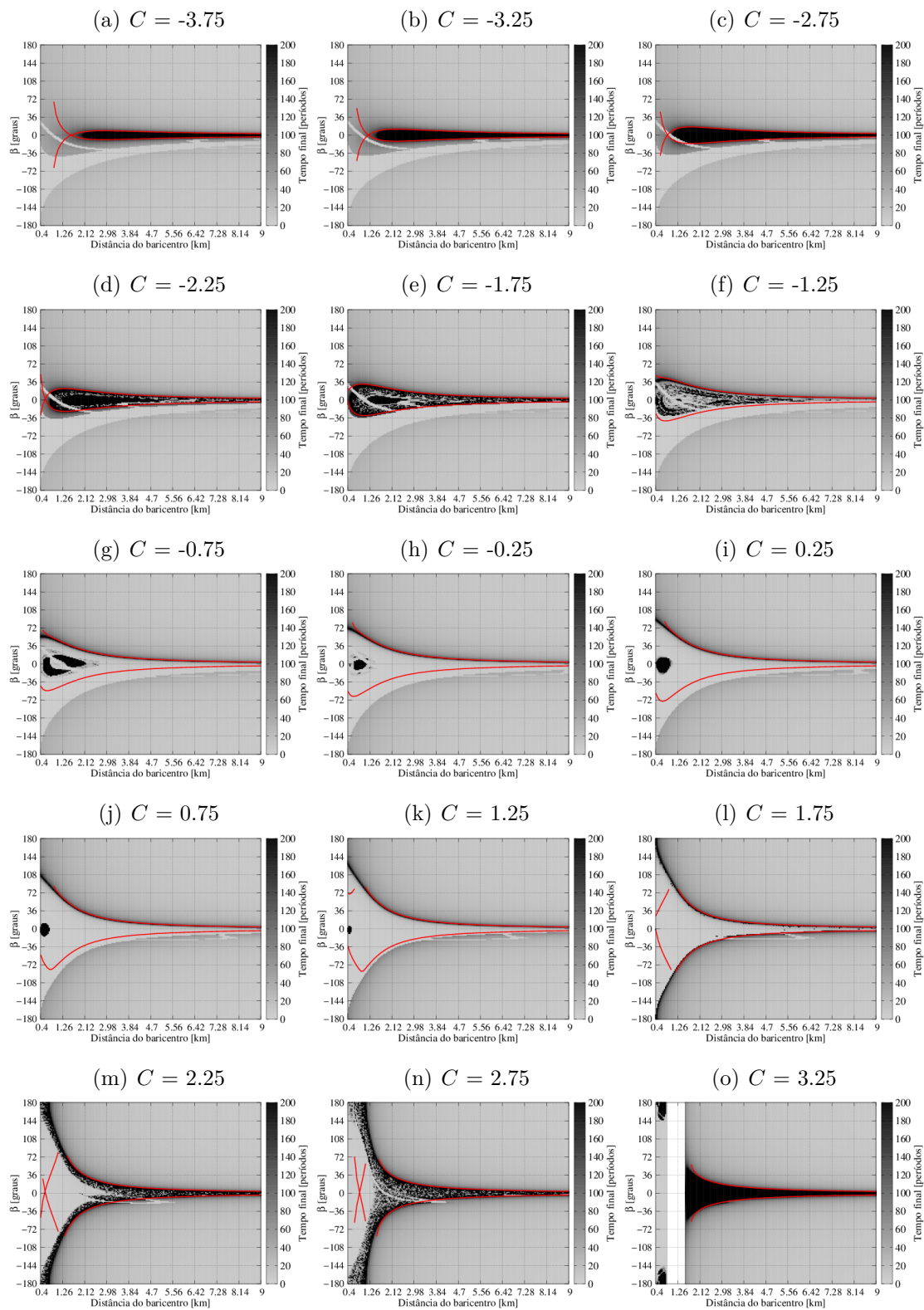


Figura F.27 - O mesmo das Figuras F.25(a)- F.25(l), mas para C entre 3.75 e 9.75.

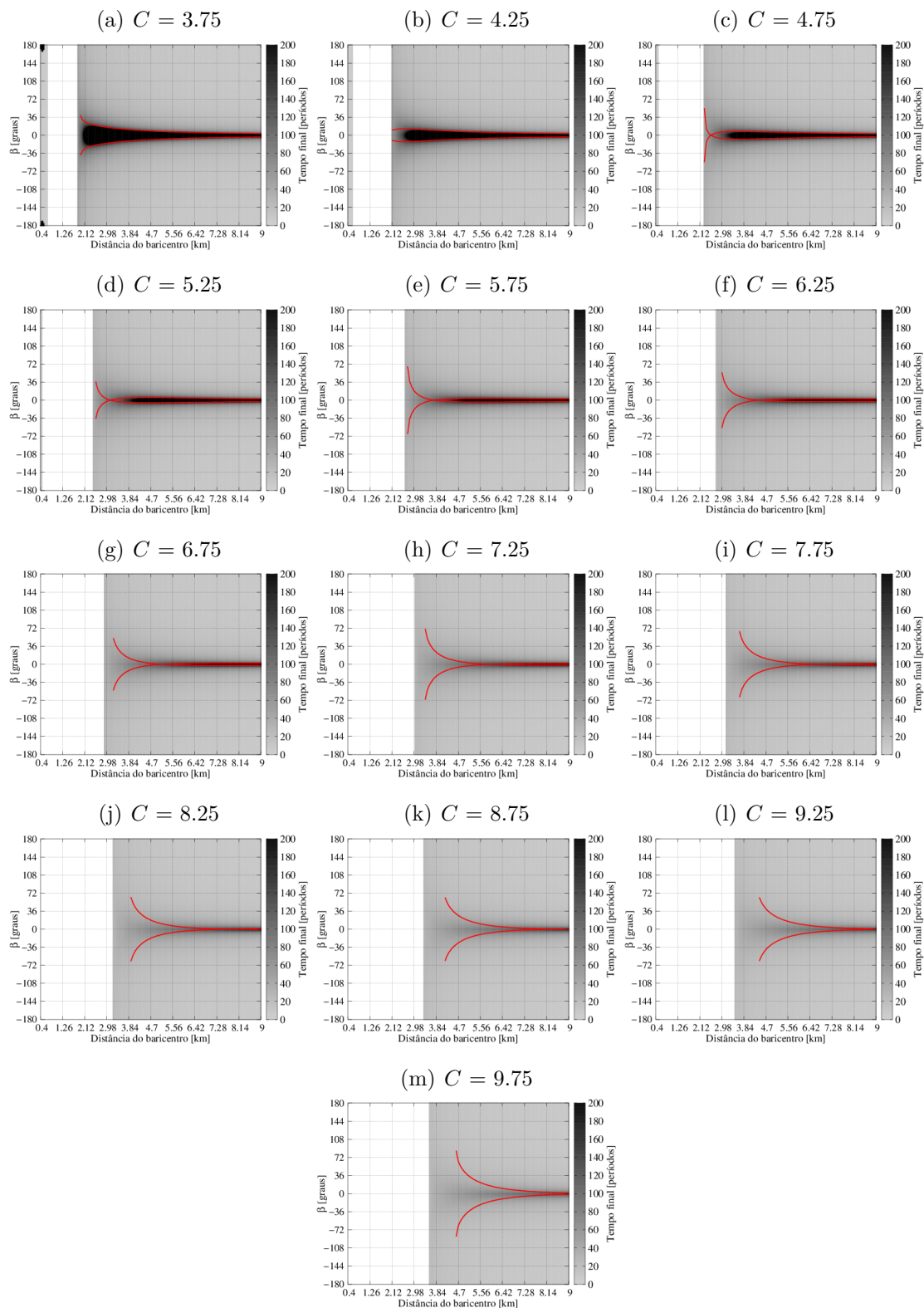


Figura F.28 - Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25 . Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de $0,4$ km a 9 km. $\theta = 285^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$.

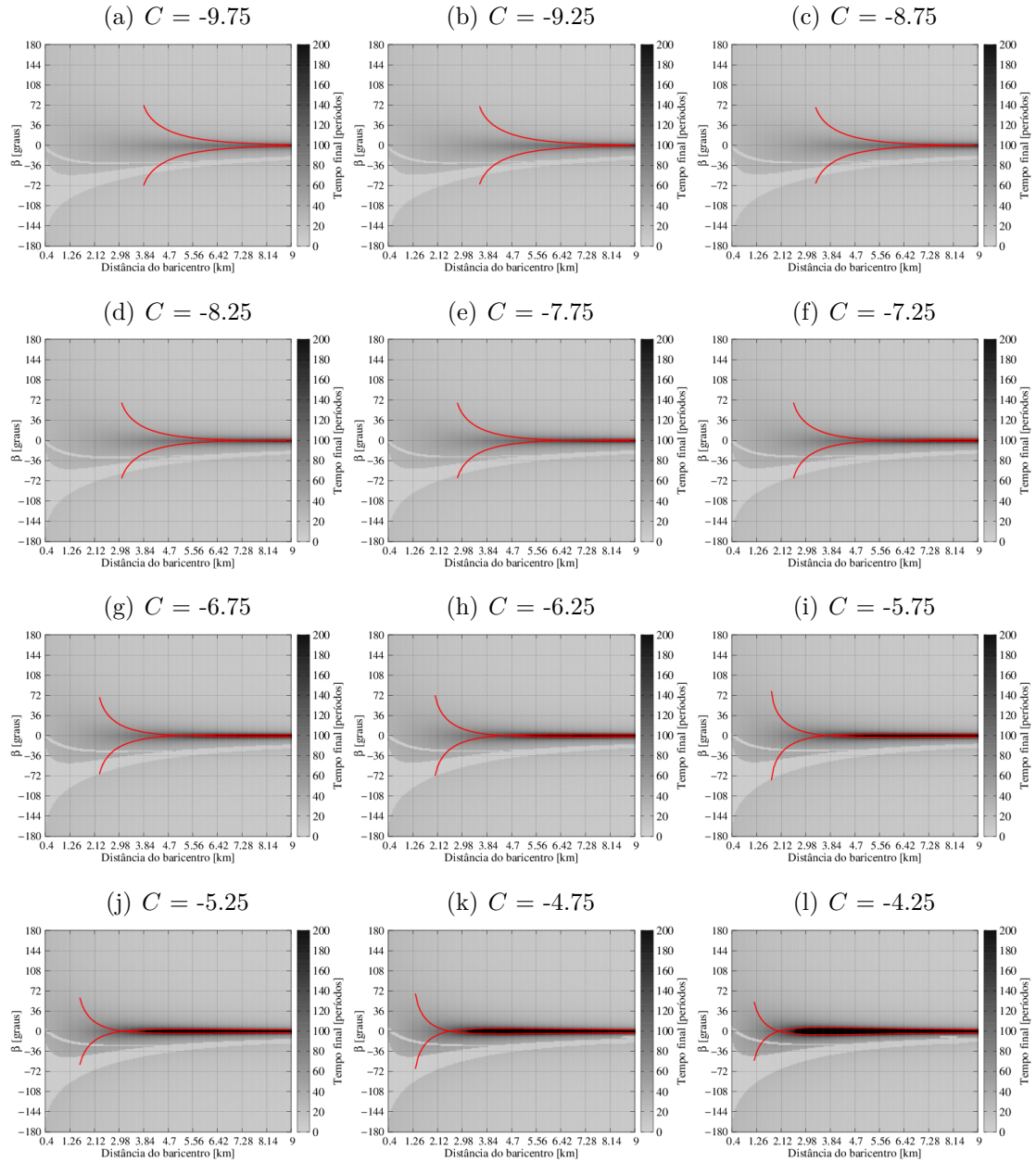


Figura F.29 - O mesmo das Figuras F.28(a)- F.28(l), mas para C entre -3.75 e 3.25 .

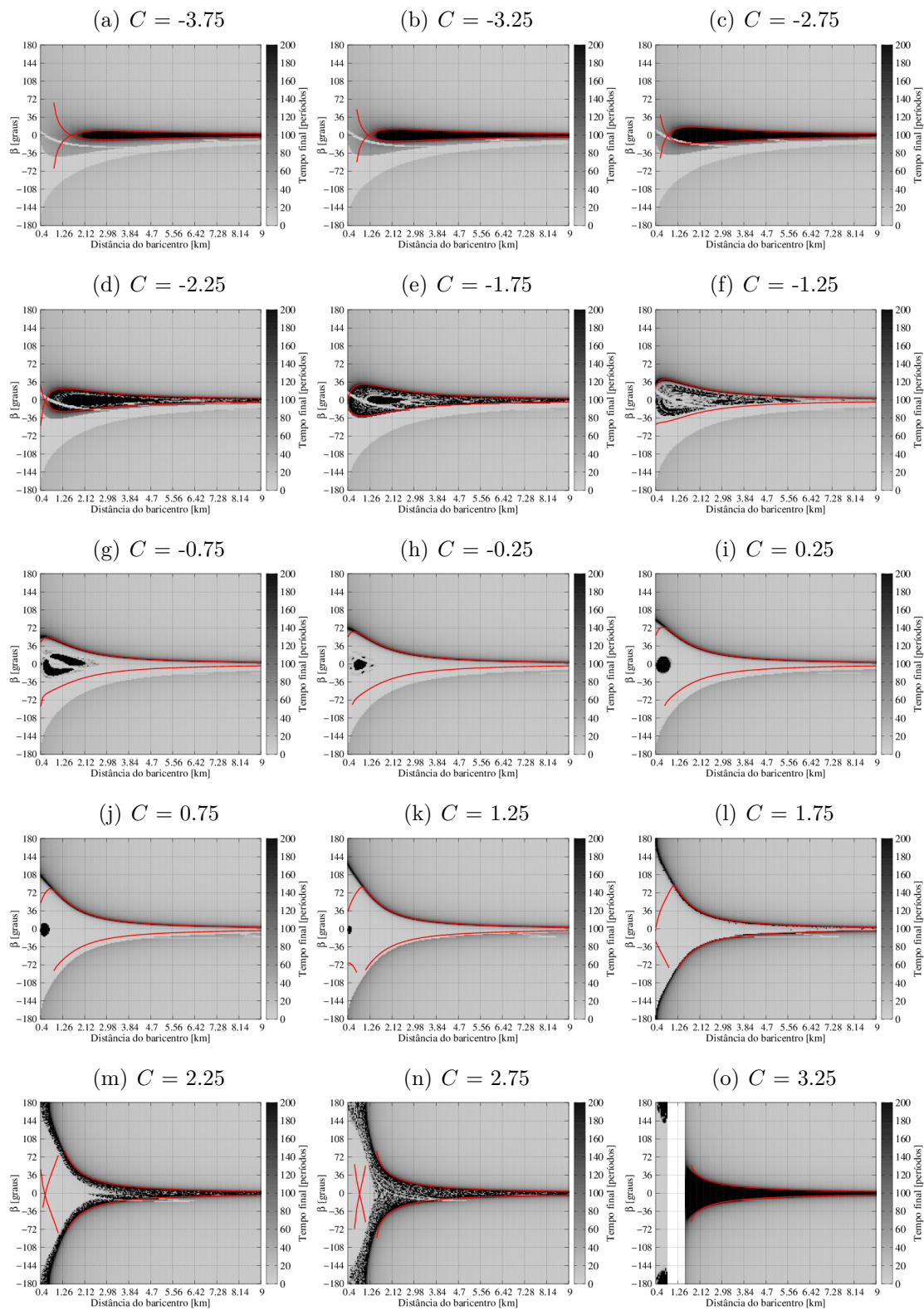


Figura F.30 - O mesmo das Figuras F.28(a)- F.28(l), mas para C entre 3.75 e 9.75.

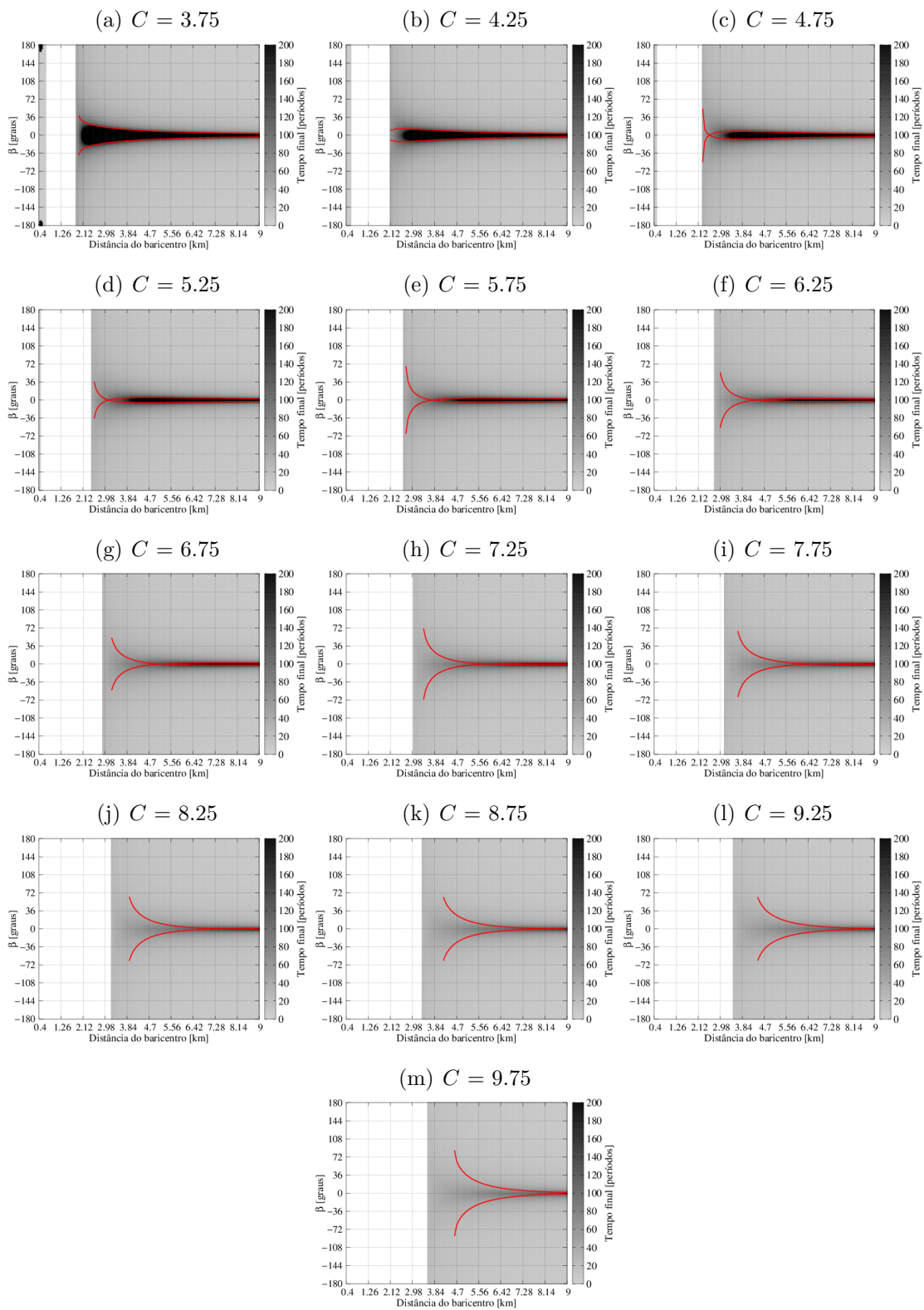


Figura F.31 - Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25 . Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de $0,4$ km a 9 km. $\theta = 315^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$.

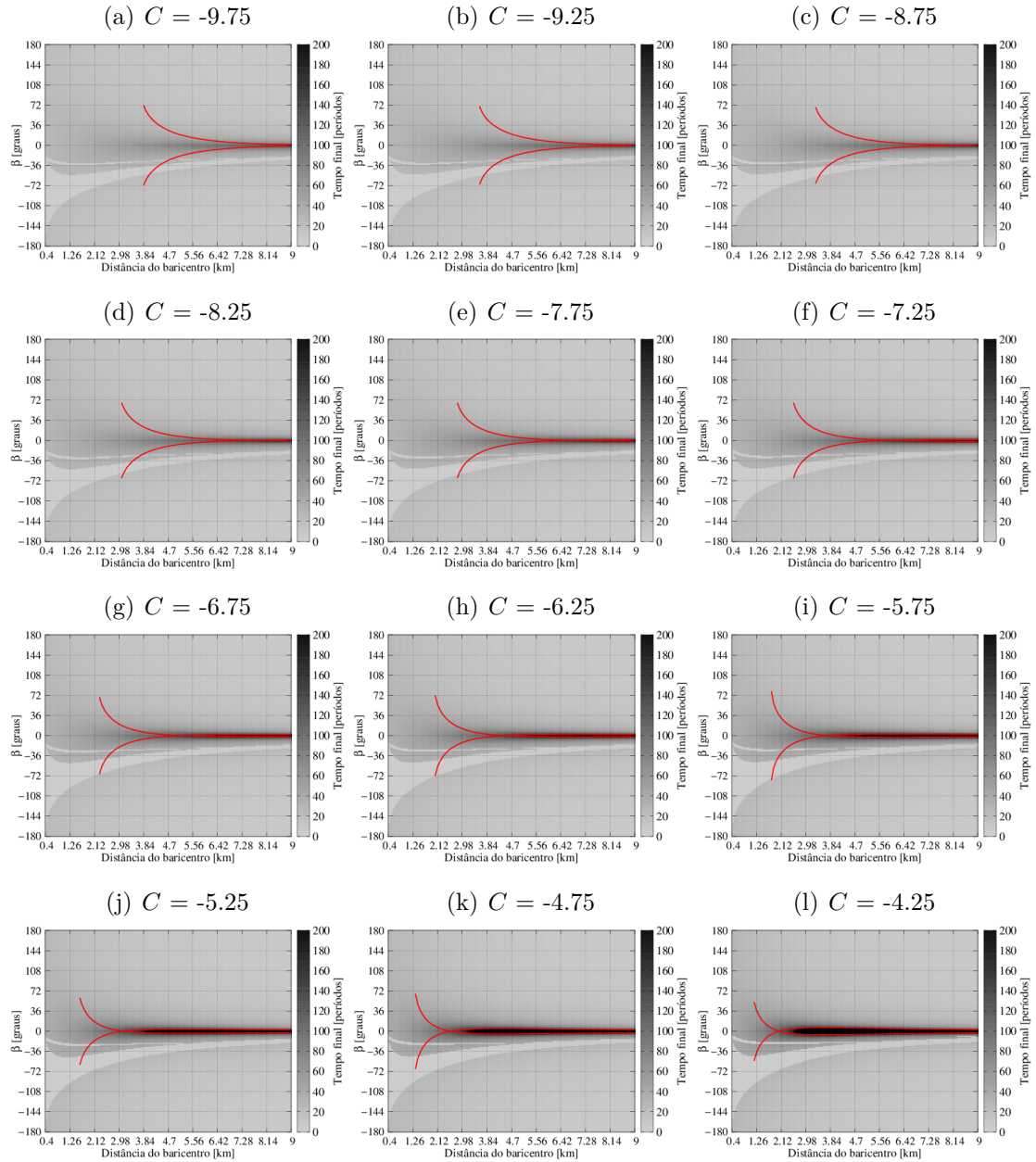


Figura F.32 - O mesmo das Figuras F.31(a)- F.31(l), mas para C entre -3.75 e 3.25 .

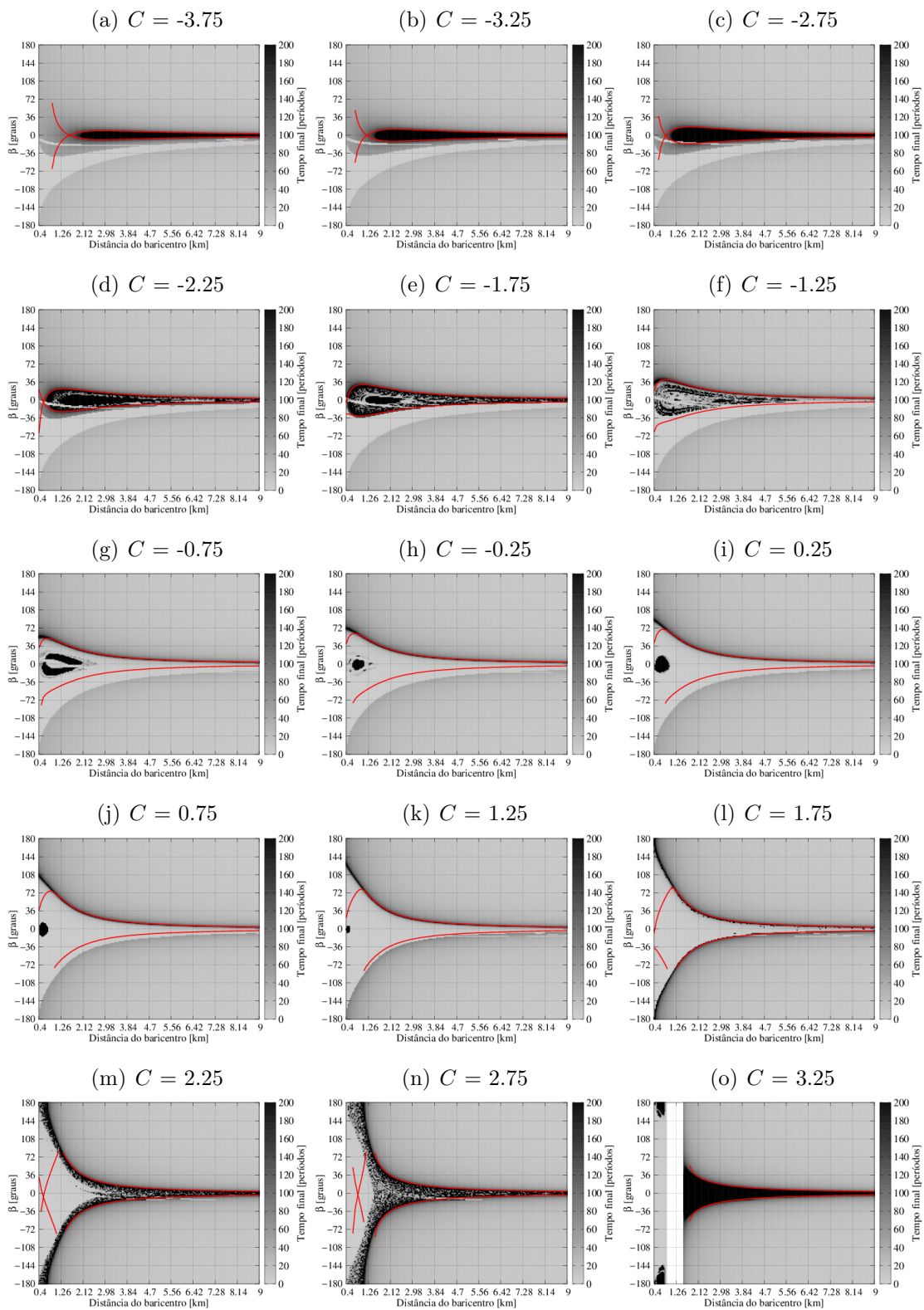


Figura F.33 - O mesmo das Figuras F.31(a)- F.31(l), mas para C entre 3.75 e 9.75.

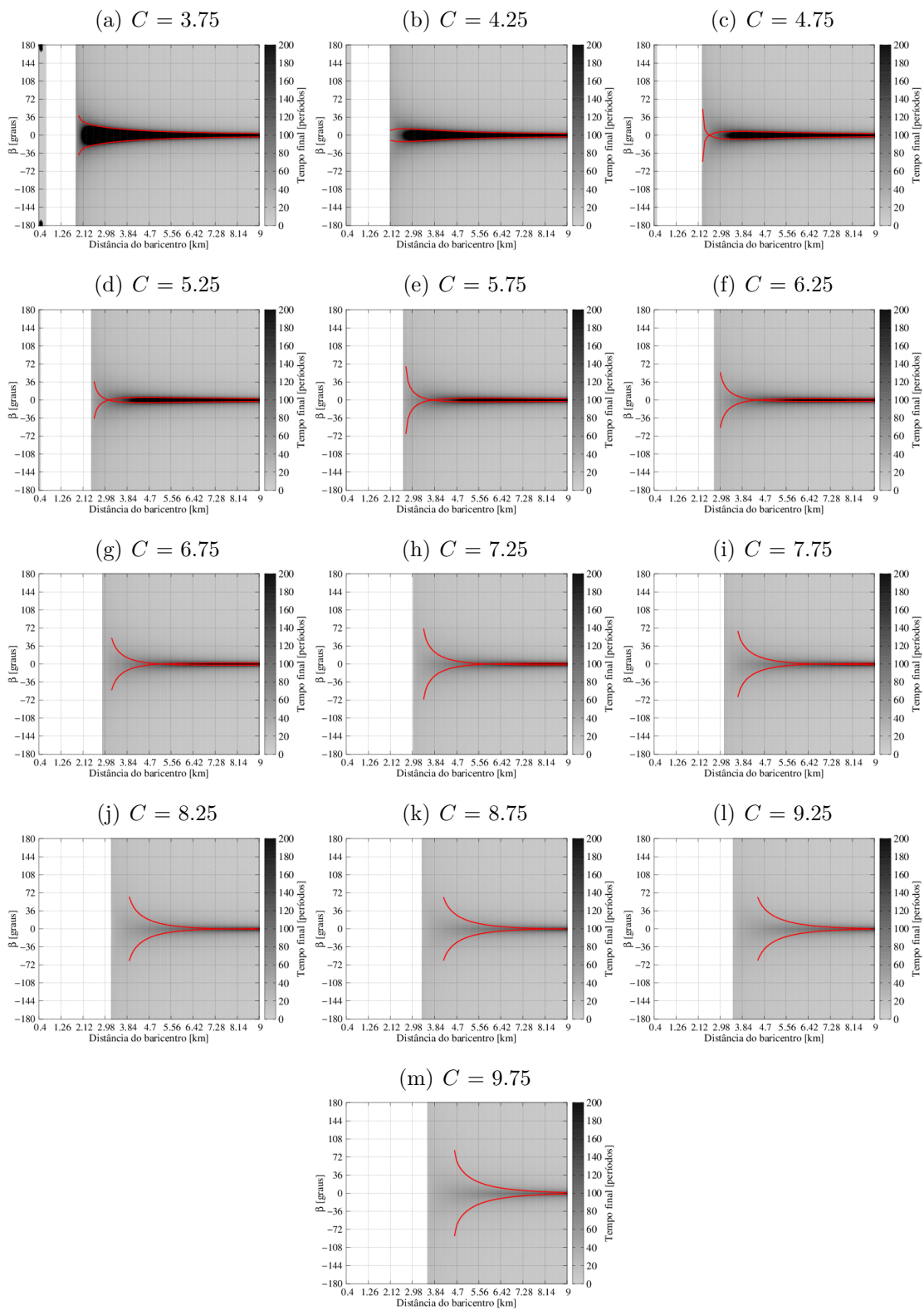


Figura F.34 - Tempo final das simulações para diferentes valores de C , de -9.75 a -4.25 . Para β entre -180° e 180° e distância do baricentro, de $0,4$ km a 9 km. $\theta = 345^\circ$. A barra de cores mostra o tempo final de 0 a 200 períodos do sistema. A linha vermelha é a expansão $p = F(q, \theta)$.

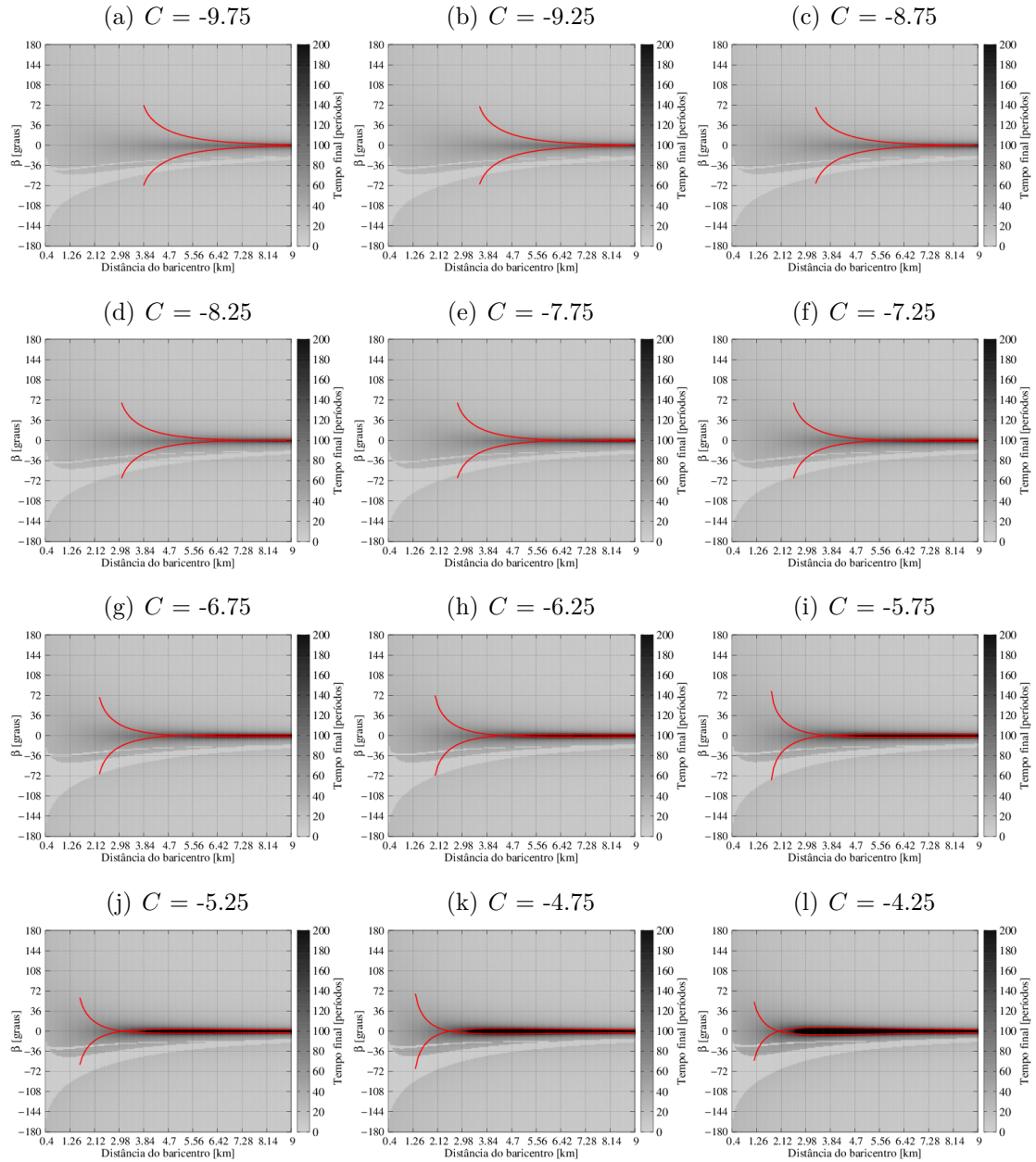


Figura F.35 - O mesmo das Figuras F.34(a)- F.34(l), mas para C entre -3.75 e 3.25 .

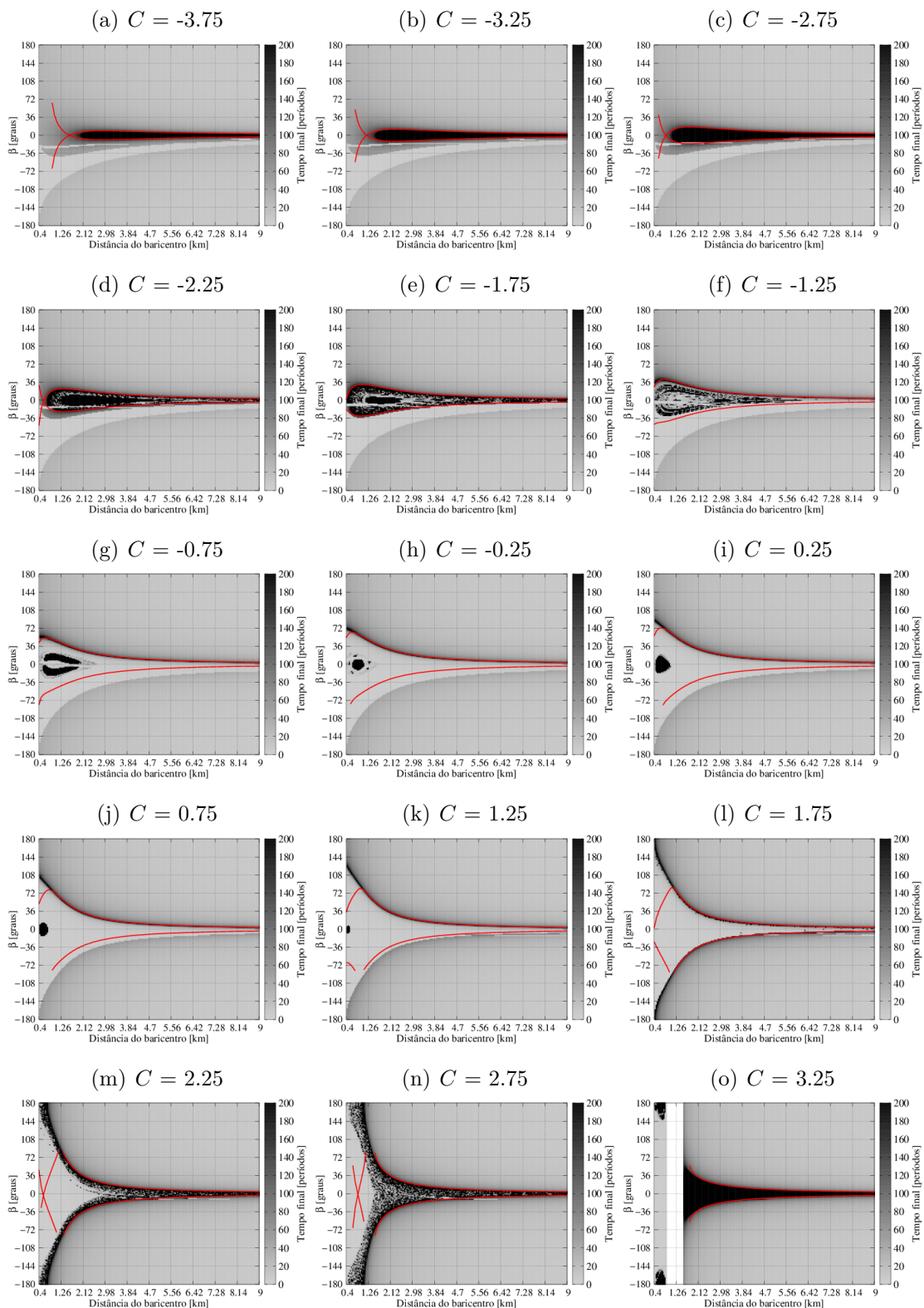
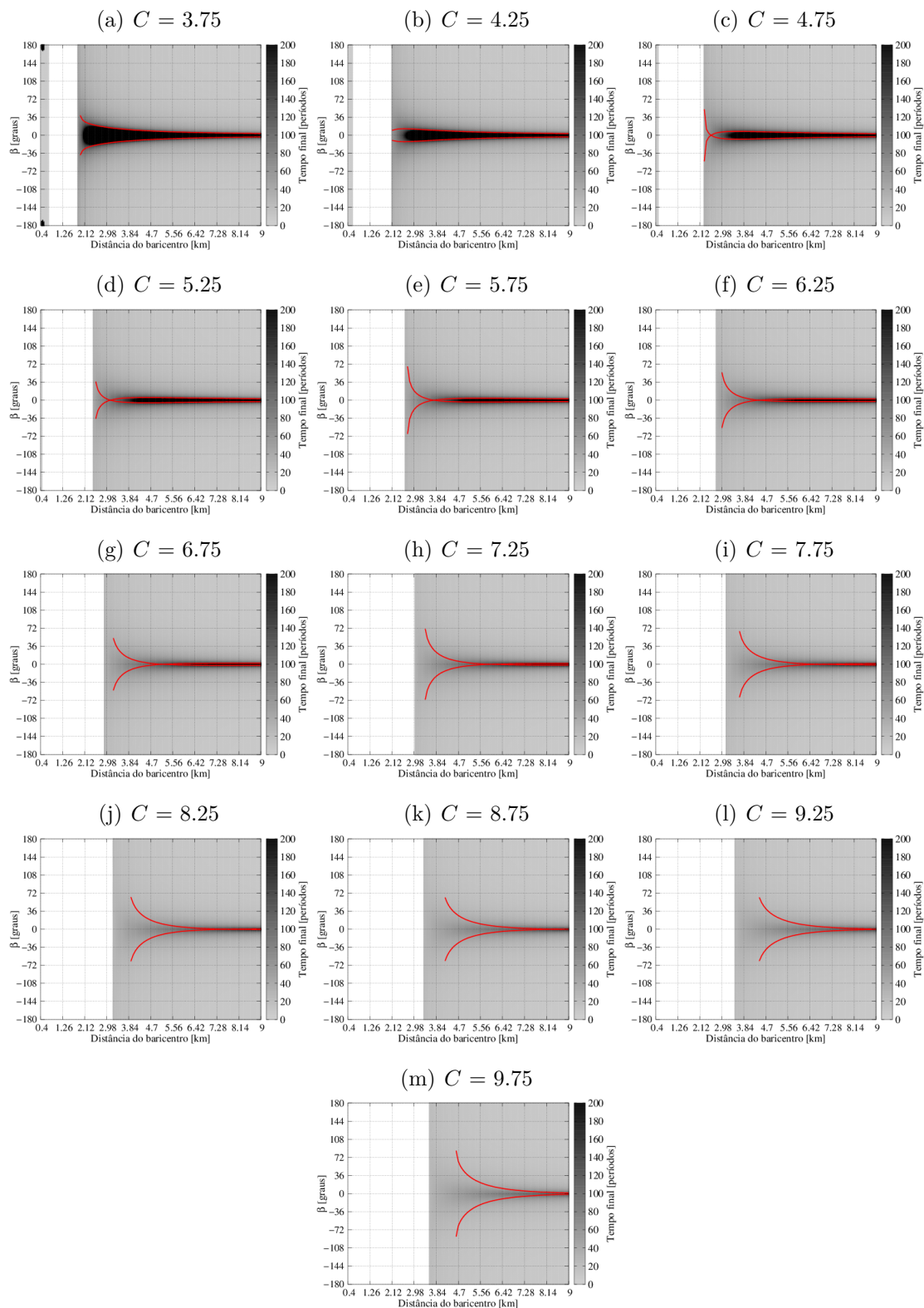


Figura F.36 - O mesmo das Figuras F.34(a)- F.34(l), mas para C entre 3.75 e 9.75.



APÊNDICE G - RESULTADOS DAS INTEGRAIS DA ACELERAÇÃO

Figura G.1 - Resultados das integrais do tipo ii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \lambda_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 0,001^\circ$, $\omega = 0^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.

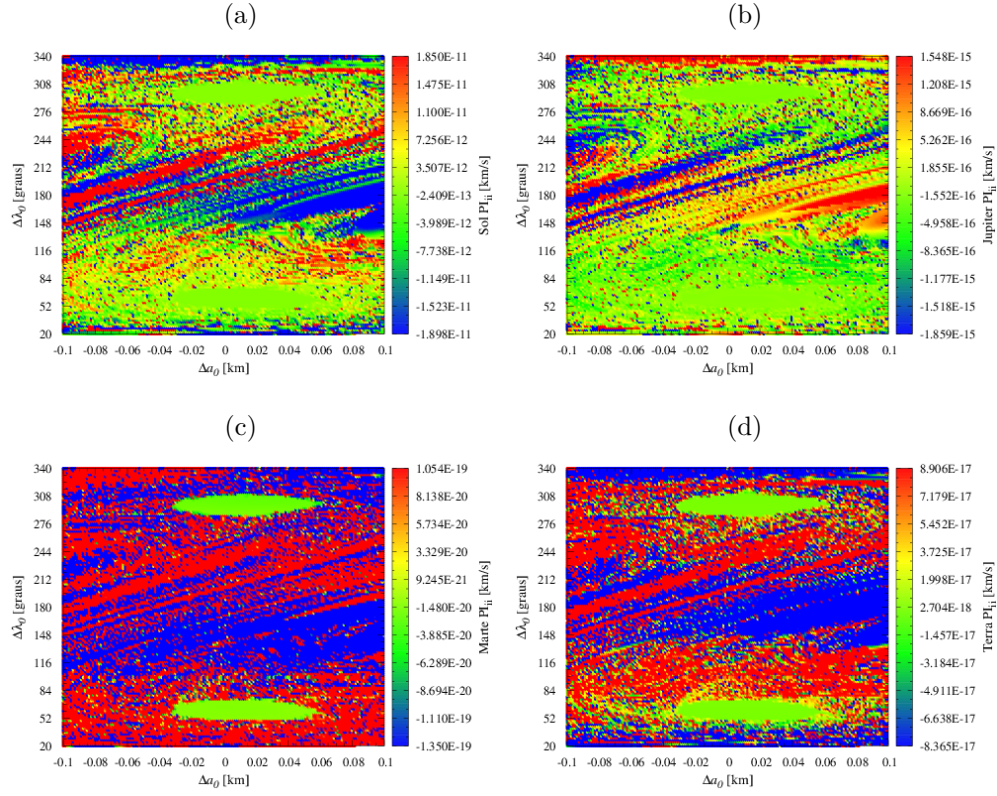


Figura G.2 - Resultados das integrais do tipo iii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \lambda_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 0,001^\circ$, $\omega = 0^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.

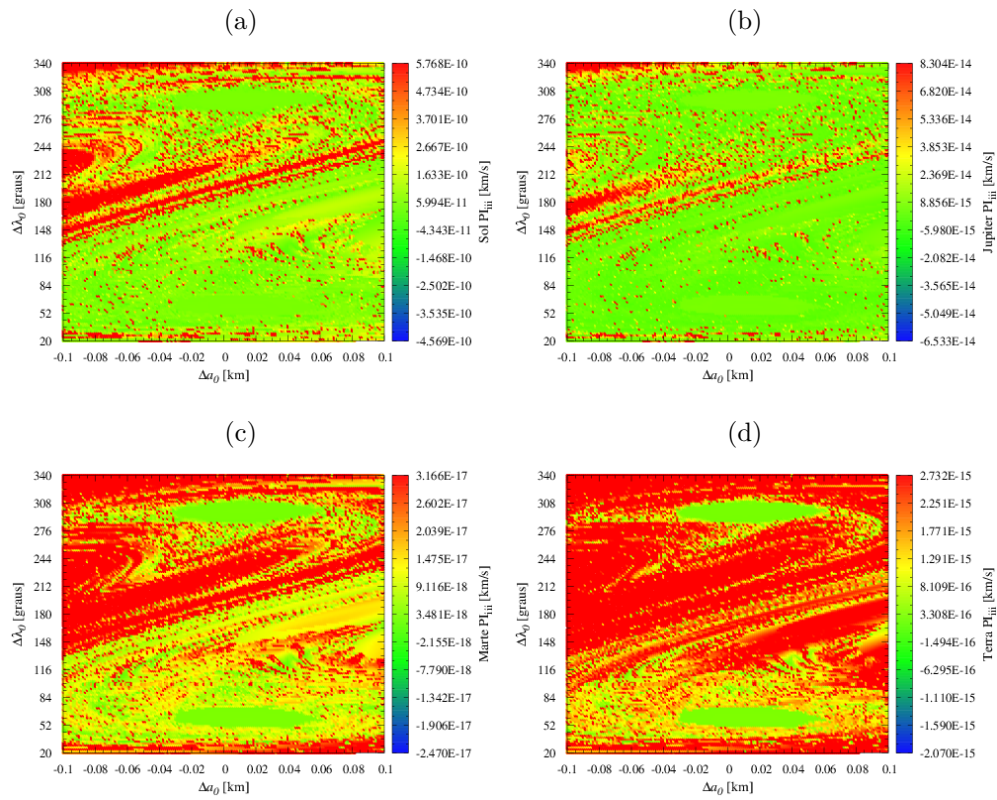


Figura G.3 - Resultados das integrais do tipo i feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \lambda_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 0,001^\circ$, $\omega = 180^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).

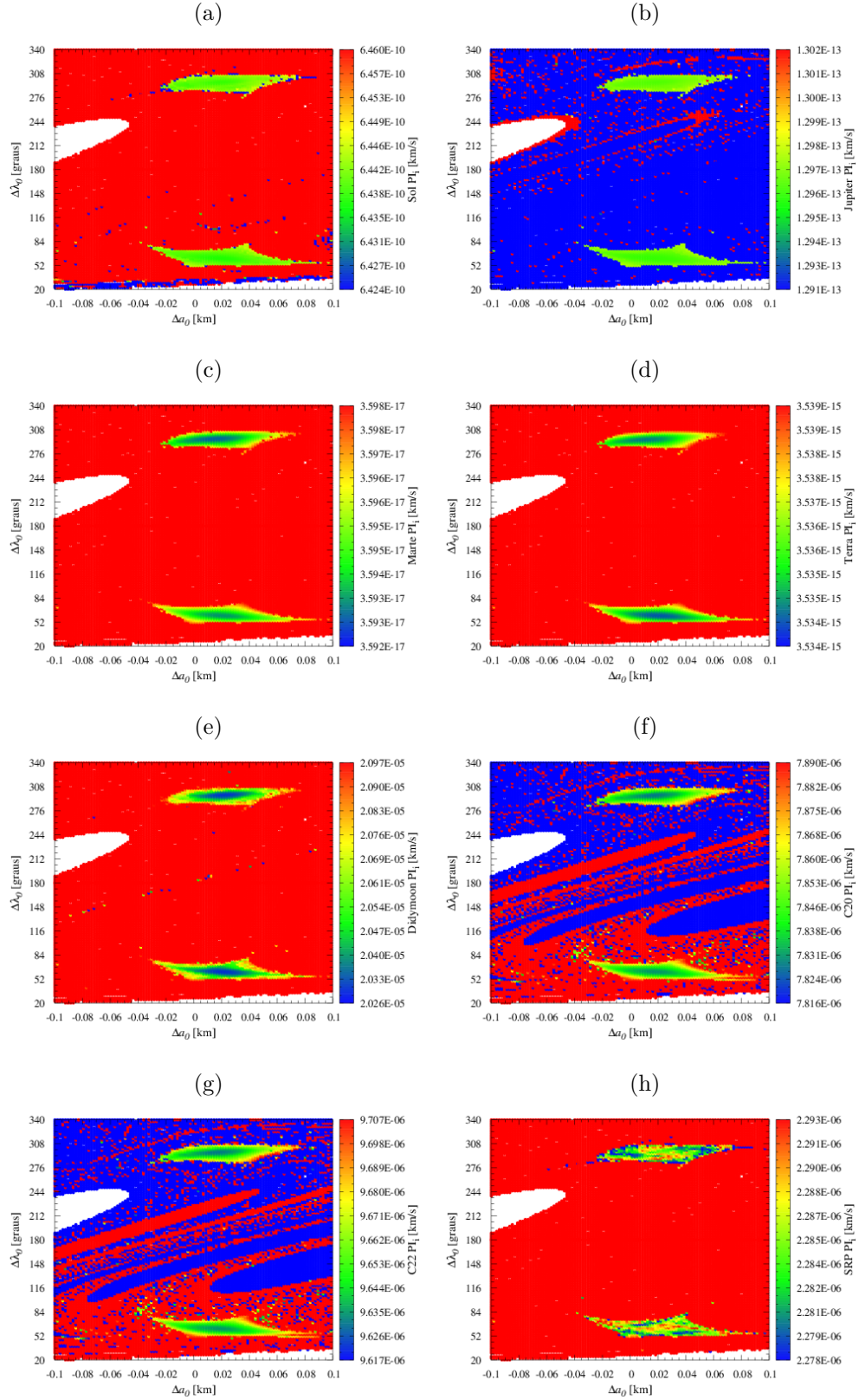


Figura G.4 - Resultados das integrais do tipo ii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \lambda_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 0,001^\circ$, $\omega = 180^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).

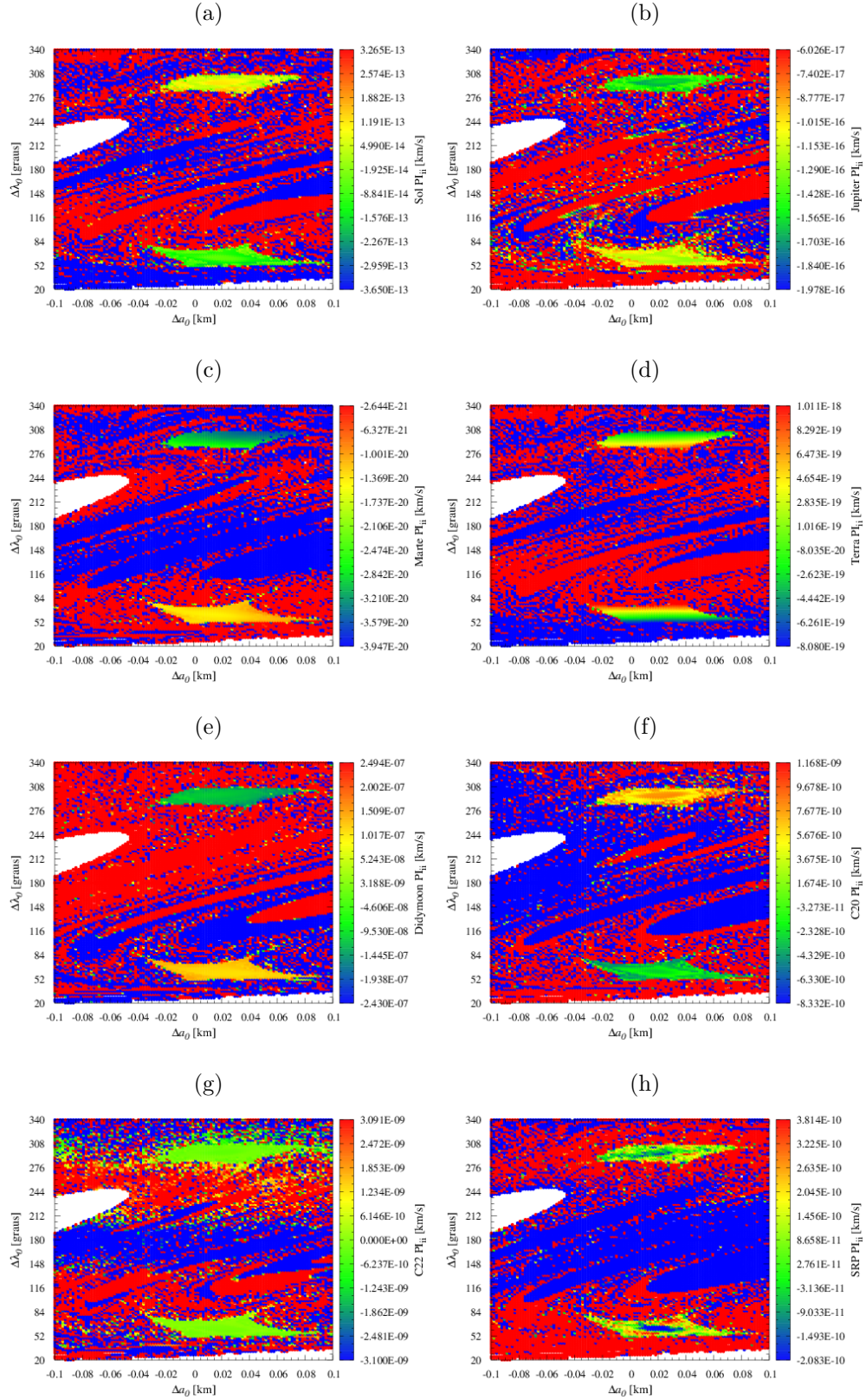


Figura G.5 - Resultados das integrais do tipo iii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \lambda_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 0,001^\circ$, $\omega = 180^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).

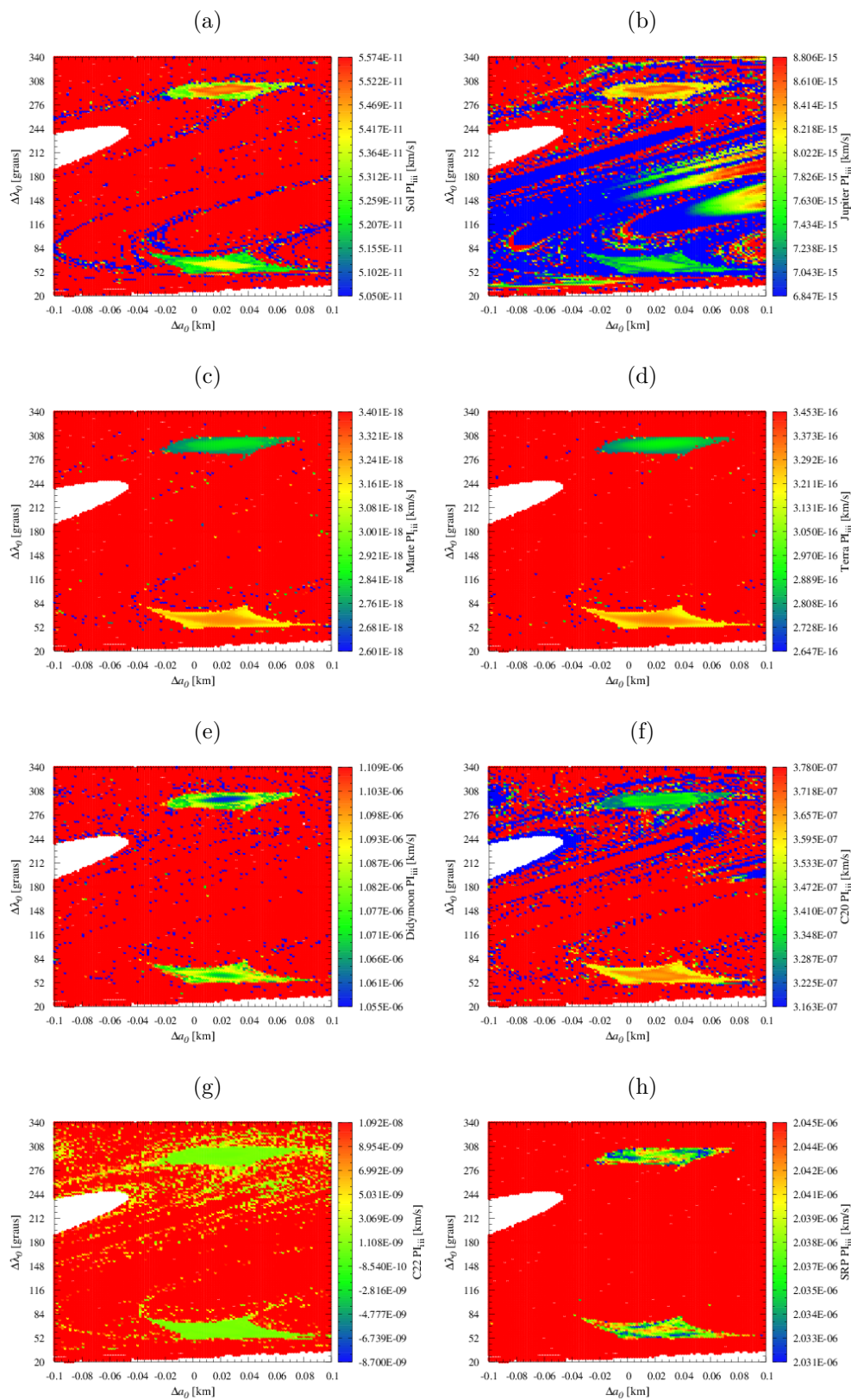


Figura G.6 - Resultados das integrais do tipo iv feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \lambda_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 0,001^\circ$, $\omega = 180^\circ$.

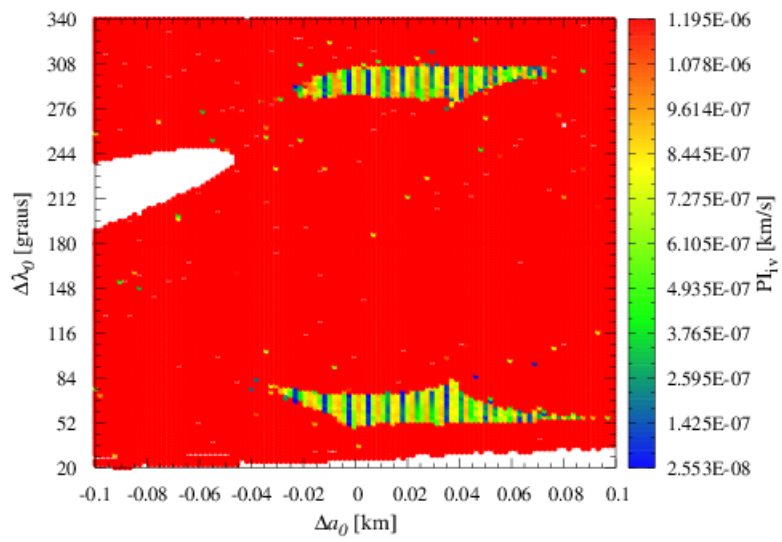


Figura G.7 - Resultados das integrais do tipo i feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \phi_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 0^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).

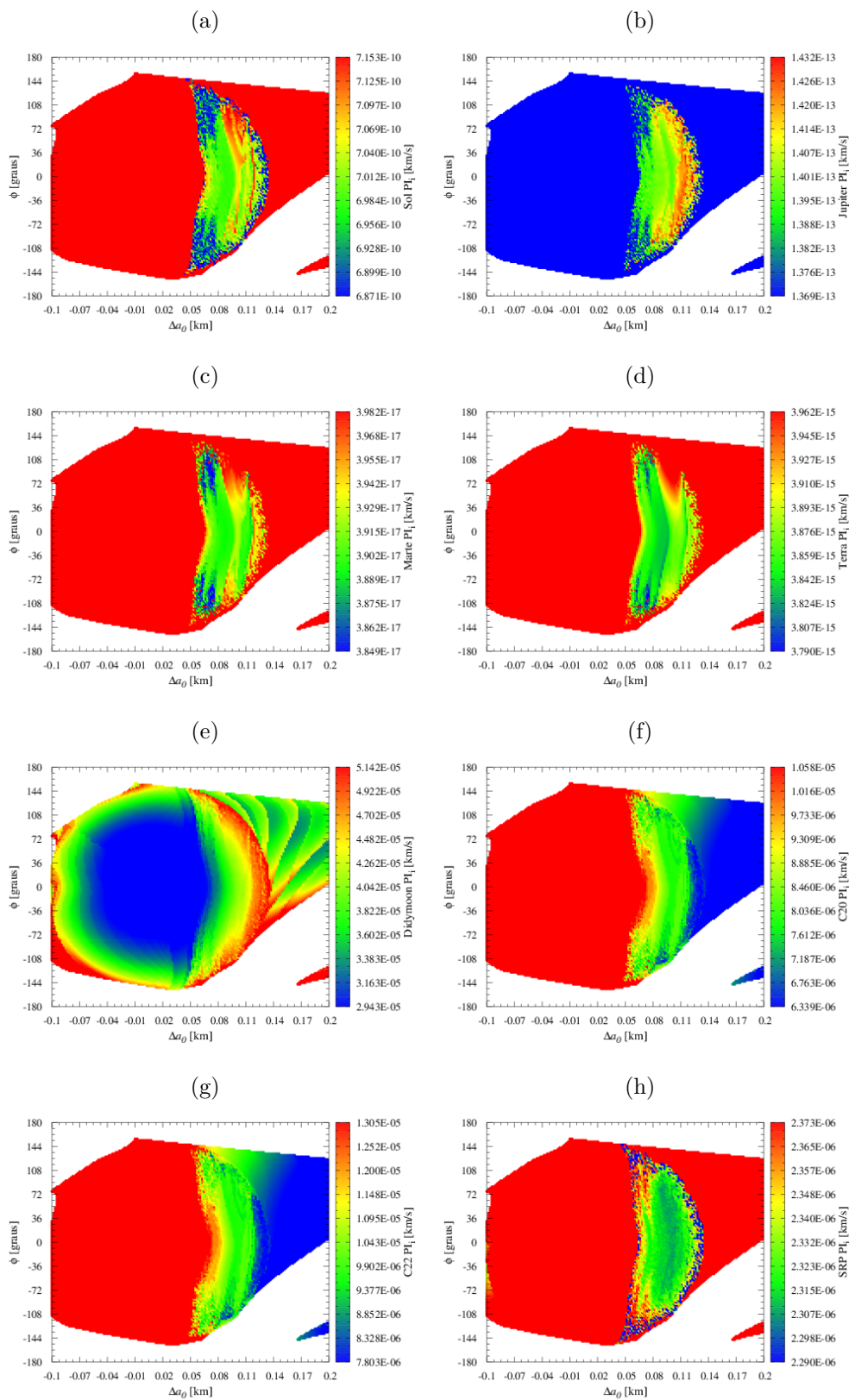


Figura G.8 - Resultados das integrais do tipo ii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \phi_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 0^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).

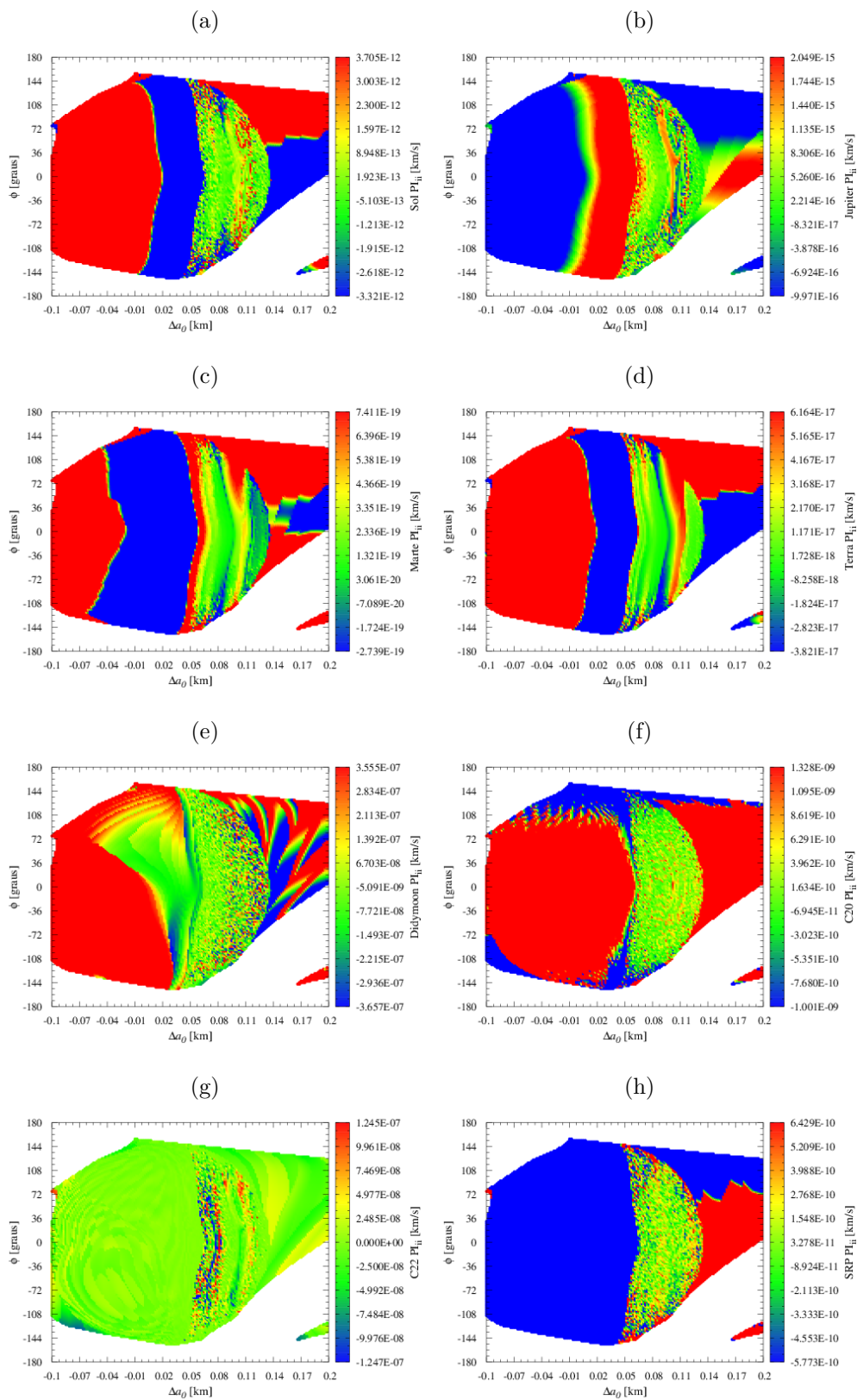


Figura G.9 - Resultados das integrais do tipo iii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \phi_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 0^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).

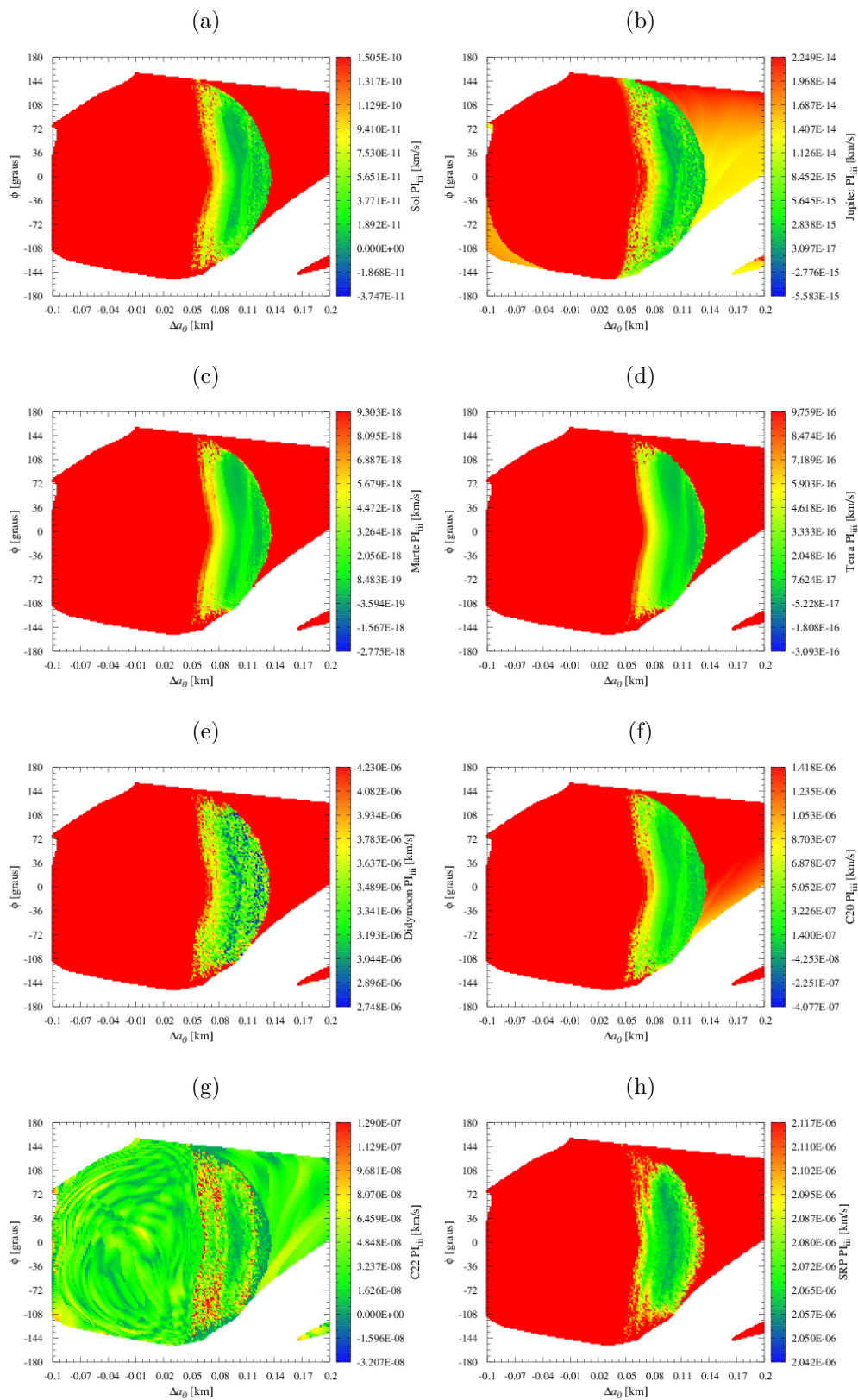


Figura G.10 - Resultados das integrais do tipo iv feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \lambda_0$ para $e_0 = 0,03$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 0^\circ$.

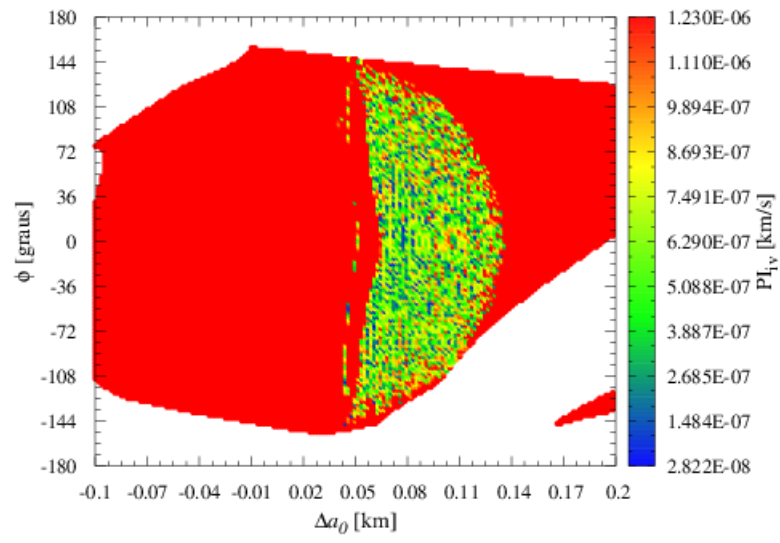


Figura G.11 - Resultados das integrais do tipo i feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \phi_0$ para $e_0 = 0,325$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 180^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).

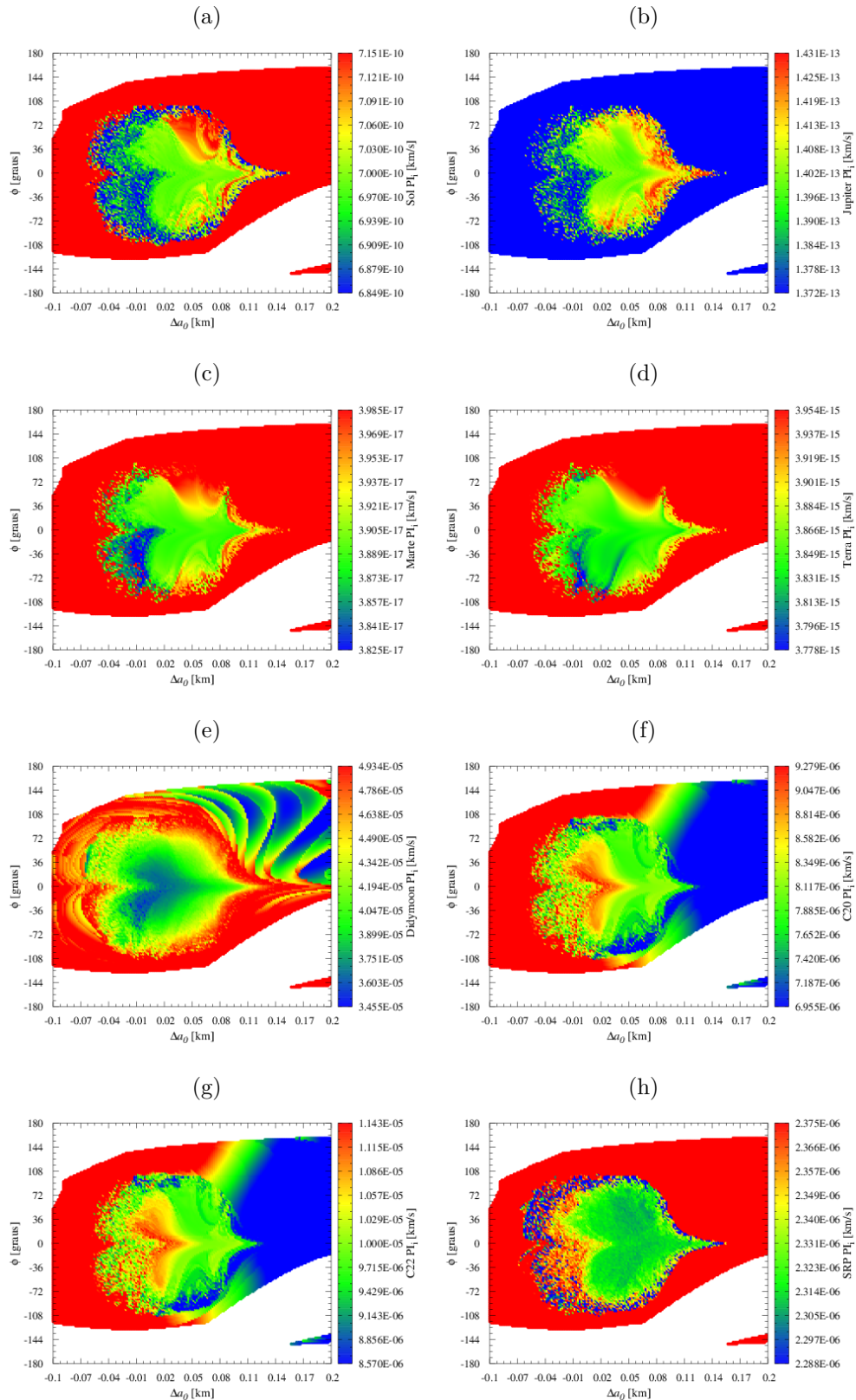


Figura G.12 - Resultados das integrais do tipo ii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \phi_0$ para $e_0 = 0,325$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 180^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).

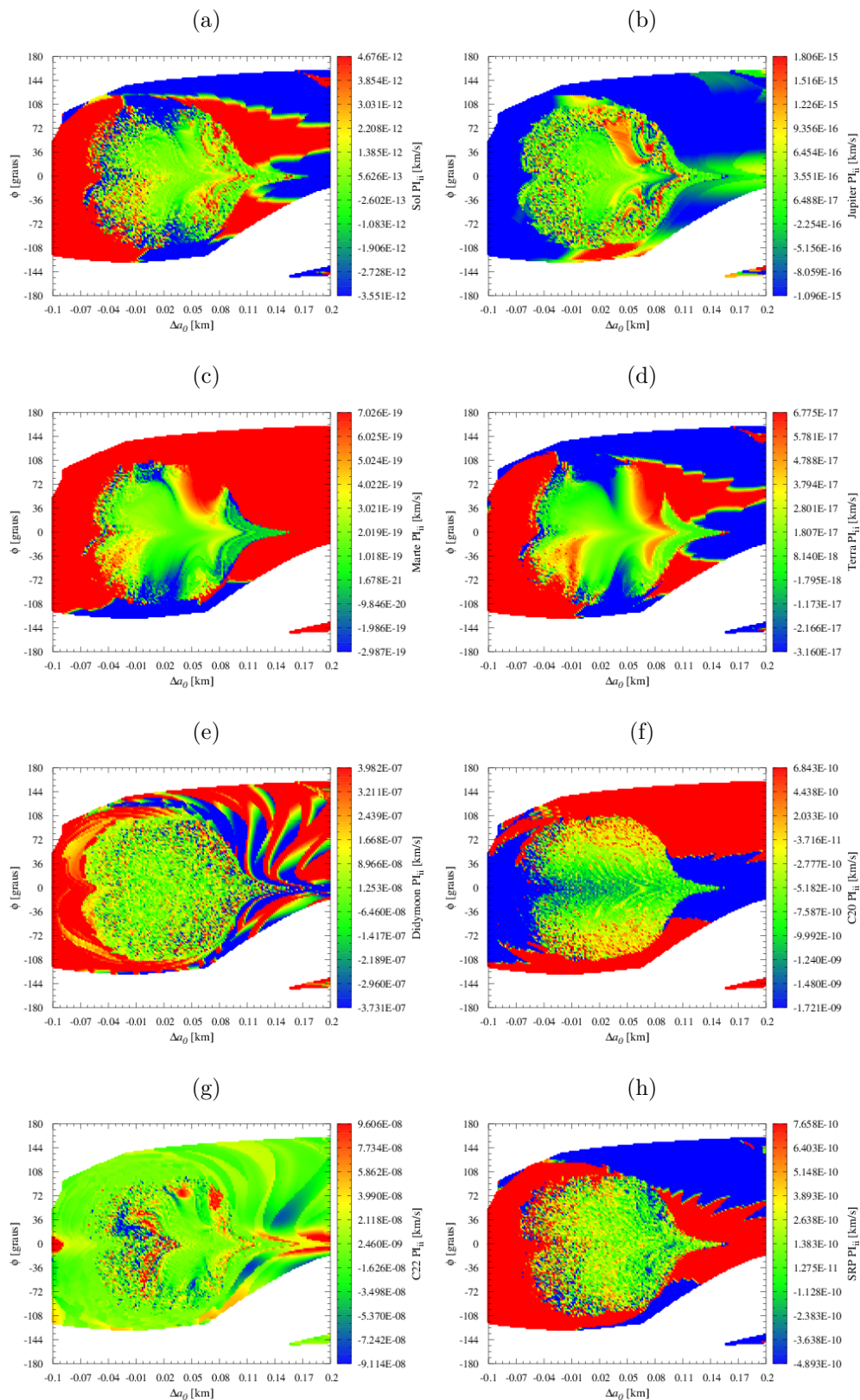


Figura G.13 - Resultados das integrais do tipo iii feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \phi_0$ para $e_0 = 0,325$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 180^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra. (e) Didymoon. (f) C_{20} . (g) C_{22} . (h) Pressão de radiação solar (SRP).

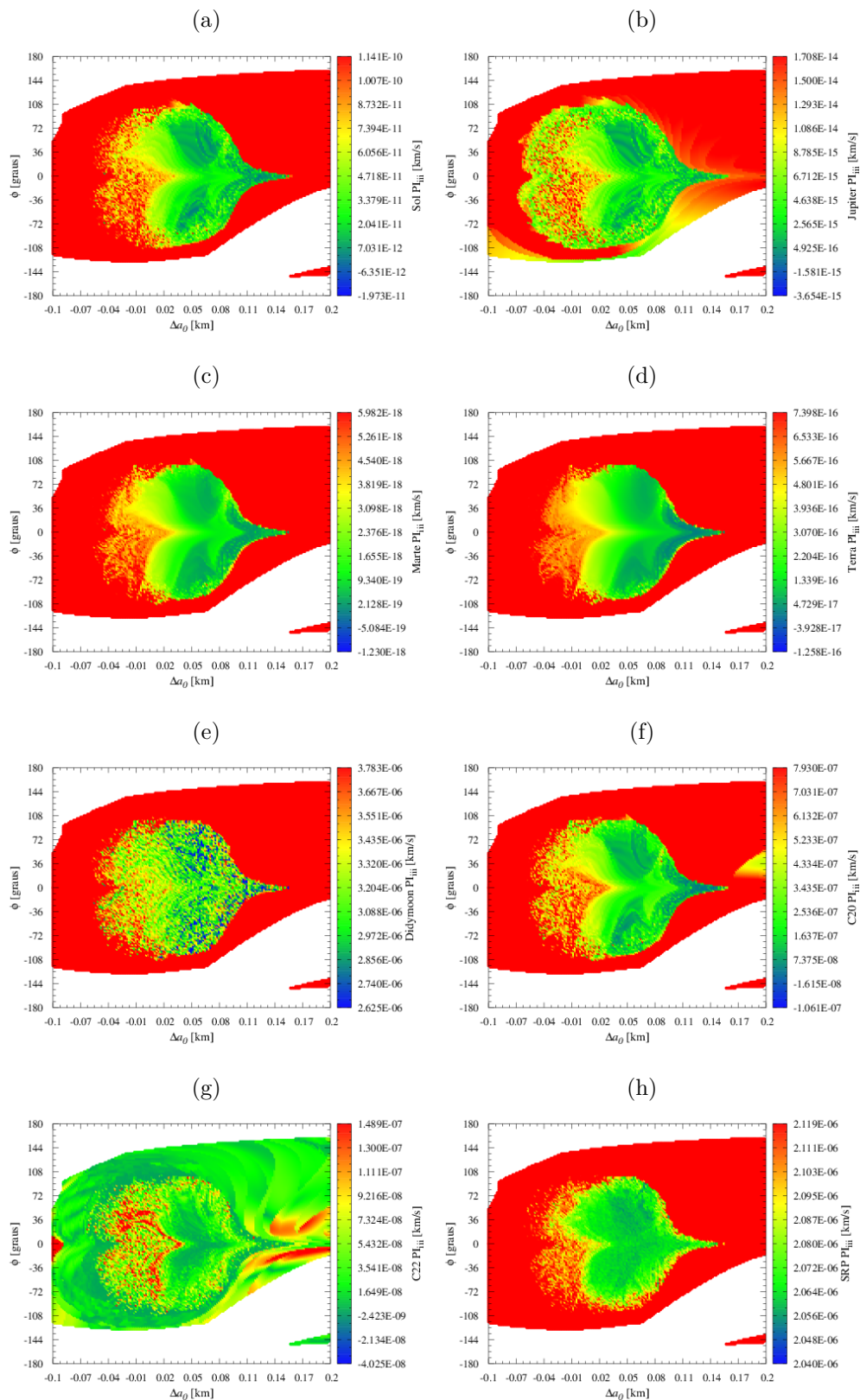


Figura G.14 - Resultados das integrais do tipo iv feitas para as simulações de Δa_0 e $\Delta \phi_0$ para $e_0 = 0,325$, $i_0 = 179,999^\circ$, $\omega = 180^\circ$.

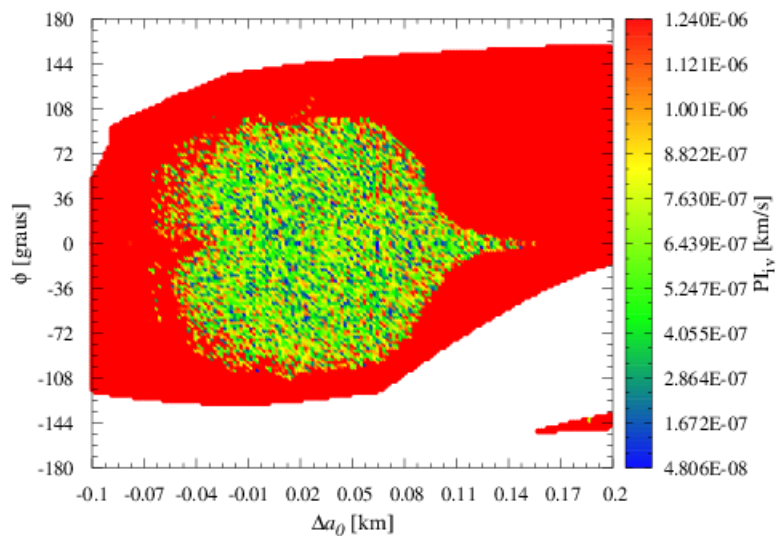


Figura G.15 - Resultados das integrais do tipo i feitas para as simulações de e e i para $a_0 = 1,176263432867km$ e $\Delta \lambda_0 = 60^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.

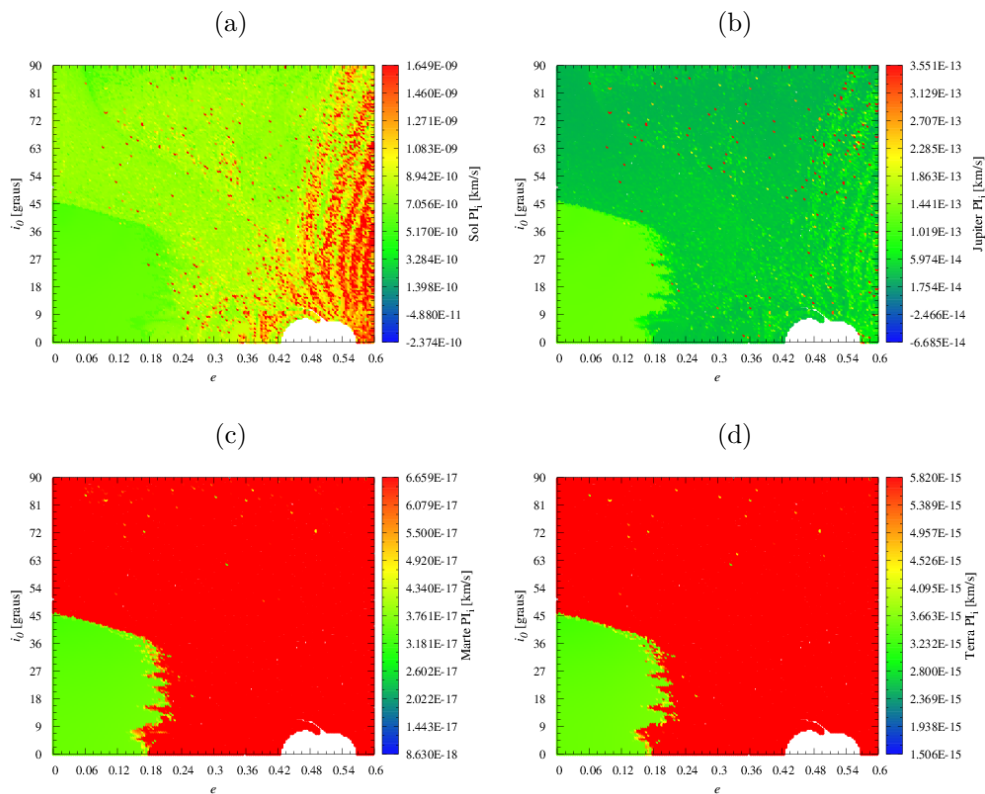


Figura G.16 - Resultados das integrais do tipo ii feitas para as simulações de e e i para $a_0 = 1,176263432867km$ e $\Delta\lambda_0 = 60^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.

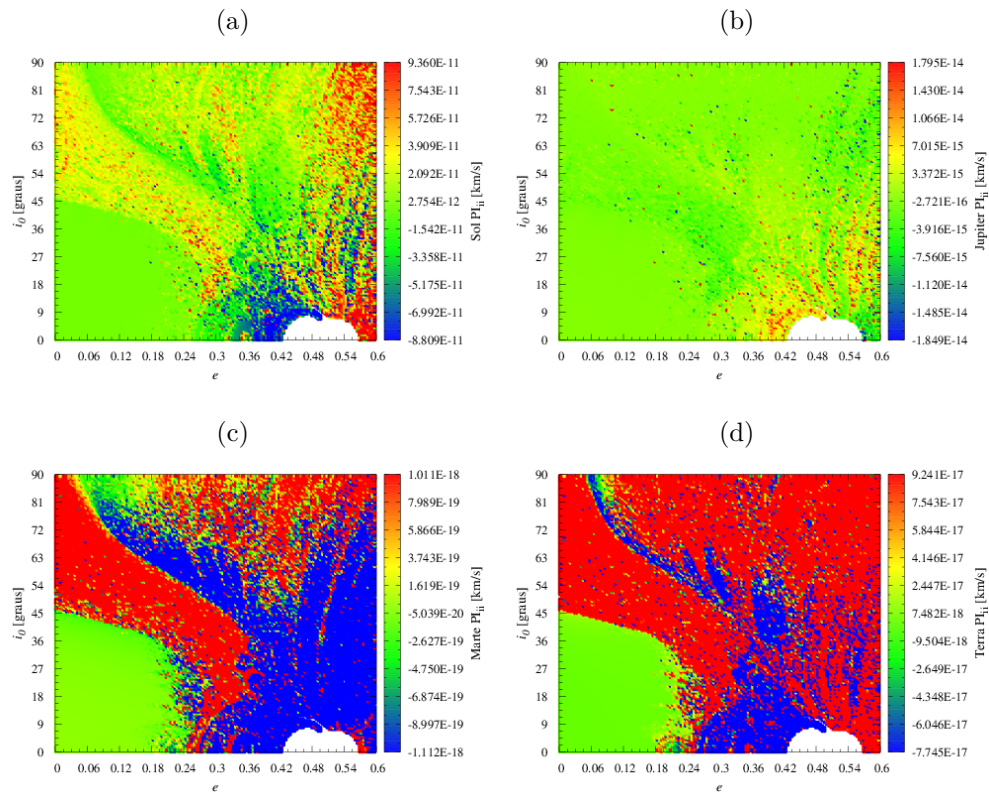


Figura G.17 - Resultados das integrais do tipo iii feitas para as simulações de e e i para $a_0 = 1,176263432867km$ e $\Delta\lambda_0 = 60^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.

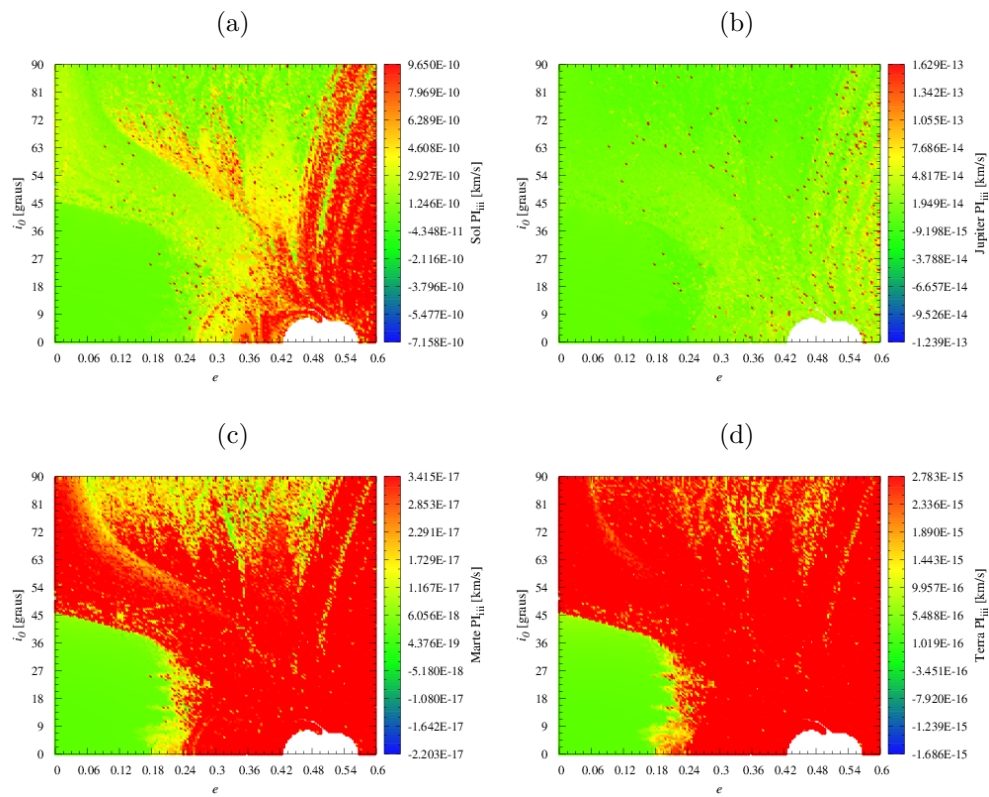


Figura G.18 - Resultados das integrais do tipo i feitas para as simulações de e e i para $a_0 = 1,176263432867km$ e $\Delta\phi_0 = 60^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.

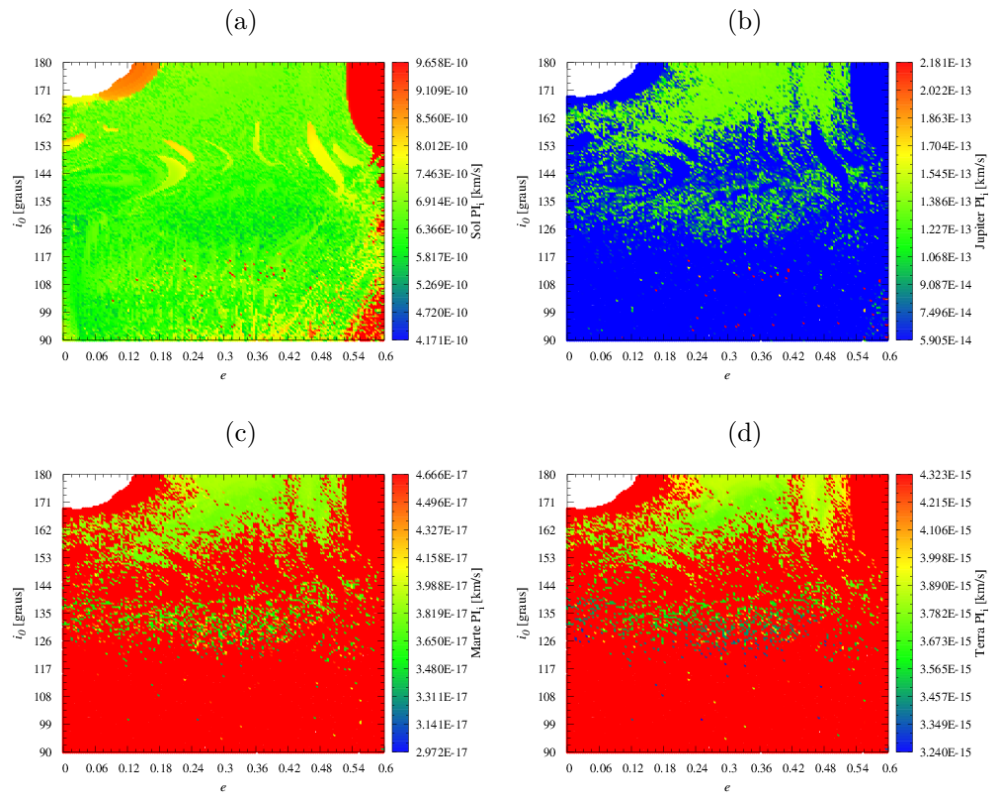


Figura G.19 - Resultados das integrais do tipo ii feitas para as simulações de e e i para $a_0 = 1,176263432867km$ e $\Delta\phi_0 = 60^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.

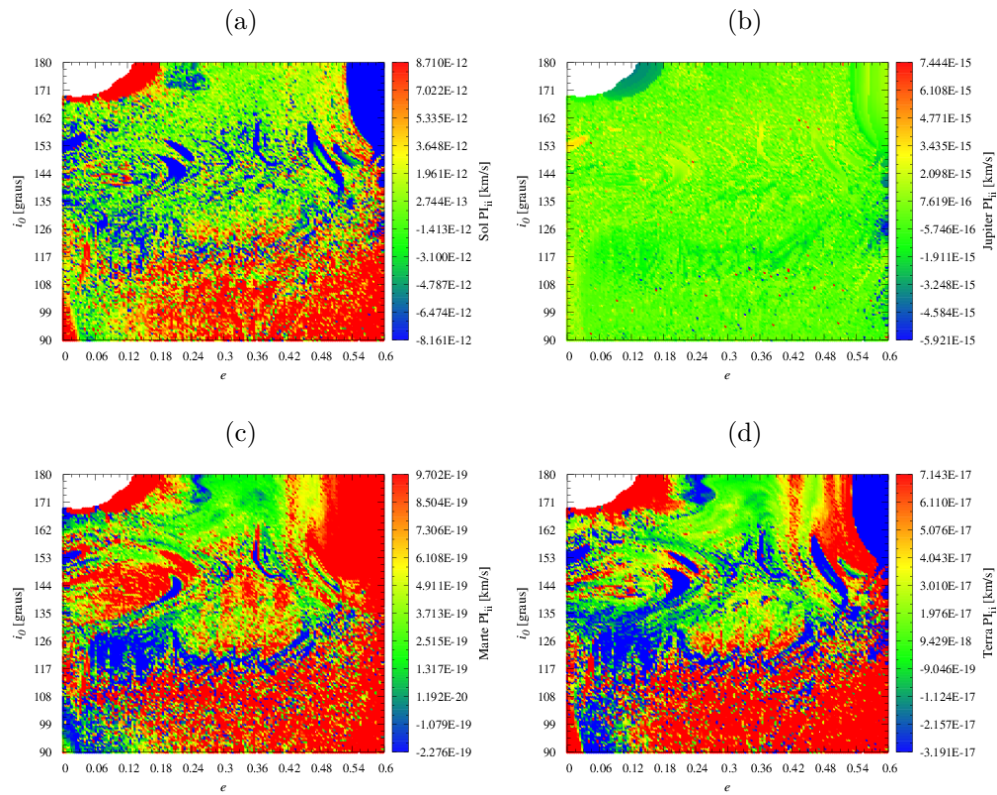


Figura G.20 - Resultados das integrais do tipo iii feitas para as simulações de e e i para $a_0 = 1,176263432867km$ e $\Delta\phi_0 = 60^\circ$. (a) Sol. (b) Júpiter. (c) Marte. (d) Terra.

